SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ**
HÀ NỘI	**DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT**
	NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi thứ nhất: 11/10/2024
Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1 *(5,0 điểm)*

Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+\sqrt{4u_n^2+3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh dãy số $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\geq 2}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 *(5,0 điểm)*

Tìm tất cả cặp số nguyên tố (p,q) sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $n^{|p-q|}+1$ chia hết cho pq.

Bài 3 *(6,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB < AC)$ có đường cao AD. Gọi E là một điểm trên cạnh AB (E khác A và B). Đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại điểm M. Gọi X là một điểm thay đổi trên tia đối của tia ED và Y là điểm đối xứng với X qua đường thẳng AD.

a) Chứng minh ba đường thẳng AC, BM và DY cùng đi qua một điểm.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDX và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDY. Chứng minh P nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4 *(4,0 điểm)*

Cho tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên có 100 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc tập hợp A, sao cho trong mỗi số thuộc S hai chữ số kề nhau bất kì là hai số tự nhiên liên tiếp. Tìm số dư khi chia số phần tử của S cho 4.

--------- **Hết** ---------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh: ……………………………………………Số báo danh: ……………………………………

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN** Ngày thi thứ hai: 12/10/2024 Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 5 (*6,0 điểm*)

Xét hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^4-y-4f(y)\right)=\left(f(x)\right)^4-5y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0\Leftrightarrow x=0.$

b) Chứng minh $f(x)=x$ với mọi số thực x.

Bài 6 (*7,0 điểm*)

Cho $A(x)$ là một đa thức với hệ số thực. Chứng minh tồn tại hai đa thức $B(x)$ và $C(x)$ với hệ số thực sao cho $B\left(C(x)\right)+C\left(B(x)\right)=A(x)$.

Bài 7 (*7,0 điểm*)

Cho số nguyên $n>5$ và tập hợp $S=\left\{2n^2-n+1,2n^2-n+2,\dots,2n^2+2n\right\}$ gồm $3n$ số nguyên liên tiếp.

Chứng minh với hai số nguyên phân biệt a và b bất kì thuộc khoảng $(n;2n)$, tồn tại số nguyên dương k và các phần tử $c_1,c_2,\dots,c_k$ (không nhất thiết phân biệt) của S sao cho số $\dfrac{c_1c_2\dots c_k}{ab}$ là bình phương của một số nguyên.

--------- **Hết** ---------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh: ....Số báo danh: ....

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HÀ NỘI DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT

Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 1 (5.0 *điểm*). Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+\sqrt{4u_n^2+3}}$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng dãy số $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\geq 2}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$. Từ giả thiết, ta có $v_1 = 2$ và $v_{n+1} = 2v_n + \sqrt{3v_n^2+4}$ với mọi n nguyên dương. Suy ra $(v_{n+1} - 2v_n)^2 = 3v_n^2 + 4$, hay

$$v_{n+1}^2 - 4v_{n+1}v_n + v_n^2 = 4, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Trong đẳng thức trên, thay n bởi $n+1$ rồi đối chiếu, ta được

$$v_{n+2}^2 - 4v_{n+2}v_{n+1} + v_{n+1}^2 = v_{n+1}^2 - 4v_{n+1}v_n + v_n^2,$$

hay

$$(v_{n+2} - v_n)(v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Mặt khác, dễ thấy dãy (v_n) tăng ngặt nên $v_{n+2} - v_n > 0$, và vì thế ta có

$$v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Giải phương trình sai phân tuyến tính cấp hai, ta tìm được công thức tổng quát của v_n là

$$v_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Do đó $u_n = \frac{3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}$ với mọi n nguyên dương. Vì thế

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}}.$$

Do $\lim \sqrt[n]{3} = 1$ và $\lim \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n} = 1$ nên $\lim \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. □

Bình luận. Ngoài cách làm trên, ta có thể chứng minh trực tiếp $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt{3}$, sau đó sử dụng định lý Stolz

$$\lim \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \lim \frac{\ln u_n}{n} = \lim \frac{\ln u_{n+1} - \ln u_n}{(n+1) - n} = \lim \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right),$$

cũng thu được kết quả $\lim \sqrt[n]{u_n} = 2 - \sqrt{3}$.

Bài 2 (5.0 *điểm*). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $n^{|p-q|} + 1$ chia hết cho pq.

