



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: P5, Dãy 14 tập thể xã tắc. Đường Ngô Thời Nhậm

CS 2: Trung Tâm Cao Thắng- 11 Đồng Đa

BÀI GIẢNG CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO



TOÁN 10

Tập 1: ĐẠI SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

A. LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề là gì?

Mệnh đề là một câu khẳng định **Đúng** hoặc **Sai**. Một câu khẳng định đúng gọi là một mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai gọi là mệnh đề sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng hoặc vừa sai.

2. Mệnh đề phủ định

Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P . Ký hiệu là $\bar{P}$. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

Ví dụ: P : “ $3 > 5$ ” thì $\bar{P}$: “ $3 \leq 5$ ”

3. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Cho 2 mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” gọi là mệnh đề kéo theo. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong các trường hợp còn lại.

Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.

4. Mệnh đề tương đương

Cho 2 mệnh đề P và Q . Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là mệnh đề tương đương, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

5. Khái niệm mệnh đề chứa biến

Ví dụ: Xét câu sau: “ n chia hết cho 3”, với n là số tự nhiên.

6. Các kí hiệu $\forall$ và $\exists$

a) Kí hiệu $\forall$

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định “Với mọi x thuộc X , $P(x)$ đúng” (hay “ $P(x)$ đúng với mọi x thuộc X ”) (1) là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu với x_0 bất kỳ thuộc X sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề (1) được ký hiệu là “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”. Kí hiệu $\forall$ đọc là “với mọi”

b) Kí hiệu $\exists$

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định “Tồn tại x thuộc X , $P(x)$ đúng” (2) là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề (2) được ký hiệu là “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”. Kí hiệu $\exists$ đọc là “tồn tại”.

7. Mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”

Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”

Ví dụ: Cho x là số nguyên dương ; $P(x)$: “ x chia hết cho 6” ; $Q(x)$: “ x chia hết cho 3”

Ta có : • $P(10)$ là mệnh đề sai ; $Q(6)$ là mệnh đề đúng

- $\overline{P(x)}$: “ x không chia hết cho 6”
- Mệnh đề kéo theo $P(x) \Rightarrow Q(x)$ là mệnh đề đúng.
- “ $\exists x \in \mathbb{N}^*, P(x)$ ” đúng có phủ định là “ $\forall x \in \mathbb{N}^*, \overline{P(x)}$ ” có tính sai

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận biết mệnh đề, mệnh đề chứa biến

1. Phương pháp

Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.

- ☐ Một câu khẳng định đúng được gọi là một mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai được gọi là mệnh đề sai.
- ☐ Câu hỏi, câu cảm thán hoặc câu chưa xác định được tính đúng sai thì không phải là mệnh đề.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

- (1) Ở đây đẹp quá!
- (2) Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm
- (3) 16 không là số nguyên tố
- (4) Hai phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $x^2 - \sqrt{x+3} + 1 = 0$ có nghiệm chung.
- (5) Số π có lớn hơn 3 hay không?
- (6) Italia vô địch Worldcup 2006
- (7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Câu (1) và (5) không là mệnh đề (vì là câu cảm thán, câu hỏi)

Các câu (3), (4), (6), là những mệnh đề đúng

Câu (2) và (7) là những mệnh đề sai.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

- A. Mùa thu Hà Nội đẹp quá!
- B. Bạn có đi học không?
- C. Đề thi môn Toán khó quá!
- D. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phát biểu ở A, B, C là câu cảm và câu hỏi nên không là mệnh đề.

Câu 2. Câu nào sau đây không là mệnh đề?

- A. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
- B. $3 < 1$.
- C. $4 - 5 = 1$.
- D. Bạn học giỏi quá!

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì “Bạn học giỏi quá!” là câu cảm thán không có khẳng định đúng hoặc sai.

Câu 3. Cho các phát biểu sau đây:

1. “17 là số nguyên tố”
2. “Tam giác vuông có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền”
3. “Các em C14 hãy cố gắng học tập thật tốt nhé !”
4. “Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được đường tròn”

Hỏi có bao nhiêu phát biểu là một đề?

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- ♦ Câu 1 là mệnh đề.
- ♦ Câu 2 là mệnh đề.
- ♦ Câu 3 không phải là mệnh đề.
- ♦ Câu 4 là mệnh đề.

Câu 4. Cho các câu sau đây:

1. “Phan-xi-păng là ngọn núi cao nhất Việt Nam”.
2. “ $\pi^2 < 9,86$ ”.
3. “Mệt quá!”.

4. “Chị ơi, mấy giờ rồi?”.

Hỏi có bao nhiêu câu là mệnh đề?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề là một khẳng định có tính đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai.

Do đó 1,2 là mệnh đề và 3,4 không là mệnh đề.

Câu 5. Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

A. π có phải là một số vô tỷ không?.

B. $2 + 2 = 5$.

C. $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.

D. $\frac{4}{2} = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 6. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

A. Buồn ngủ quá!

B. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

C. 8 là số chính phương.

D. Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

Lời giải.

Chọn A

Câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 7. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là không phải là mệnh đề?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5 + 19 = 24$.

e) $6 + 81 = 25$.

f) Bạn có rồi tới nay không?

g) $x + 2 = 11$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Chọn C

Các câu c), f), g) không phải là mệnh đề

Câu 8: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Hãy đi nhanh lên!
- b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
- c) $5 + 7 + 4 = 15$.
- d) Năm 2018 là năm nhuận.

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Chọn B

Câu a) là câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 9: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Cố lên, sắp đói rồi!
- b) Số 15 là số nguyên tố.
- c) Tổng các góc của một tam giác là 180° .
- d) x là số nguyên dương.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Chọn B

Câu a), d) không là mệnh đề.

Câu 10: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A.** Đi ngủ đi!
- B.** Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.
- C.** Bạn học trường nào?
- D.** Không được làm việc riêng trong giờ học.

Lời giải.

Chọn B

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A.** Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

- B. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
 C. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
 D. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

Lời giải.

Chọn D

A là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng 1,3 là số lẻ.

B là mệnh đề sai: Ví dụ: $2.3=6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.

C là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng 1,3 là số lẻ.

Câu 12: Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$ với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng

- A. $a \leq 2$. B. $a < 2$. C. $a = 2$. D. $a > 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 - a \Leftrightarrow 2 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì " $x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{N}$ " là mệnh đề **đúng**.

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

B. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

C. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

D. Không biết giải phương trình.

Dạng 2: Xét tính đúng sai của mệnh đề

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "3x+5 \leq x^2"$ với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

- A. $P(3)$. B. $P(4)$. C. $P(1)$. D. $P(5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$P(3)$: " $3.3 + 5 \leq 3^2$ " $\Leftrightarrow$ " $14 \leq 9$ " là mệnh đề sai.

$P(4)$: " $3.4 + 5 \leq 4^2$ " $\Leftrightarrow$ " $17 \leq 16$ " là mệnh đề sai.

$P(1)$: " $3.1 + 5 \leq 1^2$ " $\Leftrightarrow$ " $8 \leq 1$ " là mệnh đề sai.

$P(5)$: " $3.5 + 5 \leq 5^2$ " $\Leftrightarrow$ " $20 \leq 25$ " là mệnh đề đúng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > -1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Ta xét theo một chiều của mệnh đề ta thấy D đúng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $6\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.

B. Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

C. 17 là số chẵn.

D. Phương trình $x^2 + x + 7 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có $a.c = 1.(-2) < 0$ nên nó có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy mệnh đề ở phương án B là mệnh đề đúng. Các mệnh đề còn lại đều sai.

Câu 4: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

Lời giải.

Chọn B

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b \leq a < 0$ thì $a^2 \leq b^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a:9 \Rightarrow \begin{cases} a=9n, n \in \mathbb{Z} \\ 9:3 \end{cases} \Rightarrow a:3$.

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.

B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.

C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2.5$.

D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2.5$.

Lời giải.

Chọn A

Xét đáp án A. Ta có: $\pi^2 < 4 \Leftrightarrow |\pi| < 2 \Leftrightarrow -2 < \pi < 2$. Suy ra A sai.

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$.

C. $\exists r \in \mathbb{Q}, r^2 = 7$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}, n+4$ chia hết cho 4.

Lời giải

Chọn A

A: Đúng vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 > 0$.

B: HS hiểu nhầm mọi số bình phương đều lớn hơn chính nó.

C: HS hiểu nhầm $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$.

Câu 7: Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > -3 \Rightarrow x^2 > 9$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > -3$ ".

Lời giải

Chọn A

B, C, D sai là không biết mệnh đề kéo theo.

Câu 8: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+1 > x$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| = x$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x-3 = x^2$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 < 0$.

Lời giải

Chọn A

- A: Đúng vì VT luôn lớn hơn VP 1 đơn vị.
 B: HS nhầm trong tập hợp số tự nhiên.
 C: HS nhầm là tìm được x ở VT để được số chính phương ở VP.
 D: HS nhầm ở số 0.

Dạng 3: Phủ định của mệnh đề

1. Phương pháp

Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P . Ký hiệu là $\bar{P}$. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$

- ☐ Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, P(x)$ "
- ☐ Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, P(x)$ "

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P : "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"

Q : "6 là số nguyên tố"

R : "Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại"

S : " $5 > -3$ "

K : "Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm"

H : " $(\sqrt{3} - \sqrt{12})^2 = 3$ "

Lời giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\bar{P}$: "Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau", mệnh đề này sai

$\bar{Q}$: "6 không phải là số nguyên tố", mệnh đề này đúng

$\bar{R}$: "Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại", mệnh đề này sai

$\bar{S}$: " $5 \leq -3$ ", mệnh đề này sai

Ví dụ 2: Cho mệnh đề chứa biến " $P(x) : x > x^3$ ", xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $P(1)$ b) $P\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\forall x \in N, P(x)$ d) $\exists x \in N, \overline{P(x)}$

Lời giải

- a) Ta có $P(1) : 1 > 1^3$ đây là mệnh đề sai
- b) Ta có $P\left(\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ đây là mệnh đề đúng
- c) Ta có $\forall x \in N, x > x^3$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai
- d) Ta có $\exists x \in N, x \leq x^3$ là mệnh đề đúng vì $x - x^3 = x(1 - x)(1 + x) \leq 0$ với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3: Dùng các kí hiệu để viết các câu sau $\square$ và viết mệnh đề phủ định của nó.

- a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho sáu
- b) Với mọi số thực bình phương của nó là một số không âm.
- c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.
- d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Lời giải

- a) Ta có $P : \forall n \in N, n(n+1)(n+2) : 6$, mệnh đề phủ định là $\overline{P} : \exists n \in N, n(n+1)(n+2) \not: 6$.
- b) Ta có $Q : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, mệnh đề phủ định là $\overline{Q} : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$
- c) Ta có $R : \exists n \in Z, n^2 = n$, mệnh đề phủ định là $\overline{R} : \forall n \in Z, n^2 \neq n$.
- d) $\exists q \in Q, \frac{1}{q} > q$, mệnh đề phủ định là $\forall q \in Q, \frac{1}{q} \leq q$.

Ví dụ 4: Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó :

- a) A : " $\forall x \in R, x^2 \geq 0$ "
- b) B: " Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".
- c) C : " $\exists x \in N, x$ chia hết cho $x + 1$ "
- d) D: " $\forall n \in N, n^4 - n^2 + 1$ là hợp số "
- e) E: " Tồn tại hình thang là hình vuông ".
- f) F: " Tồn tại số thực a sao cho $a + 1 + \frac{1}{a+1} \leq 2$ "

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\overline{A} : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

b) Mệnh đề B đúng và $\overline{B} : \text{"Với mọi số tự nhiên đều không phải là số nguyên tố"}$

c) Mệnh đề C đúng vì cho $x = 0$ và $\overline{C} : \text{"}\forall x \in \mathbb{N}, x \nmid (x + 1)\text{"}$

d) Mệnh đề D sai vì với $n = 2$ ta có $n^4 - n^2 + 1 = 13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\overline{D} : \text{"}\exists n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1 \text{ là số nguyên tố"}$

e) Mệnh đề E đúng và $\overline{E} : \text{"Với mọi hình thang đều không là hình vuông"}$.

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\overline{F} : \text{"Với mọi số thực } a \text{ thì } a + 1 + \frac{1}{a + 1} > 2\text{"}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho mệnh đề: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 < 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chú ý: Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, p(x)$ " là " $\exists x \in \mathbb{R}, \overline{p(x)}$ ".

Câu 2. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

A. Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

B. Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.

C. Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

D. Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề phủ định là "Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông".

Câu 3. Cho mệnh đề: "Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

A. "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".

- B. “ Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán”.
- C. “ Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn”.
- D. “ Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán”.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “2018 là số tự nhiên chẵn” là

- A. 2018 là số chẵn. B. 2018 là số nguyên tố.
- C. 2018 không là số tự nhiên chẵn. D. 2018 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 5. Mệnh đề: “Mọi động vật đều di chuyển” có mệnh đề phủ định là

- A. Có ít nhất một động vật di chuyển. B. Mọi động vật đều đứng yên.
- C. Có ít nhất một động vật không di chuyển. D. Mọi động vật đều không di chuyển.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 6: Cho mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ”. Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$. B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$. D. $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B : sai là gì không dùng đúng kí hiệu của phủ định.

C : sai là gì không dùng đúng $\geq$.

D : sai kí hiệu không tồn tại.

Câu 7: Cho mệnh đề: “ $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 < 0$ ”. Mệnh đề phủ định sẽ là

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ”. B. “ $\forall x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ”.
- C. “ $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ”.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ " và phủ định của dấu "<" là dấu " $\geq$ ".

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định của dấu "<" là dấu ">".

Đáp án C sai vì học sinh không nhớ phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ " và phủ định dấu "<" là dấu " $\geq$ ".

Đáp án D sai vì học sinh không nhớ phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ ".

Câu 8: Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$ là

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B: HS quên biến đổi lượng từ.

C: HS quên trường hợp dấu bằng.

D: HS quên cả đổi lượng từ và dấu bằng.

Câu 9: Mệnh đề phủ định của mệnh đề “Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) vô nghiệm” là mệnh đề nào sau đây?

A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm.

B. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) không có nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định vô nghiệm là có nghiệm.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là phương trình sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là có 1 nghiệm tức nghiệm kép.

Đáp án D sai vì học sinh không hiểu câu hỏi của đề, học sinh nghĩ vô nghiệm là không có nghiệm.

Câu 10. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$.

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$. Suy ra mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Câu 11. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$ ".

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.

C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mệnh đề $A : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x" \Rightarrow \bar{A} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x"$.

Câu 12. Cho x là số tự nhiên. Phủ định của mệnh đề " $\forall x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn" là mệnh đề:

A. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.

B. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số chẵn.

C. $\forall x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.

D. $\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề phủ định là " $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ lẻ".

Câu 13. Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ " là

A. " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 > 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ".

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

Câu 14. Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

B. $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ ".

Câu 15. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 > 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Câu 16. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: " \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0 "$.

A. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0 "$.

B. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0 "$.

C. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0 "$.

D. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0 "$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dạng 4: Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo và hai mệnh đề tương đương

1. Phương pháp

Cho 2 mệnh đề P và Q .

- ☐ Mệnh đề "Nếu P thì Q " gọi là mệnh đề kéo theo. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong các trường hợp còn lại.
- ☐ Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.
- ☐ Mệnh đề " P nếu và chỉ nếu Q " gọi là mệnh đề tương đương, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

a) P : " Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : " Tứ giác $ABCD$ AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"

b) P : " $2 > 9$ " và Q : " $4 < 3$ "

c) P : " Tam giác ABC vuông cân tại A" và Q : " Tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ "

d) P : " Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam" và Q : " Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Lời giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường", mệnh đề này đúng.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì $ABCD$ là hình thoi ", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu $2 > 9$ thì $4 < 3$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề P sai.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu $4 < 3$ thì $2 > 9$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề Q sai.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì $\hat{A} = 2\hat{B}$ ", mệnh đề này đúng

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$ thì nó vuông cân tại A ", mệnh đề này sai

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam"

Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó

a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : " Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) P : " Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm" và Q : " $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ "

Lời giải

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau" và

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nếu và chỉ nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng (do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng) và được phát biểu bằng hai cách như sau:

" Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ " và

" Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ "

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho định lí “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích chúng bằng nhau”. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích chúng bằng nhau.
- B. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.
- C. Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.
- D. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích chúng bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- ♦ “Hai tam giác bằng nhau” là điều kiện đủ. ♦ “Diện tích bằng nhau” là điều kiện cần.

Câu 2. Cho $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\bar{P} \Leftrightarrow Q$ sai. B. $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ đúng. C. $\bar{Q} \Leftrightarrow P$ sai. D. $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $P \Leftrightarrow Q$ đúng nên $P \Rightarrow Q$ đúng và $Q \Rightarrow P$ đúng.

Do đó $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ đúng và $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ đúng.

Vậy $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ đúng.

Câu 3. Cho P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề sai, chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $P \Rightarrow \bar{P}$. B. $P \Leftrightarrow Q$. C. $\overline{P \Rightarrow Q}$. D. $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề sai nên mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai, do đó $\overline{P \Rightarrow Q}$ là mệnh đề đúng.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào có **mệnh đề đảo** là đúng?

- A. Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .
- B. Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.
- C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

D. Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

Lời giải

Chọn C

Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3 là mệnh đề đúng.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không phải là định lí?

A. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 3 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.

B. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.

C. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 9 $\Rightarrow x$ chia hết cho 9.

D. $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho 4 và 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chọn D

Định lý sẽ là: $\forall x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho 4 và 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lí?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

D. Nếu $a + b$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Dạng 5: Mệnh đề với kí hiệu với mọi, tồn tại

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm mệnh đề sai.

A. " $\forall x; x^2 + 2x + 3 > 0$ ".

B. " $\forall x; x^2 \geq x$ ".

C. " $\exists x; x^2 + 5x + 6 = 0$ ".

D. " $\exists x; x < \frac{1}{x}$ ".

Lời giải.

Chọn B.

Chọn $x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < x$. Vậy mệnh đề B sai

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$.

C. $\exists n \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0$.

Lời giải

Chọn A

Chọn A Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$

C. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n \leq 2n$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $0 \in \mathbb{R}$ và $0^2 = 0$ nên mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ là mệnh đề sai.

Câu 4. Chọn mệnh đề **sai**.

A. " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ ". B. " $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$ ". C. " $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$ ". D. " $\exists x \in \mathbb{R} : x < 1$ ".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Với $x = 0 \in \mathbb{R}$ thì $x^2 = 0$ nên " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ " sai.

Câu 5. Tìm mệnh đề đúng.

A. " $\exists x; x^2 + 3 = 0$ "

B. " $\exists x; x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ "

C. " $\forall x \in \mathbb{Z}; x^5 > x^2$ ".

D. " $\forall n \in \mathbb{N}; ((2n+1)^2 - 1) : 4$ "

Lời giải.

Chọn C.

$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n^2 + n) : 4; \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy mệnh đề C đúng

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 11n + 2$ chia hết cho 11.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

D. $\exists n \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Xét đáp án A. Khi $n = 3$ thì giá trị của $(n^2 + 11n + 2)$ bằng 44:11 nên đáp án A đúng

+ Xét đáp án B. Khi $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.

Khi $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.

+ Xét đáp án C. Tồn tại số nguyên tố 5 chia hết cho 5 nên đáp án C đúng

+ Xét đáp án D. Phương trình $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2; x = 2 \in \mathbb{Z}$ nên đáp án D đúng.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

D. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì với $x = 1$ thì $(x-1)^2 = x-1$.

B sai vì khi $x = -4 < 3$ nhưng $|x| = 4 > 3$.

C sai vì

☐ Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ số này không chia hết cho 4.

☐ Nếu $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ số này cũng không chia hết cho 4.

D đúng vì

☐ Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ số này không chia hết cho 3.

☐ Nếu $n = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 \pm 6k + 2$ số này không chia hết cho 3.

BÀI 2. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm tập hợp

1. Tập hợp và các phần tử

Tập hợp là một khái niệm của toán học, không có định nghĩa.

Tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ A, B,....

Phần tử a thuộc tập hợp A ta viết $a \in A$. Nếu phần tử a không thuộc A ta viết là $a \notin A$

2. Cách xác định tập hợp

Có 2 cách trình bày tập hợp

- Liệt kê các phần tử : VD : $A = \{a; 1; 3; 4; b\}$ hoặc $N = \{0; 1; 2 \dots\}$
- Chỉ rõ tính chất đặc trưng của các phần tử trong tập hợp có dạng $A = \{x \mid x \in P(x)\}$.

Ví dụ: $A = \{x \in N \mid x \text{ lẻ và } x < 6\} \Rightarrow A = \{1; 3; 5\}$

3. Tập hợp rỗng

Tập hợp rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào. Kí hiệu: $\emptyset$

II. Tập hợp con

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là tập hợp con của tập B và viết là $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Nếu A không phải là tập con của B ta ký hiệu là: $A \not\subset B$

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập A
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$
- $\emptyset \subset A$ với mọi tập A
- Cho $A \neq \emptyset$ có ít nhất 2 tập con là $\emptyset$ và A

III. Tập hợp bằng nhau

Khi tập $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập A bằng tập B và viết là $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tập hợp và các phần tử của tập hợp

1. Phương pháp

Cách liệt kê: Ghi tất cả các phần tử của tập hợp

Cách nêu tính chất đặc trưng: Từ tất cả các phần tử của tập hợp, nhận biết tính chất đặc trưng và ghi tính chất đặc trưng của các phần tử.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$$

$$C = \{1; 2; 4; 8; 16\}$$

Lời giải

Ta có các tập hợp A, B, C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 4 \text{ và } x \leq 16\}$$

$$C = \{2^n \mid n \leq 4 \text{ và } n \in \mathbb{N}\}$$

Ví dụ 2: Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 2}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tử

b) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3.

Lời giải

a) Ta có $\frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi x là ước của 2 hay $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$$\text{Vậy } A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3 là

Tập không có phần tử nào: $\emptyset$

Tập có một phần tử: $\{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}$

Tập có hai phần tử: $\{-2; -1\}, \{-2; 0\}, \{-2; 1\}, \{-2; 2\}, \{-1; 0\}$

$\{-1; 1\}, \{-1; 2\}, \{0; 1\}, \{0; 2\}, \{1; 2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một phần tử?

A. $\{x; y\}$.

B. $\{x\}$.

C. $\{x; \emptyset\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

A. $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

B. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

C. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

D. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0; x = 1; x = 2; x = 3; x = 4; x = 5$

Câu 3. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 4)(x - 1) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của tập X.

A. $S = 4$.

B. $S = \frac{9}{2}$.

C. $S = 9$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

Các phần tử của tập hợp X là các nghiệm thực của phương trình $(x^2 - 4)(x - 1) = 0$.

$$\text{Ta có: } (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Do đó: $S = 2 + (-2) + 1 = 1$.

Câu 4. Tập hợp $X = \{2; 5\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Câu 5. Liệt kê phần tử của tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x^2 - x)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$.

A. $B = \{-1; 0; 4\}$.

B. $B = \{0; 4\}$.

C. $B = \left\{-1; \frac{1}{2}; 0; 4\right\}$.

D. $B = \{0; 1; 4\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2x^2 - x)(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Câu 6. Cho $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $X = \{1\}$. B. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. C. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $X = \{0\}$.

Lời giải

Chọn B

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}.$$

Câu 7. Có bao nhiêu cách cho một tập hợp ?

- A. 2 . B. 4 . C. 3 . D. 1 .

Lời giải

Chọn A

Có hai cách cho một tập hợp :

+) Cách 1 : Liệt kê .

+) Cách 2 : Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử .

Câu 8: Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

- A. $\{x \in N / |x| < 1\}$. B. $\{x \in Z / 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.
C. $\{x \in Q / x^2 - 4x + 2 = 0\}$. D. $\{x \in R / x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} / (2x^2 - x - 3)(x^2 - 4) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x < 4\}$. Viết lại các tập A và B bằng cách liệt kê các phần tử.

- A. $A = \left\{-2; -1; 2; \frac{3}{2}\right\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. B. $A = \left\{-2; -1; 2; \frac{3}{2}\right\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
C. $A = \{-2; -1; 2\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. D. $A = \{-2; -1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (2x^2 - x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(2x-3) = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Do } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 2\} \Rightarrow A = \{-2; -1; 2\}$$

$$B = \{0; 1; 2; 3\}$$

Câu 10. Tìm số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+2)(x^3-4x) = 0\}$.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$(x-1)(x+2)(x^3-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \{1; -2; 0; 2\}$. Vậy A có 4 phần tử.

Câu 11. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} / (2x^2 + 5x + 2)(x^2 - 16) = 0\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê là

A. $\left\{-4; \frac{-1}{2}; -2; 4\right\}$.

B. $\{-4; -2\}$.

C. $\{\pm 4\}$.

D. $\{-4; -2; 4\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (2x^2 + 5x + 2)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; 4; -4\}$.

Câu 12. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$

A. $X = \{0\}$.

B. $X = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

C. $X = \{2\}$.

D. $X = \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2.$$

Câu 13. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{N} / (x^2 - 4)(x-1)(2x^2 - 7x + 3) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của X .

A. $S = \frac{9}{2}$.

B. $S = 5$.

C. $S = 6$.

D. $S = 4$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } (x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $X = \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng $S = 1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 14. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

- A.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$. **B.** $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.
C. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$. **D.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 1 = 0\}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có:

$$* x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}. \text{ Vậy } A = \{-6; 1\}.$$

$$* 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } B = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}.$$

$$* x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}. \text{ Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } C = \emptyset.$$

$$* x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } D = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}.$$

Câu 15. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

- A.** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. **B.** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$.
C. $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 12 = 0\}$. **D.** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có :

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{2\}.$$

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow B = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow C = \{-4; 3\}.$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ phương trình vô nghiệm nên } D = \emptyset.$$

Câu 16. Cho $A = \{x \in \mathbb{N}^*, x < 10, x:3\}$. Chọn khẳng định đúng.

A. A có 4 phần tử.

B. A có 3 phần tử.

C. A có 5 phần tử.

D. A có 2 phần tử.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } A = \{x \in \mathbb{N}^*, x < 10, x:3\} = \{3; 6; 9\} \Rightarrow A \text{ có 3 phần tử.}$$

Câu 17. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | (x-1)(x+2)(x^3+4x) = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } (x-1)(x+2)(x^3+4x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x^2+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0; x = 1$. Vậy $A = \{0; 1\} \Rightarrow$ tập A có hai phần tử.

Câu 18. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 3x - 4 = 0\}.$

B. $T_1 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3 = 0\}$

C. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = 2\}.$

D. $T_1 = \{x \in \mathbb{Q} | (x^2 + 1)(2x - 5) = 0\}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Vì } x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

Câu 19. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0\}$.

- A. $X = \{0\}$. B. $X = \{2\}$. C. $X = \emptyset$. D. $X = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trên tập số thực, phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy: $X = \emptyset$.

Câu 20. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$.

- A. $X = \{1\}$. B. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. C. $X = \{0\}$. D. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ là các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 21. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

- A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$. B. $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.
C. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 1 = 0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ nên } \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\} = \emptyset.$$

Câu 22. Xác định số phần tử của tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n:4, n < 2017\}$.

- A. 505. B. 503. C. 504. D. 502.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập hợp X gồm các phần tử là những số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Từ 0 đến 2015 có 2016 số tự nhiên, ta thấy cứ 4 số tự nhiên liên tiếp sẽ có duy nhất một số chia hết cho 4. Suy ra có 504 số tự nhiên chia hết cho 4 từ 0 đến 2015. Hiển nhiên $2016:4$.

Vậy có tất cả 505 số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Dạng 2: Tập hợp con và hai tập hợp bằng nhau

1. Phương pháp

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Các tính chất:

$$+ A \subset A, \forall A \qquad + \emptyset \subset A, \forall A \qquad + A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $A = \{-4; -2; -1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$. Tìm tập hợp X sao cho

a) $X \subset B \setminus A$ b) $A \subset X \subset B$

c) $A \cup X = B$ với X có đúng bốn phần tử

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} |x| \leq 4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

Suy ra $B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

a) Ta có $B \setminus A = \{-3; 0; 1\}$

Suy ra $X \subset B \setminus A$ thì các tập hợp X là

$$\emptyset, \{-3\}, \{0\}, \{1\}, \{-3;0\}, \{-3;1\}, \{0;1\}, \{-3;0;1\}$$

b) Ta có $\{-4; -2; -1; 2; 3; 4\} \subset X \subset \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra tập hợp X là

$$\{-4; -2; -1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -1; 0; 2; 3; 4\}$$

$$\{-4; -2; -1; 1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 0; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\{-4; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}, \quad \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

c) Ta có $A \cup X = B$ với X có đúng bốn phần tử khi đó tập hợp X là

$$\{-4;-3;0;1\}, \{-3;-2;0;1\}, \{-3;-1;0;1\}, \{-3;0;1;2\}, \{-3;0;1;3\}, \{-3;0;1;4\}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tập A có mấy tập con?

A. 15.

B. 12.

C. 16.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Số tập hợp con của tập hợp có 4 phần tử là $2^4 = 16$ tập hợp con.

Câu 2. Tập hợp nào sau đây có đúng một tập hợp con?

- A. $\emptyset$. B. $\{1\}$. C. $\{\emptyset\}$. D. $\{1; \emptyset\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

- ♦ Đáp án A duy nhất một tập con là $\emptyset$.
- ♦ Đáp án B còn một tập con nữa là tập $\emptyset$.
- ♦ Đáp án C có hai tập con là $\emptyset$ và $\{\emptyset\}$.
- ♦ Đáp án D có ba tập con $\{\emptyset\}$, $\{1\}$ và $\{1; \emptyset\}$.

Câu 3. Cho tập hợp P . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $P \subset P$. B. $\emptyset \subset P$. C. $P \in \{P\}$. D. $P \in P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Các đáp án A, B, C đúng. Đáp án D sai.

Câu 4. Tập hợp nào sau đây có đúng hai tập hợp con?

- A. $\{x; \emptyset\}$. B. $\{x\}$. C. $\{x; y; \emptyset\}$. D. $\{x; y\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

C1: Công thức số tập con của tập hợp có n phần tử là 2^n nên suy ra tập $\{x\}$ có 1 phần tử nên có $2^1 = 2$ tập con.

C2: Liệt kê số tập con ra thì $\{x\}$ có hai tập con là $\{x\}$ và $\{\emptyset\}$.

Câu 5: Cho tập hợp A . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

- A. $\emptyset \subset A$. B. $A \neq \{A\}$. C. $A \in A$. D. $A \subset A$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. Số tập con của tập hợp có n ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) phần tử là

- A. 2^{n+2} . B. 2^{n-1} . C. 2^{n+1} . D. 2^n .

Lời giải

Chọn D

Số tập con của tập hợp có n bằng 2^n .

Câu 7. Cách viết nào sau đây là đúng?

- A. $a \subset [a; b]$. B. $\{a\} \subset [a; b]$. C. $\{a\} \in [a; b]$. D. $a \in (a; b]$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}^*, x^2 \leq 5\}$. Khi đó tập A bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $A = \{1; 2; 3; 4\}$. B. $A = \{0; 2; 5\}$.
C. $A = \{2; 5\}$. D. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 \leq 5 \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \Rightarrow (x^2 + 1) \in \{2; 5\}$$

$$\text{Vậy } A = \{2; 5\}.$$

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 8\}$. Tập hợp A có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tập hợp có n phần tử thì có 2^n tập hợp con.

Do đó tập hợp A có tất cả $2^3 = 8$ tập hợp con.

Cách 2: Các tập con của tập A là: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{8\}, \{1; 2\}, \{2; 8\}, \{1; 8\}, \{1; 2; 8\}$.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

- A. $A \subset A$. B. $\emptyset \subset A$. C. $A \in \emptyset$. D. $\emptyset \subset \emptyset$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 11: Cho hai tập hợp: $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội số của } 4 \text{ và } 6\}$ và $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội số của } 12\}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

- A. $X \subset Y$. B. $Y \subset X$.
C. $X = Y$. D. $\exists n : n \in X \text{ và } n \notin Y$.

Lời giải

Chọn D

Vì bội số chung nhỏ nhất của 4 và 6 là 12.

Câu 12: Cho tập hợp $A = \{1; 2; a\}$, $B = \{1; 2; a; b; x; y\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp X thỏa $A \subset X \subset B$?

A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 2^n .

