

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm có 01 trang)

Môn: TOÁN HỌC
Ngày thi: **08/8/2024**
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (5,0 điểm) Cho số thực dương a . Xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Khi $a = \frac{1}{2}$: chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , ta có: $x_n \geq \frac{2n-1}{2n}$.

b) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a \leq 1$.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn

$$b^2 + b + 1 = ac \text{ và } c^2 + c + 1 = bd.$$

Chứng minh rằng: $a + d + 2 = 4(b + c)$.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(x^2 + 3x + 1) = P(x)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC có các đường cao BE, CF . Đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CF cắt nhau tại các điểm X, Y . Đoạn thẳng BE cắt đường tròn đường kính CF tại điểm N . Đoạn thẳng CF cắt đường tròn đường kính BE tại điểm P . Các đường thẳng XY và EF cắt nhau tại M . Chứng minh rằng

a) Các đường thẳng BE, CF, XY đồng quy.

b) $MN = MP$.

Câu 4. (4,0 điểm) Kí hiệu S là tập hợp 2024 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S , mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 256?

---HẾT---

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký CBCT1: _____

Chữ ký CBCT2: _____

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho số thực dương a . Xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a$ và $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$		5.0																																
a) Khi $a = \frac{1}{2}$: chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , ta có: $x_n \geq \frac{2n-1}{2n}$.																																		
b) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a \leq 1$.																																		
a)	Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo n. Do $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_2 = \frac{7}{8} > \frac{3}{4}$ nên khẳng định đúng với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử đã đúng tới $n \geq 2$. Ta có $x_n \geq \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3}$ Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$, ta có $f'(x) = x(3x - 2)$. Do đó $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{2}{3}$. Do đó ta có bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{2}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">$\nearrow$</td><td>1</td><td colspan="2">$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\frac{23}{27}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-	0	+		$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		1	$\searrow$		$\nearrow$						$\frac{23}{27}$		$+\infty$	1.0
x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$																											
$f'(x)$		+	0	-	0	+																												
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		1	$\searrow$		$\nearrow$																											
					$\frac{23}{27}$		$+\infty$																											
	Từ bảng biến thiên, ta suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(\frac{2}{3}; +\infty)$. Do đó, theo giả thiết quy nạp $\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ &\geq f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \\ &= \frac{8n^3 - 4n^2 + 4n - 1}{8n^3} \\ &\geq \frac{2n+1}{2n+2} \end{aligned}$		1.0																															

	Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.	
	Lưu ý: Với cách làm trên, nếu trong bước quy nạp khởi đầu, học sinh không kiểm tra $x_2 > \frac{2}{3}$ thì trừ 0,5 điểm .	
b)	Với $a = 1$ thì (x_n) là dãy hằng, do đó có giới hạn hữu hạn.	0,5
	Với $a > 1$: Từ đẳng thức $x_{n+1} - 1 = x_n^2(x_n - 1)$ với mọi $n \geq 1$ (1) ta suy ra $x_n > 1$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2(x_n + 1) \geq 0$ (2) ta suy ra (x_n) là dãy tăng. Nếu (x_n) có giới hạn hữu hạn, gọi giới hạn đó là ℓ thì $\ell > 1$. Mặt khác $\ell = \ell^3 - \ell^2 + 1 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2(\ell + 1) = 0$, mâu thuẫn.	1,0
	Với $0 < a < 1$: ta sẽ chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn. Thật vậy, từ đẳng thức (2) và từ $a > 0$, ta suy ra (x_n) là tăng. Mặt khác, từ (1), ta suy ra $x_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy (x_n) là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.	1,0
	Gọi giới hạn dãy (x_n) là ℓ . Khi đó $\ell \geq \frac{1}{2}$ và do đó $\ell = \ell^3 - \ell^2 + 1 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2(\ell + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$.	0,5