Lời giải. Hiển nhiên $p \neq q$. Không mất tính tổng quát, giả sử $p > q$ (nói riêng, ta có p là số nguyên tố lẻ). Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $q = 2$. Khi đó, vì $(2p-1)^{p-2} + 1 \equiv 0 \pmod{2p}$ nên số $n = 2p - 1$ thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: *q lẻ.* Đặt $p - q = 2k$ với k nguyên dương, và $a = n^k$. Từ giả thiết, ta có $a^2 + 1$ chia hết cho pq. Suy ra $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$.

Đặt $p = 2^a x + 1$ và $q = 2^b y + 1$ với a, b, x, y là các số nguyên dương, $a \geq 2$, $b \geq 2$, x lẻ và y lẻ. Xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 2.1:** $a \geq b$. Ta có $n^{p-q} \equiv -1 \pmod q$ nên $n^{2(p-q)} \equiv 1 \pmod q$. Ngoài ra, theo định lý Fermat nhỏ, ta cũng có $n^{q-1} \equiv 1 \pmod q$.

  Bây giờ, gọi t là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $n^t \equiv 1 \pmod q$. Thế thì, từ kết quả trên, ta có $\gcd\big(2(p-q),\ q-1\big) = \gcd\big(2(p-1),\ q-1\big) = 2^b \gcd(x,\ y)$ chia hết cho t. Từ đó $t = 2^c z$ với c tự nhiên, $c \leq b$, z nguyên dương và z là ước của $\gcd(x,\ y)$. Như vậy $p - q = 2^a x - 2^b y = 2^b(2^{a-b}x - y)$ chia hết cho $2^c z = t$. Đặt $p - q = lt$ với l nguyên dương, ta có $-1 \equiv n^{p-q} = (n^t)^l \equiv 1 \pmod q$. Suy ra $2 \equiv 0 \pmod q$, mâu thuẫn.

- **Trường hợp 2.2:** $a < b$. Lập luận tương tự với modulo p, ta cũng thu được mâu thuẫn.

Vậy, các cặp số (p, q) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(r,\ 2)$ và $(2,\ r)$ với r là một số nguyên tố lẻ nào đó. □

Bài 3 (6.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$, có đường cao AD. Gọi E là một điểm trên cạnh AB (E khác A và B). Đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại điểm M. Gọi X là một điểm thay đổi trên tia đối của tia ED và Y là điểm đối xứng với điểm X qua đường thẳng AD.