Lời giải

Chọn A

$\{1; 2; a\}, \{1; 2; a; b\}, \{1; 2; a; x\}, \{1; 2; a; y\},$

$\{1; 2; a; b; x\}, \{1; 2; a; b; y\}, \{1; 2; a; x; y\}, \{1; 2; a; b; x; y\}.$

Câu 13: Hai tập hợp nào dưới đây **không** bằng nhau?

A. $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ và $B = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right\}.$

B. $A = \{3; 9; 27; 81\}$ và $B = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}.$

C. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$ và $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

D. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$

Lời giải

Chọn A

Xét tập hợp $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ ta có: $\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow 2^k \leq 2^3 \Leftrightarrow k \leq 3,$

suy ra: $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 3\right\} \Leftrightarrow A = \left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \dots\right\}$ nên: $A \neq B.$

Câu 14: Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\}$. Tập hợp B có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

A. 16.

B. 12.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\}.$

Vậy tập B có $2^4 = 16.$

Câu 15: Cho tập hợp $A = \{x; y; z\}$ và $B = \{x; y; z; t; u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$?

A. 16.

B. 4.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là:

$$X_1 = \{x; y; z\} ; X_2 = \{x; y; z; t\} ; X_3 = \{x; y; z; u\} \text{ và } X_4 = \{x; y; z; t; u\} .$$

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

A. 8 .

B. 1 .

C. 3 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn A

Các 8 tập X thỏa mãn đề bài là:

$$\{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 5\}, \{1; 2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\} .$$

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{x; y; z\}$ và $B = \{x; y; z; t; u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$?

A. 16 .

B. 4 .

C. 8 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là:

$$X_1 = \{x; y; z\} ; X_2 = \{x; y; z; t\} ; X_3 = \{x; y; z; u\} \text{ và } X_4 = \{x; y; z; t; u\} .$$

Câu 18. Cho tập X có $n+1$ phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Số tập con của X có hai phần tử là

A. $n(n+1)$.

B. $\frac{n(n-1)}{2}$.

C. $n+1$.

D. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Lấy một phần tử của X , ghép với n phần tử còn lại được n tập con có hai phần tử. Vậy có $(n+1)n$ tập. Nhưng mỗi tập con đó được tính hai lần nên số tập con của X có hai

phần tử là $\frac{n(n+1)}{2}$.

BÀI 3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

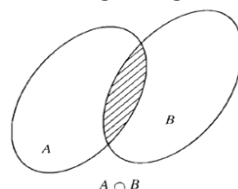
I. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A , vừa thuộc B được gọi là giao của A và B .

Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A ; x \in B\}$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



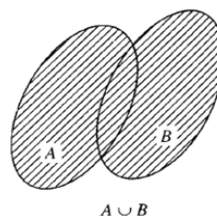
II. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B .

Kí hiệu $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



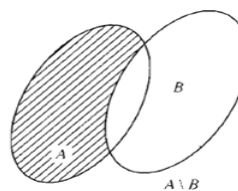
III. HIỆU VÀ PHẦN BÙ CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B .

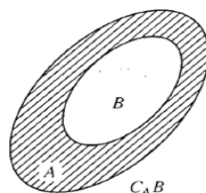
Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình 7).

Vậy $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \mid x \in A ; x \notin B\}$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$



Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A , kí hiệu $C_A B$.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Giao và hợp của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}; \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $A \cap B = \{a; c\}$.

B. $A \cap B = \{a; b; c; d; e\}$.

C. $A \cap B = \{b\}$.

D. $A \cap B = \{d; e\}$.

Lời giải

Chọn A

A. Đúng vì $\{a; c\}$ vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B.

B. HS nhầm là vừa thuộc A hoặc B.

C. HS nhầm là thuộc A và không thuộc B.

D. HS nhầm là thuộc B và không thuộc A.

Câu 2: Cho hai tập hợp $A = \{0; 2; 3; 5\}$ và $B = \{2; 7\}$. Khi đó $A \cap B$

A. $A \cap B = \{2; 5\}$.

B. $A \cap B = \{2\}$.

C. $A \cap B = \emptyset$.

D. $A \cap B = \{0; 2; 3; 5; 7\}$.

Lời giải

Chọn B

$A \cap B = \{2\}$.

Câu 3. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\}$. Do đó $X \cup Y$ có 8 phần tử.

Câu 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Tập $A \cap B$ bằng

A. $\{1; 2; 3\}$.

B. $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

C. $\{0; 1; 2\}$.

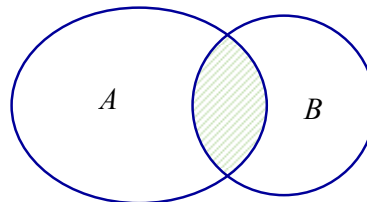
D. $\{0; 1; 2; 3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\} = \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 5. Cho A , B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?



A. $A \cup B$.

B. $B \setminus A$.

C. $A \setminus B$.

D. $A \cap B$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo biểu đồ Ven thì phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp $A \cap B$.

Câu 6. Cho 2 tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$, chọn mệnh đề đúng?

- A. $A \cap B = \{2\}$. B. $A \cap B = \{5; 4\}$. C. $A \cap B = \{2; 4\}$. D. $A \cap B = \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ ta có: $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\} = \{2; 3; 4; 5\}$.

Vậy $A \cap B = \{2\}$.

Câu 7: Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$. Tìm kết quả phép toán $A \cap B$.

- A. $\{2; 4\}$. B. $\{2\}$. C. $\{4; 5\}$. D. $\{3\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu B, C, D do Hs tính sai phép toán.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a; b\}$, $B = \{1; x; y\}$ với x, y khác $a, b, 2, 1$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $A \cap B = B$. B. $A \cap B = \emptyset$. C. $A \cap B = A$. D. $A \cap B = \{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hai tập hợp A, B có 1 phần tử chung là 1 nên $A \cap B = \{1\}$.

Câu 9. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\}$ nên tập hợp $X \cup Y$ có 8 phần tử.

Câu 10. Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2x^2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$ và

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n(n+1) < 31\}$. Khi đó

- A. $A \cap B = \{2; 4\}$. B. $A \cap B = \{4; 5\}$. C. $A \cap B = \{2\}$. D. $A \cap B = \{3\}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $A = \{0; 1; 2\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Vậy: $A \cap B = \{2\}$.

Câu 10: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ nên $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) = 0\}$ nên $C = A \cap B$.

Câu 11: Cho hai tập hợp $E = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$. Tập hợp $H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)g(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $H = E \cap F$. B. $H = E \cup F$. C. $H = E \setminus F$. D. $H = F \setminus E$.

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ nên $H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \vee g(x) = 0\}$ nên $H = E \cup F$.

Dạng 2: Hiệu và phần bù của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Nếu $A \subset E$ thì $E \setminus A = C_E^A$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho $A = \{2; 4; 6; 9\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm $A \setminus B$

Lời giải

$$A \setminus B = \{6; 9\}$$

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 4; 6\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Tìm khi $C_B A$

Lời giải

$$C_B A = B \setminus A = \{3; 5; 7; 8\}.$$

Ví dụ 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx - 3| = mx - 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm m để $B \setminus A = B$.

Lời giải

Ta có: $x \in A \Leftrightarrow mx - 3 \geq 0$.

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } B \setminus A = B \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \frac{3}{m} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \frac{3}{m} < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 0 < m < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $\{2; 4\}$. B. $\{1; 3\}$. C. $\{6; 9\}$. D. $\{6; 9; 1; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } A \setminus B = \{6; 9\}.$$

Câu 2. Cho hai tập hợp $A = (-10; 4)$, $B = [-6; 1)$. Khi đó $C_A B$ là

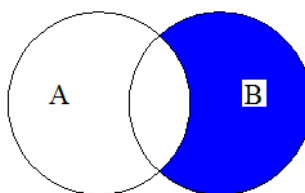
- A. $(-10; -6)$. B. $(-6; 1)$.
C. $(-10; -6) \cup [1; 4)$. D. $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$C_A B = A \setminus B = (-10; -6) \cup [1; 4).$$

Câu 3: Phần tô đậm trong hình vẽ sau biểu diễn tập hợp nào?



A. $B \setminus A$.

B. $A \setminus B$.

C. $A \cap B$.

D. $A \cup B$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tập $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

A. $\{2; 4\}$.

B. $\{1; 3\}$.

C. $\{6; 9\}$.

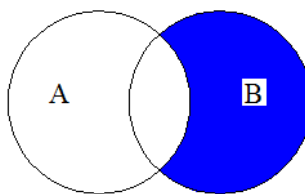
D. $\{6; 9; 1; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A \setminus B = \{x \mid x \in A; x \notin B\} = \{6; 9\}$.

Câu 5. Phần tô đậm trong hình vẽ sau biểu diễn tập hợp nào?



A. $B \setminus A$.

B. $A \setminus B$.

C. $A \cap B$.

D. $A \cup B$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6. Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tập $B \setminus A$ bằng

A. $\{5, 6\}$.

B. $\{5, 6\}$.

C. $\{0, 1\}$.

D. $\{2, 3, 4\}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $B \setminus A = \{5, 6\}$.

Câu 7. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

A. $B \setminus A = C$.

B. $A \cup B = C$.

C. $A \setminus B = C$.

D. $A \cap B = C$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông, ta có:

$C \subset A$ và $C \subset B$ nên $B \setminus A = C$, $A \setminus B = C$ là các mệnh đề sai.

Vì hình vuông vừa là hình thoi và cũng là hình chữ nhật nên $A \cap B = C$ là mệnh đề đúng và $A \cup B = C$ là mệnh đề sai.

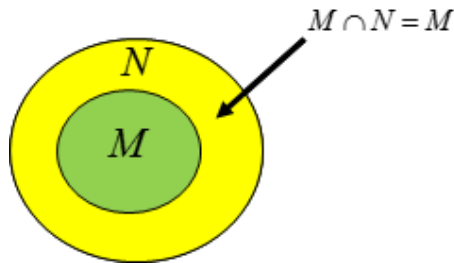
Câu 8. Cho hai tập hợp $M, N, M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $M \cap N = N$. B. $M \setminus N = N$. C. $M \cap N = M$. D. $M \setminus N = M$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $M \subset N$. Ta có sơ đồ Ven



Câu 9. Cho hai tập hợp: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Tập $A \setminus B$ bằng

- A. $\{6; 8; 10\}$. B. $\{0; 1; 3\}$.
C. $\{2; 4\}$. D. $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10\}$.

Lời giải

Chọn B

Tập $A \setminus B = \{0; 1; 3\}$.

Câu 10. Cho A : "Tập hợp các học sinh khối 10 học giỏi", B : "Tập hợp các học sinh nữ học giỏi", C : "Tập hợp các học sinh nam khối 10 học giỏi". Vậy tập hợp C là:

- A. $A \subset B$. B. $B \setminus A$. C. $A \cap B$. D. $A \setminus B$.

Lời giải

Chọn D

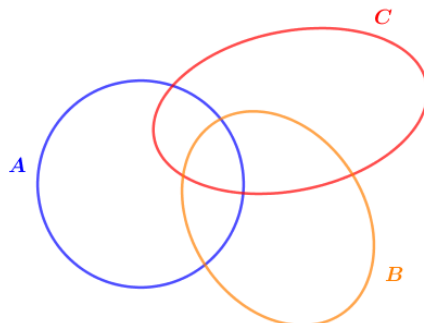
Vì tập hợp B có chứa cả các học sinh nữ khối 10 học giỏi nên tập hợp C gồm những phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B . Do đó, $C = A \setminus B$.

Câu 11: Cho các tập hợp A, B, C . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

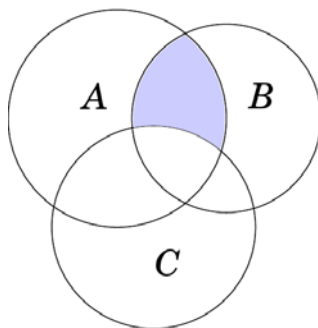
- A. $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$. B. $A \cup (B \cup C) = A \cap (B \cap C)$.
C. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. D. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Lời giải

Chọn D



Câu 12: Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



- A. $A \cap B \cap C$. B. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. C. $(A \cup B) \setminus C$. D. $(A \cap B) \setminus C$.

Lời giải

Chọn D

Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn tập hợp các điểm vừa thuộc A, B mà không thuộc C . Chính là tập $(A \cap B) \setminus C$.

Câu 13: Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tính phép toán $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- A. $\{0; 1; 5; 6\}$. B. $\{1; 2\}$. C. $\{2; 3; 4\}$. D. $\{5; 6\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 14: Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. B. $B = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$.
C. $B = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. D. $A = (A \cap B) \cap (A \setminus B)$.

Lời giải

Chọn A

$$\forall x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

$$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in A.$$

+ Học sinh có thể chọn B vì hiểu sai hiệu của hai tập hợp. Giả sử

$$\forall x \in B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

$$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in B.$$

+ Học sinh có thể chọn C vì hiểu sai hiệu của hai tập hợp

$$\forall x \in B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

$$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \end{cases} \Rightarrow x \in B.$$

+ Học sinh có thể chọn D vì nhầm giữa ký hiệu hợp và giao hai tập hợp.

Câu 15: Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$

B. $B \cap (B \setminus A) = \emptyset.$

C. $A \cup (B \setminus A) = \emptyset.$

D. $A \cup (B \setminus A) = B.$

Lời giải

Chọn A

+ Chọn đáp án A vì giả sử $\exists x \in A \cap (B \setminus A) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin A \end{cases}$.

+ Học sinh có thể chọn B vì hiểu sai ký hiệu hiệu 2 tập hợp

$$\exists x \in B \cap (B \setminus A) \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in B \setminus A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \notin B \end{cases}$$

+ Học sinh có thể chọn C vì hiểu sai ký hiệu hợp, trình bày như bài giao hai tập hợp.

+ Học sinh có thể chọn D vì không nắm rõ ý nghĩa các ký hiệu

$$\forall x \in A \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B.$$

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus A).$$

Câu 16: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$,

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}, C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right\}. \text{ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?}$$

A. $C = A \cup B.$

B. $C = A \cap B.$

C. $C = A \setminus B.$

D. $C = B \setminus A.$

Lời giải.

Chọn C.

Ta có $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ hay $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) \neq 0\}$ nên $C = A \setminus B$.

Dạng 3: Bài toán sử dụng biểu đồ Ven

1. Phương pháp

- Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp
- Sử dụng biểu đồ ven để minh họa các tập hợp
- Dựa vào biểu đồ ven ta thiết lập được đẳng thức (hoặc phương trình hệ phương trình) từ đó tìm được kết quả bài toán

Trong dạng toán này ta kí hiệu $n(X)$ là số phần tử của tập X .

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Mỗi học sinh của lớp 10A₁ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu, 30 em biết chơi cầu lông, 15 em biết chơi cả hai. Hỏi lớp 10A₁ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông? Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là

$$25 - 15 = 10$$

Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là $30 - 15 = 15$

Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp 10A₁ là $10 + 15 + 15 = 40$

Trong số 220 học sinh khối 10 có 163 bạn biết chơi bóng chuyên, 175 bạn biết chơi bóng bàn còn 24 bạn không biết chơi môn bóng nào cả.

Tìm số học sinh biết chơi cả 2 môn bóng.

Ví dụ 2: Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Lời giải

Gọi a, b, c theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

x là số học sinh chỉ thích hai môn là Văn và Toán

y là số học sinh chỉ thích hai môn là Sử và Toán

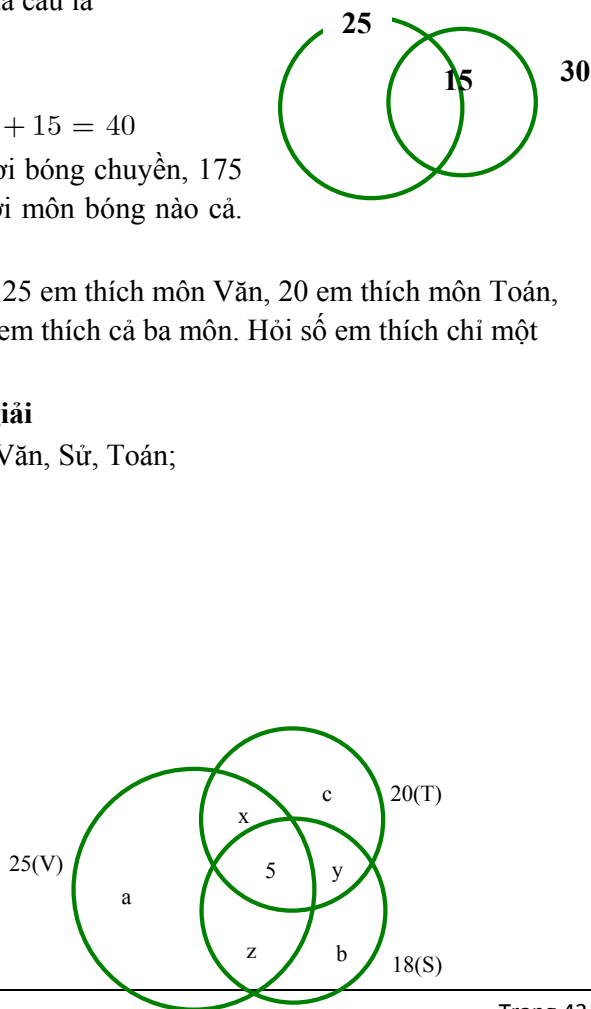
z là số học sinh chỉ thích hai môn là Văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45 - 6 = 39$

Sử dụng biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + x + z + 5 = 25 & (1) \\ b + y + z + 5 = 18 & (2) \\ c + x + y + 5 = 20 & (3) \\ x + y + z + a + b + c + 5 = 39 & (4) \end{cases}$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có



$$a + b + c + 2(x + y + z) + 15 = 63 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có

$$a + b + c + 2(39 - 5 - a - b - c) + 15 = 63$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 20$$

Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Ví dụ 3: Trong lớp 10C₁ có 16 học sinh giỏi môn Toán, 15 học sinh giỏi môn Lý và 11 học sinh giỏi môn Hóa. Biết rằng có 9 học sinh vừa giỏi Toán và Lý, 6 học sinh vừa giỏi Lý và Hóa, 8 học sinh vừa giỏi Hóa và Toán, trong đó chỉ có 11 học sinh giỏi đúng hai môn.

Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp

- Giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa
- Giỏi đúng một môn Toán, Lý hoặc hóa.

Lời giải

Gọi T , L , H lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi môn Toán, Lý, Hóa.

B là tập hợp học sinh giỏi đúng hai môn.

Theo giả thiết ta có

$$n(T) = 16, n(L) = 15, n(H) = 11, n(B) = 11$$

$$n(T \cap L) = 9, n(L \cap H) = 6, n(H \cap T) = 8 \text{ và}$$

- Xét tổng $n(T \cap L) + n(L \cap H) + n(H \cap T)$ thì mỗi phần tử của tập hợp $T \cap L \cap H$ được tính ba lần do đó ta có

$$n(T \cap L) + n(L \cap H) + n(H \cap T) - 3n(T \cap L \cap H) = n(B)$$

Hay $n(T \cap L \cap H) = \frac{1}{3}[n(T \cap L) + n(L \cap H) + n(H \cap T) - n(B)] = 4$ Suy ra có 4 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa.

- Xét $n(T \cap L) + n(L \cap H)$ thì mỗi phần tử của tập hợp $T \cap L \cap H$ được tính hai lần do đó số học sinh chỉ giỏi đúng môn toán là

$$n(T) - [n(T \cap L) + n(H \cap T) - n(T \cap L \cap H)] = 16 - (9 + 8 - 4) = 3$$

Tương tự ta có

Số học sinh chỉ giỏi đúng môn Lý

$$n(L) - [n(T \cap L) + n(L \cap H) - n(T \cap L \cap H)] = 15 - (9 + 6 - 4) = 4$$

Số học sinh chỉ giỏi đúng môn Hóa

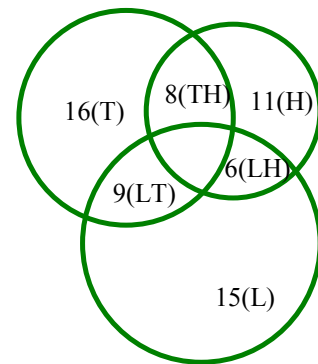
$$n(H) - [n(H \cap T) + n(L \cap H) - n(T \cap L \cap H)] = 11 - (8 + 6 - 4) = 1$$

Suy ra số học sinh giỏi đúng một môn Toán, Lý hoặc hóa là $3 + 4 + 1 = 8$.

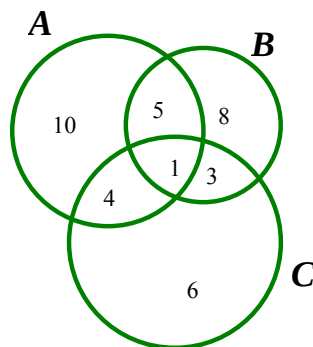
Ví dụ 4. Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; Số ngày có gió: 8 ngày; Số ngày lạnh: 6 ngày; Số ngày mưa và gió: 5 ngày; Số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; Số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; Số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày. Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (Có gió, mưa hay lạnh)?

Lời giải

Ký hiệu A là tập hợp những ngày mưa, B là tập hợp những ngày có gió, C là tập hợp những ngày lạnh.



Theo giả thiết ta có: $n(A) = 10$, $n(B) = 8$, $n(C) = 6$,



$$n(A \cap B) = 5, n(A \cap C) = 4, n(B \cap C) = 3, n(A \cap B \cap C) = 1.$$

Để tìm số ngày thời tiết xấu ta sử dụng biểu đồ Ven(hình vẽ). Ta cần tính $n(A \cup B \cup C)$.

Xét tổng $n(A) + n(B) + n(C)$: trong tổng này, mỗi phần tử của A giao B, B giao C, C giao A được tính làm hai lần nên trong tổng $n(A) + n(B) + n(C)$ ta phải trừ đi tổng

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A).$$

Trong tổng $n(A) + n(B) + n(C)$ được tính $n(A \cap B \cap C)$ 3 lần, trong $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$

cũng được tính $n(A \cap B \cap C)$ 3 lần. Vì vậy

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 10 + 8 + 6 - (5 + 4 + 3) + 1 = 13 \end{aligned}$$

Vậy số ngày thời tiết xấu là 13 ngày.

Nhận xét: Với A, B, C là các tập bất kì khi đó ta luôn có

$$\bullet n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Lớp 10A có 51 bạn học sinh trong đó có 31 bạn học tiếng Anh và 27 bạn học tiếng Nhật. Lớp 10A có bao nhiêu bạn học cả tiếng Anh và tiếng Nhật?

- A. 7. B. 9. C. 5. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Số học sinh học cả tiếng Anh và tiếng Nhật của lớp 10A là $31 + 27 - 51 = 7$ bạn.

Câu 2. Lớp 10A có 45 học sinh, trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa được xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt?

- A. 10. B. 35. C. 25. D. 45.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là tập hợp học sinh được xếp loại học lực giỏi .

Gọi B là tập hợp học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt .

Khi đó $A \cap B$ là tập hợp học sinh vừa được xếp loại học lực giỏi , vừa có hạnh kiểm tốt .

$A \cup B$ là tập hợp học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt .

Ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 20 - 10 = 25$.

Câu 3. Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được học sinh giỏi vừa được hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hay hạnh kiểm tốt.

A. 20 .

B. 30 .

C. 35 .

D. 25 .

Lời giải

Chọn B

Đề có sự không thống nhất trong diễn đạt nên tôi sửa đề bài toán lại thành:

Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được xếp loại học lực giỏi vừa được xếp loại hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt.

Từ giả thiết bài toán, ta có:

Số các học sinh chỉ có học lực giỏi là: $15 - 10 = 5$.

Số các học sinh chỉ được xếp loại hạnh kiểm tốt là: $25 - 10 = 15$.

Tổng số học sinh có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là $10 + 5 + 15 = 30$.

Vậy có 30 học sinh được khen thưởng.

Câu 4: Lớp 10B₁ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp 10B₁ là:

A. 9.

B. 10.

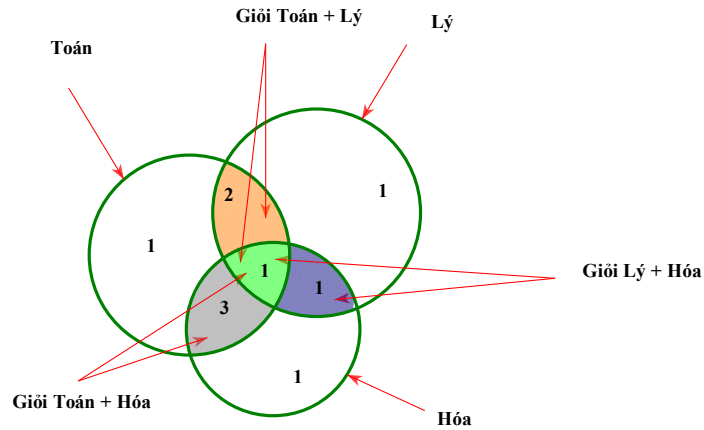
C. 18.

D. 28.

Lời giải.

Chọn B.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:



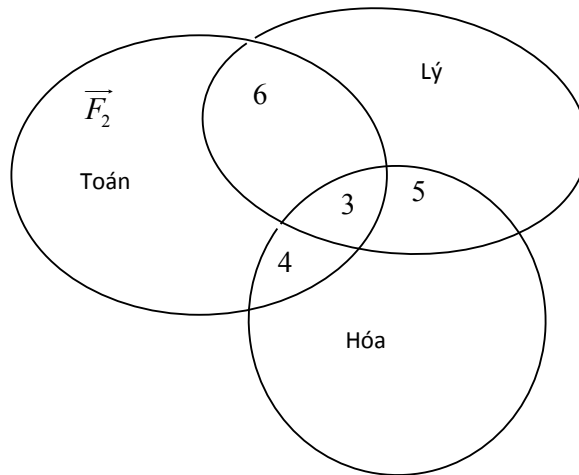
Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$

- Câu 5.** Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn của lớp 10A là
- A. 19. B. 18. C. 31. D. 49.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo giả thiết đề bài cho, ta có biểu đồ Ven:



Dựa vào biểu đồ Ven, ta có học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn của lớp 10A là

Số học sinh giỏi Toán: $6 + 4 + 3 = 13$.

Số học sinh giỏi Lý: $6 + 5 + 3 = 14$.

Số học sinh giỏi Hóa: $4 + 5 + 3 = 12$.

Ta lại có:

Số học sinh giỏi cả Toán và Lý: 6.

Số học sinh giỏi cả Toán và Hóa: 4.

Số học sinh giỏi cả Hóa và Lý: 5.

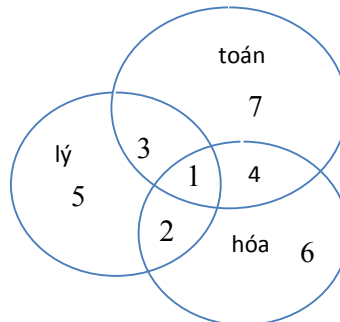
Và số học sinh giỏi cả Toán, Lý và Hóa là 3.

Số học sinh giỏi hơn một môn là $4 + 6 + 5 + 3 = 18$.

- Câu 6.** Lớp 10^A có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hoá, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hoá, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hoá, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hoá. Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp 10^A là
- A. 9. B. 18. C. 10. D. 28.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Số học sinh giỏi toán, lý mà không giỏi hóa: $3 - 1 = 2$.

Số học sinh giỏi toán, hóa mà không giỏi lý: $4 - 1 = 3$.

Số học sinh giỏi hóa, lý mà không giỏi toán: $2 - 1 = 1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn lý: $5 - 2 - 1 - 1 = 1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn hóa: $6 - 3 - 1 - 1 = 1$.

Số học sinh chỉ giỏi môn toán: $7 - 3 - 2 - 1 = 1$.

Số học sinh giỏi ít nhất một là số học sinh giỏi 1 môn hoặc 2 môn hoặc cả 3 môn:
 $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 10$.

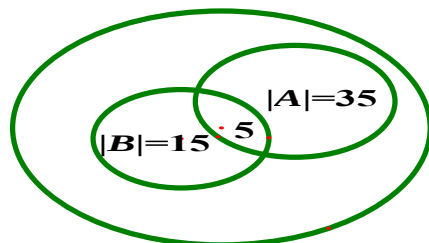
- Câu 7:** Một lớp có 45 học sinh. Mỗi em đều đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 35 em đăng ký môn bóng đá, 15 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn?

A. 5. B. 10. C. 30. D. 25.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì: Gọi A là tập hợp các học sinh đăng ký chơi bóng đá, B là tập hợp các học sinh đăng ký chơi bóng chuyền. Dựa vào biểu đồ Ven, ta có: số học sinh đăng ký cả 2 môn là $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 35 + 15 - 45 = 5$.



Đáp án B sai vì học sinh tính $45 - 35 = 10$.

Đáp án C sai vì học sinh tính $45 - 15 = 30$.

Đáp án D sai vì học sinh tính $(35 + 15) : 2 = 25$.

Câu 8. Trong kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018 – 2019 của trường THPT Triệu Quang Phục, kết quả có 86 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 61 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật Lí và 76 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa Học, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật Lí, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật Lí và Hóa Học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa Học, 18 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật Lí và Hóa Học. Có 782 thí sinh mà cả ba môn đều không điểm giỏi. Hỏi trường THPT Triệu Quang Phục có bao nhiêu thí sinh tham dự kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018 – 2019?

A. 920.

B. 912.

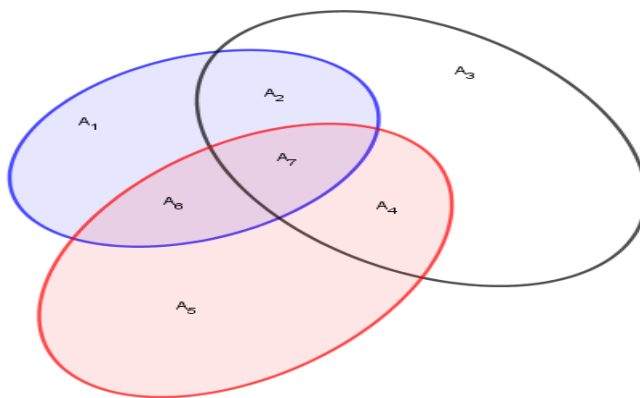
C. 925.

D. 889.

Lời giải

Chọn D

Ta biểu diễn các tập hợp như trong biểu đồ: Thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán được biểu diễn màu trắng, Thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật Lí được biểu diễn màu tím. Thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa được biểu diễn màu đỏ. Mỗi tập hợp nhỏ bên trong gọi tên như trong hình.



Ta có số thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật Lí và Hóa Học là $n(A_8) = 18$.

45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật Lí ta được $n(A_7) + n(A_8) = 45$.

32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa Học ta được $n(A_4) + n(A_8) = 32$.

21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật Lí và Hóa Học ta được $n(A_6) + n(A_8) = 21$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi chỉ hai môn là

$$\begin{aligned} n(A_7) + n(A_4) + n(A_6) &= [n(A_7) + n(A_8)] + [n(A_4) + n(A_8)] + [n(A_6) + n(A_8)] - 3n(A_8) \\ &= 45 + 32 + 21 - 3 \cdot 18 = 44 \end{aligned}$$

86 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán ta được $n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_8) = 86$.

61 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật Lí ta được $n(A_1) + n(A_6) + n(A_7) + n(A_8) = 61$.

76 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa Học ta được $n(A_4) + n(A_6) + n(A_7) + n(A_5) = 76$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi chỉ một môn là

$$\begin{aligned}n(A_1) + n(A_3) + n(A_5) &= 86 + 61 + 76 - 3n(A_7) - 2[n(A_6) + n(A_4) + n(A_2)] \\&= 86 + 61 + 76 - 3.18 - 2.44 = 81\end{aligned}$$

Số thí sinh đạt điểm giỏi gồm $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) + n(A_6) + n(A_7)$

$$= n(A_1) + n(A_3) + n(A_5) + n(A_6) + n(A_4) + n(A_2) + n(A_7) = 81 + 44 + 18 = 143$$

Trường THPT Triệu Quang Phục có số thí sinh tham dự kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018 – 2019 bao gồm số thí sinh đạt điểm giỏi và số thí sinh không đạt điểm giỏi nên bằng: $782 + 143 = 925$ thí sinh.

Cách 2:

Ta có số thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật Lí và Hóa Học là $n(A_7) = 18$.