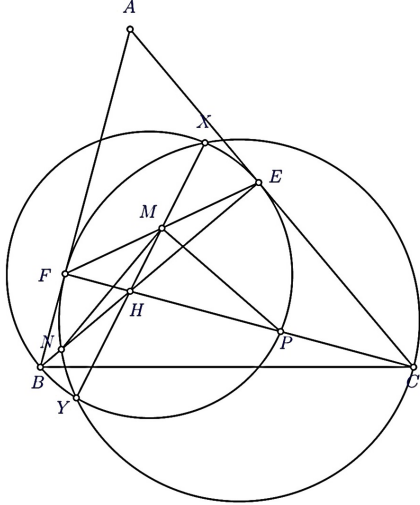
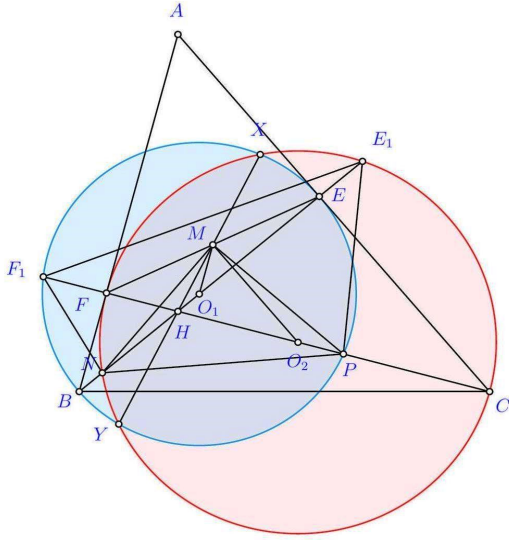
Câu 2. (6,0 điểm)

a)	Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $b^2 + b + 1 = ac$ và $c^2 + c + 1 = bd$. Chứng minh rằng: $a + d + 2 = 4(b + c)$.	6,0
b)	Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn $P(x^2 + 3x + 1) = P(x)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.	
a)	Từ giả thiết suy ra $b \mid c^2 + c + 1$ và $c \mid b^2 + b + 1$. Từ đó suy ra $(b, c) = 1$. Ta có $b^2 + c^2 + b + c + 1$ cùng chia hết cho b, c nên chia hết cho bc . Đặt $k = \frac{b^2 + c^2 + b + c + 1}{bc}$ thì k là số nguyên dương.	0,5
	Xét S là tập tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn $\frac{x^2 + y^2 + x + y + 1}{xy} = k$ Rõ ràng S khác trống, vì $(b, c) \in S$. Trong các cặp số thuộc S , chọn cặp $(x_0, y_0) \in S$ sao cho $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát giả sử $x_0 \geq y_0$. Xét phương trình $\frac{X^2 + y_0^2 + X + y_0 + 1}{Xy_0} = k \Leftrightarrow X^2 + (1 - ky_0)X + y_0^2 + y_0 + 1 = 0 \quad (3)$ Do $X = x_0$ là nghiệm của (3) nên (3) còn một nghiệm x_1 nữa. Theo định lý Viet $x_0 + x_1 = ky_0 - 1$, nên x_1 là số nguyên. Mặt khác, $x_0x_1 = y_0^2 + y_0 + 1$ nên $x_1 > 0$. Vậy x_1 là số nguyên dương.	1,0
	Từ x_1 là nghiệm của (3), ta suy ra $(x_1, y_0) \in S$. Từ đó $x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0$ hay $x_1 \geq x_0$. Ta có $x_0 \leq x_1 = \frac{y_0^2 + y_0 + 1}{x_0} \leq x_0 + 1 + \frac{1}{x_0} \leq x_0 + 2$ Vậy $x_1 \in \{x_0; x_0 + 1; x_0 + 2\}$. Khi $x_1 = x_0$, ta được $x_0^2 = y_0^2 + y_0 + 1$ điều này không xảy ra vì $y_0^2 < y_0^2 + y_0 + 1 < (y_0 + 1)^2$. Với $x_1 = x_0 + 1$, ta được $x_0^2 + x_0 = y_0^2 + y_0 + 1$ không xảy ra, vì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ. Vậy $x_1 = x_0 + 2$. Do đó các dấu bằng phải xảy ra, hay $x_0 = 1$. Từ đó $y_0 = 1$. Suy ra $k = 5$.	1,0