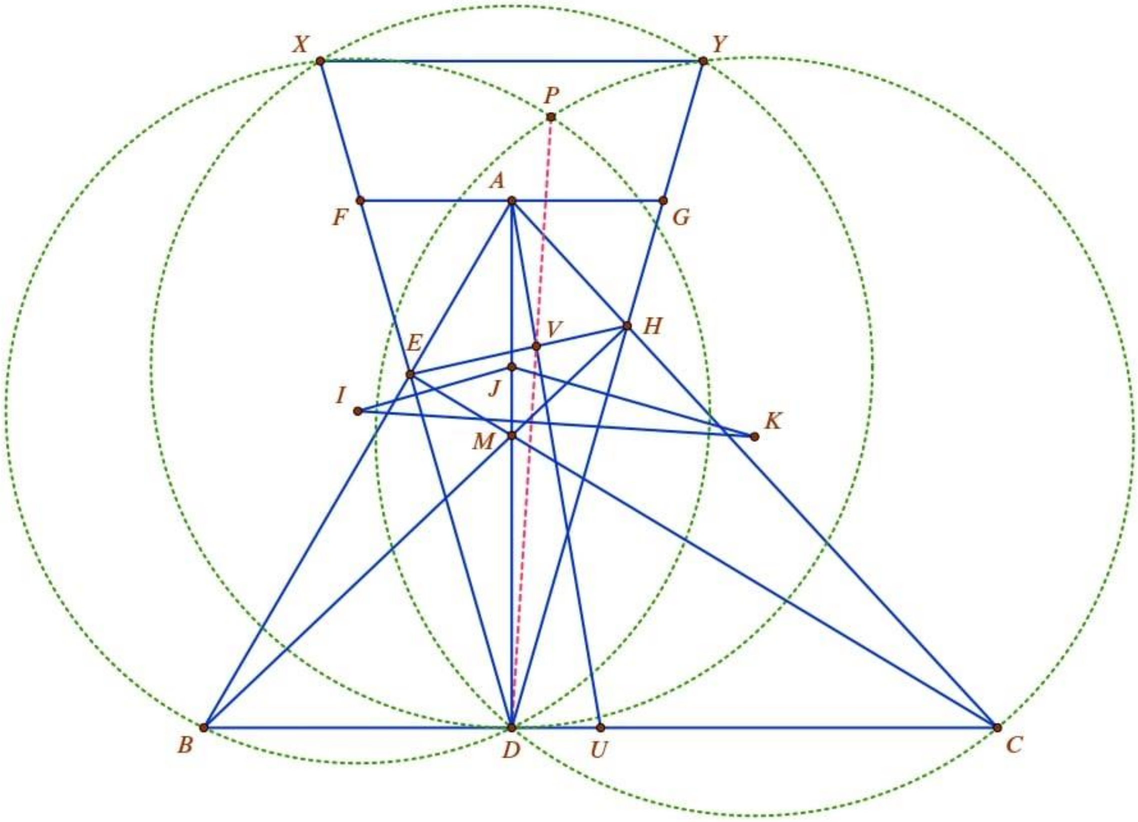
a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BM và DY cùng đi qua một điểm.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDX và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDY. Chứng minh rằng điểm P luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải. a) Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng DY và AC. Qua điểm A, kẻ đường thẳng song song với đường thẳng XY, cắt các đường thẳng DX và DY lần lượt tại F, G. Dễ thấy $AF = AG$. Sử dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{HA}{HC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{EB}{EA} = \frac{AG}{DC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{DB}{AF} = 1.$$

Từ đó, theo định lý Ceva đảo, ta suy ra ba đường thẳng AD, BH, CF đồng quy tại một điểm. Rõ ràng điểm đồng quy là M. Vì thế, ba đường thẳng AC, BM, DY đồng quy tại điểm H.



b) Không mất tính tổng quát, ta xét thế hình như hình vẽ. Gọi I, J, K tương ứng là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDX, XDY và CDY. Gọi U là trung điểm của đoạn thẳng BC; và V là giao điểm của các đường thẳng AU, EH. Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $AE = yc$, $AH = zb$ và $\angle EDH = 2x$.

Dễ thấy $\frac{VH}{VE} = \frac{S_{AHU}}{S_{AEU}} = \frac{\frac{AH}{AC} S_{ACU}}{\frac{AE}{AB} S_{ABU}} = \frac{z}{y}$, từ đó

$$\overrightarrow{DV} = \frac{VH}{EH}\overrightarrow{DE} + \frac{EV}{EH}\overrightarrow{DH} = \frac{z}{y+z}\overrightarrow{DE} + \frac{y}{y+z}\overrightarrow{DH}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(y+z) \cdot \overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{IK} &= \left(z \cdot \overrightarrow{DE} + y \cdot \overrightarrow{DH}\right)\left(\overrightarrow{JK} - \overrightarrow{JI}\right) \\ &= z \cdot \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{JK} - z \cdot \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{JI} + y \cdot \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{JK} - y \cdot \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{JI} \\ &= z \cdot \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{JK} - y \cdot \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{JI}.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{JK}\right) = \left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{DH}\right) = 90^\circ + 2x$$

và

$$JK = \frac{\frac{DC}{2}}{\sin \angle DJK} = \frac{\frac{DC}{2}}{\cos x} = \frac{DC}{2\cos x}, \quad JI = \frac{\frac{DB}{2}}{\sin \angle IJD} = \frac{\frac{DB}{2}}{\cos x} = \frac{DB}{2\cos x}.$$

Ta cũng có chú ý rằng

$$\begin{aligned} DE &= \frac{BE}{\sin \angle BDE} \cdot \sin \angle EBD = \frac{(1-y)c}{\sin(90^\circ - x)} \cdot \frac{AD}{c} = \frac{(1-y)AD}{\cos x}, \\ DH &= \frac{CH}{\sin \angle CDH} \cdot \sin \angle DCH = \frac{(1-z)b}{\sin(90^\circ - x)} \cdot \frac{AD}{b} = \frac{(1-z)AD}{\cos x}. \end{aligned}$$