45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật Lí ta được

$$n(A_7) + n(A_2) = 45 \Rightarrow n(A_2) = 45 - 18 = 27.$$

32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa Học ta được

$$n(A_4) + n(A_7) = 32 \Rightarrow n(A_4) = 32 - 18 = 14.$$

21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật Lí và Hóa Học ta được

$$n(A_6) + n(A_7) = 21 \Rightarrow n(A_6) = 21 - 18 = 3.$$

86 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán ta được

$$n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_7) = 86 \Rightarrow n(A_3) = 86 - 18 - 27 - 14 = 27.$$

61 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật Lí ta được

$$n(A_1) + n(A_6) + n(A_7) + n(A_2) = 61 \Rightarrow n(A_1) = 61 - 18 - 27 - 3 = 13.$$

76 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa Học ta được

$$n(A_4) + n(A_6) + n(A_7) + n(A_5) = 76 \Rightarrow n(A_5) = 76 - 18 - 3 - 14 = 41.$$

Số thí sinh đạt điểm giỏi gồm $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) + n(A_6) + n(A_7)$

$$= 18 + 3 + 14 + 27 + 41 + 27 + 13 = 143.$$

Câu 9. Đầu năm học; thầy chủ nhiệm phát biểu điều tra sở thích về 3 môn Văn; Sử; Địa. Biết rằng mỗi bạn đều thích ít nhất một trong ba môn đó. Kết quả là: Có 4 bạn thích cả ba môn; có 9 bạn thích Văn và Sử; có 5 bạn thích Sử và Địa; có 11 bạn thích Văn và Địa; có 24 bạn thích Văn; có 19 bạn thích Sử và có 22 bạn thích Địa? Hỏi có bao nhiêu bạn không thích Địa?

A. 21.

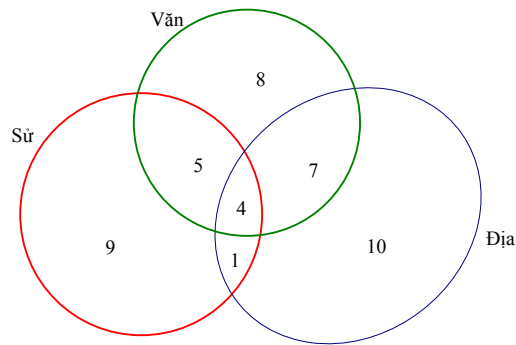
B. 23.

C. 24.

D. 22.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào biểu đồ Ven;ta có:

- Số học sinh chỉ thích hai môn Văn và Sử là 5 .
- Số học sinh chỉ thích hai môn Sử và Địa là 1.
- Số học sinh chỉ thích hai môn Văn và Địa là 7 .
- Số học sinh chỉ thích một môn Văn là 8 .
- Số học sinh chỉ thích một môn Sử là 9 .
- Số học sinh chỉ thích một môn Địa là 10 .

Do đó;số bạn không thích môn Địa là $9 + 5 + 8 = 22$.

Câu 10. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 24 học sinh giỏi Toán, 20 học sinh giỏi Văn và 12 học sinh giỏi không giỏi môn nào trong hai môn Toán và Văn. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn?

A. 8.

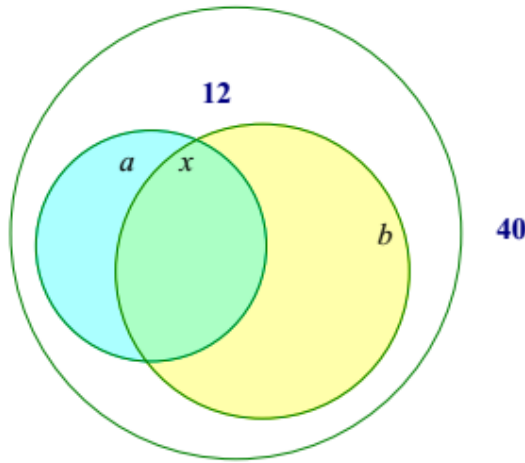
B. 4.

C. 16.

D. 18.

Lời giải

Chọn C



Gọi a là số học sinh giỏi Văn không giỏi Toán, b là số học sinh giỏi Toán không giỏi Văn,

x là số học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + x = 20 \\ b + x = 24 \\ a + b + x + 12 = 40 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 4, b = 8, x = 16$

Vậy có 16 học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn

Câu 11. Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì được kết quả như sau:

Bộ phim A : có 28 người đã xem.

Bộ phim B : có 26 người đã xem.

Bộ phim C : có 14 người đã xem.

Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B

Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C

Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C

Có 2 người đã xem cả ba bộ phim $A; B$ và C .

Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim $A; B; C$ là

A. 55.

B. 45.

C. 32.

D. 51.

Lời giải

Chọn B

Số người đã xem phim là: $28 + 26 + 14 - 4 - 8 - 3 + 2 = 55$.

Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba phim là: $100 - 55 = 45$.

Câu 12. Trong kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018-2019 của trường THPT Triệu Quang Phục, kết quả có 86 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 61 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí và 76 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 18 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 782 thí sinh mà cả ba môn đều không đạt điểm giỏi. Hỏi trường THPT Triệu Quang Phục có bao nhiêu thí sinh tham dự kì thi đánh giá năng lực lần I năm học 2018-2019?

A. 920.

B. 912.

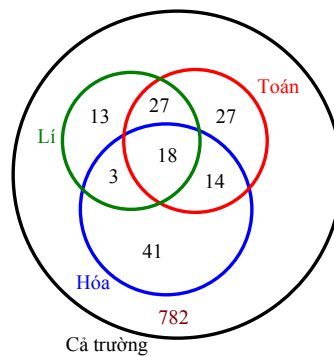
C. 925.

D. 889.

Lời giải

Chọn C

Ta có biểu đồ Ven:



Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 2 môn Toán và Lí là $45 - 18 = 27$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 2 môn Toán và Hóa là $32 - 18 = 14$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 2 môn Lí và Hóa là $21 - 18 = 3$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 1 môn Toán là $86 - 18 - 14 - 27 = 27$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 1 môn Lí là $61 - 18 - 27 - 3 = 13$.

Số thí sinh đạt điểm giỏi đúng 1 môn Toán là $76 - 18 - 14 - 3 = 41$.

Từ đó ta có số thí sinh tham dự kì thi là $13 + 3 + 41 + 86 + 782 = 925$.

Câu 13. Học sinh khối 10 năm học 2018 – 2019 của **Trường Gia Bình số 1** có 200 học sinh theo khối A1, mỗi học sinh đều giỏi 1 trong 3 môn: Toán, Lí, Anh. Có 59 học sinh giỏi Anh, số học sinh giỏi Toán gấp bốn số học sinh giỏi Lí, có 4 học sinh giỏi Lí và Anh, không có học sinh nào giỏi Lí và Toán, có 5 học sinh giỏi Anh và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh giỏi Toán?

A. 96.

B. 100.

C. 120.

D. 110.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là số học sinh giỏi Toán.

Suy ra số học sinh giỏi Lí là $\frac{x}{4}$; số học sinh chỉ giỏi duy nhất Lí là $\frac{x}{4} - 4$; số học sinh chỉ giỏi duy nhất Toán là $x - 5$.

$$\text{Do đó ta có: } 59 + \frac{x}{4} - 4 + x - 5 = 200 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x = 150 \Leftrightarrow x = 120.$$

Vậy có 120 học sinh giỏi Toán.

Dạng 4. Chứng minh $X \subset Y$. Chứng minh $X = Y$

1. Phương pháp

- ☐ Chứng minh $X \subset Y \Leftrightarrow (\forall x, x \in X \Rightarrow x \in Y)$
- ☐ Chứng minh $X = Y$

Cách 1: $X = Y \Leftrightarrow (\forall x, x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$

Cách 2: Chứng minh $X \subset Y$ và $Y \subset X$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho các tập hợp $A = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ và

$$C = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- a) Chứng minh rằng $A = B$.
- b) $A \subset C$

Lời giải

a) • Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = \frac{\pi}{3} - \pi + (k_0 + 1)\pi = -\frac{2\pi}{3} + (k_0 + 1)\pi.$$

Vì $k_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ do đó $x \in B$ suy ra $A \subset B$ (1).

• $\forall x \in B \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z} : x = -\frac{2\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = -\frac{2\pi}{3} + \pi + (k_0 - 1)\pi = \frac{\pi}{3} + (k_0 - 1)\pi.$$

Vì $k_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ do đó $x \in A$ suy ra $B \subset A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

b) Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{2(k_0 + 1)\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2(k_0 + 1)\pi}{2}.$$

Vì $k_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(k_0 + 1) \in \mathbb{Z}$ do đó $x \in C$

Suy ra $A \subset C$.

Ví dụ 2: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \subset A$ b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

Lời giải

a) Ta có $\forall x, x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A$

Suy ra $(A \setminus B) \subset A$

b) Ta có $x \in A \cap (B \setminus A) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in (B \setminus A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Suy ra $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

c) Ta có $x \in A \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in (B \setminus A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cup B$

Ví dụ 3: Cho các tập hợp A, B và C . Chứng minh rằng

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

Lời giải

a) Ta có $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Suy ra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Ta có $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cap C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \in A \\ x \in C \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Suy ra $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\text{c) Ta có } x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \notin C \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$$

Suy ra $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

BÀI 4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. CÁC TẬP HỢP SỐ ĐÃ HỌC

1. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

2. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Các số $-1, -2, -3, \dots$ là các số nguyên âm.

Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

3. Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$

Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ biểu diễn cùng một số hữu tỉ khi và chỉ khi $ad = bc$.

Số hữu tỉ còn biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

4. Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$

Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

Tập hợp các số thực gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ.

II. CÁC TẬP HỢP CON THƯỜNG DÙNG CỦA $\mathbb{R}$

Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tên gọi, ký hiệu	Tập hợp	Biểu diễn
Đoạn	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Khoảng	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	

Khoảng $(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	
Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$	
Nửa khoảng $(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm giao và hợp các khoảng, nửa khoảng, đoạn

1. Phương pháp

- Để tìm $A \cap B$ ta làm như sau
 - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
 - Biểu diễn các tập A, B trên trục số (phần nào không thuộc các tập đó thì gạch bỏ)
 - Phần không bị gạch bỏ chính là giao của hai tập hợp A, B
- Để tìm $A \cup B$ ta làm như sau
 - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
 - Tô đậm các tập A, B trên trục số
 - Phần tô đậm chính là hợp của hai tập hợp A, B

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai tập hợp $A = (-7 ; 3)$, $B = (-4 ; 5)$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$

Lời giải

Ta có: $A \cap B = (-4 ; 3)$, $A \cup B = (-7 ; 5)$

Ví dụ 2: Cho số thực $a < 0$. Tìm $a(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$

Hướng dẫn giải

$$(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow 9a > \frac{4}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} < a < 0 \end{cases}.$$

Vì $a < 0$ nên giá trị của a cần tìm là $-\frac{2}{3} < a < 0$.

Ví dụ 3: Tìm điều kiện của m để $A \cap B$ là một khoảng, biết $A = (m; m+2)$; $B = (4; 7)$.

Lời giải

$$A \cap B \text{ là một khoảng} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 < m+2 \leq 7 \\ m \leq 4 < 7 \leq m+2 \\ 4 \leq m < 7 \leq m+2 \\ 4 \leq m < m+2 \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m \leq 4 \\ 5 \leq m < 7 \Leftrightarrow 2 < m < 7. \\ 4 \leq m \leq 5 \end{cases}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tập $(-\infty; -3) \cap [-5; 2)$ bằng

A. $[-5; -3)$.

B. $(-\infty; -5]$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-3; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $(-\infty; -3) \cap [-5; 2) = [-5; -3)$.

Câu 2. Hình vẽ sau đây là biểu diễn của tập hợp nào?



A. $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2] \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 3. Kết quả của $[-4; 1) \cup (-2; 3]$ là

A. $(-2; 1)$

B. $[-4; 3]$

C. $(-4; 2]$

D. $(1; 3]$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Gọi $x \in [-4; 1) \cup (-2; 3]$, ta có: $\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ -2 < x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3 \Rightarrow \text{Chọn B.}$

Cách 2: Biểu diễn hai tập hợp $[-4; 1)$ và $(-2; 3]$ trên trục số rồi tìm hợp của hai tập hợp, Chọn B.

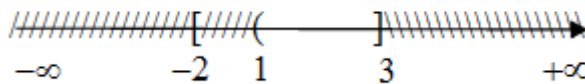
Câu 4. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [-2; +\infty)$. B. $A \cap B = (1; 3]$. C. $A \cap B = [1; 3]$. D. $A \cap B = (1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biểu diễn hai tập hợp A và B ta được:



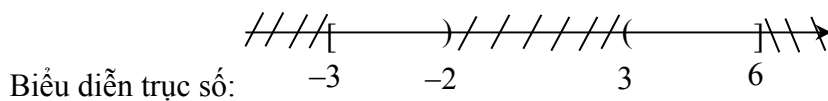
Vậy $A \cap B = (1; 3]$.

Câu 5. Cho các tập hợp $M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

A. $(-\infty; -2) \cup [3; 6]$. B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.
C. $[-3; -2) \cup (3; 6]$. D. $(-3; -2) \cup (3; 6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Khi đó: $M \cap N = [-3; -2) \cup (3; 6]$.

Câu 6. Cho $A = (-\infty; 2]$, $B = [2; +\infty)$, $C = (0; 3)$. Chọn phát biểu **sai**.

A. $A \cap C = (0; 2]$. B. $B \cup C = (0; +\infty)$. C. $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $B \cap C = [2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $A \cup B = \mathbb{R}$.

Câu 7. Cho $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Khi đó tập $(A \cup B) \cap C$ là

A. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $[3; 4)$.

D. $[3; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Suy ra $(A \cup B) \cap C = [3; 4)$.

Câu 8. Cho $A = (-\infty; 5]$, $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [0; 5)$.

B. $A \cap B = (0; 5)$.

C. $A \cap B = (0; 5]$.

D. $A \cap B = (-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$A \cap B = (0; 5].$$

Câu 9. Cho $A = (1; 9)$, $B = [3; +\infty)$, câu nào sau đây đúng?

A. $A \cap B = [1; +\infty)$.

B. $A \cap B = (9; +\infty)$.

C. $A \cap B = (1; 3)$.

D. $A \cap B = [3; 9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$A \cap B = (1; 9) \cap [3; +\infty) = [3; 9).$$

Câu 10. Cho ba tập hợp: $X = (-4; 3)$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\}$, $Z = \{x \in \mathbb{R} : (x + 3)(x - 4) = 0\}$.

Chọn câu đúng nhất:

A. $X \subset Y$.

B. $Z \subset X$.

C. $Z \subset X \cup Y$.

D. $Z \subset Y$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$$\square Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\} = (-2; 5); Z = \{-3; 4\}.$$

$$\square \begin{cases} -3 \in X \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow X \not\subset Y \Rightarrow A \text{ sai.}$$

$$\square \begin{cases} 4 \in Z \\ 4 \notin X \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset X \Rightarrow B \text{ sai.}$$

$$\square \begin{cases} -3 \in Z \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset Y \Rightarrow D \text{ sai.}$$

$$\square X \cup Y = (-4; 5) \Rightarrow \{-3; 4\} \subset (-4; 5). \text{ Vậy } Z \subset X \cup Y$$

Vậy C đúng.

Câu 11. Tập hợp nào dưới đây là giao của hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$?

- A. $(-1; 2)$. B. $[0; 2)$. C. $(-2; 3)$. D. $[-1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta viết lại hai tập hợp như sau: $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\} = [-1; 3)$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\} = (-2; 2).$$

$$\text{Suy ra: } A \cap B = [-1; 2).$$

Câu 12. Cho $A = [1; +\infty)$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$, $C = (0; 4)$. Tập $(A \cup B) \cap C$ có bao nhiêu phần tử là số nguyên.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $(A \cup B) \cap C = [1; 4)$ có 3 phần tử là số nguyên.

Câu 13. Cho hai tập hợp $A = (-3; 3)$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

- A. $A \cup B = (-3; +\infty)$. B. $A \cup B = [-3; +\infty)$. C. $A \cup B = [-3; 0)$. D. $A \cup B = (0; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Thực hiện phép hợp trên hai tập hợp A và B ta được: $A \cup B = (-3; +\infty)$.

Câu 14. Kết quả của phép toán $(-\infty; 1) \cap [-1; 2)$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $[-1; 1)$. D. $(-1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $(-\infty; 1) \cap [-1; 2) = [-1; 1)$.

Câu 15. Cho $A = (2; +\infty)$, $B = (m; +\infty)$. Điều kiện cần và đủ của m sao cho B là tập con của A là

A. $m \leq 2$.

B. $m = 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có: $B \subset A$ khi và chỉ khi $\forall x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow m \geq 2$.

Câu 16. Cho $A = (-\infty; m+1]$; $B = (-1; +\infty)$. Điều kiện để $(A \cup B) = \mathbb{R}$ là

A. $m > -1$.

B. $m \geq -2$.

C. $m \geq 0$.

D. $m > -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $(A \cup B) = \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq m+1 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 17. Cho các tập hợp khác rỗng $\left[m-1; \frac{m+3}{2}\right]$ và $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của m để $A \cap B \neq \emptyset$ là

A. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

B. $(-2; 3)$.

C. $(-\infty; -2) \cup [3; 5)$.

D. $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Để } A \cap B \neq \emptyset \text{ thì điều kiện là } \begin{cases} m-1 < \frac{m+3}{2} \\ m-1 < -3 \\ \frac{m+3}{2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m < -2 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -2) \cup [3; 5)$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B \subset A$.

A. $m = 1$.

B. $1 < m < 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có: } B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 2 \end{cases}. \text{ Vậy } 1 \leq m \leq 2.$$

Câu 19. Cho m là một tham số thực và hai tập hợp $A = [1-2m; m+3]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8-5m\}$. Tất cả các giá trị m để $A \cap B = \emptyset$ là

A. $m \geq \frac{5}{6}$.

B. $m < -\frac{2}{3}$.

C. $m \leq \frac{5}{6}$.

D. $-\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

$$\text{Ta có } A = [1-2m; m+3], B = [8-5m; +\infty).$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 < 8-5m \\ 1-2m \leq m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m < 5 \\ 3m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5}{6} \\ m \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}.$$

Câu 20. Cho hai tập $A = [0; 5]$; $B = (2a; 3a+1]$, với $a > -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để $A \cap B \neq \emptyset$.

A. $\begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a < -\frac{1}{3} \end{cases}$.

C. $-\frac{1}{3} \leq a < \frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < 3a+1 \\ 3a+1 \geq 0 \\ 2a < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a \geq -\frac{1}{3} \\ a < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{3} \\ -1 < a < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq a < \frac{5}{2}.$$

Dạng 2: Xác định hiệu và phần bù các khoảng, đoạn, nửa khoảng**1. Phương pháp**

- Để tìm $A \setminus B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
- Biểu diễn tập A trên trục số (gạch bỏ phần không thuộc tập A), gạch bỏ phần thuộc tập B trên trục số
- Phần không bị gạch bỏ chính là $A \setminus B$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$

a) Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

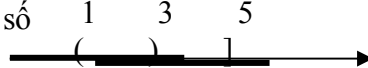
b) Tìm $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

c) Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$

Lời giải

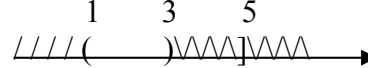
a) Ta có: $A = (-\infty; 3)$ $B = (1; 5]$ $C = [-2; 4]$.

b) • Biểu diễn trên trục số



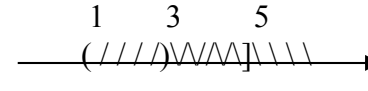
Suy ra $A \cup B = (-\infty; 5]$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \cap B = (1; 3)$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \setminus B = (-\infty; 1]$

c) Bằng cách biểu diễn trên trục số ta có

$$A \cap C = [-2; 3) \text{ và } B \cup C = [-2; 5]$$

$$\text{Suy ra ta có } (B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3; 5]$$

Nhận xét: Việc biểu diễn trên trục số để tìm các phép toán tập hợp ta làm trên giấy nháp và trình bày kết quả vào.

Ví dụ 2: Xác định các tập số sau và biểu diễn trên trục số:

a) $(-4; 2] \cap [0; 4)$

b) $(0; 3) \cup [1; 4]$

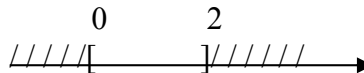
c) $[-4; 3] \setminus [-2; 1]$

d) $\mathbb{R} \setminus [1; 3]$

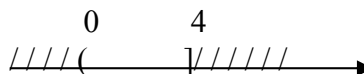
Lời giải

a) Ta có $(-4; 2] \cap [0; 4) = [0; 2]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



b) Ta có $(0; 3) \cup [1; 4] = (0; 4]$



Biểu diễn tập đó trên trục số là

c) Ta có $[-4; 3] \setminus [-2; 1] = [-4; -2) \cup (1; 3]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là

d) Ta có $\mathbb{R} \setminus [1; 3] = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm m để

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $B \subset A$

c) $A \subset C_{\mathbb{R}} B$

d) $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset$

Lời giải

Ta có biểu diễn trên trục số các tập A và B trên hình vẽ

a) Ta có $A \cap B = \emptyset$

$$\Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B \subset A \Leftrightarrow 3m + 3 < m \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$

Vậy $m < -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C_{\mathbb{R}} B = (-\infty; 3m - 1) \cup (3m + 3; +\infty)$

Suy ra $A \subset C_{\mathbb{R}} B \Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $C_{\mathbb{R}} A = [m; +\infty)$ suy ra $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 3m + 3 \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$

Vậy $m \geq -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A = [-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}} A$ bằng

A. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

B. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

C. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 2. Phần bù của $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$C_{\mathbb{R}}B = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

Câu 3. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

- A. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$. B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập hợp chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Câu 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$. Khi đó $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$ bằng

- A. $[-2; 3)$. B. $[3; 5]$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[-2; 5]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$A = (-\infty; 3)$, $B = (1; 5]$, $C = [-2; 4]$.

$(B \cup C) \setminus (A \cap C) = \{(1; 5] \cup [-2; 4]\} \setminus \{(-\infty; 3) \cap [-2; 4]\} = [-2; 5] \setminus [-2; 3) = [3; 5]$.

Câu 5. Cho $A = (-\infty; 1]$; $B = [1; +\infty)$; $C = (0; 1]$. Câu nào sau đây **sai**?

- A. $(A \cup B) \setminus C = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$. B. $A \cap B \cap C = \{-1\}$.
C. $A \cup B \cup C = (-\infty; +\infty)$. D. $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $A \cap B = \{1\} \Rightarrow A \cap B \cap C = \{1\}$.

Câu 6. Cho $A = [-1; 3]$; $B = (2; 5)$. Tìm mệnh đề **sai**.

- A. $B \setminus A = [3; 5)$. B. $A \cap B = (2; 3]$. C. $A \setminus B = [-1; 2]$. D. $A \cup B = [-1; 5]$.

Lời giải

Chọn D.

Mệnh đề đúng: $A \cup B = [-1; 5)$.

Câu 7. Cho các tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. Tập $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là :

- A. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$. B. $(-1; 3]$.
C. $[-1; 3)$. D. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $A = [-1; +\infty)$; $B = (-\infty; 3)$. Khi đó

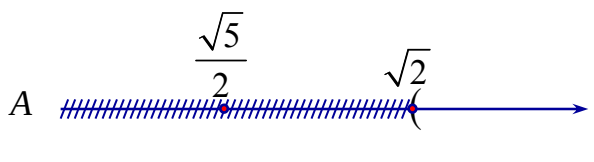
$$A \cap B = [-1; 3) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty).$$

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = (\sqrt{2}; +\infty)$ và $B = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ là

- A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$. B. $(\sqrt{2}; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A \cap B = \emptyset$, $B \setminus A = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. 

Do đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ 

Câu 9. Cho $A = (-1; 3)$ và $B = [0; 5]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ là

- A. $(-1; 3)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-1; 3) \setminus \{0\}$. D. $(-1; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

C1: Ta có: $A \cap B = [0; 3)$ và $A \setminus B = (-1; 0)$. Do đó:

$$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = [0; 3) \cup (-1; 0) = (-1; 3).$$

C2: Ta có: $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ nên $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (-1; 3)$.

Câu 10. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -2)$ trong $(-\infty; 4)$.

- A. $(-2; 4)$. B. $(-2; 4]$. C. $[-2; 4)$. D. $[-2; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } C_{(-\infty; 4)}(-\infty; -2) = (-\infty; 4) \setminus (-\infty; -2) = [-2; 4).$$

Câu 11. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

- A. $[-10; 10)$. B. $[-10; 10] \setminus \{0\}$.
C. $[-10; 0) \cup [0; 10)$. D. $[-10; 0) \cup (0; 10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\mathbb{R} \setminus (-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\} = [-10; 10] \setminus \{0\}.$$

Câu 12. Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X \setminus Y = \{7; 15\}$ và $X \cap Y = (-1; 2)$. Xác định số phần tử là số nguyên của X .

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Do } X \setminus Y = \{7; 15\} \Rightarrow \{7; 15\} \subset X.$$

$$\text{Mà } X \cap Y = (-1; 2) \Rightarrow (-1; 2) \subset X.$$

$$\text{Suy ra } X = (-1; 2) \cup \{7; 15\}.$$

Vậy số phần tử nguyên của tập X là 4.

Câu 13. Cho $A = (-\infty; 2]$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \setminus B$.

- A. $A \setminus B = (-\infty; 0]$. B. $A \setminus B = (2; +\infty)$. C. $A \setminus B = (0; 2]$. D. $A \setminus B = (-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biểu diễn hai tập hợp A và B lên trục số ta có kết quả $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$, $B = (-1; 3)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $A \cap B = (-1; 2]$.

B. $A \setminus B = (-3; -1)$.

C. $C_{\mathbb{R}} B = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

D. $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\} = (-3; 2] \Rightarrow (-3; 2] \cap (-1; 3) = (-1; 2].$$

Câu 15. Cho $A = [a; a+1)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a] \cup [a+1; +\infty)$.

B. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a) \cup [a+1; +\infty)$.

C. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a] \cup (a+1; +\infty)$.

D. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a) \cup (a+1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } C_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; a) \cup [a+1; +\infty).$$

Câu 16. Cho các tập hợp khác rỗng $A = (-\infty; m)$ và $B = [2m-2; 2m+2]$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset$.

A. $m \geq 2$.

B. $m < -2$.

C. $m \geq -2$.

D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } C_{\mathbb{R}} A = [m; +\infty).$$

$$\text{Để } C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m+2 \geq m \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Câu 17. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx-3| = mx-3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4=0\}$. Tìm m để $B \setminus A = B$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

B. $m < \frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } x \in A \Leftrightarrow mx-3 \geq 0.$$

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } B \setminus A = B \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \frac{3}{m} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \frac{3}{m} < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 0 < m < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

BÀI 5. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Số gần đúng: Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối: Giả sử $\bar{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $|\bar{a} - a|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\bar{a}$ và a . Ta gọi $|\bar{a} - a|$ là sai số tuyệt đối của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a , tức là $\Delta_a = |\bar{a} - a|$

Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$ thì $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Ta nói a là số gần đúng của $\bar{a}$ với **độ chính xác d** , và qui ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$. Như vậy, khi viết $\bar{a} = a \pm d$ ta hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Bởi vậy d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\bar{a}$ càng ít. Thành thử d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

b) Sai số tương đối: Sai số tương đối của số gần đúng a là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, kí hiệu $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$. Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì độ chính xác của phép đo đạc hoặc tính toán càng lớn. Ta thường viết δ_a dưới dạng phần trăm.

3. Qui tròn số gần đúng

- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng qui tròn.

Ví dụ 1: Nếu quy tròn số 8216,3 đến hàng chục thì chữ số ở hàng qui tròn là 1, chữ số ngay sau đó là 6; do $6 > 5$ nên ta có số quy tròn là 8200.

Ví dụ 2: Nếu quy tròn số 3,654 đến hàng phần trăm (tức chữ số thứ 2 sau dấu phẩy) thì chữ số ngay sau hàng qui tròn là 4; do $4 < 5$ nên số quy tròn là 3,65.

Trong hai ví dụ trên, sai số tuyệt đối là

$$|8216,4 - 8200| = 16 < 20; |3,654 - 3,65| = 0,004 < 0,005$$

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn. Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

Chú ý: Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\bar{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn **một đơn vị** của hàng đó.

Chẳng hạn: Cho $\bar{a} = 1,236 \pm 0,002$ và ta phải quy tròn số 1,236. Ta thấy, $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên

hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số 1,236 đến hàng phần trăm. Kết quả là $\overline{a} \approx 1,24$

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

a) Chữ số chắc: Cho số gần đúng a của số $\overline{a}$ với độ chính xác d . Trong số a , một chữ số đgl **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét: Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

Ví dụ: Trong cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là 1379425 người ± 300 người.

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng trăm (chữ số 4) không là chữ số chắc, chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1,3,7,9 và các chữ số 4,2,5 đều là không chắc.

b) Dạng chuẩn của số gần đúng: Cách viết chuẩn của một số gần đúng là cách viết mà tất cả các chữ số của a là chữ số chắc.

☐ Nếu số gần đúng là số thập phân (không nguyên) thì dạng chuẩn là dạng mọi chữ số của nó là chữ số chắc.

Ví dụ: Cho một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là $2,236(\sqrt{5} \approx 2,236)$. Ở đây hàng thấp nhất chữ số chắc là hàng phần nghìn nên độ chính xác của nó là $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0,0005$. Do đó ta viết $2,236 - 0,0005 \leq \sqrt{5} \leq 2,236 + 0,0005$.

☐ Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A \cdot 10^k$, trong đó A là số nguyên, k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in \mathbb{N}$). (Từ đó, mọi chữ số của A là chữ số chắc)

Ví dụ: Số dân của Việt Nam (năm 2005) vào khoảng $83 \cdot 10^6$ người (83 triệu người). Ở đây, $k = 6$ nên độ chính xác của số gần đúng là $\frac{1}{2} \cdot 10^6 = 500000$. Do đó ta biết được số dân của Việt Nam trong khoảng từ 82,5 triệu người đến 83,5 triệu người.

5. Kí hiệu khoa học của một số

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha \cdot 10^n$, trong đó $1 \leq |\alpha| < 10, n \in \mathbb{Z}$ (Quy ước rằng nếu $n = -m$, với m là số nguyên dương thì $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$). Dạng như thế được gọi là kí hiệu khoa học của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé. Số mũ n của 10 trong kí hiệu khoa học của một số cho thấy độ lớn (bé) của số đó. Ví dụ: Khối lượng trái đất viết dưới dạng kí hiệu khoa học là $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Biết số gần đúng a , và độ chính xác d . Ước lượng sai số tương đối, các chữ số chắc, viết dưới dạng chuẩn.

1. Phương pháp

- Ước lượng sai số tương đối: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|}$
- Chữ số chắc: Từ $\frac{10^n}{2} < d < \frac{10^{n+1}}{2}$ suy ra n và suy ra các chữ số chắc.

Ví dụ mẫu 1: Biết số gần đúng là 65894256 có độ chính xác $d = 140$.

- a) Ước lượng sai số tương đối của số đó
- b) Viết các chữ số chắc (đáng tin)
- c) Viết số đó dưới dạng chuẩn

Hướng dẫn

- a) Ước lượng sai số tương đối: $\delta_a \leq \frac{d}{|a|} = \frac{140}{65894256} = 0,0000021$, tức không vượt quá 0,0000021
- b) $\frac{10^2}{2} < 140 < \frac{10^3}{2}$ nên chữ số hàng nghìn trở lên là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 6,5,8,9,4.
- c) Viết số đó dưới dạng chuẩn là 65894.10^3 .

Ví dụ mẫu 2: Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

Lời giải

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ với độ chính xác $d = 0,5$

Vì sai số tuyệt đối $\Delta_a \leq d = 0,5$ nên sai số tương đối $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,5}{996} \approx 0,05\%$

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là 0,05%.

Dạng 2. Biết số gần đúng a và sai số tương đối không vượt quá c . Ước lượng sai số tuyệt đối, các chữ số chắc, viết dưới dạng chuẩn.

Phương pháp: Ước lượng sai số tuyệt đối $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a \leq |a| \cdot c$

Ví dụ mẫu 1: Biết số gần đúng 327,5864 có sai số tương đối không vượt quá $\frac{1}{10000}$.

