SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA
NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 04 câu)
Ngày thi thứ nhất: 27/8/2024

Câu 1. (5,0 *điểm*) Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = \dfrac{2025}{2024}$ và $u_{n+1} = \dfrac{2025u_n}{2024u_n + 1}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - 1)$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm các số nguyên dương a sao cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_n = \sum_{k=1}^{n} a^k (u_k - 1)$ với mọi $n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn.

Câu 2. (5,0 *điểm*) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)\big(f(y) + x + y\big) = xf(x+y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 *điểm*) Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A xuống BC; P là một điểm bất kì trên đoạn AD (P không trùng với A, D); E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P xuống AC, AB; T là hình chiếu vuông góc của D xuống EF; A' đối xứng với A qua O. Đường thẳng $A'D$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là R.

a) Chứng minh bốn điểm D, P, R, T cùng nằm trên một đường tròn (ω).

b) Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của điểm P trong tam giác ABC. Chứng minh DQ tiếp xúc với (ω).

Câu 4. (5,0 *điểm*) Đặt $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương. Với mỗi số $n \in \mathbb{Z}^+$, gọi $d(n)$ là số các ước nguyên dương của n. Một hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ được gọi là hàm số "đẹp" nếu thoả mãn điều kiện $d\big(f(mn)\big) = d\big(f(m)\big)d\big(f(n)\big)$ với mọi số $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

a) Tìm các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ là hàm số "đẹp" thoả mãn $d\big(f(n)\big) \leq d(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Có tồn tại hàm số "đẹp" là song ánh hay không? Vì sao?

-------- HẾT --------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA
NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 03 câu)
Ngày thi thứ hai: 28/8/2024

Câu 5. (6,0 *điểm*) Cho số tự nhiên n và các số thực $a_0, a_1, ..., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại số $k \in \{0;1;...;n\}$ sao cho $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \le a_0 + a_1 + ... + a_k$ với mọi $x \in [0;1]$.

Câu 6. (7,0 *điểm*) Xét lưới ô vuông 2024×2024. Trên lưới ô vuông đó luôn có ít nhất một trong hai loại rắn là rắn đỏ và rắn lục. Rắn đỏ có chiều dài bằng k sẽ chiếm giữ k ô vuông nằm ngang liên tiếp và không chiếm giữ ô vuông nào khác; rắn lục có chiều dài bằng k sẽ chiếm giữ k ô vuông nằm dọc liên tiếp và cũng không chiếm giữ ô vuông nào khác (k là số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 2024).

Biết trên lưới ô vuông luôn có ít nhất một con rắn và thoả mãn đồng thời các điều kiện dưới đây:

i) Không có ô vuông nào được chiếm giữ bởi nhiều hơn 1 con rắn.

ii) Nếu có một ô vuông trong lưới ở ngay bên trái hoặc ngay bên phải con rắn đỏ thì ô vuông đó bị chiếm giữ bởi một con rắn lục.

iii) Nếu có một ô vuông trong lưới ở ngay bên trên hoặc ngay bên dưới con rắn lục thì ô vuông đó bị chiếm giữ bởi một con rắn đỏ.

Gọi S là tổng bình phương chiều dài các con rắn trong lưới ô vuông.

a) Chứng minh tồn tại cách sắp xếp các con rắn trên lưới ô vuông này sao cho giá trị của S là $\frac{2024^3}{4}$ hoặc $\frac{2024^3}{4} - 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Câu 7. (7,0 *điểm*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Gọi N là trung điểm đoạn thẳng OH. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C xuống BC, CA, AB. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là điểm đối xứng với H qua BC, CA, AB. Tiếp tuyến tại C và H_b của đường tròn (O) cắt nhau tại Q, tiếp tuyến tại B và H_c của đường tròn (O) cắt nhau tại P.

a) Chứng minh P, Q, H cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AN.

b) Gọi (O_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba đỉnh là P, Q và giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O). Định nghĩa các đường tròn $(O_b), (O_c)$ tương tự như (O_a). Chứng minh rằng tâm đẳng phương của ba đường tròn $(O_a), (O_b), (O_c)$ nằm trên đường thẳng OH.

-------- HẾT --------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.