Từ các kết quả trên, ta tính được

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{JK} &= DE \cdot JK \cdot \cos(90^\circ + 2x) = -DE \cdot \frac{DC}{2\cos x} \cdot \sin x = -DE \cdot DC \cdot \sin x \\ &= -\frac{(1-y)AD}{\cos x} \cdot DC \cdot \sin x = -(1-y) \cdot DC \cdot AD \cdot \tan x, \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{JI} &= DH \cdot JI \cdot \cos(90^\circ + 2x) = -DH \cdot \frac{DB}{2\cos x} \cdot \sin 2x = -DH \cdot DB \cdot \sin x \\ &= -\frac{(1-z)AD}{\cos x} \cdot DB \cdot \sin x = -(1-z) \cdot DB \cdot AD \cdot \tan x. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} (y+z) \cdot \overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{IK} &= -z \cdot (1-y) \cdot DC \cdot AD \cdot \tan x + y \cdot (1-z) \cdot DB \cdot AD \cdot \tan x \\ &= AD \cdot \tan x \cdot \big[y(1-z)DB - z(1-y)DC\big]. \end{aligned}$$

Sử dụng định lý Ceva, ta có $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{HC}{HA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1$, hay $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{1-z}{z} \cdot \frac{y}{1-y} = 1$. Từ đó suy ra $z(1-y)DC = y(1-z)DB$. Kết hợp với kết quả trên, ta có $(y+z) \cdot \overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$. Suy ra $DV \perp IK$. Mà $DP \perp IK$ nên ba điểm D, V, P thẳng hàng. Mặt khác, dễ thấy DV là đường thẳng cố định nên điểm P luôn thuộc đường thẳng DV cố định. □

Bài 4 (4.0 *điểm*). Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 100 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc tập A, sao cho trong mỗi số thuộc S, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp. Tìm số dư khi chia số phần tử của S cho 4.

Lời giải. Với mỗi n nguyên dương, gọi:

- C_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, sao cho trong mỗi số thuộc C_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;
- R_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 1, sao cho trong mỗi số thuộc R_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;

- D_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 2, sao cho trong mỗi số thuộc D_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;

- T_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 3, sao cho trong mỗi số thuộc T_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;

- K_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 4, sao cho trong mỗi số thuộc K_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;

- A_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 5, sao cho trong mỗi số thuộc A_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp;

- B_n là tập hợp tất cả các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc tập A, trong đó chữ số đầu tiên là 6 sao cho trong mỗi số thuộc B_n, hai chữ số kề nhau bất kỳ là hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có $C_n = R_n + D_n + T_n + K_n + A_n + B_n$. Đặt $c_n = |C_n|$, $r_n = |R_n|$, $d_n = |D_n|$, $t_n = |T_n|$, $k_n = |K_n|$, $a_n = |A_n|$ và $b_n = |B_n|$. Thế thì $c_n = r_n + d_n + t_n + k_n + a_n + b_n$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số dư khi chia c_{100} cho 4.

Dễ thấy $r_1 = d_1 = t_1 = k_1 = a_1 = b_1 = 1$, $r_{n+1} = d_n$, $d_{n+1} = r_n + t_n$, $t_{n+1} = d_n + k_n$, $k_{n+1} = t_n + a_n$, $a_{n+1} = k_n + b_n$ và $b_{n+1} = a_n$. Ta tính được $c_1 = 6$, $c_2 = 10$ và $c_3 = 18$. Ngoài ra, ta cũng có