- a) Ước lượng sai số tuyệt đối của số đó;

- b) Viết các chữ số chắc;
c) Viết số đó dưới dạng chuẩn

Hướng dẫn

- a) Ước lượng sai số tuyệt đối : $\Delta_a = |a'| \cdot \delta_a \leq 327,5864 \cdot \frac{1}{10000} = 0,032$
b) Viết các chữ số chắc: $\frac{10^{-2}}{2} < 0,032 < \frac{10^{-1}}{2}$ nên từ chữ số thập phân chục trở lên là các chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 3,2,7,5.
c) Viết số đó dưới dạng chuẩn là: 327,6 (do có quy tròn đến hàng phần chục).

Ví dụ mẫu 2: Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng a , b biết sai số tương đối của chúng.

- a) $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$

Lời giải

Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a| \delta_a$

- a) Với $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$$\Delta_a = 123456 \cdot 0,2\% = 146,912$$

- b) Với $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$$\Delta_a = 1,24358 \cdot 0,5\% = 0,0062179.$$

Ví dụ mẫu 3: a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

- b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

Lời giải

- a) Ta có $\sqrt{8} = 2,8284\dots$ do đó giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần trăm là 2,83

$$\text{Ta có } \left| \sqrt{8} - 2,83 \right| = 2,83 - \sqrt{8} \leq 2,83 - 2,8284 = 0,0016$$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 2,83 không vượt quá 0,0016.

Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần nghìn là 2,828

$$\text{Ta có } \left| \sqrt{8} - 2,828 \right| = \sqrt{8} - 2,828 \leq 2,8284 - 2,828 = 0,0004$$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 2,828 không vượt quá 0,0004.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71966\dots$

Do đó giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng chục là 25450

$$\text{Ta có } \left| \sqrt[3]{2015^4} - 25450 \right| = \sqrt[3]{2015^4} - 25450 \leq 25450,72 - 25450 = 0,72$$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25450 không vượt quá 0,72.

Giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng trăm là 25500.

$$\text{Ta có } \left| \sqrt[3]{2015^4} - 25500 \right| = 25500 - \sqrt[3]{2015^4} \leq 25500 - 25450,71 = 49,29$$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25500 không vượt quá 49,29.

Dạng 3. Quy tròn số. Ước lượng sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số quy tròn

Phương pháp:

Ví dụ mẫu 1: Biết số $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

a) Quy tròn số $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm

b) Ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối mắc phải khi chọn số quy tròn $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm

Hướng dẫn

a) Quy tròn số $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm là 1,41

b) $1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow \left| \sqrt{2} - 1,41 \right| < 1,42 - 1,41 = 0,01$. Vậy sai số tuyệt đối không vượt quá

$$\frac{0,01}{1,41} = 0,007$$

Ví dụ mẫu 2: Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$

b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

Lời giải

a) Ta có $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm

Do đó ta phải quy tròn số $a = 2,235$ đến hàng phần trăm suy ra $\bar{a} \approx 2,24$.

b) Ta có $100 < 101 < 1000$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng nghìn

Do đó ta phải tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn suy ra $\bar{a} \approx 23748000$.

Dạng 4. Sai số của tổng, tích và thương

Phương pháp

□ Nếu a và b là các số gần đúng với sai số tuyệt đối Δ_a và Δ_b , và $c = a + b$; $d = a - b$. Thế thì $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b$; $\Delta_d = \Delta_a + \Delta_b$

□ Nếu sai số $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ lần lượt là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, b, c và

$$P = a.b; Q = a.b.c; R = \frac{a}{b}. \text{ Thế thì } \delta_P = \delta_a + \delta_b; \quad \delta_Q = \delta_a + \delta_b + \delta_c; \quad \delta_R = \delta_a + \delta_b$$

$$\text{Suy ra: } \Delta_P = |a|.\Delta_a + |b|.\Delta_b; \quad \Delta_Q = |b.c|.\Delta_a + |a.c|.\Delta_b + |a.b|.\Delta_c; \quad \Delta_R = \frac{\Delta_a}{|b|} + \frac{\Delta_b}{|a|}$$

Ví dụ mẫu 1. Tính chu vi và diện tích hình chữ nhật có cạnh $a = 5,356m \pm 0,01m$, chiều dài là $b = 15,854m \pm 0,015m$. Ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

Hướng dẫn

Chu vi: $L = 2(a + b)$, sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_L = 2(\Delta_a + \Delta_b) \leq 2.(0,01 + 0,015) = 0,05(m)$ và ta viết là $L = 2.5,356 + 2.15,854 \pm 0,05 = 42,42 \pm 0,05(m)$

Diện tích: $S = ab$, sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_S = b.\Delta_a + a.\Delta_b \leq 15,854.0,01 + 5,356.0,015 = 0,239(m^2)$ và ta viết là $S = 15,854 \times 5,356 \pm 0,239 = 84,914 \pm 0,239(m^2)$

Ví dụ mẫu 2. Một ống nước có đường kính $d = 2 \pm 0,05cm$, chiều dài $h = 3000 \pm 5cm$. Tính thể tích khối nước chứa trong ống và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải ($\pi = 3,14 \pm 0,0016$).

Hướng dẫn

$$\text{Thể tích } V = \pi R^2 h = 3,14 \times 1^2 \times 3000 \pm d_v = 9420 \pm d_v (cm^3)$$

$$R = \frac{d}{2} \text{ nên } \Delta_R = \frac{\Delta_d}{2} \leq 0,025(cm); \quad \Delta_{R^2} = 2R.\Delta_R \leq 2.0,025 = 0,05(cm^2)$$

$$\Delta_V = R^2.h.\Delta_\pi + \pi.h.\Delta_{R^2} + \pi.R^2.\Delta_h \leq 1 \times 3000 \times 0,0016 + 3,14 \times 3000 \times 0,05 + 3,14 \times 1 \times 5 = 492 (cm^3)$$

Sai số tuyệt đối không vượt quá 429 và ta viết $V = 9420 \pm 492 (cm^3) = 9420 \pm 0,492 (lit)$

Ví dụ mẫu 3: Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23m \pm 0,01m$ và chiều rộng là $y = 15m \pm 0,01m$. Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là $P = 76m \pm 0,04m$

b) Diện tích của ruộng là $S = 345m \pm 0,3801m$

Lời giải

a) Giả sử $x = 23 + a$, $y = 15 + b$ với $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$

Ta có chu vi ruộng là $P = 2(x + y) = 2(38 + a + b) = 76 + 2(a + b)$

Vì $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$ nên $-0,04 \leq 2(a + b) \leq 0,04$

Do đó $|P - 76| = |2(a + b)| \leq 0,04$

Vậy $P = 76m \pm 0,04m$

b) Diện tích ruộng là $S = x.y = (23 + a)(15 + b) = 345 + 23b + 15a + ab$

Vì $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$ nên $|23b + 15a + ab| \leq 23.0,01 + 15.0,01 + 0,01.0,01$

hay $|23b + 15a + ab| \leq 0,3801$ suy ra $|S - 345| \leq 0,3801$

Vậy $S = 345m \pm 0,3801m$.

Dạng 5: Xác định các chữ số chắc của một số gần đúng, dạng chuẩn của chữ số gần đúng và kí hiệu khoa học của một số.

1. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

b) $a = 1,3462$ sai số tương đối của a bằng 1%.

Lời giải

a) Vì $\frac{100}{2} = 50 < 100 < \frac{1000}{2} = 500$ nên chữ số hàng trăm(số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn(số 4) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1, 2, 3, 4.

Cách viết dưới dạng chuẩn là 3214.10^3 .

b) Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \cdot |a| = 1\% \cdot 1,3462 = 0,013462$

Suy ra độ chính xác của số gần đúng a không vượt quá 0,013462 nên ta có thể xem độ chính xác là $d = 0,013462$.

Ta có $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,013462 < \frac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần trăm(số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục(số 3) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1 và 3 .

Cách viết dưới dạng chuẩn là 1,3 .

Ví dụ 2: Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 467346 \pm 12$ b) $b = 2,4653245 \pm 0,006$

Lời giải

a) Ta có $\frac{10}{2} = 5 < 12 < \frac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 4673.10^2 .

b) Ta có $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,006 < \frac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $2,5$.

Ví dụ 3: Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm(giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

Lời giải

Ta có một năm có 365 ngày, một ngày có 24 giờ, một giờ có 60 phút và một phút có 60 giây

Vậy một năm có $24.365.60.60 = 31536000$ giây.

Vì vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s nên trong vòng một năm nó đi được

$$31536000.300 = 9,4608.10^9 \text{ km.}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$. Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. 23749000. B. 23748000. C. 23746000. D. 23747000.

Câu 2. Cho giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10} . Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. $a = 3,141592654$. B. $a = 3,1415926536$.
C. $a = 3,141592653$. D. $a = 3,1415926535$.

Câu 3. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 1,7320. B. 1,732. C. 1,733. D. 1,731.

Câu 4. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 9,873. B. 9,870. C. 9,872. D. 9,871.

Câu 5. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

- A. 17700. B. 17800. C. 17500. D. 17600.

Câu 6. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 15,318$ biết $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

A. 15,3.

B. 15,31.

C. 15,32.

D. 15,4.

Câu 7. Đo độ cao một ngọn cây là $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

A. 345.

B. 347.

C. 348.

D. 346.

Câu 8. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: $a = 12\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $b = 10,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $c = 8\text{ cm} \pm 0,1\text{ cm}$.

Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P = 30,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$.

B. $P = 30,2\text{ cm} \pm 1\text{ cm}$.

C. $P = 30,2\text{ cm} \pm 0,5\text{ cm}$.

D. $P = 30,2\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$.

Câu 9. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43\text{m} \pm 0,5\text{m}$ và chiều dài $y = 63\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Tính chu vi P của miếng đất đã cho.

A. $P = 212\text{m} \pm 4\text{m}$.

B. $P = 212\text{m} \pm 2\text{m}$.

C. $P = 212\text{m} \pm 0,5\text{m}$.

D. $P = 212\text{m} \pm 1\text{m}$.

Câu 10. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23\text{m} \pm 0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y = 15\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Tính diện tích S của thửa ruộng đã cho.

A. $S = 345\text{m} \pm 0,001\text{m}$.

B. $S = 345\text{m} \pm 0,38\text{m}$.

C. $S = 345\text{m} \pm 0,01\text{m}$.

D. $S = 345\text{m} \pm 0,3801\text{m}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Độ chính xác $d = 101$ (hàng trăm), nên ta làm tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn, được kết quả là $a = 23748000$. **Chọn B.**

Câu 2. Độ chính xác $d = 10^{-10}$ $\longrightarrow$ làm tròn số $a = 3,141592653589$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 10^{-9}$ (9 chữ số thập phân), kết quả là $a = 3,141592654000$. **Chọn A.**

Câu 3. $\sqrt{3} \xrightarrow{MTCT} \sqrt{3} = 1,7320508076... \longrightarrow$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 1,732. **Chọn B.**

Câu 4. $\pi^2 \xrightarrow{MTCT} \pi^2 = 9,8696044011... \longrightarrow$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 9,870. **Chọn B.**

Câu 5. $\bar{a} = 17658 \pm 16 \longrightarrow d = 16$ (hàng chục) $\longrightarrow$ làm tròn số $a = 17658$ đến hàng trăm, kết quả là: 17700. **Chọn A.**

Câu 6. $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056 \longrightarrow d = 0,056 \longrightarrow$ làm tròn số $a = 15,318$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 0,56$ (hàng phần trăm), kết quả là: 15,32. **Chọn C.**

Câu 7. $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m} \longrightarrow d = 0,2 \longrightarrow$ làm tròn số $h = 347,13$ đến hàng $d \cdot 10 = 2$ (hàng đơn vị), kết quả là 347. **Chọn B.**

Câu 8. Chu vi tam giác là:

$$P = a + b + c = (12 + 10,2 + 8) \pm (0,2 + 0,2 + 0,1) = 30,2 \pm 0,5.$$

Chọn C.

Câu 9. Chu vi của miếng đất là

$$\begin{aligned} P &= 2[x + y] = 2.[(43 \pm 0,5) + (63 \pm 0,5)] \\ &= 2.[(43 + 63) \pm (0,5 + 0,5)] = 212 \pm 2. \end{aligned} \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 10. Diện tích của thửa ruộng là

$$\begin{aligned} S &= xy = (23 \pm 0,01) \cdot (15 \pm 0,01) \\ &= 23 \cdot 15 \pm (23 \cdot 0,01 + 15 \cdot 0,01 + 0,01^2) = 345 \pm 0,3801. \end{aligned} \text{ **Chọn D.**}$$

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Ôn tập về hàm số

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Định nghĩa: Cho $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. **Hàm số** f xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$, số $f(x)$ được gọi là giá trị của hàm số f tại x . Kí hiệu: $y = f(x)$.

- x được gọi là **biến số**
- D được gọi là tập xác định của hàm số.
- $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ được gọi là tập giá trị của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- Cho bằng bảng
- Cho bằng biểu đồ
- Cho bằng công thức $y = f(x)$.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f có nghĩa.

Chú ý: Trong kí hiệu $y = f(x)$, ta còn gọi x là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc của hàm số f . Biến số độc lập và biến số phụ thuộc của một hàm số có thể được kí hiệu bởi hai chữ cái tùy ý khác nhau. Chẳng hạn, $y = x^3 + 4x^2 + 1$; và $u = t^3 + 4t^2 + 1$; là hai cách viết biểu thị cùng một hàm số.

3. Đồ thị của hàm số: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D$.

Chú ý: Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là phương trình của đường đó.

II. Sự biến thiên của hàm số

1. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Nhận xét: Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị hàm số nó đi lên; ngược lại hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số đi xuống.

Chú ý: Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in K$, tức là $f(x) = c, \forall x \in K$ thì ta gọi là hàm số không đổi hay hàm số hằng trên K.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

Khảo sát sự biến thiên của hàm số là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến, không đổi trên các khoảng nào trong tập xác định.

Đối với hàm số cho bằng biểu thức, để khảo sát sự biến thiên của hàm số ta có thể dựa vào định nghĩa hoặc dựa vào nhận xét sau:

- $y = f(x)$ **đồng biến** trên K

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

- $y = f(x)$ **nghịch biến** trên K

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

III. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

1. Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

- Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

2. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

3. Sơ lược tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$; p và q là hai số dương tùy ý. Khi đó

- Tịnh tiến lên trên q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$
- Tịnh tiến xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$
- Tịnh tiến sang trái p đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x + p)$
- Tịnh tiến sang phải p đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x - p)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số và có tung độ bằng -2 .

- A. $(0; -2)$. B. $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$. C. $(-2; -2)$. D. $(-1; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $M_0(x_0; -2)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2 .

$$\text{Khi đó: } \frac{x_0+1}{x_0-1} = -2 \Leftrightarrow x_0+1 = 2(1-x_0) \Leftrightarrow 3x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -2\right).$$

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x(x-1)}$

- A. $M(0; -1)$. B. $M(2; 1)$. C. $M(2; 0)$. D. $M(1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(2; 0)$ thỏa mãn phương trình hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{7}{3}$. D. $P = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } f(2) + f(-2) = \frac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1} + (-2)^2 + 2 \Rightarrow P = 3.$$

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây:

- A. $(0; -3)$. B. $(3; 7)$. C. $(2; -3)$. D. $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thử lần lượt từng phương án A,B,C,D với chú ý về điều kiện ta được:

$$f(0) = 2.0 + 1 = 1 \neq -3, \text{ đồ thị không đi qua điểm } (0; -3).$$

$$f(3) = -3 \neq 7, \text{ đồ thị không đi qua điểm } (3; 7).$$

$$f(2) = 2.2 + 1 = 5 \neq -3, \text{ đồ thị không đi qua điểm } (2; -3).$$

$$f(0) = 2.0 + 1 = 1, \text{ đồ thị không đi qua điểm } (0; 1).$$

Câu 6. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} -2(x-3) & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Giá trị của $f(-1)$; $f(1)$ lần lượt là

A. 8 và 0.

B. 0 và 8.

C. 0 và 0.

D. 8 và 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } f(-1) = -2(-1-3) = 8; f(1) = \sqrt{1^2-1} = 0.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 là

A. -2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{TH1. } x_0 \leq -3: \text{ Với } f(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

$$\text{TH2. } x_0 > -3: \text{ Với } f(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{x_0 + 7}{2} = 5 \Leftrightarrow x_0 = 3.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

$$\text{A. } f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{B. } f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}.$$

$$\text{C. } f(-1): \text{ không xác định; } f(-3) = -\frac{11}{24}.$$

$$\text{D. } f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2-3}}{-1-2} = \frac{1}{3}; \quad f(2) = \frac{2.2+3}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

- Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}.$$

- Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:

1) Hàm số $y = \frac{A(x)}{B(x)}$. Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \text{ xác định và } A(x) \neq 0\}$

2) Hàm số $y = \sqrt[k]{A(x)}, k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \text{ xác định và } A(x) \geq 0\}$

3) Hàm số $y = \frac{A(x)}{\sqrt[k]{B(x)}}, k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x), B(x) \text{ xác định và } B(x) > 0\}$

Chú ý:

- Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.
- $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ có tập xác định là D . Khi đó: $y = f(x)$ xác định trên tập $X \Leftrightarrow X \subset D$
 $y = f(x)$ xác định trên tập $X \Leftrightarrow f(x)$ xác định với mọi $x \in X$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số } y = \sqrt{x-1} \text{ xác định} \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 6+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số $D = [0; +\infty) \setminus \{2\}.$

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để hàm số xác định: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \neq 3.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [1; +\infty) \setminus \{3\}.$

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = (x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$?

Lời giải

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{m+1}{3} \Rightarrow D = \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right).$$

Để hàm số xác định trên $(1; +\infty)$ thì

$$(1; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow m+1 \leq 3 \Rightarrow m \leq 2.$$

Ví dụ 6. Xác định tham số m để hàm số $y = \sqrt{3x-m}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$

Hướng dẫn:

Tập xác định của hàm số $D = \left[\frac{m}{3}; +\infty\right).$ Do đó hàm số xác định trên tập $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$(1; +\infty) \subset D = \left[\frac{m}{3}; +\infty\right) \Leftrightarrow 1 \geq \frac{m}{3} \Leftrightarrow m \leq 3$$

Ví dụ 7. Xác định tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - m}$ xác định trên tập $(-\infty; -3]$

Hướng dẫn:

hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq m$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m > 0 \\ x \in (-\infty; -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}; +\infty) \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{khi } m \leq 0 \\ (-\infty; -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}; +\infty) & \text{khi } m > 0 \end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên tập $(-\infty; -3]$ khi và chỉ khi

$$(-\infty; -3] \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -3 \leq -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 0 < m \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 9.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. C. $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$. D. $D = [-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 2. Cho hàm số: $y = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & x > 0 \end{cases}$. Tập xác định của hàm số là tập hợp nào sau đây?

- A. $[-2; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 1 \text{ và } x \geq -2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $x \leq 0$ ta có: $y = \frac{1}{x-1}$ xác định với mọi $x \neq 1$ nên xác định với mọi $x \leq 0$.

Với $x > 0$ ta có: $y = \sqrt{x+2}$ xác định với mọi $x \geq -2$ nên xác định với mọi $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = [-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2-x}{x^2-4x}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0; 2; 4\}$. B. $\mathbb{R} \setminus [0; 4]$. C. $\mathbb{R} \setminus (0; 4)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $D = [1; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. D. $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$.

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. C. $\mathbb{R}$. D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$.

Do đó tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $D = (1; 3]$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = [1; 3]$.

D. $D = \emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; 3]$.

Câu 8. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+5x} + \frac{|x|}{\sqrt{7-2x}}$?

A. $\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{2}\right)$.

B. $\left[-\frac{1}{5}; \frac{7}{2}\right]$.

C. $\left[-\frac{1}{5}; -\frac{7}{2}\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{5}; \frac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+5x \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x < \frac{7}{2}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-6x+8}$ là

A. $(3; 8) \setminus \{4\}$.

B. $[-3; 3] \setminus \{2\}$.

C. $(-3; 3) \setminus \{2\}$.

D. $(-\infty; 3) \setminus \{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x^2-6x+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Vậy $x \in [-3; 3] \setminus \{2\}$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right]$. D. $[-7; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

• Khi $x < 2$: $y = f(x) = \sqrt{-3x+8} + x$ xác định khi $-3x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$.

Suy ra $D_1 = (-\infty; 2)$.

• Khi $x \geq 2$: $y = f(x) = \sqrt{x+7} + 1$ xác định khi $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Suy ra $D_2 = [2; +\infty)$.

Vậy TXĐ của hàm số là $D = D_1 \cup D_2 = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{x}{x-3}$.

- A. $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{x}{x-3}$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x > 3.$$

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}}{x^2 - 5x + 6}$ là

- A. $[-1; 3) \setminus \{2\}$. B. $[-1; 2]$. C. $[-1; 3]$. D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}}{x^2 - 5x + 6}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2; x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 3) \setminus \{2\}.$$

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $[2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Câu 14. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $m \in [-3; 0]$.
C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$*x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

*Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Dạng 3: Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Cho hàm số f xác định trên K .

- $y = f(x)$ **đồng biến** trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Từ đó, ta có hai cách để xét tính đồng biến nghịch biến:

Cách 1: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$. Xét hiệu số $A = f(x_2) - f(x_1)$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

Cách 2: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

- a) $y = x^2 - 4x + 6$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 2); (2; +\infty)$
- b) $y = -x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$

Hướng dẫn

a) Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4 = (x_2 - 2) + (x_1 - 2)$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty; 2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 2; x_2 < 2 \Rightarrow x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 2; x_2 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0, x_2 - 2 > 0 \Rightarrow A > 0$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

a) $y = \frac{3}{x-1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$

b) $y = \frac{x+1}{2x+4}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$

Hướng dẫn

a) Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty; 1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 1; x_2 < 1 \Rightarrow x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số sau

a) $y = \sqrt[3]{x} + 3;$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

Hướng dẫn

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} + 3 < \sqrt[3]{x_2} + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định: $D = [0; +\infty) \setminus \{1\}$

$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in [0; 1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 < 1; 0 \leq x_2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 < 0, \sqrt{x_2} - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $[0; 1)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 > 0, \sqrt{x_2} - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Ví dụ 5: Tìm a để hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số } f(x) = ax - \sqrt{1-a} \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} a > 0 \\ 1-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = 3 - x$.

B. $y = 3x + 1$.

C. $y = 4$.

D. $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$y = 3x + 1$ có $a = 3 > 0$ hàm số đồng biến trên TXĐ.

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty) : x_1 \neq x_2$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2} - \frac{3}{x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{x_2 x_1} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x$.
- B. $y = -2x$.
- C. $y = 2x$.
- D. $y = \frac{1}{2}x$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

Câu 4. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải

Chọn D

Lí thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

Câu 5. Tìm m để hàm số $y = (2m - 1)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \geq \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

hàm số $y = (2m - 1)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $2m - 1 > 0$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m + 3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -\frac{3}{2}$. B. $m \geq -\frac{3}{2}$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m < -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = (2m + 3)x + m + 3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là

- A. 6. B. 3. C. 1. D. 15.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{m + 1}{4}; +\infty\right)$.

Để hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ thì ta phải có $(1; 5) \subset \left(\frac{m + 1}{4}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m + 1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là $m = 1, m = 2, m = 3$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m + 1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là $S = 1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 8. Cho hàm số $y = (m+2)x + \sqrt{2-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $y = ax + b$, nên để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 > 0 \\ 2-m \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 2 \end{cases}$. Mặt khác do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$.

A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-1 < m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định khi $x \neq m$.

Để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

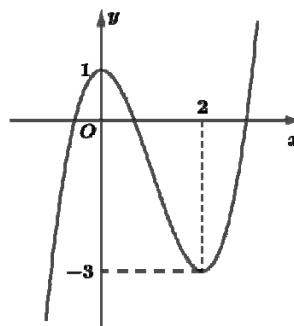
Dạng 4: Dựa vào đồ thị tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

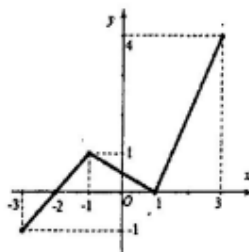
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
- B. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.
- C. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(C): y = f(x), (C'): y = f(x) + 2018$. Khi tịnh tiến đồ thị (C) theo phương song song trục tung lên phía trên 2018 đơn vị thì được đồ thị (C') . Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(x) + 2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

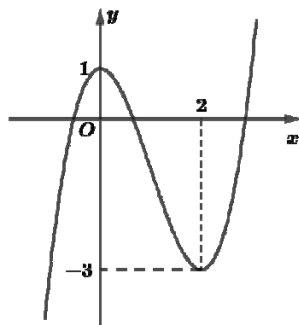
Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Câu 3. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

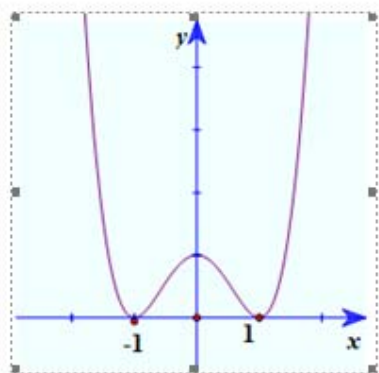
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 4. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải

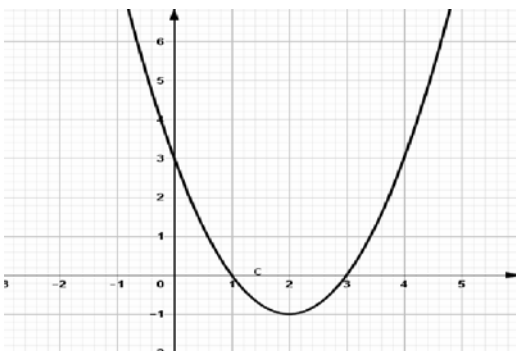
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2 .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 5)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

D. $f(\sqrt{2019}) < f(\sqrt{2017})$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có :

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1; 0), N(3; 0) \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 5) \Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3) \Rightarrow C$ sai.

Ta có : $\sqrt{2019}, \sqrt{2017} \in (2; +\infty)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases} \sqrt{2019} > \sqrt{2017} \\ f(\sqrt{2019}) > f(\sqrt{2017}) \end{cases} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Dạng 5: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp

Để xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x)$ ta tiến hành các bước như sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số và xét xem D có là tập đối xứng hay không.
- Nếu D là tập đối xứng thì so sánh $f(-x)$ với $f(x)$ (x bất kì thuộc D).

+ Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì f là hàm số chẵn.

+ Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì f là hàm số lẻ.

Chú ý:

- Tập đối xứng là tập thỏa mãn điều kiện: Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- Nếu $\exists x \in D$ mà $f(-x) \neq \pm f(x)$ thì f là hàm số không chẵn không lẻ.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

b. $f(x) = x^2 - |x|$.

c. $f(x) = x^3 + x + 1$.

d. $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Lời giải

+ Hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$ nên hàm số lẻ.

+ Hàm số $f(x) = x^2 - |x|$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$ nên hàm số chẵn.

+ Hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và

$$f(-x) = -x^3 - x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases} \text{ nên hàm số không chẵn không lẻ.}$$

+ Hàm số $f(x) = \frac{x}{x+1}$ có TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $x = 1 \in D$ nhưng $-x = -1 \notin D$ nên hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

- a) $y = \sqrt{20 - x^2}$,
- b) $y = -7x^4 + 2|x| + 1$,
- c) $y = \frac{x^4 + 10}{x}$,
- d) $y = |x + 2| + |x - 2|$,
- e) $y = \frac{\sqrt{x^4 - x} + \sqrt{x^4 + x}}{|x| + 4}$

Lời giải:

➤ Xét $y = \sqrt{20 - x^2}$ có tập xác định $D = [-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}]$,

$$f(-x) = \sqrt{20 - (-x)^2} = \sqrt{20 - x^2} = f(x)$$

Nên $y = \sqrt{20 - x^2}$ là hàm số chẵn.

➤ Xét $y = -7x^4 + 2|x| + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$, $f(-x) = -7(-x)^4 + 2|-x| + 1 = f(x)$

Nên $y = -7x^4 + 2|x| + 1$ là hàm số chẵn.

➤ Xét $y = \frac{x^4 + 10}{x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 10}{-x} = -f(x)$.

Nên $y = \frac{x^4 + 10}{x}$ là hàm số lẻ.

➤ Xét $y = |x + 2| + |x - 2|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$, $f(-x) = |-x + 2| + |-x - 2| = f(x)$.

Nên $y = |x + 2| + |x - 2|$ là hàm số chẵn.

➤ Xét $y = \frac{\sqrt{x^4 - x} + \sqrt{x^4 + x}}{|x| + 4}$ có tập xác định $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \cup \{0\}$.

$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 - (-x)} + \sqrt{(-x)^4 - x}}{|-x| + 4} = f(x)$ nên $y = \frac{\sqrt{x^4 - x} + \sqrt{x^4 + x}}{|x| + 4}$ là hàm số chẵn.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{2016 + 9x} - \sqrt{2016 - 9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = f(220) + f(-221) + f(222) + f(-223) + f(-220) + f(221) + f(-222) + f(223) + f(224)$$

Lời giải

Tập xác định $D = \left[\frac{-2016}{9}; \frac{2016}{9} \right] \setminus \{0\}$.

$\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\sqrt{2016-9x} - \sqrt{2016+9x}}{|-x|} = -\frac{\sqrt{2016+9x} - \sqrt{2016-9x}}{|x|} = -f(x).$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ, và $f(x) + f(-x) = 0$.

$$\begin{aligned} S &= f(220) + f(-221) + f(222) + f(-223) + f(-220) + f(221) + f(-222) + f(223) + f(224) \\ &= f(220) + f(-220) + f(-221) + f(221) + f(222) + f(-222) + f(-223) + f(223) + f(224) \\ &= f(224) = \frac{3\sqrt{7}}{28}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Hàm $y = x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số chẵn khi:

$$\begin{cases} -m(m-1) = 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$.

Ví dụ 5: Tìm m thì hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Theo đề bài, ta có $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ nghĩa là

$$-x^3 + (m^2 - 1)x^2 - 2x + m - 1 = -x^3 - (m^2 - 1)x^2 - 2x - m + 1, \forall x \in D. \text{ Điều này xảy ra khi}$$

$$\begin{cases} m^2 - 1 = -m^2 + 1 \\ m - 1 = -m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Nếu $f(x)$ không là hàm số lẻ thì $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. Đồ thị hàm số lẻ nhận trục tung làm trục đối xứng.
- D. Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Lời giải

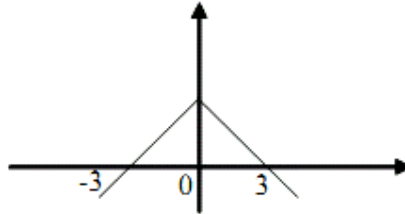
Chọn D.

A sai vì có những hàm số không chẵn, không lẻ.

B sai vì $f(x) = 0$ thì $f(-x) = -f(x)$ nhưng $f(x)$ cũng là hàm số chẵn.

C sai vì đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Kết luận nào trong các kết luận sau là đúng?



A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số chẵn.

C. Hàm số lẻ.

D. Cả ba đáp án đều sai

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 3. Hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ là

A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

B. hàm số không chẵn, không lẻ.

C. hàm số lẻ.

D. hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^4 - x^2 + 3$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 3 = x^4 - x^2 + 3 = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 4: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $g(x) = |x|$.

B. $k(x) = x^2 + x$.

C. $h(x) = x + \frac{1}{x}$.

D. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

B. $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

C. $y = f(x)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ. D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = 3x^4 - 4x^2 + 3 = f(x), \forall x \in D \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số lẻ:

A. $y = x^3 + x$.

B. $y = x^3 + 1$.

C. $y = x^3 - x$.

D. $y = \frac{1}{x}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số lẻ phải triệt tiêu số hạng tự do

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

B. $y = \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

C. $y = \frac{1}{4x^3}$.

D. $y = (2x-1)^{2018} + (2x+1)^{2018}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) = (2x-1)^{2018} + (2x+1)^{2018}.$$

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Lại có: } f(-x) = (2(-x)-1)^{2018} + (2(-x)+1)^{2018} = (2x+1)^{2018} + (2x-1)^{2018} = f(x).$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ là số chẵn.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y = |x-4| - |x+4|$.