	Thành thử $b^2 + c^2 + b + c + 1 = 5bc$. Từ $b^2 + b + 1 = ac$, ta được $ac + c^2 + c = 5bc \Leftrightarrow a + c + 1 = 5b$ Từ $c^2 + c + 1 = bd$, ta được $bd + b^2 + b = 5bc \Leftrightarrow b + d + 1 = 5c$ Cộng lại ta được $a + c + b + d + 2 = 5b + 5c$ hay $a + d + 2 = 4(b + c)$.	0,5
b)	Giả sử $P(x)$ là đa thức thoả mãn $P(x^2 + 3x + 1) = P(x)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (4) Nếu $P(x)$ là đa thức hằng $c, c \in \mathbb{R}$, thì ta có $c = c^2$ hay $c \in \{0; 1\}$.	0,5
	Ta xét $P(x)$ khác hằng số. Thay $x = -1$ vào (4), ta được Khi đó $P(-1) = P(-1)^2$ nên $P(-1) \in \{0, 1\}$.	0,5
	Trường hợp 1. Nếu $P(-1) = 0$: Ta viết $P(x) = (x + 1)^k Q(x)$, trong đó k là số nguyên dương, $Q(x)$ là đa thức hệ số thực không nhận -1 là nghiệm. Thay vào (4), ta được $(x^2 + 3x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^{2k} Q(x)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x + 1)^k (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^{2k} Q(x)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^k Q(x)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\Leftrightarrow (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^k Q(x)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$ Thay $x = -1$, ta được $Q(-1) = 0$, vô lí.	1,0
	Trường hợp 2. Nếu $P(-1) = 1$: Ta viết $P(x) = 1 + (x + 1)^k Q(x)$, trong đó k là số nguyên dương, $Q(x)$ là đa thức hệ số thực không nhận -1 là nghiệm. Thay vào (4), ta được $1 + (x^2 + 3x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = 1 + 2(x + 1)^k Q(x) + (x + 1)^{2k} Q(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ $\Leftrightarrow (x + 1)^k (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = 2(x + 1)^k Q(x) + (x + 1)^{2k} Q(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ $\Leftrightarrow (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = 2Q(x) + (x + 1)^k Q(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$ $\Leftrightarrow (x + 2)^k Q(x^2 + 3x + 1) = 2Q(x) + (x + 1)^k Q(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ Thay $x = -1$, ta được $Q(-1) = 0$, vô lí. Vậy chỉ có hai đa thức thoả mãn là $P(x) \equiv 1$ và $P(x) \equiv 0$.	1,0
	Lưu ý: Trong trường hợp 2, học sinh có thể viết tương tự dẫn tới mâu thuẫn, vẫn được điểm tối đa phần này.	

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn, không cân ABC có các đường cao BE, CF. Đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CF cắt nhau tại các điểm X, Y. Đoạn thẳng BE cắt đường tròn đường kính CF tại điểm N. Đoạn thẳng CF cắt đường tròn đường kính BE tại điểm P. Các đường thẳng XY và EF cắt nhau tại M. Chứng minh rằng a) Các đường thẳng BE, CF, XY đồng quy. b) $MN = MP$.	5.0
--	------------