$$\begin{aligned}
c_{n+3} &= r_{n+3}+d_{n+3}+t_{n+3}+k_{n+3}+a_{n+3}+b_{n+3} = r_{n+2}+2(d_{n+2}+t_{n+2}+k_{n+2}+a_{n+2})+b_{n+2}\\
&= c_{n+2}+d_{n+2}+t_{n+2}+k_{n+2}+a_{n+2} = c_{n+2}+r_{n+1}+d_{n+1}+2t_{n+1}+2k_{n+1}+a_{n+1}+b_{n+1}\\
&= c_{n+2}+2(r_{n+1}+d_{n+1}+t_{n+1}+k_{n+1}+a_{n+1}+b_{n+1})-(r_{n+1}+d_{n+1}+a_{n+1}+b_{n+1})\\
&= c_{n+2}+2c_{n+1}-(r_{n+1}+d_{n+1}+a_{n+1}+b_{n+1}) = c_{n+2}+2c_{n+1}-(d_n+r_n+t_n+k_n+b_n+a_n)\\
&= c_{n+2}+2c_{n+1}-c_n.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có $c_1 = 6$, $c_2 = 10$, $c_3 = 18$ và $c_{n+3} = c_{n+2} + 2c_{n+1} - c_n$ với mọi n nguyên dương. Từ đây, bằng tính toán trực tiếp, ta tìm được dãy số dư khi chia các số hạng của dãy (c_n) cho 4 tuần hoàn theo chu kỳ 7 : 2, 2, 2, 0, 2, 0, 0.

Vì 100 chia 7 dư 2 nên từ kết quả trên, ta thấy c_{100} chia 4 dư 2. Vậy, số các phần tử của tập S chia 4 dư 2. $\square$

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HÀ NỘI DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT

Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 5 (6.0 *điểm*)**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(x^4-y-4f(y)\big)=\big(f(x)\big)^4-5y,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Vì $\big(f(x)\big)^4-5y$ là một hàm bậc nhất theo biến y, nó có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Do đó, từ (1), ta suy ra f toàn ánh. Vì thế, tồn tại số thực a sao cho $f(a)=0$.

Thay x bởi $-x$ vào phương trình (1) rồi đối chiếu kết quả thu được với chính phương trình (1), ta được $\big(f(x)\big)^4=\big(f(-x)\big)^4$ với mọi số thực x. Nói riêng, bằng cách thay $x=-a$, ta được $f(-a)=0$. Bây giờ, thay $x=0$ và $y=a$ vào phương trình (1), ta được

$$\big(f(0)\big)^4-5a=0. \tag{2}$$

Thay $x=0$ và $y=-a$ vào phương trình (1), ta cũng có

$$\big(f(0)\big)^4+5a=0. \tag{3}$$

Đối chiếu hai kết quả (2) và (3), ta được ngay $a=0$. Kết quả này cũng chứng tỏ $f(x)=0$ khi và chỉ khi $x=0$.

Tiếp theo, thay $y=\frac{(f(x))^4}{5}$ vào phương trình (1) và sử dụng kết quả trên, ta được

$$\frac{\big(f(x)\big)^4}{5}+4f\left(\frac{\big(f(x)\big)^4}{5}\right)=x^4,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay y bởi $\frac{(f(y))^4}{5}$ và sử dụng kết quả vừa thu được ở trên, ta được

$$f(x^4-y^4)=\big(f(x)\big)^4-\big(f(y)\big)^4,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Thực hiện các phép thay $y=0$ và $x=0$ vào phương trình (1), ta lần lượt thu được $f(x^4)=\big(f(x)\big)^4$ và $f(-y)^4=-\big(f(y)\big)^4$ với mọi số thực $x,\ y$. Từ đây, dễ thấy $f(x)\ge 0$ với mọi số thực $x\ge 0$ và $f(x)=-f(-x)$ với mọi số thực x.

Phương trình (4) có thể được viết lại thành $f(x^4-y^4)=f(x^4)-f(y^4)$, từ đó

$$f(x-y)=f(x)-f(y),\quad \forall x,\ y\ge 0.$$

Thay x bởi $x+y$ vào phương trình trên, ta được $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x,\ y \geq 0$. Như vậy f là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Mà $f(x) \geq 0$ với mọi số thực $x \geq 0$ nên tồn tại hằng số $k \geq 0$ sao cho $f(x) = kx$ với mọi số thực $x \geq 0$. Đến đây, với chú ý f là hàm lẻ, ta suy ra $f(x) = kx$ với mọi số thực x. Thay trở lại phương trình (1), ta dễ dàng tìm được $k = 1$. Vậy, có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x$.DD □

Bài 6 (7.0 *điểm*). Cho $A(x)$ là một đa thức hệ số thực. Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức $B(x)$ và $C(x)$ với hệ số thực sao cho $B\big(C(x)\big) + C\big(B(x)\big) = A(x)$ với mọi số thực x.