B. $y = |3-x| + |3+x|$.

C. $y = \sqrt{x}$.

D. $y = x^2 - 5x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = |x - 4| - |x + 4|$

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$$+ f(-x) = |-x - 4| - |-x + 4| = -(|x - 4| - |x + 4|) = -f(x) \text{ với } \forall x \in D$$

Vậy hàm số $y = f(x) = |x - 4| - |x + 4|$ là hàm số lẻ.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = |x - 2018| + |x + 2018|$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

C. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f(-x) = |-x - 2018| + |-x + 2018| = |x + 2018| + |x - 2018| = f(x)$$

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Do vậy các phương án A, B, C đều đúng. Đáp án D sai.

Câu 10. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = x^3 - 2x$. B. $y = 3x^4 + x^2 + 5$. C. $y = \sqrt{x+1}$. D. $y = 2x^2 + x$.

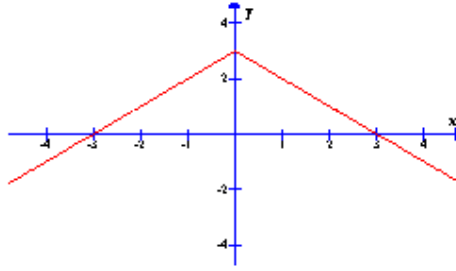
Lời giải

Chọn B

Ta thấy hàm số $y = 3x^4 + x^2 + 5$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 3(-x)^4 + (-x)^2 + 5 = 3x^4 + x^2 + 5 = f(x). \text{ Vậy hàm số } y = 3x^4 + x^2 + 5 \text{ là hàm số chẵn.}$$

Câu 11. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Kết luận nào trong các kết luận sau là đúng:

- A. Hàm số lẻ. B. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.
 C. Đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 12. Đồ thị hàm số nào sau đây có tâm đối xứng?

- A. $y = x^3 + x$. B. $y = x^2$. C. $y = x^4 + 3x^2 - 1$. D. $y = |x|$.

Lời giải

Chọn A

+ Ba hàm số: $y = x^2$; $y = x^4 + 3x^2 - 1$; $y = |x|$ đều là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của chúng nhận trục Oy làm trục đối xứng, đồ thị không có tâm đối xứng.

+ Hàm số: $y = x^3 + x$ có:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow y = x^3 + x \text{ là hàm số lẻ trên } \mathbb{R}.$$

Nên đồ thị hàm số $y = x^3 + x$ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$; $g(x) = |x + 3| + |x - 3|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ là hàm chẵn; $g(x)$ là hàm lẻ. B. Cả f và $g(x)$ là hàm chẵn.
 C. Cả $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ D. $f(x)$ là hàm lẻ; $g(x)$ là hàm chẵn.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta thấy } \forall x \in \mathbb{R} \text{ thì } -x \in \mathbb{R} \text{ và } f(-x) = (-x)\sqrt{(-x)^2 + 3} = -x\sqrt{x^2 + 3} = -f(x)$$

Vậy nên $f(x)$ là hàm lẻ.

Xét $g(x) = |x+3| + |x-3|$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta thấy $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và

$$g(-x) = |-x+3| + |-x-3| = |-(x-3)| + |-(x+3)| = |x-3| + |x+3| = g(x)$$

Vậy nên $g(x)$ là hàm chẵn.

Câu 14: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

A. $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$.

B. $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$.

C. $y = |x+2| - |x-2|$.

D. $y = x^4 + x + 1$.

Lời giải

Chọn A

➤ Hàm số $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ có tập xác định là $D = [-2; 2]$.

Suy ra: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có: } f(-x) = \sqrt{2-(-x)} + \sqrt{2+(-x)} = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = f(x).$$

Vậy hàm số $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ là hàm số chẵn.

➤ Hàm số $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ có tập xác định là $D = [2; +\infty)$.

Ta có: $2 \in D$ nhưng $-2 \notin D$ nên hàm số trên không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

➤ Hàm số $y = |x+2| - |x-2|$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Suy ra: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có: } f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = |x+2| - |x-2|$ là hàm số lẻ.

➤ Hàm số $y = x^4 + x + 1$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Suy ra: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(1) = 3$ và $f(-1) \neq 1$. Do $f(1) \neq f(-1)$ và $f(1) \neq -f(-1)$ nên hàm số trên không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Câu 15: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = 2x$.

B. $y = x^3 + x^2$.

C. $y = x^3 + 1$.

D. $y = |x| + 1$.

Lời giải

Chọn A

➤ Hàm số $y = 2x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) = -2x = -f(x)$

Do đó hàm số $y = 2x$ là hàm số lẻ.

➤ Hàm số $y = x^3 + x^2$ và $y = x^3 + 1$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

➤ Hàm số $y = |x| + 1$ là hàm số chẵn.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = |x+2| + |x-2|$ và $g(x) = x^3 + 5x$. Khi đó:

A. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

D. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $D = \mathbb{R}$ khi đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = |-x+2| + |-x-2| = |x-2| + |x+2| = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn

$g(-x) = -x^3 - 5x = -(x^3 + 5x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ

Câu 17. Nêu tính chẵn, lẻ của hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$, $g(x) = -|x|$?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

□ Xét $f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$.

Nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

□ Xét $g(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$$g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x).$$

Nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 18: Cho hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$, $g(x) = -|x|$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

□ Xét $f(x)$ có TXĐ. $D = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$$

$$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x).$$

Nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

□ Xét $g(x)$ có TXĐ. $D = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$$

$$g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x).$$

Nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 19: Cho hai hàm số $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Có thể kết luận gì về chiều biến thiên của hàm số $y = f(x) + g(x)$ trên khoảng $(a; b)$?

- A. đồng biến.
- B. nghịch biến.
- C. không đổi.
- D. không kết luận được

Lời giải

Chọn D

Lấy hàm số $f(x) = x$ và $g(x) = -x$ trên $(0; 1)$ thỏa mãn giả thiết

Ta có $y = f(x) + g(x) = x - x = 0 \longrightarrow$ không kết luận được tính đơn điệu.

Câu 20: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{x}$ và $g(x) = |x^3| - 4|x|$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{x}$ có

Tập xác định: $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{-x} = -f(x)$. Vậy nên, hàm số

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{x}$ là hàm số lẻ.

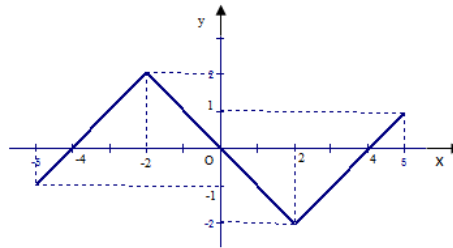
Xét hàm số có

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $g(-x) = |(-x)^3| - 4|-x| = |x^3| - 4|x| = g(x)$. Vậy nên, hàm số

$g(x) = |x^3| - 4|x|$ là hàm số chẵn.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-5; 5]$ và đồ thị của nó được biểu diễn bởi hình dưới đây.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- B. Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; -2)$ và $(2; 5)$.

D. Hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số chẵn nhận Oy làm trục đối xứng.

Câu 22. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = x^3$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = (x - 1)^2$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = x^2 + 1$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x) = (x - 1)^2$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = (-x - 1)^2 \neq f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x)$ không là hàm số chẵn.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 + 1$ có đồ thị (C) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (C) nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

B. (C) qua $A(0; 2)$.

C. (C) tiếp xúc Ox .

D. (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải

Chọn D

$(C): y = f(x) = x^4 + 1$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

+ $f(-x) = x^4 + 1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $y = f(x)$ là hàm số chẵn, nên (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 24: Cho các khẳng định:

(I). Hàm số $y = x^4 + 12x^2 - 5$ là hàm số chẵn.

(II). Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ là hàm số lẻ.

(III). Hàm số $y = \sqrt{20-x} + \sqrt{20+x}$ là hàm số chẵn.

(IV). Hàm số $y = |x-20| - |x+20|$ là hàm số lẻ.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là bao nhiêu?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

• Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + 12x^2 - 5$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = (-x)^4 + 12(-x)^2 - 5 = x^4 + 12x^2 - 5 = f(x)$.

Do đó $y = f(x) = x^4 + 12x^2 - 5$ là hàm số chẵn. Vậy đúng.

• Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tồn tại $-1 \in D$ mà $1 \notin D$.

Do đó $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ. Vậy sai.

• Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{20-x} + \sqrt{20+x}$.

Tập xác định $D = [-20; 20]$.

Với mọi $x \in D \Rightarrow -x \in D$ và

$$f(-x) = \sqrt{20-(-x)} + \sqrt{20+(-x)} = \sqrt{20+x} + \sqrt{20-x} = f(x).$$

Do đó $y = f(x) = \sqrt{20-x} + \sqrt{20+x}$ là hàm số chẵn. Vậy đúng.

• Xét hàm số $y = f(x) = |x-20| - |x+20|$.

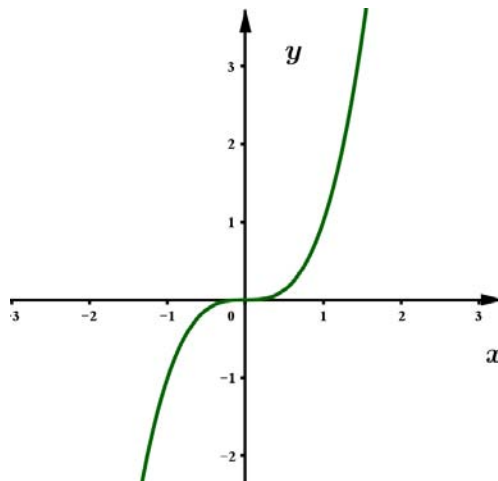
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và

$$f(-x) = |(-x)-20| - |(-x)+20| = |x+20| - |x-20| = -(|x-20| - |x+20|) = -f(x)$$

Do đó $y = f(x) = |x-20| - |x+20|$ là hàm số lẻ. Vậy đúng.

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tính giá trị biểu thức $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018})$

- A. -2018 . B. 0 . C. 2018 . D. 4036 .

Lời giải

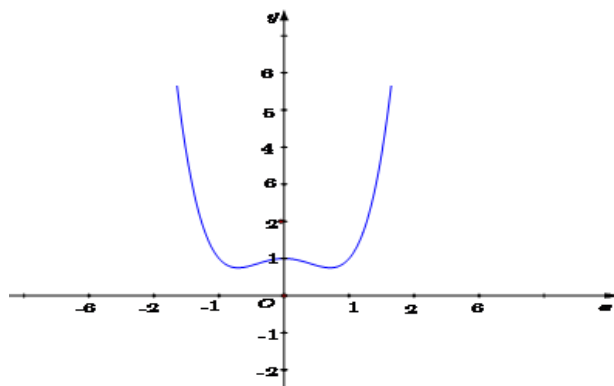
Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta thấy rằng hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ nên là hàm số lẻ.

Suy ra $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$

Vì vậy $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018}) = 0$.

Câu 26. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

- A. $f(-1) = f(1) = 1$. B. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn đồ thị ta có :

$$f(-1) = f(1) = 1 \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

Đồ thị không có tâm đối xứng nên B sai.

Trên khoảng $(1;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5) \Rightarrow C$ đúng.

Trên khoảng $(-6;-1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1) \Rightarrow D$ đúng.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2. \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Với } x \in (-2; 2) \text{ ta có } f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$\text{Với } x \in (-\infty; -2) \Rightarrow -x \in (2; +\infty); f(-x) = (-x)^3 - 6 = -x^3 - 6 = f(x) \text{ và ngược lại}$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = (m^2 + 3m - 4)x^{2017} + m^2 - 7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Tính **tổng** các phần tử của S .

A. 0.

B. -3.

C. $\sqrt{7}$.

D. $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Suy ra: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có: } f(-x) = -(m^2 + 3m - 4)x^{2017} + m^2 - 7.$$

$$\text{Để } f \text{ là hàm số lẻ thì } \forall x \in D, f(x) = -f(-x).$$

$$\Rightarrow (m^2 + 3m - 4)x^{2017} + m^2 - 7 = (m^2 + 3m - 4)x^{2017} - m^2 + 7$$

$$\Rightarrow m^2 = 7 \Rightarrow m = \pm\sqrt{7}. \text{ Vậy tổng các phần tử của } S \text{ là } \sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0.$$

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + (4 + m)x + 3m - 6$ là một hàm số lẻ

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -4$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn B

$$y = f(x) = 2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + (4 + m)x + 3m - 6.$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Có $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 - (4 + m)x + 3m - 6 = -[2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + (4 + m)x + 3m - 6], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 - 4)x^2 + (3m - 6) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2018+x} + (m^2 - 2)\sqrt{2018-x}}{(m^2 - 1)x}$ có đồ thị là (C_m) (m là tham

số). Số giá trị của m để đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vì đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng nên hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, suy ra $f(x) = f(-x)$.

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{m\sqrt{2018-x} + (m^2 - 2)\sqrt{2018+x}}{(m^2 - 1)(-x)} = \frac{(2 - m^2)\sqrt{2018+x} - m\sqrt{2018-x}}{(m^2 - 1)x}.$$

$$\text{Đồng nhất, ta được: } \begin{cases} 2 - m^2 = m \\ m^2 - 2 = -m \end{cases} \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m = -2$ thỏa mãn.

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Ôn tập về hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
 - Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 - Khi $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị là đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục tung tại điểm B.

Chú ý: Cho hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$

- song song với $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.
- trùng với $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- cắt $\Leftrightarrow a \neq a'$.

II. Hàm số hằng $y = b$

Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$. Đường thẳng này gọi là đường thẳng $y = b$

III. Hàm số $y = |x|$

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

2. Chiều biến thiên

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

3. Đồ thị

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Cho hàm số $y = ax + b$, ($a \neq 0$)

- Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m + 3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m+3 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đề hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Câu 1. Khẳng định nào về hàm số $y = 3x + 5$ là **sai**:

- A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Đồ thị cắt Ox tại $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.
- C.** Đồ thị cắt Oy tại $(0; 5)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y = 3x + 5$ có hệ số $a = 3 > 0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra đáp án D sai.

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m > 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = (3 - m)x + 2$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m < \frac{1}{2}$. **B.** $m > \frac{1}{2}$. **C.** $m < 3$. **D.** $m > 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Khi $-2m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{5}{2} < 0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$-2m+1>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}.$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (m-2)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?; nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. Với $m \neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m > 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Với $m \neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m < 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Với $m < 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m = 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
D. Với $m > 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m < 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $f(x) = (m-2)x + 1$ đồng biến khi $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Hàm số $f(x) = (m-2)x + 1$ nghịch biến khi $m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = (\sqrt{7}-m)x + 3$. Có bao nhiêu số tự nhiên m để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để hàm số $f(x) = (\sqrt{7}-m)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{7}-m > 0 \Leftrightarrow m < \sqrt{7}$

Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$ thỏa mãn $m < \sqrt{7}$ để hàm số $f(x) = (\sqrt{7}-m)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 2: Đồ thị hàm số bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

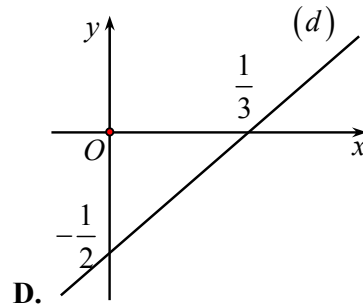
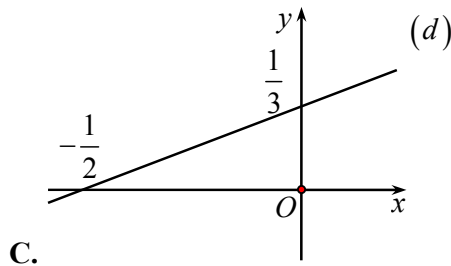
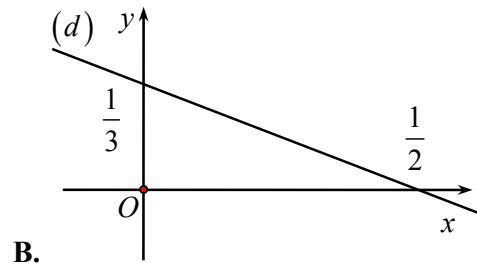
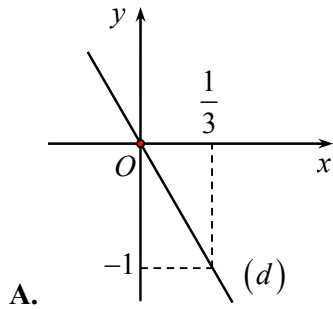
Câu 1. Hệ số góc của đồ thị hàm số $y = 2018x - 2019$ bằng

- A. $-\frac{2019}{2018}$. B. 2018. C. -2019. D. $-\frac{2018}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ là



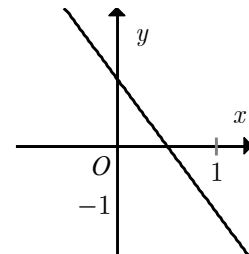
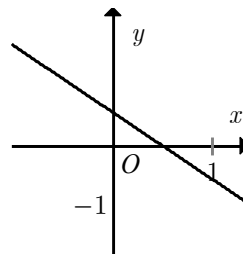
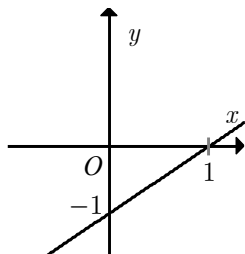
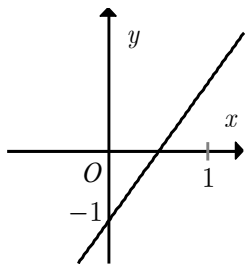
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ giả thiết hàm số đồng biến nên loại đáp án A và B.

Mặt khác cho $x = 0$ vào $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ nên loại đáp án D.

Câu 3. Hàm số $y = 2x - 1$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



Hình 1

Hình 2

Hình 3

Hình 4

A. Hình 2

B. Hình 4.

C. Hình 3.

D. Hình 1.

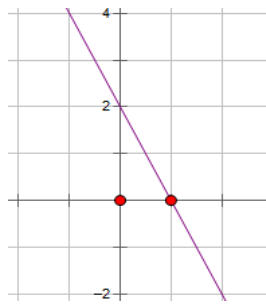
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0; -1)$ và $(\frac{1}{2}; 0)$.

Do đó chỉ có hình 1 thỏa mãn.

Câu 4. Hàm số nào cho dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên:



A. $y = -2x + 2$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = -x + 2$.

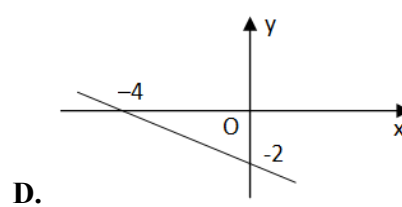
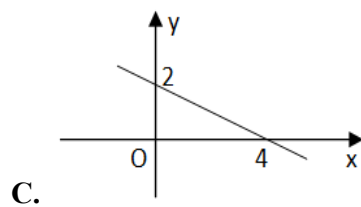
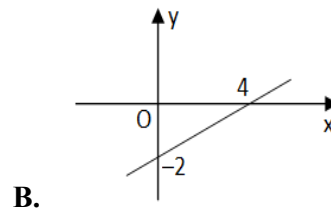
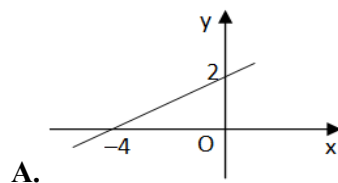
D. $y = 2x + 2$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(1;0)$ và $B(0;2)$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ là hình nào?

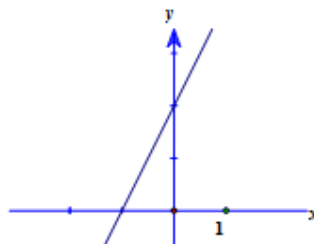


Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ đi qua $A(0;2), B(4;0)$. Quan sát đồ thị ta được đáp án C thỏa yêu cầu.

Câu 6. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = -2x + 2$. B. $y = 2x + 2$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

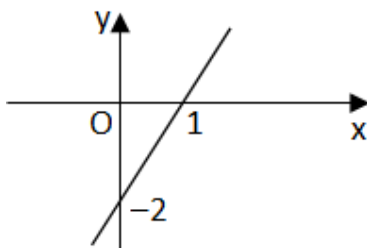
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-1;0), B(0;2)$. Hàm số có dạng

$$y = ax + b \text{ ta được: } \begin{cases} 0 = -a + b \\ 2 = a.0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Câu 7 Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x - 2$. B. $y = -x - 2$. C. $y = -2x - 2$. D. $y = 2x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử hàm số cần tìm có dạng: $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0; -2), (1; 0)$ nên ta có: $\begin{cases} -2 = b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x - 2$.

Câu 8: Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y = 3x + 1$?

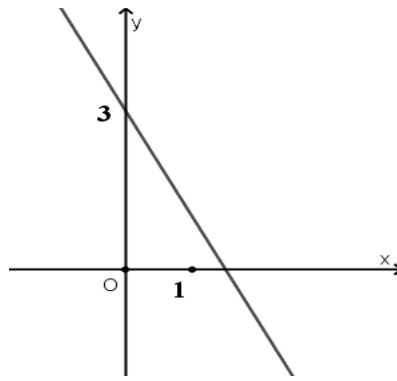
A. $M(2;6)$. B. $N(1;4)$. C. $P(0;1)$. D. $Q(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3.2 + 1 = 7 \neq 6$, do đó $M(2;6)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = 3x + 1$.

Câu 9: Đường thẳng trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào?



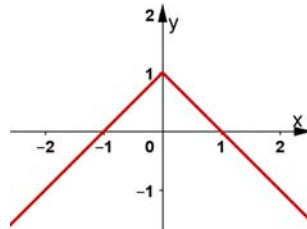
- A. $y = -5x + 3$. B. $y = x + 3$. C. $y = 3 - 3x$. D. $y = 3 - 2x$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $y = ax + b$. Dựa vào đồ thị có
$$\begin{cases} 3 = 0 \cdot x + b \\ 0 = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Câu 10. Đường gấp khúc trong hình vẽ là dạng đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



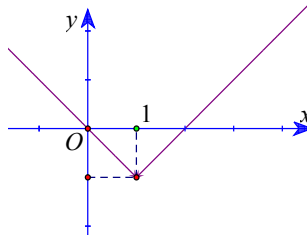
- A. $y = |x| - 1$. B. $y = -|x + 1|$. C. $y = -|x - 1|$. D. $y = 1 - |x|$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; 0)$ nên chỉ có hàm số $y = 1 - |x|$ thỏa mãn.

Câu 11. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ?

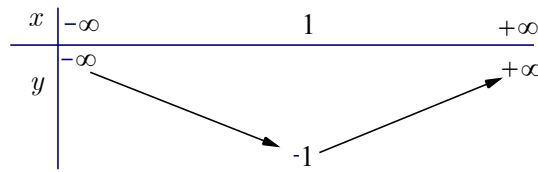


- A. $y = \begin{cases} x - 2, & \text{khi } x \geq 1 \\ x, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. B. $y = \begin{cases} x + 2, & \text{khi } x \geq 1 \\ -x, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.
- C. $y = \begin{cases} x - 2, & \text{khi } x \geq 1 \\ -x, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. D. $y = \begin{cases} x, & \text{khi } x \geq 1 \\ -x, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

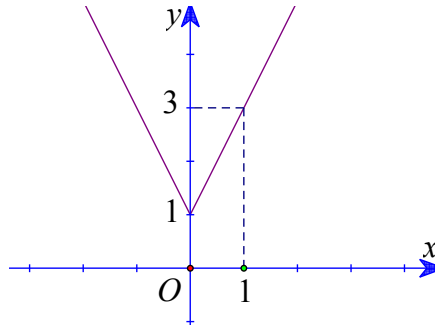
Lời giải

Chọn C

Bảng biến thiên:



Câu 12. Đồ thị bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = |x| + 1$.

B. $y = 2|x| + 1$.

C. $y = |2x + 1|$.

D. $y = |x + 1|$

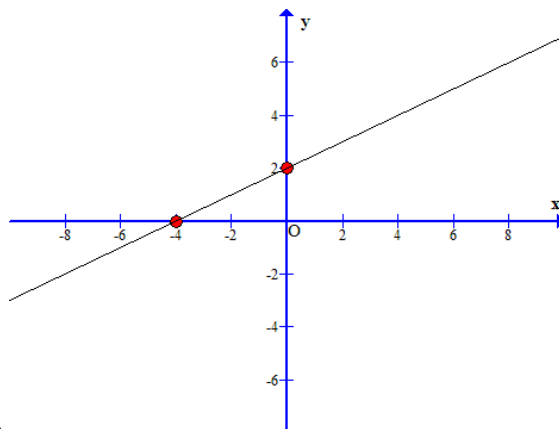
Lời giải

Chọn B

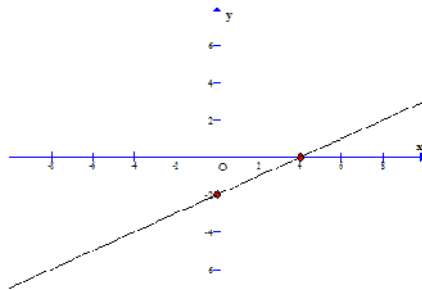
Đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng nên hàm số tương ứng là hàm chẵn nên loại phương án C, D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 3)$. Thay vào B thấy thỏa mãn nên chọn B.

Câu 13. Đồ thị của hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ là hình nào?

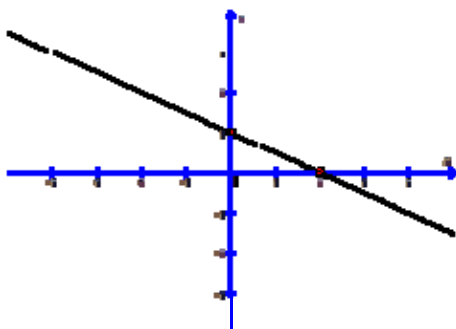


A.

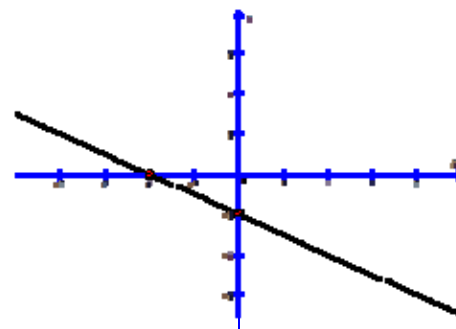


B.

B.



C.



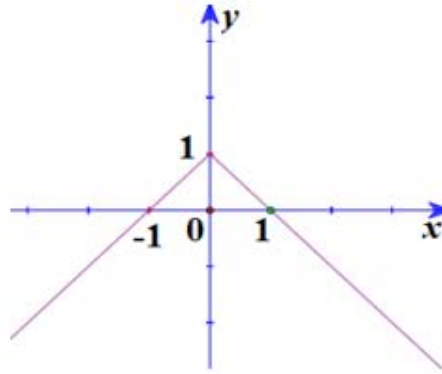
D.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ cắt trục hoành tại điểm $(4; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$ nên chọn đáp án C.

Câu 14. Hình vẽ sau đây là đồ thị hàm số nào?



- A. $y = 1 - |x|$. B. $y = |x| + 1$. C. $y = |x| - 1$. D. $y = |x|$.

Lời giải

Chọn A

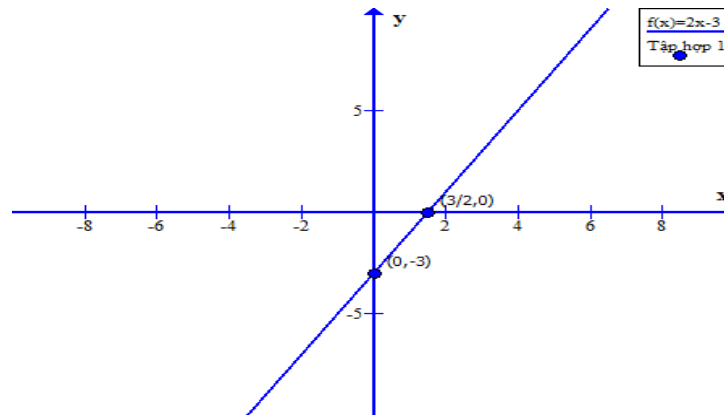
Nhìn vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

-Đồ thị đi qua điểm $A(0;1)$ nên loại trừ đáp án C, D.

-Đồ thị đi qua điểm $B(-1;0)$, $C(1;0)$ nên loại trừ đáp án B.

Chọn đáp án A

Câu 15. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



- A. $y = x - 3$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = 4x - 6$. D. $y = -4x + 6$.

Lời giải

Chọn B

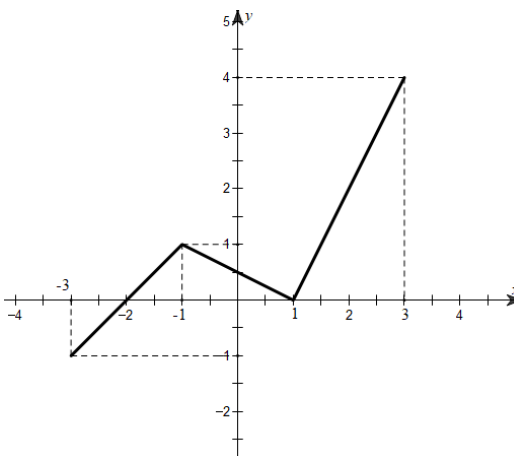
Đồ thị là một đường thẳng qua điểm $(0; -3)$ và $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

$$\text{Nên hàm số có dạng: } y = ax + b \text{ thỏa: } \begin{cases} -3 = a \cdot 0 + b \\ 0 = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$ và $(1;4)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.
- D. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

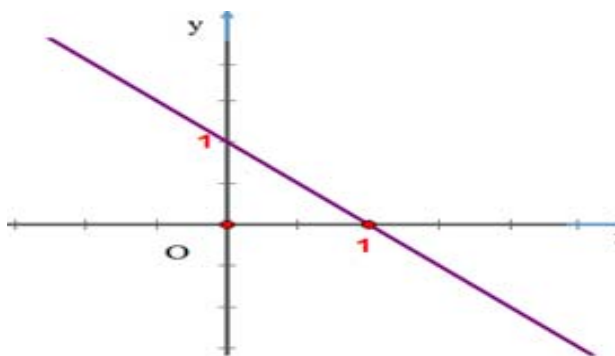


Chọn C

+) Dựa vào đồ thị nhận thấy: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 17. Hàm số nào trong bốn phương án liệt kê ở A, B, C, D có đồ thị như hình bên

- A. $y = -x + 2$.
- B. $y = 2x + 1$.
- C. $y = x + 1$.
- D. $y = -x + 1$.



Lời giải

Chọn D

Gọi $d : y = ax + b$

Đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ lần lượt tại $A(0;1)$ và $B(1;0)$

Dạng 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$+ M \in d_3 \text{ nên ta có: } 5 = (3 - 2m) \cdot 3 + 2 \Leftrightarrow 5 = 9 - 6m + 2 \Leftrightarrow 6m = 6 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 3m + 1$ song song với đường thẳng $y = x - 5$?

- A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm \sqrt{2}$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 3m + 1$ song song với đường thẳng $y = x - 5$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3 = 1 \\ 3m + 1 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ 3m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \vee m = 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 4. Các đường thẳng $y = -5(x + 1)$; $y = 3x + a$; $y = ax + 3$ đồng quy với giá trị của a là

- A. -11 . B. -10 . C. -12 . D. -13 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $d_1: y = -5x - 5$, $d_2: y = 3x + a$, $d_3: y = ax + 3$ ($a \neq 3$).

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $-5x - 5 = 3x + a \Leftrightarrow x = \frac{-a - 5}{8}$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $A\left(\frac{-a - 5}{8}; \frac{5a - 15}{8}\right)$.

Đường thẳng d_1 , d_2 và d_3 đồng quy khi $A \in d_3$

$$\Leftrightarrow \frac{5a - 15}{8} = a \cdot \frac{-a - 5}{8} + 3 \Leftrightarrow a^2 + 10a - 39 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -13 \end{cases} \Leftrightarrow a = -13.$$

Dạng 4: Xác định hàm số bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và có hệ số góc bằng -3 . Tìm a, b .

Lời giải

Vì $y = ax + b$ có hệ số góc bằng -3 nên $a = -3$.

Mà $y = ax + b$ đi qua $M(1; 4)$ nên $y = -3x + b \Leftrightarrow 4 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 7$.