a)	Kí hiệu: (BE) và (CF) tương ứng là các đường tròn đường kính BE, CF. Gọi $H = BE \cap CF$. Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$. Vậy $\mathcal{P}_{H/(BE)} = \mathcal{P}_{H/(CF)}$, hay H nằm trên trục đẳng phương của (BE) và (CF).  Ghi chú: học sinh cũng có thể trình bày theo tâm đẳng phương của ba đường tròn $(BCEF), (BE), (CF)$.	1,5 0,5 0,5 0,5
b)	Kéo dài BE cắt (CF) tại điểm thứ hai E_1; kéo dài CF cắt (BE) tại điểm thứ hai F_1. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn $(BE), (CF)$. Kí hiệu R_1, R_2 tương ứng là bán kính của $(BE), (CF)$.  Theo tính chất phương tích $\overline{HN} \cdot \overline{HE_1} = \overline{HF} \cdot \overline{HC} = \mathcal{P}_{H/(CF)}$ và $\overline{HP} \cdot \overline{HF_1} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \mathcal{P}_{H/(BE)}$. Mà $\overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$ nên $\overline{HN} \cdot \overline{HE_1} = \overline{HP} \cdot \overline{HF_1}$. Do đó N, P, E_1, F_1 đồng viên.	1,5 0,5 0,5 0,5
	Mặt khác, gọi M' là trung điểm của EF. Theo tính chất đường trung bình, $M'O_1 \parallel BF$ nên $4(M'O_1^2 - R_1^2) = BF^2 - BE^2$. Tương tự $4(M'O_2^2 - R_2^2) = CE^2 - CF^2$. Mà $BE^2 + CE^2 = BF^2 + CF^2$. Do đó $M'O_1^2 - R_1^2 = M'O_2^2 - R_2^2$ hay $\mathcal{P}_{M'/(BE)} = \mathcal{P}_{M'/(CF)}$. Suy ra M' nằm trên trục đẳng phương của $(BE), (CF)$, hay $M' \in XY$, hay M' trùng với M. Do đó M là trung điểm EF.	1,5 0,5 0,5

	Từ đó theo tính chất đường trung bình $MO_1 \perp CF$ và $MO_2 \perp BE$. Suy ra M nằm trên trung trực của NE_1, PF_1 . Mà N, P, E_1, F_1 đồng viên, nên M là tâm của đường tròn qua các điểm N, P, E_1, F_1 . Vậy $MN = MP$.	0,5
--	---	-----

Câu 4. (4,0 điểm)

Kí hiệu S là tập hợp 2024 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của S , mà tổng tất cả các số thuộc mỗi tập con đều chia hết cho 256?	4.0
Ta biết rằng, mỗi số nguyên dương m đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng: $m = a_s \cdot 2^s + a_{s-1} \cdot 2^{s-1} + a_{s-2} \cdot 2^{s-2} + \dots + a_0 \cdot 2^0$; trong đó s là một số tự nhiên, và $a_i \in \{0; 1\}$ với mọi $i = 0, 1, \dots, s, a_s \neq 0$.	0,5
Lưu ý rằng $256 = 2^8$. Với mỗi số nguyên dương $m < 256$, có đúng một tập con của tập $S_1 = \{2^0, 2^1, \dots, 2^7\}$ mà tổng tất cả các số thuộc tập con đó bằng m .	0,5
Đặt $S_2 = S \setminus S_1$. Mỗi tập con X của S đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng $X = X_1 \cup X_2$, trong đó X_1 là một tập con của S_1 và X_2 là một tập con của S_2 .	0,5
Từ đó, mỗi tập con T khác rỗng của S thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $T = T_1 \cup T_2$ với T_2 là tập con khác rỗng của S_2 và T_1 là một tập con của S_1 sao cho nếu tổng các số trong tập T_2 đồng dư với r khi chia cho 256, $1 \leq r \leq 256$, thì tổng các số thuộc tập con T_1 đồng dư với $256 - r$ theo mod 256 (nếu T_1 là rỗng, ta quy ước tổng các số của T_1 bằng 0).	0,5
Theo nhận xét trên, mỗi số tự nhiên $m = 256 - r$, với $1 \leq r \leq 256$, thì có đúng một tập con của S_1 có tổng bằng m .	0,5
Thành thử, số tập con cần tìm của S bằng số tập con khác rỗng của S_2 .	0,5
Ta có $ S_2 = S - S_1 = 2024 - 8 = 2016$.	0,5
Do đó số tập con khác rỗng của S_2 bằng $2^{2016} - 1$.	0,5
Vậy số tập con khác rỗng có tính chất đề bài yêu cầu bằng $2^{2016} - 1$.	

--- HẾT ---