Lời giải. Xét $B(x) = x$ và $C(x) = \frac{A(x)}{2}$, ta có ngay $B\big(C(x)\big) + C\big(B(x)\big) = A(x)$. □

Bài 7 (7.0 *điểm*). Cho số nguyên $n > 5$ và tập hợp

$$S = \{2n^2 - n + 1,\ 2n^2 - n + 2,\ \ldots,\ 2n^2 + 2n\}$$

gồm $3n$ số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng, với hai số nguyên phân biệt bất kỳ a và b thuộc khoảng $(n,\ 2n)$, tồn tại số nguyên dương k và các phần tử $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (không nhất thiết phân biệt) của tập S sao cho $\frac{c_1c_2\cdots c_k}{ab}$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải. Xét hai số nguyên dương a, b với $n < a < b < 2n$. Giả sử không tồn tại số nguyên dương k và các phần tử $c_1, c_2, \ldots, c_k$ của tập S thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $2n^2 - n + 1 \leq ab \leq 2n^2 + 2n$. Trong trường hợp này, ta có $ab \in S$. Chọn $k = 1$ và $c_1 = ab$ thì $\frac{c_1}{ab} = 1$ là số chính phương, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $ab < 2n^2 - n + 1$. Chú ý rằng $\frac{2n^2+2n}{a} - \frac{2n^2-n+1}{a} = \frac{3n-1}{a} \geq \frac{3n-1}{2n-1} > 1$ nên tồn tại số nguyên x_1 nhỏ nhất sao cho $\frac{2n^2-n+1}{a} \leq x_1 < \frac{2n^2+2n}{a}$, hay $2n^2 - n + 1 \leq ax_1 < 2n^2 + 2n$, tức $c_1 = ax_1 \in S$. Ngoài ra, vì $x_1 \geq \frac{2n^2-n+1}{a} \geq \frac{2n^2-n+1}{2n-1} > n$ và $x_1 < \frac{2n^2+2n}{a} \leq \frac{2n^2+2n}{n+1} = 2n$ nên $n < x_1 < 2n$. Chứng minh tương tự, tồn tại số nguyên y_1 nhỏ nhất với $n < y_1 < 2n$ sao cho $c_2 = by_1 \in S$.

Chú ý rằng $a(x_1 - 1) \notin S$, do cách chọn của x_1, vì thế $a(x_1 - 1) \leq 2n^2 - n$, suy ra

$$\begin{aligned}(a+1)x_1 &\leq 2n^2 - n + a + x_1 < 2n^2 - n + a + \frac{2n^2 + 2n}{a} \\ &= 2n^2 + 2n + 1 + \frac{(a-n-1)(a-2n)}{a} \leq 2n^2 + 2n + 1.\end{aligned}$$

Mặt khác, hiển nhiên $(a+1)x_1 > ax_1 \geq 2n^2 - n + 1$ nên $2n^2 - n + 1 < (a+1)x_1 \leq 2n^2 + 2n$, tức $c_3 = (a+1)x_1 \in S$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $c_4 = (b+1)y_1 \in S$.

Ta lại có chú ý rằng

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1) = ab + 1 + a + b &\leq ab + 1 + \frac{ab + (n+1)^2}{n+1} \\ &\leq 2n^2 - n + 1 + \frac{2n^2 - n + (n+1)^2}{n+1} \\ &= 2n^2 + 2n + 1 - \frac{2n-1}{n+1} < 2n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

nên $(a+1)(b+1) \le 2n^2+2n$. Nếu $(a+1)(b+1) \ge 2n^2-n+1$, thì ta chỉ việc chọn $c_5 = (a+1)(b+1)$, sẽ có $\frac{c_1c_2c_3c_4c_5}{ab} = x_1^2y_1^2(a+1)^2(b+1)^2$ là số chính phương, mâu thuẫn. Do đó $(a+1)(b+1) < 2n^2-n+1$.