Ví dụ 2: Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng đi qua $A(3; 4)$ và song song với đường thẳng $y = 3x - 1$. Tìm a, b .

Lời giải

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(3;4)$ và song song với đường thẳng $y = 3x - 1$; suy

$$\text{ra } \begin{cases} 3a + b = 4 \\ a = 3 \\ b \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 3$ và đi qua điểm $M(-2;4)$. Tìm a, b .

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 3 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-2;4) \Leftrightarrow -2a + b = 4$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = \frac{12}{5} \end{cases}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$?

A. $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x - 5$. B. $y = 1 - \sqrt{2}x$. C. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$. D. $y = -\sqrt{2}x + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hai đường thẳng song song khi hai hệ số góc bằng nhau.

Câu 2. Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

A. $m \neq -1$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Câu 3. Tìm m để $f(x) = (m-2)x + 2m - 1$ là nhị thức bậc nhất.

A. $m \neq 2$. B. $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Để $f(x) = (m-2)x + 2m - 1$ là nhị thức bậc nhất thì $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Câu 4. Một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

A. $y = -2x + 3$.

B. $f(x) = \frac{-5x+1}{3}$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $f(x) = \frac{-5x-1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số đã cho có dạng $y = f(x) = ax + b$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-1) + b = 2 \\ a.2 + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{-5x+1}{3}.$$

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và có hệ số góc bằng -3 . Tích $P = ab$?

A. $P = 13$.

B. $P = 21$.

C. $P = 4$.

D. $P = -21$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $y = ax + b$ có hệ số góc bằng -3 nên $a = -3$.

Mà $y = ax + b$ đi qua $M(1; 4)$ nên $y = -3x + b \Leftrightarrow 4 = -3.1 + b \Leftrightarrow b = 7$.

Do đó $P = a.b = -3.7 = -21$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây đi qua 2 điểm $A(-1; 2)$ và $B(0; -1)$.

A. $y = x + 1$.

B. $y = x - 1$.

C. $y = 3x - 1$

D. $y = -3x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(0; -1)$ có dạng: $y = ax + b$ (d).

Do $A(-1; 2)$ và $B(0; -1)$ thuộc đường thẳng (d) nên a, b là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 = -a + b \\ -1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(0; -1)$ là $y = -3x - 1$.

Câu 7. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;1)$ là

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 7$. C. $y = 2x + 5$. D. $y = -2x - 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng có hệ số góc bằng 2 $\Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + b$ và đi qua điểm $A(-3;1)$.

Nên $1 = 2 \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = 7$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x + 7$.

Câu 8. Đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 5$ có phương trình là

- A. $y = 3x - 7$. B. $y = 3x + 5$. C. $y = -3x - 7$. D. $y = -3x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Do d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 5$ nên $d : y = 3x + m$.

Do d đi qua điểm $M(2; -1)$ nên $-1 = 3 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = -7$.

Vậy $d : y = 3x - 7$.

Câu 9. Điểm A có hoành độ $x_A = 1$ và thuộc đồ thị hàm số $y = mx + 2m - 3$. Tìm m để điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành.

- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m > 1$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ giả thiết điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành nên $y_A > 0$ ta

có $y_A = mx + 2m - 3 = m \cdot 1 + 2m - 3 = 3m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Câu 10. Tìm phương trình đường thẳng $d : y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng 6?

- A. $y = -3x + 6$. B. $y = (9 - \sqrt{72})x + \sqrt{72} - 6$.
C. $y = (9 + \sqrt{72})x - \sqrt{72} - 6$. D. $y = 3x + 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ nên $a+b=3 \Rightarrow a=3-b$.

Giao điểm của d và các tia Ox , Oy lần lượt là $M\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và $N(0;b)$

Do đó: $S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{b}{a} \right| \cdot |b| = \frac{b^2}{2|a|}$. Mà

$$S_{\Delta OMN} = 6 \Leftrightarrow b^2 = 12|a| \Leftrightarrow b^2 = 12|3-b| \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 36 - 12b \\ b^2 = -36 + 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -6 + \sqrt{72} \text{ (L)} \\ b = -6 - \sqrt{72} \text{ (L)} \end{cases}$$

Với $b = 6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow d: y = -3x + 6$.

Câu 11. Tìm điểm $M(a;b)$ với $a < 0$ nằm trên $\Delta: x+y-1=0$ và cách $N(-1;3)$ một khoảng bằng 5. Giá trị của $a-b$ là

A. 3. B. -1. C. -11. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$M \in \Delta \Rightarrow M(t;1-t) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1-t; t+2).$$

$$\text{Ta có: } MN = 5 \Rightarrow MN^2 = (-1-t)^2 + (t+2)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 6t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow M(2; -1) \\ t = -5 \Rightarrow M(-5; 6) \end{cases} \Rightarrow M(-5; 6) \Rightarrow a-b = -11$$

Câu 12. Cho hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là (d) . Tìm số giá trị nguyên dương của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A , B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng (d) tạo với trục hoành và trục tung một tam giác OAB là tam giác vuông cân $\Leftrightarrow$ đường thẳng (d) tạo với chiều dương trục hoành bằng 45° hoặc $135^\circ \Leftrightarrow$ hệ số

$$\text{góc tạo của } (d) \text{ bằng } 1 \text{ hoặc } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 4 = 1 \\ m^2 - 4m - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 3 = 0 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \\ m = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}.$$

Thử lại: $m = 5$ thì d không đi qua O .

Vậy có duy nhất một giá trị $m = 5$ nguyên dương thỏa ycbt.

Câu 13. Đường thẳng $d: y = (m-3)x - 2m + 1$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A = d \cap Ox$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = (m-3)x - 2m + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m-1}{m-3} \\ y = 0 \end{cases} \text{ nên } A\left(\frac{2m-1}{m-3}; 0\right).$$

$B = d \cap Oy$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = (m-3)x - 2m + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2m + 1 \end{cases} \text{ nên } B(0; -2m + 1).$$

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \left| \frac{2m-1}{m-3} \right| = |-2m+1| \Leftrightarrow |2m-1| \left(\frac{1}{|m-3|} - 1 = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ |m-3|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ m=4, m=2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Với $m = \frac{1}{2}$ thì $A \equiv B \equiv O(0; 0)$ nên không thỏa mãn.

Vậy $m = 4, m = 2$.

Câu 14: Biết rằng với mọi giá trị thực của tham số m , các đường thẳng $d_m: y = (m-2)x + 2m - 3$ cùng đi qua một điểm cố định là $I(a; b)$. Tính giá trị của biểu thức: $S = a + b$

- A. $S = -3$. B. $S = -1$. C. $S = 1$. D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình của đường thẳng đã cho:

$$d_m: y = (m-2)x + 2m - 3 = (x+2)m - 2x - 3$$

Vì các đường thẳng d_m luôn đi qua điểm I nên ta tìm x để m bị triệt tiêu

$$\Rightarrow I(-2; 1) \Rightarrow S = -1$$

$\Rightarrow$ Chọn B

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ tạo với hệ trục tọa độ Oxy tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

Khi đó m bằng

- A. $m = 2$; $m = 3$. B. $m = 2$; $m = 4$. C. $m = -2$; $m = 3$. D. $m = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi: A , B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ với trục hoành và trục tung

Suy ra $A(2m - 1; 0)$; $B(0; 1 - 2m)$.

Theo giả thiết thì tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$ là tam giác OAB vuông tại O .

$$\text{Do đó: } S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow OA \cdot OB = 25 \Leftrightarrow |2m - 1| \cdot |1 - 2m| = 25 \Leftrightarrow |2m - 1| \cdot |2m - 1| = 25$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 5 \\ 2m - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$$

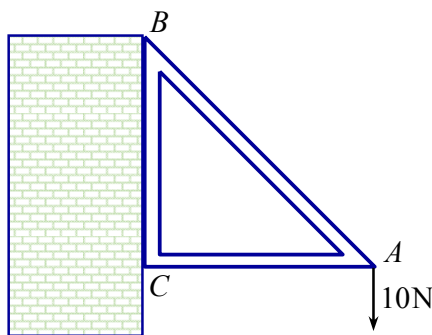
Dạng 4: Bài toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một giá đỡ được gắn vào bức tường như hình vẽ. Tam giác ABC vuông cân ở đỉnh C . Người ta treo vào điểm A một vật có trọng lượng 10 N . Khi đó lực tác động vào bức tường tại hai điểm B và C có cường độ lần lượt là:



- A. $10\sqrt{2}\text{ N}$ và 10 N . B. 10 N và 10 N . C. 10 N và $10\sqrt{2}\text{ N}$. D. $10\sqrt{2}\text{ N}$ và $10\sqrt{2}\text{ N}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cường độ lực tại C bằng cường độ lực tại A và bằng 10 N.

Cường độ lực tại B bằng $10\sqrt{2}$ N.

Câu 2. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 800 m^2 . Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3.000.000 đồng trên 100 m^2 nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4.000.000 đồng trên 100 m^2 . Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau:

- A. Trồng 600 m^2 đậu, 200 m^2 cà. B. Trồng 500 m^2 đậu, 300 m^2 cà.
C. Trồng 400 m^2 đậu, 200 m^2 cà. D. Trồng 200 m^2 đậu, 600 m^2 cà.

Hướng dẫn giải

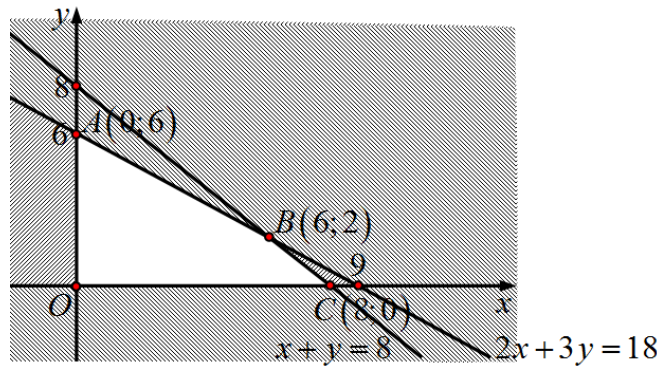
Chọn A.

Gọi x là số $x00\text{ m}^2$ đất trồng đậu, y là số $y00\text{ m}^2$ đất trồng cà. Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$.

Số tiền thu được là $T = 3x + 4y$ triệu đồng.

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Đồ thị:



Dựa đồ thị ta có tọa độ các đỉnh $A(0;6)$, $B(6;2)$, $C(8;0)$, $O(0;0)$.

Thay vào $T = 3x + 4y$ ta được $T_{\max} = 26$ triệu khi trồng 600 m^2 đậu và 200 m^2 cà.

Câu 3. Một nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha trong vụ Đông Xuân. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng tổng số công không quá 180.

- A. 1 ha đậu và 7 ha cà. B. 6 ha đậu và 2 ha cà.
C. 2 ha đậu và 6 ha cà. D. 3 ha đậu và 5 ha cà.

Lời giải

Chọn B

Gọi diện tích trồng đậu là x , vậy diện tích trồng cà là $8 - x$.

Số công phải bỏ ra là: $20x + 30(8 - x) = 240 - 10x$.

Do tổng số công không quá 180 nên ta có: $240 - 10x \leq 180 \Leftrightarrow x \geq 6$.

Số tiền thu được là $g(x) = 3x + 4(8 - x) = 32 - x$; $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[6; 8]$ nên

$\max_{[6;8]} g(x) = 26$ tại $x = 6$. Vậy cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và $a \neq 0$.

I. Đồ thị của hàm số bậc hai

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Đồ thị là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Chú ý: Để vẽ đường parabol ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol.
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

II. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Bảng biến thiên:

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Như vậy:

- Khi $a > 0$ hàm nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có GTNN là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$
- Khi $a < 0$ hàm đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

và có GTLN là $\frac{-\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN và GTNN của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \in [0; 2]$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = \min y = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \\ M = \max y = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{0, -2\} = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = -x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(4) = -29 \\ f(0) = 3 \end{cases} \longrightarrow m = \min y = f(4) = -29; M = \max y = f(0) = 3.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

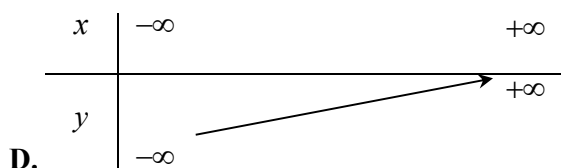
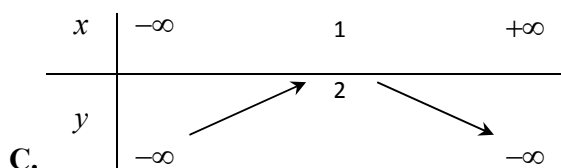
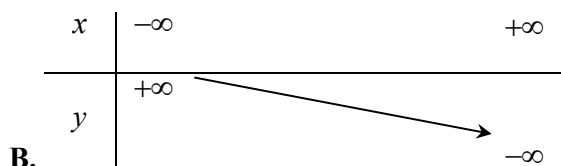
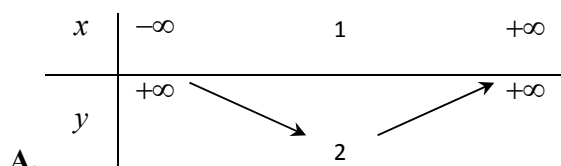
Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$:



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$ có $a = -1 < 0$, tọa độ đỉnh $I(1; 2)$ do đó hàm số trên tăng trên khoảng $(-\infty; 1)$ và giảm trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 2. Trục đối xứng của parabol $y = -x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = \frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{5}{2}$.

C. $x = -\frac{5}{4}$.

D. $x = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của parabol $y = ax^2 + bx + c$ là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Trục đối xứng của parabol $y = -x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng $x = \frac{5}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Chọn câu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $a = 1 > 0$, $b = -2$, $c = 3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1; 2)$. Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Tọa độ đỉnh } I(2; 1).$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3.

B. 1.

C. 3.

D. 13.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x = 2$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{11}{8}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{8}{11}$.

D. $\frac{4}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 9} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng $\frac{8}{11}$.

Câu 8. Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng $x = 2$. Ta có $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 9. Cho parabol (P) có phương trình $y = 3x^2 - 2x + 4$. Tìm trục đối xứng của parabol

- A. $x = -\frac{2}{3}$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = \frac{2}{3}$. D. $x = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Có $a = 3$; $b = -2$; $c = 4$.

+ Trục đối xứng của parabol là $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. (P) không có giao điểm với trục hoành. B. (P) có đỉnh là $S(1; 1)$.
C. (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y = 1$. D. (P) đi qua điểm $M(-1; 9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(P) có đỉnh là $S(1; 1)$; trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên C sai.

và (P) đi qua điểm $M(-1; 9) \Rightarrow$ B, D đều đúng.

Xét phương trình $2x^2 - 4x + 3 = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên (P) không có giao điểm với trục hoành $\Rightarrow A$ đúng.

Câu 11. Hàm số $y = -x^2 + 2x - 5$ đồng biến trên khoảng:

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có đồ thị hàm số là một parabol có hoành độ đỉnh: $x = -\frac{b}{2a} = 1$

Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống

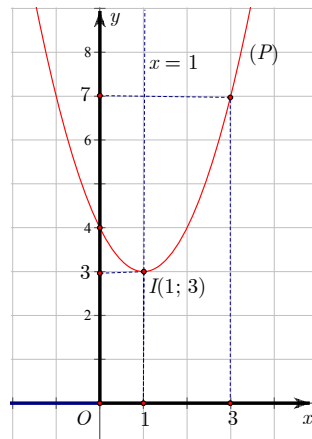
Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (P) . Tìm mệnh đề sai.

- A. (P) có đỉnh $I(1; 3)$. B. $\min y = 4, \forall x \in [0; 3]$.
C. (P) có trục đối xứng $x = 1$. D. $\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 4 : (P)$, ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1; 3)$ nên A đúng.

$\min y = 3, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x = 1$ nên C đúng.

$\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 3$ nên D đúng.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(3;4)$?

A. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^2 - 7x + 2$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên đồng biến trên $(3;4)$. **Chọn A**

+ Hàm số $y = x^2 - 7x + 2$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. Loại **B**.

+ Hàm số $y = -3x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Loại **C**.

+ Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$. Loại **D**.

Câu 14. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

A. $y = -x^2 + 5x + 2$.

B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

C. $y = x^2 - 3x + 1$.

D. $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có bề lõm hướng xuống nên loại C, D.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ có tọa độ đỉnh $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

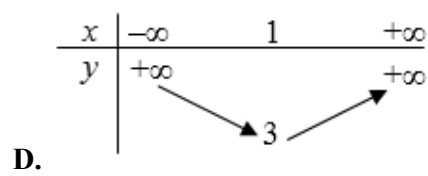
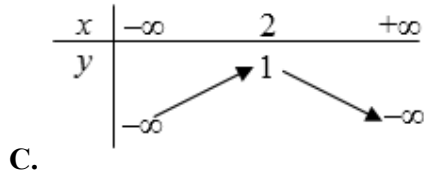
Câu 16. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$



Hướng dẫn giải

Chọn B

Do hệ số $a = -2 < 0$ nên parabol có bề lõm hướng xuống và đỉnh có tọa độ $I(1;3)$.

Câu 17. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3 .

A. $m = -3$.

B. $m = -9$.

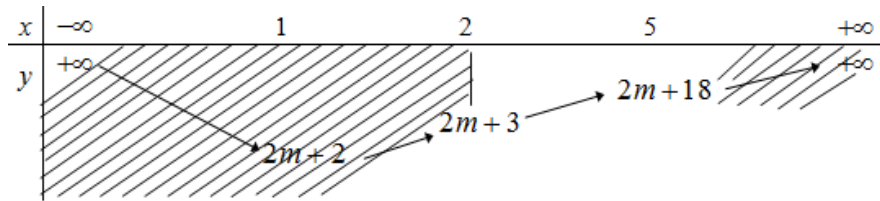
C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ trên đoạn $[2;5]$:



Do đó giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ bằng $2m + 3$.

Theo giả thiết $2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$ ($m > 0$) xác định trên $[-1;1]$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8$. Khi đó giá trị của m bằng

A. $m = 1$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1, m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m.$$

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số là $x = m + \frac{1}{m} \geq 2$.

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; m + \frac{1}{m}\right)$.

Suy ra, hàm số nghịch biến $[-1;1]$.

$$\Rightarrow y_1 = f(-1) = 3m + \frac{2}{m} + 1.$$

$$y_2 = f(1) = 1 - m - \frac{2}{m}.$$

Theo đề bài ta có: $y_1 - y_2 = 8$

$$\Leftrightarrow 3m + \frac{2}{m} + 1 - 1 + m + \frac{2}{m} = 8 \quad (m > 0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 19. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3$ trên đoạn $[-1; 4]$ là

A. $y_{\min} = -\frac{37}{4}, y_{\max} = 21.$

B. $y_{\max} = \frac{37}{4}, y_{\min} = -21.$

C. $y_{\min} = \frac{37}{4}, y_{\max} = 21.$

D. $y_{\max} = 5, y_{\min} = -\frac{37}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x^2 + 10x - 5 + 2$$

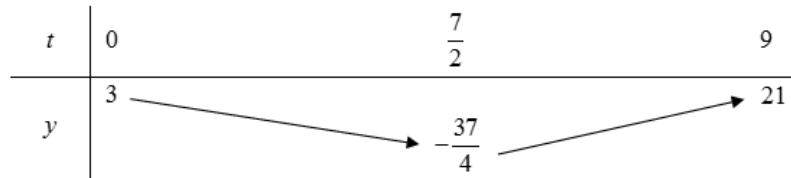
$$= (x^2 - 2x)^2 - 5(x-1)^2 + 2 = [(x-1)^2 - 1]^2 - 5(x-1)^2 + 2.$$

$$\text{Đặt } t = (x-1)^2, x \in [-1; 4] \Rightarrow t \in [0; 9].$$

$$y = (t-1)^2 - 5t + 2 = t^2 - 7t + 3 = \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}.$$

Cách 1: Ta có $0 \leq \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{121}{4} \Leftrightarrow -\frac{37}{4} \leq y \leq 21.$

Cách 2: Vẽ BBT



$$\text{Vậy } y_{\min} = -\frac{37}{4}, y_{\max} = 21.$$

Dạng 2: Xác định hàm số bậc hai

1. Phương pháp

▪ $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

- (P) có đỉnh $I(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ hoặc: $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases}$
- (P) nhận $x = x_0$ làm trục đối xứng $\Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$
- (P) có giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) bằng $y_0 \Leftrightarrow \frac{-\Delta}{4a} = y_0$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Xác định Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua $A(0; 6)$

Hướng dẫn giải

Parabol có đỉnh $I(-2; 4)$ và đi qua $A(0; 6)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 4 \\ c = 6 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases} \text{ . Vậy } y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \text{ .}$$

Ví dụ 2. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(8; 0)$ và có đỉnh $I(6; -12)$. Xác định a, b, c

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết ta có hệ } \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{cases} \text{ .}$$

Ví dụ 3. Tìm các hệ số a, b, c của $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

a) (P) đi qua $A(-1; 0); B(2; 0); C(0; -4)$;

b) (P) đi qua $A(-1; -2)$ và có đỉnh $I(1; 2)$.

Giải

a) Ta có:

$$A(-1; 0) \in (P) \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$B(2; 0) \in (P) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$C(0; -4) \in (P) \Rightarrow c = -4$$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$$

Vậy $a=2, b=-2, c=-4$

b) Vì (P) đi qua $A(-1; -2)$ nên $a-b+c=-2$

Mặt khác, vì (P) có đỉnh là $I(1; 2)$ nên $I(1; 2) \in (P)$ hay $a+b+c=2$

Và $\frac{-b}{2a}=1 \Leftrightarrow 2a+b=0$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} a-b+c=-2 \\ a+b+c=2 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Vậy $a=-1; b=2; c=1$

Ví dụ 4. Tìm các hệ số a, b, c của (P): $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

a) y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ và (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm có hoành độ bằng 0 và bằng 5.

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1; 6), B(4; 3)$ và có trục đối xứng là $x=2$.

Giải

a) Theo đề : y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ nên $4a+2b+c=-3$

Gọi (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm M và N. Suy ra: $M(0; 1), N(5; 6)$

$$\begin{aligned} M(0; 1) \in (P) &\Rightarrow c=1 \\ N(5; 6) \in (P) &\Rightarrow a+b+c=6 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4a+2b+c=-3 \\ a+b+c=6 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=12 \\ c=1 \end{cases}$$

Vậy $a=-7, b=12, c=1$

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1; 6), B(4; 3)$ nên

$$A(-1; 6) \in (P) \Rightarrow a-b+c=6$$

$$B(4; 3) \in (P) \Rightarrow 16a+4b+c=3$$

(P) và có trục đối xứng là $x=2$ nên $-\frac{b}{2a}=2 \Leftrightarrow 4a+b=0$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} a-b+c=6 \\ 16a+4b+c=3 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{5} \\ b=-\frac{12}{5} \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy $a=\frac{3}{5}; b=-\frac{12}{5}; c=3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.
- B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.
- C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.
- D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 2. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$

- A. $(P): y = -x^2 + x + 1$.
- B. $(P): y = x^2 - x + 1$.
- C. $(P): y = 2x^2 - 2x + 1$.
- D. $(P): y = x^2 + x + 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1: Khi $x = 0$ thì $y = 1 \Rightarrow c = 1$.

(P) có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ nên:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 = \frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4} \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = x^2 - x + 1$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào sau đây là parabol có đỉnh $I(-1;3)$.

A. $y = 2x^2 + 4x - 3$.

B. $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = 2x^2 + 4x + 5$.

D. $y = 2x^2 - 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đỉnh Parabol là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Do đó chỉ có đáp án C thỏa.

Câu 4. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$

$$\Leftrightarrow 2a = -b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0.$$

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ ($m \neq 0$) là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 3$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;6)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-3;3)$.

D. $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ là parabol có đỉnh $I(1; -m^2 - m - 2)$.

$$I \in d: y = x - 3 \Leftrightarrow -m^2 - m - 2 = 1 - 3 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m \in (-3;3).$$

Câu 6. Xác định a, b, c biết Parabol có đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $M(0;-1), N(1;-1), P(-1;1)$.

A. $y = x^2 - x - 1$.

B. $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = -2x^2 - 1$.

D. $y = -x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Vì } M \in (P), N \in (P), P \in (P) \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = -x^2 - x - 1.$$

Câu 7. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x = -3$.

A. $y = x^2 + 3x - 2$.

B. $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$.

D. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của (P) có dạng:

$$x = -\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow -3 = -6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } (P) \text{ có phương trình: } y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2.$$

Câu 8. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$. Tính tích $P = abc$.

A. $P = -6$.

B. $P = -3$.

C. $P = 6$.

D. $P = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$; đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ nên đồ thị hàm số đi qua $I(2; 4)$ và nhận $x = 2$ làm trục đối xứng, hàm số cũng đi qua điểm $A(0; 6)$ suy ra:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow abc = -6.$$

Câu 9. Xác định phương trình của Parabol có đỉnh $I(0; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 3)$.

A. $y = (x - 1)^2$.

B. $y = x^2 + 1$.

C. $y = (x + 1)^2$.

D. $y = x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

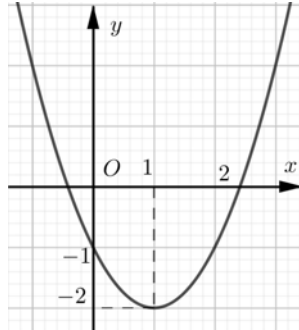
Do $I \in (P) \Rightarrow c = -1$.

$I(0; -1)$ là đỉnh của $(P) \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Lại có $A(2; 3) \in (P) \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \Rightarrow a = 1$.

Nên $(P): y = x^2 - 1$.

Câu 10. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^2 - 2x + 3$.

B. $y = x^2 + 2x - 2$.

C. $y = 2x^2 - 4x - 2$.

D. $y = x^2 - 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$, từ đó ta loại **A**.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta loại **B**.

Khi $x = 0$ thì $y = -1$ nên loại **C**.

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Câu 11. Tìm m để Parabol $(P): y = mx^2 - 2x + 3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2; 3)$.

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

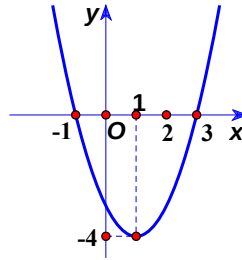
Với $m = 0$ ta có phương trình $y = -2x + 3$ là phương trình đường thẳng nên loại $m = 0$.

Với $m \neq 0$. Ta có phương trình của Parabol:

Trục đối xứng: $x = -\frac{-2}{2m} \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}$.

Trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$ nên $2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



A. -9.

B. 9.

C. -6.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$

$$\text{nên có hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 1$. Chọn câu **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -1$.

B. Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Đồ thị hàm số nhận $I(-1; 4)$ làm đỉnh.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x = -\frac{-2}{2.(-1)} = -1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1; 2)$.

Câu 14. Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1; 3)$. Tổng giá trị $a + 2b$ là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1; 3)$

$$\text{Nên ta có: } \begin{cases} a + b + 4 = 3 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Do đó: $a + 2b = -3 + 4 = 1$

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ ($m \neq 0$) có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 6)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ ($m \neq 0$) có đỉnh là $I(1; -m^2 - m - 1)$.

Để $I(1; -m^2 - m - 1)$ nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì $-m^2 - m - 1 = -1$

$$\Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (l)} \\ m = -1 \text{ (n)} \end{cases}. \text{ Vậy } m = -1 \in (-2; 2).$$

Câu 16. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$. Xác định hệ số a, b biết (P) có đỉnh $I(2; -2)$.

- A. $a = -1, b = 4$. B. $a = 1, b = 4$. C. $a = 1, b = -4$. D. $a = 4, b = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Điều kiện: $a \neq 0$.

$$+ (P) \text{ có đỉnh } I(2; -2) \text{ nên ta có hệ: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -2 = a.2^2 + b.2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Câu 17. Parabol $(P): y = -2x^2 - ax + b$ có điểm $M(1; 3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

- A. 5. B. 1. C. -2. D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm của (P) quay xuống và M có tung độ lớn nhất nên M là đỉnh của (P) .

Ta có $M(1;3)$ là đỉnh của parabol nên $\frac{a}{-4} = 1 \Leftrightarrow a = -4$.

Suy ra $y = -2x^2 + 4x + b$ qua $M(1;3)$ nên $b = 1$.

Câu 18. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

- A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

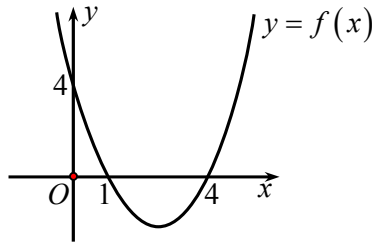
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $x_I = -1 \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -1 \Rightarrow a = 2$.

Hơn nữa: $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .



- A. $a > 0, \Delta > 0$. B. $a < 0, \Delta > 0$.
C. $a > 0, \Delta = 0$. D. $a < 0, \Delta = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a > 0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Biểu thức $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1)$ có giá trị bằng

- A. $ax^2 - bx - c$. B. $ax^2 + bx - c$. C. $ax^2 - bx + c$. D. $ax^2 + bx + c$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x+3) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c = ax^2 + (6a+b)x + 9a + 3b + c.$$

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = ax^2 + (4a+b)x + 4a + 2b + c.$$

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c.$$

$$\Rightarrow f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) = ax^2 + bx + c.$$

Dạng 3: Đồ thị hàm số bậc hai

1. Phương pháp

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ ta lần lượt làm như sau:

Trước hết ta vẽ đồ thị $(P): y = ax^2 + bx + c$

Ta có:

$$y = |ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{khi } ax^2 + bx + c \geq 0 \\ -(ax^2 + bx + c), & \text{khi } ax^2 + bx + c < 0 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ bao gồm hai phần

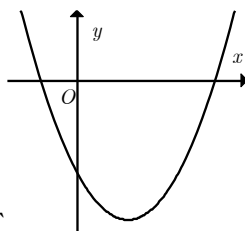
- Phần 1: Chính là đồ thị (P) lấy phần phía trên trục Ox
- Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (P) phía dưới trục Ox qua trục Ox .

Vẽ đồ thị hàm số (P_1) và (P_2)

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, C. Chọn A.

Câu 2. Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có phương trình trục đối xứng là

A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 3. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai:

A. Đồ thị hàm số nhận $I(1; -2)$ làm đỉnh.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có trục đối xứng: $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} = 1$.

Câu 4. Parabol $(P): y = -2x^2 - 6x + 3$ có hoành độ đỉnh là?

A. $x = -3$.

B. $x = \frac{3}{2}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hoành độ đỉnh của parabol (P) là: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$.

Câu 5. Viết phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$.

A. $x = 1$.

B. $y = 1$.

C. $y = 2$.

D. $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = -\frac{b}{2a}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

Câu 6. Trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 2x - 1$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 1$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình của trục đối xứng là $x = -\frac{2}{2.2} = -\frac{1}{2}$.

Câu 7. Tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 7$ là

- A. $I(-1; -4)$. B. $I(1; 6)$. C. $I(1; -4)$. D. $I(-1; 6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đỉnh I : $x = \frac{2}{2.1} = 1$, $y = 1^2 - 2.1 + 7 = 6$. Vậy $I(1; 6)$.

Câu 8. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

- A. $I(0; 1)$. B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $I\left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$ nên loại A và C.

Khi $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$. Do đó, Chọn B.

Câu 9. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

- A. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
C. $I\left(\frac{b}{a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$. D. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đỉnh của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

B. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) ta thấy các khẳng định A, C, D đúng

Khẳng định B sai vì có những hàm số bậc hai không cắt trục hoành như hàm $y = -2x^2 + 3x - \frac{9}{8}$

Câu 11. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3$ ($m \neq 1$) (P). Đỉnh của (P) là $S(-1; -2)$ thì m bằng bao nhiêu:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{2}{3}$.

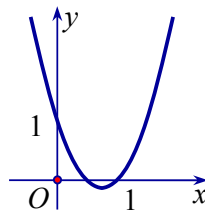
D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do đỉnh của (P) là $S(-1; -2)$ suy ra $-1 = \frac{m-2}{m-1} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Câu 12. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

B. $y = -x^2 + 3x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 3x + 1$.

D. $y = x^2 - 3x + 1$.

Hướng dẫn giải

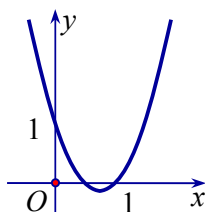
Chọn C.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, phương trình hoành độ giao điểm phải

có nghiệm $x = 1$, ta chỉ có phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 13. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x^2 - 3x + 1$.

