SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**
	NĂM HỌC 2024-2025
	Khóa ngày 26 tháng 8 năm 2024
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ NHẤT
SỐ BÁO DANH:...............	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 04 câu

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2025}}{2024} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

b) Tìm số M nhỏ nhất sao cho $\dfrac{x_1^{2024}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2024}}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^{2024}}{x_{n+1}} < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y) - 2yf(x) = f(f(x)) + f(-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có các góc nhọn. Lấy điểm D bên trong tam giác sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. Gọi A' là giao điểm của AD với BC; B' là giao điểm của BD với AC và C' là giao điểm của CD với AB.

a) Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

b) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C lên các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$ và $A'B'$. Chứng minh rằng $p(ABC).p(A_1B_1C_1) \geq \left[p(A'B'C')\right]^2$, trong đó $p(XYZ)$ là kí hiệu chu vi của tam giác XYZ.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho $3n$ điểm $A_1, A_2, \cdots, A_{3n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ nằm trên mặt phẳng sao cho $A_1A_2A_3$ là tam giác đều và $A_{3k+1}, A_{3k+2}, A_{3k+3}$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}$, với mọi $k = \overline{1, n-1}$. Tô màu các đỉnh $A_1, A_2, \cdots, A_{3n}$ bởi một trong hai màu xanh và đỏ.

a) Khi $3n = 2025$, chứng minh rằng luôn tìm được 6328 hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.

b) Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu các đỉnh $A_1, A_2, \cdots, A_{3n}$ bởi một trong hai màu xanh và đỏ, luôn tìm được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.

-------------**HẾT**------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN**
	DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
<u>**ĐỀ CHÍNH THỨC**</u>	**NĂM HỌC 2024-2025**
	Khóa ngày 26 tháng 8 năm 2024
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ HAI
SỐ BÁO DANH:...............	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 03 câu

Câu 1 (6,0 điểm). Cho đa thức $P(x)=x^{2024}+a_1x^{2023}+\cdots+a_{2023}x+a_{2024}$, với $a_1, a_2,\ldots,a_{2024}\in\mathbb{R}$. Biết $a_{2022}=0$, $a_{2024}\neq 0$, $\dfrac{a_{2023}}{a_{2024}}>2025$ và đa thức $P(x)$ có 2024 nghiệm thực.

Ký hiệu $P_n(x)=\underbrace{P(P(\cdots(P(x))\cdots))}_{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n, đa thức $P_n(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.

Câu 2 (7,0 điểm). Xét tất cả các số nguyên k thỏa mãn $2024 \mid 11^n+k.195^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|k|$.

Câu 3 (7,0 điểm). Cho B,C là hai điểm cố định trên đường tròn (O) và A là điểm di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và A' là điểm đối xứng với A qua tâm O. Một đường thẳng đi qua H cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F sao cho $AE=AF$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai $M\neq A$.

a) Chứng minh rằng H,M,A' thẳng hàng.

b) Gọi I,J (khác M) lần lượt là các giao điểm của ME,MF với (O); D là điểm chính giữa cung $\overparen{BC}$ không chứa A; P là giao điểm của DI với AB và Q là giao điểm của DJ với AC. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

-------------**HẾT**-----------