Lúc này, với chú ý $\frac{c_1c_2c_3c_4}{ab} = \frac{x_1^2y_1^2(a+1)^2(b+1)^2}{(a+1)(b+1)}$, ta có thể đưa về xét cặp số $(a+1,\ b+1)$ và lại lập luận tương tự như các bước ở trên, ta lần lượt chứng minh được $(a+2)(b+2) < 2n^2-n+1$, $(a+3)(b+3) < 2n^2-n+1, \ldots$ Đến một lúc nào đó, ta sẽ được

$$(a+2n-1-b)(b+2n-1-b) < 2n^2-n+1.$$

Suy ra $b-a > 2n-1-\frac{2n^2-n+1}{2n-1} = n-1-\frac{1}{2n-1} > n-2$, mâu thuẫn vì

$$b-a \le (2n-1)-(n-1) = n-2.$$

Trường hợp 3: $ab > 2n^2+2n$. Chú ý rằng $\frac{2n^2+2n}{a} - \frac{2n^2-n+1}{a} = \frac{3n-1}{a} \ge \frac{3n-1}{2n-1} > 1$ nên tồn tại số nguyên x_2 lớn nhất sao cho $\frac{2n^2-n+1}{a} < x_2 \le \frac{2n^2+2n}{a}$, hay $2n^2-n+1 < ax_2 \le 2n^2+2n$, tức $c_1 = ax_2 \in S$. Ngoài ra, vì $x_2 > \frac{2n^2-n+1}{a} \ge \frac{2n^2-n+1}{2n-1} > n$ và $x_2 \le \frac{2n^2+2n}{a} \le \frac{2n^2+2n}{n+1} = 2n$ nên $n < x_2 \le 2n$. Nếu $x_2 = 2n$, thì ta phải có $a = n+1$, mà $ab > 2n^2+2n$ nên điều này sẽ dẫn đến $b > 2n$, mâu thuẫn. Do đó $n < x_2 < 2n$. Chứng minh tương tự, tồn tại số nguyên y_2 lớn nhất với $n < y_2 < 2n$ sao cho $c_2 = by_2 \in S$.

Chú ý rằng $a(x_2+1) \notin S$, do cách chọn của x_2, vì thế $a(x_2+1) \ge 2n^2+2n+1$, suy ra

$$\begin{aligned}(a-1)x_2 &\ge 2n^2+2n+1-a-x_2 > 2n^2+2n+1-a-\frac{2n^2+2n}{a} \\ &= 2n^2-n-\frac{(a-n-1)(a-2n)}{a} \ge 2n^2-n.\end{aligned}$$

Mặt khác, hiển nhiên $(a-1)x_2 < ax_2 \le 2n^2+2n$ nên $2n^2-n+1 \le (a-1)x_2 < 2n^2+2n$, tức $c_3 = (a-1)x_2 \in S$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $c_4 = (b-1)y_2 \in S$.

Ta lại có chú ý rằng

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1) &= ab+1-(a+b) \ge ab+1-\frac{ab+(n+1)^2}{n+1} = \frac{nab-n^2-n}{n+1} \\ &\ge \frac{n(2n^2+2n+1)-n^2-n}{n+1} = 2n^2-n+\frac{n}{n+1} > 2n^2-n\end{aligned}$$

nên $(a-1)(b-1) \ge 2n^2-n+1$. Nếu $(a-1)(b-1) \le 2n^2+2n$, thì ta chỉ việc chọn $c_5 = (a-1)(b-1)$, sẽ có $\frac{c_1c_2c_3c_4c_5}{ab} = x_2^2y_2^2(a-1)^2(b-1)^2$ là số chính phương, mâu thuẫn. Do đó $(a-1)(b-1) > 2n^2+2n$.

Lúc này, với chú ý $\frac{c_1c_2c_3c_4}{ab} = \frac{x_2^2y_2^2(a-1)^2(b-1)^2}{(a-1)(b-1)}$, ta có thể đưa về xét cặp số $(a-1,\ b-1)$ và lại lập luận tương tự như các bước ở trên, ta lần lượt chứng minh được $(a-2)(b-2) > 2n^2+2n$, $(a-3)(b-3) > 2n^2+2n, \ldots$ Đến một lúc nào đó, ta sẽ được

$$\big(a-(a-n-1)\big)\big(b-(a-n-1)\big) > 2n^2+2n.$$

Suy ra $b-a > -n-1+\frac{2n^2+2n}{n+1} = n-1$, mâu thuẫn vì

$$b-a \le (2n-1)-(n-1) = n-2.$$

Từ mâu thuẫn ở các trường hợp vừa xét, ta thu được kết quả cần chứng minh. □