B. $y = 2x^2 - 3x + 1$.

C. $y = -x^2 + 3x - 1$.

D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

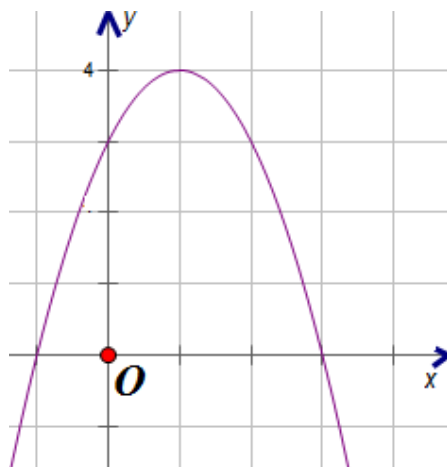
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì bề lõm hướng lên trên nên $a > 0 \Rightarrow$ loại đáp án C, D

Đồ thị giao trục Ox tại điểm $(1; 0)$ và $(\frac{1}{2}; 0) \Rightarrow$ loại A.

Câu 14. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ, thì dấu các hệ số của nó là



A. $a < 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

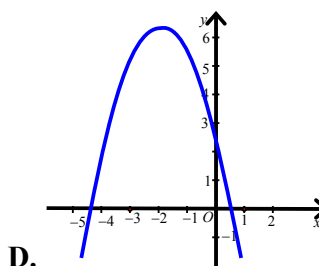
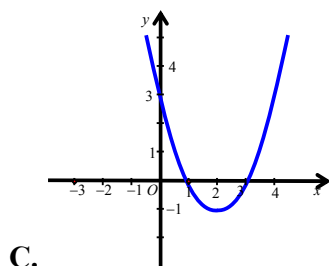
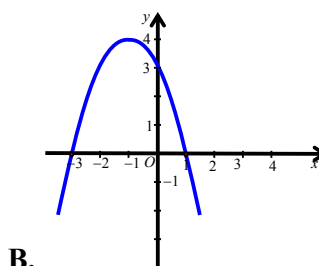
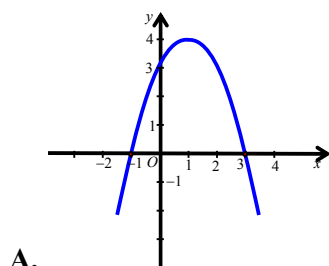
Chọn B.

Đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên $a < 0$.

Đồ thị cắt chiều dương trục Oy nên $c > 0$.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} > 0$, mà $a < 0$, nên $b > 0$.

Câu 15. Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



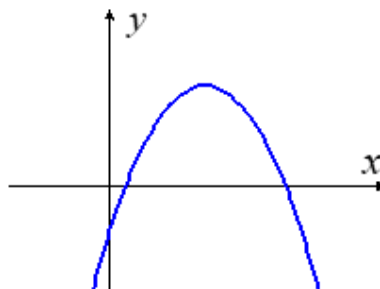
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $a = -1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$ Loại C.

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(1; 4)$

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, b < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, b > 0, \Delta < 0$.

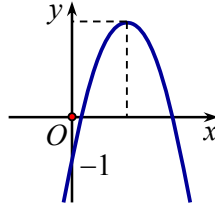
D. $a > 0, b > 0, \Delta > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát bề lõm của parabol như hình vẽ ta có $a < 0$ loại **C.** và **D.**, parabol cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$. Cho $x = 0$ thì giao của parabol với trục tung Oy là $b < 0$.

Câu 17. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ sau



A. $y = x^2 - 3x - 1$.

B. $y = -2x^2 + 5x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 5x - 1$.

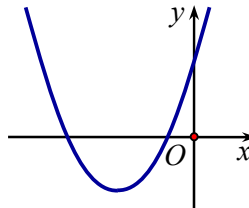
D. $y = -2x^2 + 5x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm parabol hướng xuống nên $a < 0$ và qua $A(0; -1)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b = 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

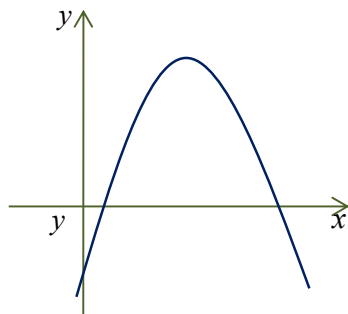
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a > 0$. Loại đáp án **D.**

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Nhìn vào đồ thị ta có:

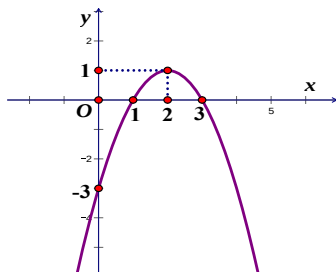
☐ Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a < 0$.

☐ Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Do đó: $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y = -x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^2 + 4x - 3$.

C. $y = x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x - 3$.

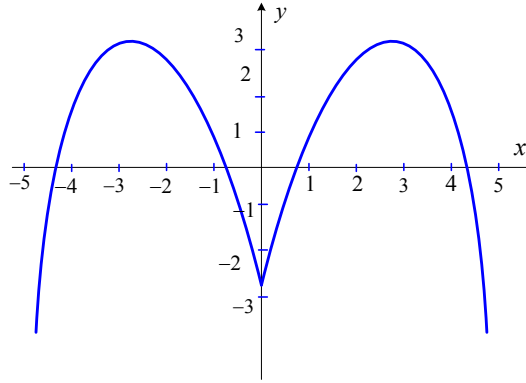
Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra: $a < 0$ và hoành độ đỉnh là 2.

$$y = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow a = -1; I(2; 1)$$

Câu 21. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên



A. $y = x^2 - 3x - 3$.

B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$.

D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy . Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$.

A. có tâm đối xứng $I(3; -4)$.

B. có tâm đối xứng $I(3; -4)$ và trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

C. không có trục đối xứng.

D. có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

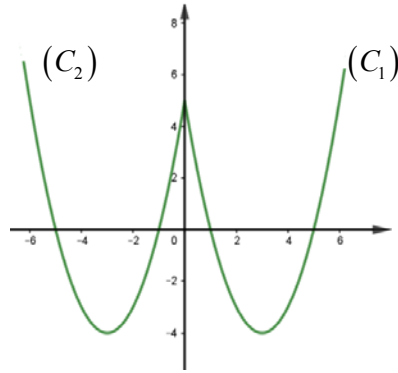
$$\text{Ta có: } y = x^2 - 6|x| + 5 = \begin{cases} y_1 = x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 0 \text{ } (C_1) \\ y_2 = x^2 + 6x + 5 & \text{khi } x < 0 \text{ } (C_2) \end{cases}$$

Đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$ gồm hai phần

Phần đồ thị (C_1) : là phần đồ thị của hàm số $y_1 = x^2 - 6x + 5$ nằm bên phải trục tung

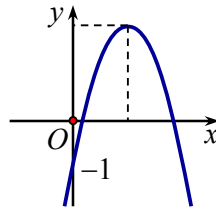
Phần đồ thị (C_2) : là phần đồ thị của hàm số $y_2 = x^2 + 6x + 5$ có được bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung

Ta có đồ thị (C) như hình vẽ



Vậy: đồ thị (C) có trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

Câu 23. hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b = 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

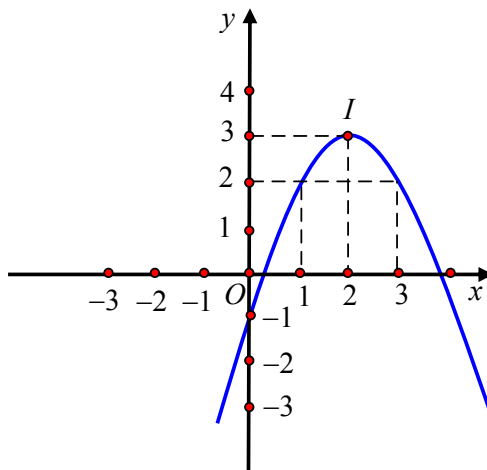
Quan sát đồ thị ta có:

Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$; có hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Lại có: đồ thị cắt Ox tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 24. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1 < m < 3$.

B. $0 < m < 3$.

C. $0 \leq m \leq 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

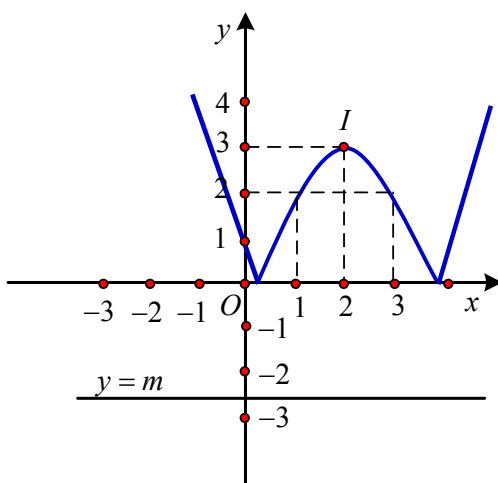
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c = -1$. Suy ra
$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$(P): y = -x^2 + 4x - 1$ suy ra hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ có đồ thị là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P) , như hình vẽ sau:



Phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ hay $|-x^2 + 4x - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0 < m < 3$.

Dạng 4: Sự tương giao

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là

$$x^2 - 2x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi (1) có hai

$$\text{nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt đồ thị hàm số $(P): y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là $x^3 - 6x^2 + 9x = mx$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Để (P) cắt d tại ba điểm phân biệt khi và chỉ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}.$$

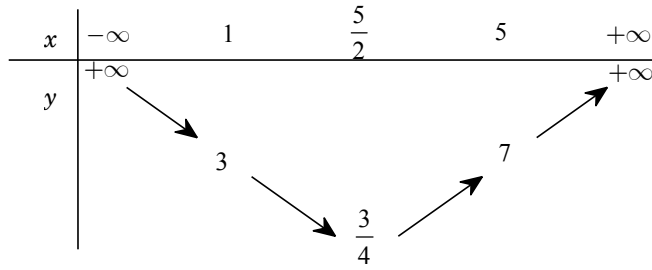
Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 5]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = -2m. \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): x^2 - 5x + 7$ và đường thẳng $y = -2m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[1; 5]$ như sau:



Dựa vào bảng biến ta thấy $x \in [1; 5]$ thì $y \in \left[\frac{3}{4}; 7\right]$.

Do đó để phương trình (*) có nghiệm $x \in [1; 5] \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq -2m \leq 7 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \geq m \geq -\frac{7}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là parabol (P). Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Chọn khẳng định **sai**:

- A. Số giao điểm của parabol (P) với trục hoành là số nghiệm của phương trình (1).
- B. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của parabol (P) với trục hoành.
- C. Nghiệm của phương trình (1) là giao điểm của parabol (P) với trục hoành.
- D. Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

- A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$.
- B. $(2; 2)$ và $(4; 8)$.
- C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$.
- D. $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- A. $y = x^2$ và $y = -8x + 5$.
- B. $y = x^2$ và $y = -8x - 5$.
- C. $y = x^2$ và $y = 8x - 5$.
- D. $y = x^2$ và $y = 8x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8x - 5$.

Do đó nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 8x - 5$.

Câu 4. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là

A. $(-1; 2); (2; 1)$.

B. $(1; 0); (3; 2)$.

C. $(2; 1); (0; -1)$.

D. $(0; -1); (-2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $(1; 0); (3; 2)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $d: y = x + 1$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 2$. Biết rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó diện tích tam giác OAB bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Phương trình này có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Suy ra $A(-1; 0)$ và $B(3; 4)$.

Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Câu 6. Biết đường thẳng $d: y = mx$ cắt Parabol $(P): y = x^2 - x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right)$.

B. $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{m}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$mx = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình nên ta có tọa độ trung

$$\text{điểm } I \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{m(x_A + x_B)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{m+1}{2} \\ y_I = \frac{m^2+m}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right).$$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 + (m+2)x - m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy .

A. $m > -3$.

B. $m < -3$.

C. $m > 3$.

D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 + (m+2)x - m = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + mx - m - 3 = 0. \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì

$$\text{phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 12 > 0 \\ -m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -3.$$

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt Parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Xét phương trình: } -(m+1)x + m + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x(m+2) - m - 4 = 0$$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung vậy

$$\text{điều kiện là } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 4(m+4) > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0, \forall m \\ m < -4 \end{cases}$$

Vậy trong nửa khoảng $[-10; -4)$ có 6 giá trị nguyên m .

Câu 9. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 10. Cho hai hàm số $y_1 = x^2 + (m-1)x + m$, $y_2 = 2x + m + 1$. Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì m có giá trị là

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. m tùy ý. D. không có giá trị nào.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm:
 $x^2 + (m-1)x + m = 2x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 1 = 0$ (1).

Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì pt(1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-3)^2 + 4 > 0 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Câu 11. Đường thẳng $d_m: (m-2)x + my = -6$ luôn đi qua điểm:

- A. $(3; -3)$ B. $(2; 1)$ C. $(1; -5)$ D. $(3; 1)$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$(m-2)x + my = -6 \Leftrightarrow (x+y)m - 2x + 6 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ luôn đúng với mọi m khi $\begin{cases} x+y=0 \\ -2x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy d_m luôn đi qua điểm cố định $(3; -3)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

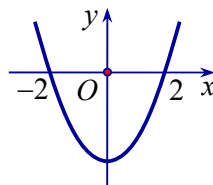
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$ (*).

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 13. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), (P) có đồ thị như hình vẽ:



Biết đồ thị (P) cắt trục Ox tại các điểm lần lượt có hoành độ là -2 , 2 . Tập nghiệm của bất phương trình $y < 0$ là

- A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $(-2; 2)$.
C. $[-2; 2]$. D. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $y < 0$ khi $x \in (-2; 2)$.

Câu 14. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. D. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[x < -\frac{3}{5} \vee x > 1 \right] \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5} \right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}. \end{cases}$$

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = 4x - 2m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = (m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $(m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1 = 4x - 2m$

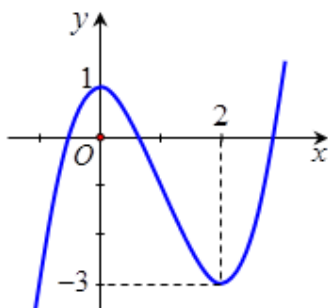
$$\Leftrightarrow (m-2)x^2 + 2(m-2)x - m + 1 = 0.$$

d tiếp xúc với $(P) \Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép.

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-2)(-m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \left[m = 2 \vee m = \frac{3}{2} \right] \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị m để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $m = 1$. B. $1 < m < 3$. C. $0 < m < 1$. D. $m \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

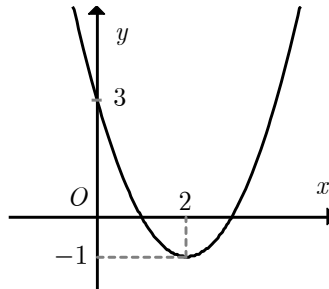
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x) - 1|$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	$+\infty$

Từ BBT suy ra phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi $1 < m < 3$.

Vậy $1 < m < 3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



- A. $-2 < m < 2$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

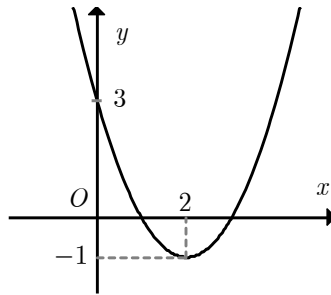
Chọn D.

Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là (C) , lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải Oy của (C) qua Oy ta được đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$.

Dựa vào đồ thị, phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow (|x|) = m + 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi

$$m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| - 1 = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



A. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$

C. $m \geq -1$.

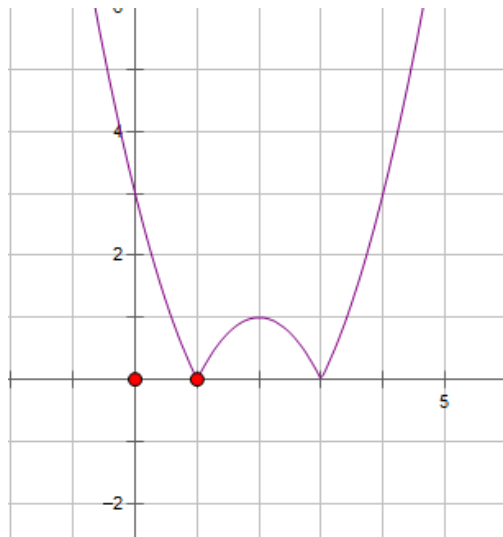
D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Phương trình $\Leftrightarrow |f(x)| = m + 1$.

+ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:



+ Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)| = m + 1$ có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} m+1 > 1 \\ m+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016.

B. 2008.

C. 2009.

D. 2017.

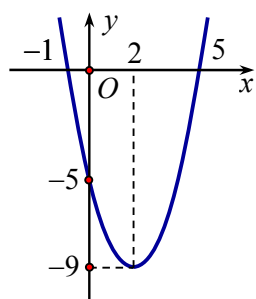
Hướng dẫn giải

Chọn B.

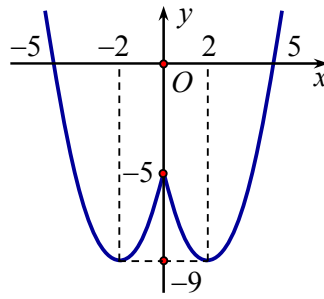
PT: $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m$.

Số nghiệm phương trình (1) $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ (P) và đường thẳng $y = m$.

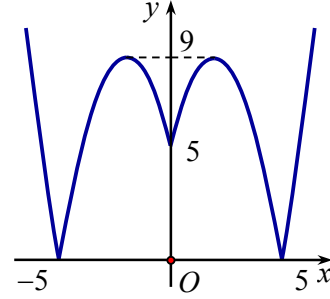
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ (P_1) có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5$ (P_2) là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .

□ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ (P), ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .

□ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}.$$

Câu 21. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016.

B. 2008.

C. 2009.

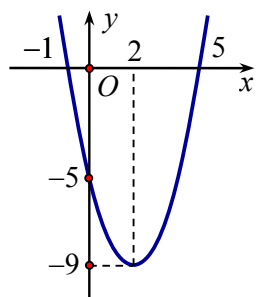
D. 2017.

Hướng dẫn giải

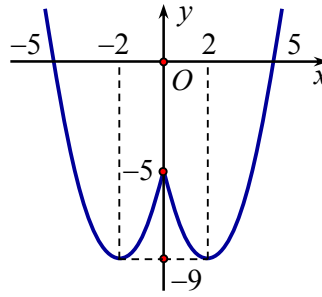
Chọn B.

PT: $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1). Số nghiệm phương trình (1) $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ (P) và đường thẳng $y = m$.

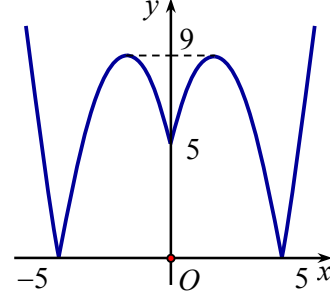
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ (P_1) có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5$ (P_2) là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .

□ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

$$\text{Xét hàm số } y = |x^2 - 4|x| - 5| \text{ (P)}, \text{ ta có: } y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}.$$

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .

□ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}.$$

Dạng 4: Toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 360 - 10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lượng cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

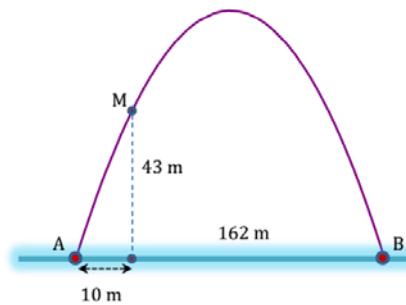
Hướng dẫn giải

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là

$$T = (360 - 10n)n = 360n - 10n^2 = -10(n^2 - 36n + 324 - 324) = -10(n - 18)^2 + 3240$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 3240 \text{ khi } n = 18.$$

Ví dụ 2: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.



Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng

$$y = ax^2 + bx + c.$$

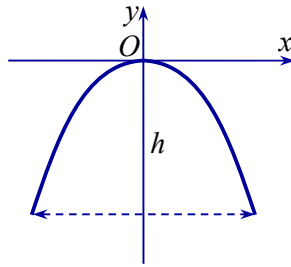
Parabol (P) đi qua điểm $A(0;0)$, $B(162;0)$, $M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2 a + 162b + c = 0 \\ 10^2 a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x.$$

Do đó chiều cao của cổng là $h = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \approx 185,6$ m.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5$ mét. Hãy tính chiều cao h của cổng.



- A. $h = 4,45$ mét. B. $h = 3,125$ mét. C. $h = 4,125$ mét. D. $h = 3,25$ mét.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A và B là hai điểm ứng với hai chân cổng như hình vẽ.

Vì cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$ và cổng có chiều rộng $d = 5$ mét nên:

$$AB = 5 \text{ và } A\left(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right); B\left(\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right).$$

Vậy chiều cao của cổng là $\left| -\frac{25}{8} \right| = \frac{25}{8} = 3,125$ mét.

Câu 2. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

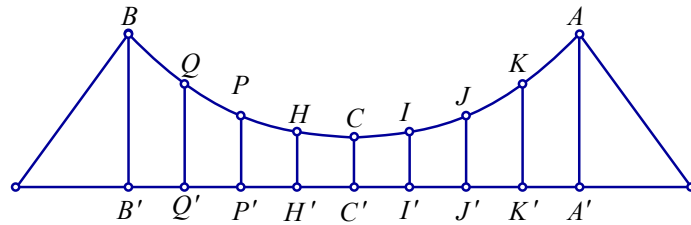
Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

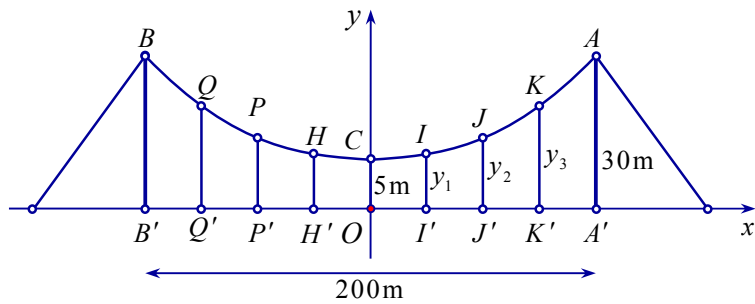
Câu 3. Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trụ AA' và BB' với độ cao 30 m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200 m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC = 5$ m. Gọi $Q', P', H', O, I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: $QQ', PP', HH', OC, II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?



- A. Đáp án khác. B. 36,87 m. C. 73,75 m. D. 78,75 m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Giả sử Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100; 30)$, và có đỉnh $C(0; 5)$. Đoạn AB chia làm 8 phần, mỗi phần 25 m.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 30 = 10000a + 100b + c \\ \frac{-b}{2a} = 0 \\ 5 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{400}x^2 + 5.$$

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3$

$$= 5 + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 25^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 50^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 75^2 + 5\right)$$

$$= 78,75(\text{m}).$$

Câu 4. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng.

B. 29 triệu đồng.

C. 30,5 triệu đồng.

D. 29,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

$$\text{Vậy } \max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 5. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

A. $y = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

B. $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

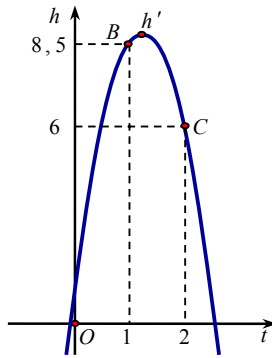
C. $y = -4,9t^2 + 12,2t - 1,2$.

D. $y = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tại $t = 0$ ta có $y = h = 1,2$; tại $t = 1$ ta có $y = h = 8,5$; tại $t = 2$, ta có $y = h = 6$.



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.

Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$, với $a \neq 0$.

Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h' .

Theo bài ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0; 1,2) \in (P)$.

Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1; 8,5) \in (P)$.

Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2; 6) \in (P)$.

$$\text{Vậy ta có hệ: } \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a = -4,9 \\ b = 12,2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình một ẩn

Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x . Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một **nghiệm của phương trình (1)**.

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình **vô nghiệm**.

2. Điều kiện của một phương trình

Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý với điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa. Ta cũng nói đó là điều kiện xác định của phương trình.

3. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số, chẳng hạn

$$3x + 2y = x^2 - 2xy + 8, \quad (2)$$

$$4x^2 - xy + 2z = 3z^2 + 2xz + y^2. \quad (3)$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn (x và y), còn (3) là phương trình ba ẩn (x, y và z).

Khi $x = 2, y = 1$ thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp $(x; y) = (2; 1)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số $(x; y; z) = (-1; 1; 2)$ là một nghiệm của phương trình (3).

4. Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là **tham số**.

II – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

1. Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

2. Phép biến đổi tương đương

Định lý

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

- a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;
- b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Chú ý: Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.

3. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Điều kiện xác định của phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$

Lời giải

Chọn D

Do $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của phương trình là $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình là: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{6}{x-3} = 4$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cho phương trình $\sqrt{x^3-1} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$. Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình } \begin{cases} x^3-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{x} + 3x^5 - 2017 = 0$.

- A. $[-1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. C. $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$. D. $(-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Tập xác định của phương trình là $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là

- A. $x > -2$ và $x < \frac{3}{2}$. B. $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$.
C. $x > -2$ và $x \neq 0$. D. $\begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình là } \begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 2x+4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Câu 3. Cho phương trình $x^2 + 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Tập giá trị của x để phương trình xác định là

- A. $(1; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $[1; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$x^2 + 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ xác định } \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Câu 4: Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} = 8-x$ là

- A. $x \in [2; 8] \oplus$. B. $x \leq 8$. C. $x \geq 2$. D. $x < 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{ĐK: } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Câu 5. Giá trị $x \geq 2$ là điều kiện của phương trình nào sau đây?

- A. $x + \frac{1}{x-2} = 2x-1$. B. $x + \frac{1}{x} + \sqrt{x-2} = 0$.
C. $x + \frac{1}{4-x} = \sqrt{x-2}$. D. $x + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình } x + \frac{1}{x-2} = 2x-1 \text{ có điều kiện là } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

$$\text{Phương trình } x + \frac{1}{x} + \sqrt{x-2} = 0 \text{ có điều kiện là } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$\text{Phương trình } x + \frac{1}{4-x} = \sqrt{x-2} \text{ có điều kiện là } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } x + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0 \text{ có điều kiện là } x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Câu 6. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$ là

- A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$. B. $x \in (-2; 5) \setminus \{0\}$.
C. $[-2; 5] \setminus \{0; -2\}$. D. $(-\infty; 5) \setminus \{0; -2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+2x \neq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0; x \neq -2 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 5) \setminus \{0\}.$$

Câu 7. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$ là

- A. $x \in (-4; +\infty)$. B. $x \in [-4; 3) \setminus \{\pm 1\}$. C. $x \in (-\infty; 3)$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình đã cho xác định khi } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq \pm 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 3 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Câu 8. Tập xác định của phương trình $\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{x-1} = \sqrt[3]{x-2}$ là

- A. $D = [2; +\infty)$. B. $D = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.
C. $D = [0; +\infty)$. D. $D = [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Vậy đáp án } D = [0; +\infty) \setminus \{1\}.$$

Câu 9. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+5}}{x-2} = 1$ là

- A. $x \geq -5$. B. $\begin{cases} x > -5 \\ x \neq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 2 \end{cases}$. D. $x > 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Câu 10. Điều kiện xác định của phương trình $x + \sqrt{2x+1} = \sqrt{1-x}$ là

- A. $-\frac{1}{2} < x < 1$. B. $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. C. $x \geq -\frac{1}{2}$. D. $x \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Câu 11. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$?

- A. $[2; 7)$. B. $(2; +\infty)$. C. $[2; 7]$. D. $[7; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$.

Câu 12. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$ là:

- A. $x \in (-4; +\infty)$. B. $x \in [-4; 3) \setminus \{\pm 1\}$. C. $x \in (-\infty; 3)$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải:

Chọn B

Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq \pm 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 3 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$.

Dạng 2: Sử dụng điều kiện xác định của phương trình để tìm nghiệm của phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1 : Giải phương trình $x(x^2-1)\sqrt{x-1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

$$\text{Vì : } x(x^2-1)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$

Lời giải

Vì : Điều kiện của pt $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Thay $x=2$ vào phương trình thấy

thỏa mãn nên $x = 2$ là nghiệm phương trình.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x}$

Lời giải

$$\text{Vì: } \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x-1)^2} + x = \sqrt{2 - x}.$$

$$\text{Điều kiện của phương trình: } \begin{cases} (x-2)(x-1)^2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x=1 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x=1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$

Lời giải

$$\text{Vì: } (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

+ Thay $\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$ vào phương trình thì thấy chỉ có $x = 1$ thỏa mãn. Nên $x = 1$ là nghiệm pt

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây không là nghiệm của phương trình $2x - 3y = 5$?

A. $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; 0\right).$

B. $(x; y) = (1; -1).$

C. $(x; y) = \left(0; \frac{5}{3}\right).$

D. $(x; y) = (-2; -3).$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thay các bộ số $(x; y)$ vào phương trình, ta thấy bộ số đáp án C không thỏa mãn:

$$2.0 - 3.\frac{5}{3} = -5 \neq 5.$$

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Điều kiện: } x > -1. \text{ Khi đó phương trình đã cho } \Leftrightarrow 2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2(L) \end{cases} \Rightarrow x=0.$$

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là:

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đkxđ: $x > 3$

Với điều kiện $x > 3$ phương trình đã cho trở thành $\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 < 3$

Vậy phương trình không có nghiệm.

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1$ là

A. $S = \mathbb{R}$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{0\}$.

D. $S = \{-1\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

Câu 5. Phương trình nào sau đây nhận 2 làm nghiệm ?

A. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

B. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

C. $\sqrt{1-x} + x = \sqrt{1-x} + 2$.

D. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{- Xét PT: } x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

$$\text{- Xét PT: } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

$$\text{- Xét PT: } \sqrt{1-x} + x = \sqrt{1-x} + 2.$$

$$\text{Điều kiện } 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

- Xét PT: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của PT đã cho.

Câu 6. Phương trình $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì : $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 7. Phương trình $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt{-(x - 3)^2} = 27 - x^3$

Đk : $-(x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 3$. Thay $x = 3$ vào phương trình thấy thỏa mãn nên $x = 3$ là nghiệm pt

Câu 8. Phương trình $\sqrt{(x - 3)^2(5 - 3x)} + 2x = \sqrt{3x - 5} + 4$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì điều kiện của phương trình : $\begin{cases} (x - 3)^2(5 - 3x) \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3x \geq 0 \\ x = 3 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x = 3 \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

+ Thay $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$ vào phương trình thì thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn. Nên $x = 3$ là nghiệm pt

Câu 9. Phương trình $x + \sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Vì : Điều kiện của pt : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Thay $x=1$ vào phương trình thấy vô lí nên pt vô nghiệm.

+ Thay $\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$ vào phương trình thì thấy chỉ có $x=1$ thỏa mãn. Nên $x=1$ là nghiệm pt

Câu 10. Phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì : } (x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Dạng 3: Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $S_1 = \{m; 2m-1\}$ và phương trình $g(x) = 0$ có tập nghiệm $S_2 = [1; 2]$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $g(x) = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = 0$.

A. $1 < m < \frac{3}{2}$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của hai phương trình $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$.

Ta nói phương trình $g(x) = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = 0$ khi $S_1 \subset S_2$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq 2m-1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x-1=0$?

A. $x+2=0$.

B. $x+1=0$.

C. $2x-2=0$.

D. $(x-1)(x+2)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x-1=0 \Leftrightarrow 2x-2=0$.

Câu 2. Cho phương trình $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

A. $x^2+1=0$.

B. $x-1=0$.

C. $(x-1)(x+1)=0$.

D. $x+1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hai phương trình tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

Phương trình $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$ có tập nghiệm $S=\{-1;1\}$.

Phương trình $(x-1)(x+1)=0$ có tập nghiệm $S=\{-1;1\}$.

Câu 3. Phương trình $\sqrt{2x-3}=1$ tương đương với phương trình nào dưới đây?

A. $(x-3)\sqrt{2x-3}=x-3$.

B. $(x-4)\sqrt{2x-3}=x-4$.

C. $x\sqrt{2x-3}=x$.

D. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-3}=1+\sqrt{x-3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\sqrt{2x-3}=1 \Leftrightarrow x=2$.

$$\text{Xét } (x-3)\sqrt{2x-3}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x-3=0 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \text{ nên phương trình này không tương}$$

đương với phương trình đã cho.

$$\text{Xét } (x-4)\sqrt{2x-3}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x-4=0 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases} \text{ nên phương trình này không}$$

tương đương với phương trình đã cho.

$$\text{Xét } x\sqrt{2x-3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x = 0 \\ \sqrt{2x-3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$\Rightarrow$ phương trình tương đương với phương trình đã cho.

$$\text{Xét } \sqrt{x-3} + \sqrt{2x-3} = 1 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{2x-3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ nên phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.}$$

Câu 4: Cho phương trình: $x^2 + x = 0$ (1). Phương trình nào tương đương với phương trình (1) ?

A. $x(x+1) = 0$. **B.** $x+1 = 0$. **C.** $x^2 + (x+1)^2 = 0$. **D.** $x = 0$

Lời giải

Chọn A

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ý A: } x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 5. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$?

A. $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}$. **B.** $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$.
C. $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$. **D.** $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2 - 3x = 0$ có tập nghiệm là $S = \{0; 3\}$ nên phương trình tương đương cũng phải có tập nghiệm như vậy. Chọn C

Chú ý lý thuyết:

+ Phép biến đổi tương đương cho hai phương trình tương đương

+ Phép biến đổi cộng hai vế một biểu thức hoặc nhân 2 vế với một biểu thức khác 0 là phép biến đổi tương đương khi chúng không làm thay đổi điều kiện

Do đó dựa vào điều kiện của các phương trình ta cũng có thể chọn C

Câu 6. Phép biến đổi nào sau đây là phép biến đổi tương đương?

A. $x + \sqrt{x^2 - 2} = x^2 + \sqrt{x^2 - 2} \Leftrightarrow x = x^2$. **B.** $\sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow 2-x = x^2$.
C. $x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = x^2$. **D.** $x + \sqrt{x^2 + 3} = x^2 + \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow x = x^2$.

Lời giải

Chọn D

* Xét phương án A:

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = x^2 + \sqrt{x^2 - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$
$$x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án B:

$$\sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$
$$2-x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án C:

$$x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$
$$x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án D:

$$x + \sqrt{x^2 + 3} = x^2 + \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$
$$x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2 phương trình có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi là tương đương.

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương:

$$2x^2 + mx - 2 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad 2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \quad (2).$$

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình

$$2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0(1) \end{cases}$$

Để hai phương trình trên tương đương thì $x = -2$ phải là nghiệm của phương trình (1) từ đó suy ra $m = 3$.

Cách khác : có thể thử ngược đáp án.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương:

$$mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad (m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0 \quad (2).$$

A. $m = -5$.

B. $m = -5; m = 4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì xét phương trình: } mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{cases}$$

Để hai phương trình tương đương thì điều kiện cần $x = 1$ phải là nghiệm của phương trình (2).

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào (2) ta được: } m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } m = 4 : (1) \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ suy ra } m = 4 \text{ thỏa mãn}$$

$$+ \text{ Với } m = -5: (1) \Leftrightarrow -5x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow -7x^2 - 3x + 10 = 0 \text{ suy ra } m = -5 \text{ (loại)}$$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

1. Phương trình bậc nhất

Cách giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được tóm tắt trong bảng sau

$ax + b = 0 \quad (1)$		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

Khi $a \neq 0$ phương trình $ax + b = 0$ được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Phương trình bậc hai

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai được tóm tắt trong bảng sau

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2)$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(2) vô nghiệm

3. Định lý Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

II – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Có nhiều phương trình khi giải có thể biến đổi về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai.

Sau đây ta xét hai trong các dạng phương trình đó.

1. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Giải phương trình $|x - 3| = 2x + 1$. (3)

Giải

Cách 1

a) Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (3) trở thành $x - 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = -4$.

Giá trị $x = -4$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

b) Nếu $x < 3$ thì phương trình (3) trở thành $-x + 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = \frac{2}{3}$.

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $x < 3$ nên là nghiệm.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình (3) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$\begin{aligned}(3) &\Rightarrow (x - 3)^2 = (2x + 1)^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0.\end{aligned}$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{2}{3}$.

Thử lại ta thấy phương trình (3) chỉ có nghiệm là $x = \frac{2}{3}$.

2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x - 3} = x - 2$. (4)

Giải.

Điều kiện của phương trình (4) là $x \geq \frac{3}{2}$.

Bình phương hai vế của phương trình (4) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$\begin{aligned}(4) &\Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 4x + 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0.\end{aligned}$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = 3 + \sqrt{2}$ và $x = 3 - \sqrt{2}$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện của phương trình (4), nhưng khi thay vào phương trình (4) thì giá trị $x = 3 - \sqrt{2}$ bị loại, còn

giá trị $x = 3 + \sqrt{2}$ là nghiệm.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x = 3 + \sqrt{2}$.

Dạng 1: Phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$

Hướng dẫn giải

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định của phương trình $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

Ta có $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)[\sqrt{2x+7} - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7} - (x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+7} = x+2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình

$$(1): \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1, x = 2$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho phương trình $x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0$. Tìm m để có đúng hai nghiệm

A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m \in \{2; -2\}$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) - m(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = m \end{cases}$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm thì $m = \pm 2$.

Câu 2. Phương trình $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 2)(x^2 - 4x + 2) = 0$$

Phương trình không có nghiệm nguyên.

Câu 3. Phương trình $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực.

Câu 4. Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện: } 17 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}.$$

$$\text{Ta có: } (x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 6) = 0 \\ 16 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (T) \\ x = 6 & (L) \\ x = \pm 4 & (T) \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.

Câu 5. Phương trình $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x + 3} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -3$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \\ x = -4 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Câu 6. Số nghiệm của phương trình: $(\sqrt{x-4}-1)(x^2-7x+6)=0$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của phương trình $x \geq 4$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \begin{cases} \sqrt{x-4}=1 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \\ x=6 \end{cases} \text{ kết hợp điều kiện suy ra}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn trong giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $|3x-2|=2x-1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |3x-2|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ (3x-2)^2=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $|2x^2-3x-2|=|x+2|$

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-2=x+2 \\ 2x^2-3x-2=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x-4=0 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \pm \sqrt{3} \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $|x-2|=|3x-1|$ có tổng các nghiệm là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } |x-2| = |3x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3x-1 \\ x-2=1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy tổng các nghiệm là } \frac{1}{4}.$$

Câu 2. Phương trình $|x^2 + 2x - 8| = x - 2$ có số nghiệm là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |x^2 + 2x - 8| = x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x^2 + 2x - 8) = \pm(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 8 = x - 2 \\ x^2 + 2x - 8 = -x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2, x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2, x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 3. Phương trình $|2x - 4| - 2x + 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$|2x - 4| - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow |2x - 4| = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Câu 4. Phương trình $|x^2 + 2x - 3| = x + 5$ có tổng các nghiệm nguyên là

A. -2.

B. -3.

C. -1.

D. -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{TH1: } x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}. \text{ Khi đó phương trình trở thành:}$$

$$x^2 + 2x - 3 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1. \text{ Khi đó phương trình trở thành:}$$

$$-x^2 - 2x + 3 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm nguyên là $T = -1 - 2 = -3$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình: $|x-2| = |3x-5|$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\left\{-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\right\}$. B. $\left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$. C. $\left\{-\frac{7}{4}; \frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$|x-2| = |3x-5| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3x-3 \\ x-2 = -3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$.

Câu 6. Tổng nghiệm bé nhất và lớn nhất của phương trình $|x+1| + |3x-3| = |4-2x|$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |x+1| + |3x-3| &= |4-2x| \Leftrightarrow (|x+1| + |3x-3|)^2 = (4-2x)^2 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 16x + 10 + 2|3x^2 - 3| &= 16 - 16x + 4x^2 \Leftrightarrow 6|x^2 - 1| = 6 - 6x^2 \Leftrightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \text{ Vậy tổng nghiệm lớn nhất và bé nhất bằng } 0. \end{aligned}$$

Câu 8. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $|x+2| = 2|x-2|$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 6. D. $\frac{20}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$|x+2| = 2|x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x-4 \\ x+2 = -2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{20}{3}$.

Câu 10. Để giải phương trình $|x-2| = 2x-3(1)$, một học sinh đã lập luận như sau:

(I) Bình phương 2 vế: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9 \quad (2)$

(II) $\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \quad (3).$

(III) $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3}.$

(IV) Vậy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{5}{3}$

Cách giải trên sai từ bước nào?

- A. (IV). B. (II). C. (III). D. (I).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Muốn bình phương hai vế của phương trình thì hai vế phải không âm

Để giải phương trình này ta áp dụng công thức $|x-2| = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x-2 = 2x-3 \\ x-2 = -2x+3 \end{cases}$

Hoặc ta giải bằng phương pháp hệ quả thì $(1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9 \quad (2)$.

Câu 11. Cho phương trình: $|x-2| = 2-x \quad (1)$. Tập hợp các nghiệm của phương trình (1) là tập hợp nào sau đây?

- A. $(-\infty; 2]$. B. $\mathbb{R}$. C. $[2; +\infty)$. D. $\{0; 1; 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $|x-2| = 2-x \Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Phương trình có tập nghiệm $S = (-\infty; 2]$.

Câu 12. Giải phương trình $|1-3x| - 3x + 1 = 0$.

- A. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. D. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $|1-3x| - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow |1-3x| = 3x-1 \Leftrightarrow 1-3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Câu 13. Phương trình $x^2 + 3|x-3| = 2x + 5$ có tích của tất cả các nghiệm nguyên là

- A. 4. B. 1. C. -56. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình } x^2 + 3|x-3| = 2x + 5 \Leftrightarrow 3|x-3| = 2x + 5 - x^2 (*)$$

$$\text{Điều kiện } 2x + 5 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{6} \leq x \leq 1 + \sqrt{6}$$

$$\text{TH1: } 3 \leq x \leq 1 + \sqrt{6}. \text{ Phương trình } (*) \Leftrightarrow x^2 + x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{57}}{2}$$

$$\text{TH2: } 1 - \sqrt{6} \leq x < 3. \text{ Phương trình } (*) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 14. Phương trình $|x^2 + 2x - 3| = x + 5$ có tổng các nghiệm nguyên là

A. -2.

B. -3.

C. -1.

D. -4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Với $x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$ ta có $VP \geq 0$, $VP < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 3|^2 = (x + 5)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = (x + 5)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 8 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Tổng các nghiệm bằng -4.

Dạng 3: Phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải phương trình $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$

Lời giải

Điều kiện $x \neq 1$. Khi đó phương trình

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1} \Leftrightarrow 2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3$.

Lời giải

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x \neq 0 \\ \frac{2x(x-5)}{x(x-5)} = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x \neq 0 \\ 2 = x-3 \end{cases} \rightarrow S = \emptyset.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình $1 - \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow (2-x)(x+3) - 2(x+3) = 10(2-x) - 50 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 (\text{thỏa mãn}) \\ x = -3 (\text{loại}) \end{cases}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Gọi n là các số các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{(x+1)(mx+2)}{x-2} = 0$ có nghiệm duy nhất. Khi đó n là:

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \neq 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi xảy ra hai trường hợp:

TH 1: tử thức có đúng một nghiệm thỏa điều kiện, suy ra $-m+2=0 \Leftrightarrow m=2$.

TH 2: tử thức có hai nghiệm và một nghiệm $x=2$, suy ra $2m+2=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $n=2$.

Câu 2. Tìm phương trình tương đương với phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2} = 0$ trong các phương trình sau:

A. $\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}} = 0$.

B. $\sqrt{x} + \sqrt{2+x} = 1$.

C. $x^3+1=0$.

D. $(x-3)^2 = \frac{-x}{\sqrt{x-2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2} = 0$ (1). ĐK: $x \geq -1$ và $x \neq 2$.

Với điều kiện ở trên, ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình (1) có nghiệm $x = -1$.

Xét phương trình $\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}=0$ (2). ĐK: $x > -4$. $(2) \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Loại A

Xét phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=1$. ĐK: $x \geq 0$. Loại B

Xét phương trình $x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Xét phương trình $(x-3)^2=\frac{-x}{\sqrt{x-2}}$. ĐK: $x > 2$. Loại D

Đã sửa đáp án C từ $x^2=1$ thành $x^3+1=0$.

Câu 3. Cho phương trình: $\frac{x^2-3x-2}{x-3}=-x$ có nghiệm a . Khi đó a thuộc tập:

A. $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq 3$.

Ta có: $\frac{x^2-3x-2}{x-3}=-x \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-2+x(x-3)}{x-3}=0 \Rightarrow 2x^2-6x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

Ta có: $-\frac{1}{2} < \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho thuộc tập $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Dạng 4: Phương trình chứa ẩn ở trong dấu căn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2+3x-5=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$?

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $0 = 0$ hay $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2$.

A. $x = 4$. B. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. C. $x = 4 + 2\sqrt{2}$. D. $x = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x-1} = x-3$ là

A. 0. B. 1. B. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \Rightarrow x = 5 \\ x = 5 \end{cases}$$

Câu 2. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt{x^2 + 5x - 2} - 2$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} \Rightarrow x^2 + 5x = t^3 + 2.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Câu 3. Cho phương trình $\frac{x^2 - 4x + 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$. Số nghiệm của phương trình này là

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

ĐKXĐ: $x > 2$ khi đó phương trình trở thành

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có một nghiệm $x = 4$.

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$ là

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{3x + 7} = 2 + \sqrt{x + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x + 7 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x + 1 = 2\sqrt{x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x - 3} + 5 = \sqrt{7 - x} + x$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$+ \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 7 \end{cases}.$$

+ Thay x lần lượt bằng 3, 4, 5, 6, 7 vào phương trình ta thấy các số 3, 7 là nghiệm.

+ Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên.

Câu 7. Số nghiệm của phương trình: $x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 6$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -2 \vee x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậ phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.

Câu 8. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$?

A. 0.

B. vô số.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn. Vậ phương trình có một nghiệm.

Câu 9. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1+x}$ là

A. 3.

B. -3.

C. -2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 10. Phương trình $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3$ có nghiệm là

A. $x = 1$ hoặc $x = 3$.

B. Vô nghiệm.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Câu 11. Biết phương trình $3x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - \sqrt{3x - 1} = 0$ có một nghiệm có dạng $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$,

trong đó a, b, c là các số nguyên tố. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 14$.

B. $S = 21$.

C. $S = 10$.

D. $S = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x^2 + 7x \geq 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} (*)$$

Với điều kiện trên, phương trình tương đương

$$\left[(2x+1) - \sqrt{3x^2 + 7x} \right] + \left[x - \sqrt{3x-1} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{(2x+1) + \sqrt{3x^2 + 7x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x + \sqrt{3x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{2x+1 + \sqrt{3x^2 + 7x}} + \frac{1}{x + \sqrt{3x-1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Theo yêu cầu đề bài ta chọn nghiệm } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy } a = 3, b = 5, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 10.$$

Câu 12. Phương trình $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

$$\Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6} \left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} \right) = 2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\sqrt[3]{2x+11} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Thử lại ta được các nghiệm đều thỏa mãn

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$ là

A. $\emptyset$.

B. $\left\{ \frac{7}{2}; 1 \right\}$.

C. $\{0\}$.

D. $\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}}, t > 0 \Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Ta có pt: } t + \frac{1}{t^2} = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{So sánh với điều kiện } t > 0 \text{ ta tìm được } t = 1, t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Trường hợp 1: } t = 1: \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Trường hợp 2: } t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ \left(x - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện: } (4-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4].$$

$$x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}(1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}, t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = -(x^2 - 2x - 8) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow -t^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(n) \\ t = -4(l) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)} = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(n) \\ x = 4(l) \end{cases}. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.}$$

Câu 15. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$ là

- A. 17. B. 4. C. 16. D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+5+3\sqrt{x^2-4x+5}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Câu 16. Phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{1-x}+2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2x-2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Thay $x=1$ vào $\sqrt{3x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{1-x}+2$, ta được: $\sqrt{3}=2$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}=2-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7}$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}=2-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sqrt{x+7}-1|=2-\sqrt{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+2)} \\ \sqrt{x+7} \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-3+\sqrt{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+2)}=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x+7}-3}(\sqrt{\sqrt{x+7}-3}+\sqrt{\sqrt{x+7}+2})=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-3=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Dạng 5: Định lý Viet và ứng dụng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Tìm tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

Hướng dẫn giải

Phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m-1)(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{13}{4}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{13}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m^2 - 3)^2 - 4m^2 \geq 0 \\ -\frac{m^2 - 3}{m} = \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m^2 - 3 - 2m)(m^2 - 3 + 2m) \geq 0 \\ 4m^2 + 13m - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $\frac{265}{16}$.

Ví dụ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

Hướng dẫn giải

Để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 1 \cdot (m+2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 2 \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}.$$

Câu 2. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó:

- A. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a}{b} \\ x_1 x_2 = \frac{a}{c} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{2a} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo Hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-7; 7]$ để phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 14. B. 8. C. 7. D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

☐ TH1: $m = 0 \Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$; phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất nên loại $m = 0$

☐ TH2: $m \neq 0$

Để $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ với $m \in [-7; 7]$ có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' = (m+2)^2 - m(m-1) > 0 \Leftrightarrow 5m > -4 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{5} \text{ đồng thời } m \in [-7; 7]$$

Vậy $m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

A. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$ B. $m = 0$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình: $x^2 + 2mx - m - 1 = 0$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 > 0$, luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Câu 5. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 5x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu, giá trị m là

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; 2]$ B. $m \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$
C. $m \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ D. $m \in (-2; 2)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{m}{m^2 - 4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ 0 < m < 2 \end{cases}$ hay

$$m \in (-\infty; -2) \cup (0; 2).$$

Câu 6. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng 2 là

A. $m \in (0; 2)$ B. $m = \pm\sqrt{3}$ C. $m \in (-2; 0)$ D. $m \in \emptyset$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác với cạnh huyền có độ dài bằng 2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m^2 + 12 \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 = m > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m^2 \leq 4 \\ m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m \leq 2 \\ m^2 - 2(m^2 - 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m \leq 2 \\ m^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$, có đồ thị (P) . Giả sử d là đường thẳng đi qua $A(0; -3)$ và có hệ số góc k . Xác định k sao cho d cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt E, F sao cho $\triangle OEF$ vuông tại O (O là gốc tọa độ). Khi đó

A. $\begin{cases} k = -1 \\ k = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình đường thẳng $d: y = kx - 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$-x^2 + 4x - 3 = kx - 3 \Leftrightarrow -x^2 + (4 - k)x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4 - k) = 0 \quad (1).$$

d cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4 - k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 4$.

Ta có $E(x_1; kx_1 - 3), F(x_2; kx_2 - 3)$ với x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1).

$\triangle OEF$ vuông tại

$$O \Rightarrow \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + (kx_1 - 3)(kx_2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (1 + k^2) - 3k(x_1 + x_2) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (1 + k^2) - 3k(4 - k) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Câu 8. Giả sử phương trình $2x^2 - 4mx - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |x_1 - x_2|$.

A. $\min T = \frac{2}{3}$ B. $\min T = \sqrt{2}$ C. $\min T = 2$ D. $\min T = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $2x^2 - 4mx - 1 = 0$ có $\Delta' = 4m^2 + 2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $S = x_1 + x_2 = 2m$, $P = x_1x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ta có $T^2 = (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = 4m^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow T \geq \sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = 0$.

Vậy $\min T = \sqrt{2}$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = 3$. B. $T = -15$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = -9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $Ox: x^2 - 4x + m = 0$

Để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt thì có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4. \text{ Giả sử } A(x_1; 0), B(x_2; 0) \text{ và } x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = m.$$

$$\text{Ta có } OA = 3OB \Leftrightarrow |x_1| = 3|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

$$\text{Trường hợp 2: } x_1 = -3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -12$$

Vậy $S = -12 + 3 = -9$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ có đồ thị (P) , và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{5}{2}$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x - 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 - m = 0$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 17 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{17}{4}$.

$$A(x_1; x_1 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m)$$

$$B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$$

$$OA^2 + OB^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2$$

$$= 18 - 4(2 - m) + 6m + 2m^2 = 2m^2 + 10m + 10 = 2\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \geq \frac{15}{2} \text{ với } m > -\frac{17}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $OA^2 + OB^2$ là $\frac{15}{2}$ khi $m = -\frac{5}{2}$.

Câu 11. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt là

A. 5.

B. 6.

C. 10.

D. 11

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vậy trong đoạn $[-5; 5]$ có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 3$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có: } x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1}, x_1x_2 = \frac{m-3}{m-1}.$$

$$\text{Theo đề ta có: } x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-4}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 13. Cho phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

- A. $m \geq 5$. B. $m < \frac{8}{3}$. C. $\frac{8}{3} < m < 5$. D. $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-5 \neq 0 \\ (m-1)^2 - m(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{m-5} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m-5} \end{cases}$.

Với

$$\begin{aligned} x_1 < 2 < x_2 &\Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-5} + \frac{4(m-1)}{m-5} + 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9m-24}{m-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 5. \text{ Kiểm tra điều kiện } (*) \text{ ta được } \frac{8}{3} < m < 5. \end{aligned}$$

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx$ cắt parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 3$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB thuộc đường thẳng $(\Delta): y = x - 3$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 2. B. 1. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 2x + 3 = mx \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - 3 = 0$ (1).

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-2)^2 + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

Khi đó (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; mx_1)$, $B(x_2; mx_2)$, với x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1). Theo Viète, có: $x_1 + x_2 = 2 - m$, $x_1 x_2 = -3$.

$$I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow I = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{mx_1 + mx_2}{2} \right) = \left(\frac{2-m}{2}; \frac{-m^2 + 2m}{2} \right).$$

Mà

$$I \in (\Delta): y = x - 3 \Rightarrow \frac{-m^2 + 2m}{2} = \frac{2 - m}{2} - 3 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 = m_1 \\ m = 4 = m_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = 3.$$

Dạng 6: Giải và biện luận phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ có nghiệm là

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để phương trình $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - (3m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình $(m+1)^2 x + 1 = (7m-5)x + m$. Tìm tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm là

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (m+1)^2 x + 1 = (7m-5)x + m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 5m + 6)x = m - 1$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m-3)x = m-1 \quad (2)$$

Để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-3) = 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \vee m = 3 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 3$$

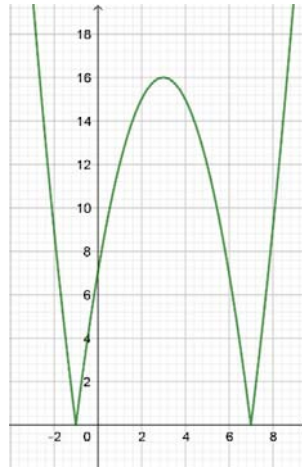
Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $m = |x^2 - 6x - 7|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

$m = |x^2 - 6x - 7|$ là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị

$$(C): y = |x^2 - 6x - 7|.$$

Vẽ $(P): y = x^2 - 6x - 7$, lấy đối xứng phần phía dưới Ox của (P) lên trên Ox và xóa đi phần phía dưới Ox , ta được đồ thị (C) .



Dựa vào đồ thị: phương trình $m = |x^2 - 6x - 7|$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in (0; 16)$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{-x^2+4} + 2m+3 = 0$ có nghiệm.

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

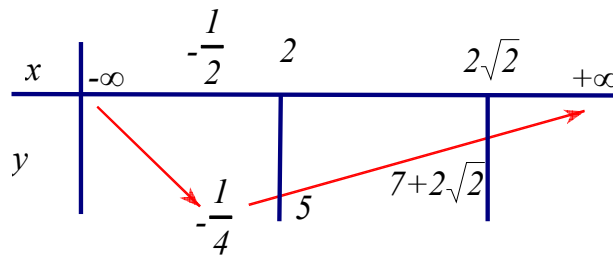
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}$, Điều kiện $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Phương trình trở thành: $t + 2\frac{t^2-4}{2} + 2m+3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2m - 1 = 0 (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$, có bảng biến thiên



Phương trình có nghiệm thỏa $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ khi $5 \leq 2m \leq 7 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq \frac{7+2\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 5. Tìm tham số m để phương trình $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2m + 1 = 0$ có nghiệm

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x \neq 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow |t| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$.

Phương trình đã cho trở thành $2(t^2 - 2) - 3t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2m - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 2m$$

Xét hàm số $y = f(t) = 2t^2 - 3t - 3$ có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	11	$-\frac{33}{8}$	-1	$+\infty$

có nghiệm t thỏa $\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$ khi $\begin{cases} 2m \geq -1 \\ 2m \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx + m - (m + 2)x = m^2 - 2x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 1. B. -1. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biến đổi phương trình đã cho thành $0x = m^2 - m$.

Phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$.

Suy ra $S = \{0; 1\}$. Do đó ta có $0 + 1 = 1$.

Câu 2. Cho phương trình $(2 - m)x = m^2 - 4$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

- A. vô số. B. 2. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình bậc nhất đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 - m = 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy có duy nhất một giá trị của tham số m để phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho phương trình $m(3m - 1)x = 1 - 3m$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m = \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{-\frac{1}{m}\right\}$.

B. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{-\frac{1}{m}\right\}$.

C. $m = 0$ thì phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

D. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giải và biện luận phương trình: $m(3m-1)x = 1-3m$ như sau:

$$+ \text{ Khi } m(3m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

☐ $m = 0$: phương trình trở thành $0x = 1$.

☐ $m = \frac{1}{3}$: phương trình trở thành $0x = 0$.

$$+ \text{ Khi } m(3m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases} : \text{ phương trình có nghiệm duy nhất } x = -\frac{1}{m}.$$

Câu 4. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0$ vô nghiệm.

A. $m < -1$. **B.** $m \leq 1$ hoặc $m \geq 0$.

C. $m = 0$ và $m < -1$. **D.** $m = 0$ và $m > -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $m = 0$ phương trình thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ nên ta loại $m = 0$.

Xét $m \neq 0$ phương trình có biệt thức $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+1) = m+1$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$ thỏa $m \neq 0$.

Câu 5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì tổng hai nghiệm âm và tích hai nghiệm dương.

Câu 6. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

A. $a = 0$ và $b \neq 0$.

B. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

C. $a = b = 0$.

D. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nếu $a \neq 0$ thì phương trình đã cho là PTB2 nên có nghiệm duy nhất khi $\Delta = 0$.

Nếu $a = 0$ ta được phương trình $bx + c = 0$. Phương trình này có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b \neq 0$.

Câu 7. Phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m > \frac{1}{2}$ và $m \neq 1$.

C. $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$, khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2mt + (2m - 1) = 0$ (*).

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Câu 8. Vậy $m > \frac{1}{2}$ và $m \neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $(m^2 - 9)x = m - 3$ nghiệm đúng với mọi x .

A. $m = \pm 3$.

B. $m \neq \pm 3$.

C. Không tồn tại m . **D.** $m = 3$.

D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình $(m^2 - 9)x = m - 3$ nghiệm đúng với mọi x khi $\begin{cases} m - 3 = 0 \\ m^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ có điểm chung.

- A. $m = -\frac{7}{2}$. B. $m > -\frac{7}{2}$. C. $m \geq -\frac{7}{2}$. D. $m < -\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0 (*)$

có nghiệm khi $\Delta' = 2m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}$.

Câu 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2. B. 21. C. 19. D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.

Vì $m \in [-10; 10]$ nên $m \in [-10; 10] \setminus \{\pm 3\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m để $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ có nghiệm duy nhất.

Câu 11. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $mx + 2 + m^2 = m^2x + 3m$ vô nghiệm.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$mx + 2 + m^2 = m^2x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - m)x = m^2 - 3m + 2 (*)$.

Xét $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1$.

Với $m = 0$, $(*) \Rightarrow 0x = 2$, phương trình vô nghiệm.

Với $m = 1$, $(*) \Rightarrow 0x = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

Với $m \notin \{0; 1\}$, $(*) \Rightarrow x = \frac{m^2 - 3m + 2}{m^2 - m} = \frac{m - 2}{m}$, nên $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Vậy $m = 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 12. Điều kiện cần và đủ để phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. $m \neq 0, m > -\frac{1}{2}$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$.

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$ cần tìm.

Câu 13. Phương trình $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq -\frac{5}{4}$. B. $m > -\frac{5}{4}$. C. $m = -\frac{5}{4}$. D. $m \geq -\frac{5}{4}$,
 $m \neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Trường hợp 1: Xét $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Trường hợp 2: Xét $m \neq 1$, $\Delta = 9 + 4(m-1) = 4m+5$. Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m+5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq -\frac{5}{4}$.

Câu 14. Với m bằng bao nhiêu thì phương trình $mx + m - 1 = 0$ vô nghiệm?

- A. $m = 0$. B. $m = 0$ và $m = 1$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $mx + m - 1 = 0$ vô nghiệm khi $\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$ vô nghiệm?

A. 2.

B. Đáp án khác.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } (m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 - 1.$$

$$\text{Để phương trình vô nghiệm thì } \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 16. Cho phương trình $(m^2 - 1)x + m + 1 = 0$ (1). Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?

A. Với $m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

B. Với $m \neq 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

C. Với $m \neq \pm 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

D. Cả ba kết luận trên đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$(1) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = -m - 1$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi $m^2 - 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Câu 17. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ có nghiệm là

A. $m \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right).$

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right).$

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right].$

D. $m \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t, |t| \geq 2 \text{ ta được } t^2 - 2mt - 1 = 0.$$

Phương trình luôn có hai nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình có ít nhất một nghiệm t sao cho $|t| \geq 2$, hay ít nhất một trong hai số $2; -2$

phải nằm giữa hai nghiệm t_1, t_2 ; hay $\begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m \leq 0 \\ 3+4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \leq -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$.

A. $\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{11}{3}$.

B. $-\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$.

C. $-1 \leq m < -\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{11}{3} \leq m \leq -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m = -x^2 + 4x - 6$.

Số nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ là số nghiệm của đường thẳng $y = 3m$ và parabol $y = -x^2 + 4x - 6$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ trên đoạn $[-1; 3]$:

x	-1	2	3
y	-11	-2	-3

Phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3] \Leftrightarrow -11 \leq 3m \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$.

Câu 19. Số giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm là

A. 21.

B. 9.

C. 20.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm
 $\Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.1.m < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Vậy số các trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1} - (m - 1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

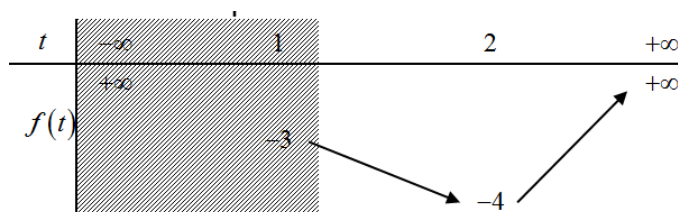
Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $t \geq 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - 4t - m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = m$. (2)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Vẽ BBT ta có



Dựa BBT ta có $-4 < m < -3$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. Để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $|10x - 2x^2 - 8| = x^2 - 5x + a$. Giá trị của tham số a là

- A. $a \in (1; 10)$. B. $a = 1$. C. $4 < a < \frac{43}{4}$. D. $a \in \left[4; \frac{45}{4}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình đã cho tương đương: $2|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + a$, (1).

Đặt $t = x^2 - 5x + a$.

Phương trình (1) trở thành: $2|t + 4 - a| = t$, (2)

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t = 2a - 8 \\ t = \frac{2a - 8}{3} \end{cases}$, để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2)

phải có 2 nghiệm phân biệt, tức là $2a - 8 > 0 \Leftrightarrow a > 4$, (*).

Khi đó, thay lại ta có: $\begin{cases} x^2 - 5x + a = 2a - 8 \\ 3x^2 - 15x + 3a = 2a - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 8 - a = 0 \\ 3x^2 - 15x + a + 8 = 0 \end{cases}$. Điều kiện để (1)

có 4 nghiệm phân biệt là mỗi phương trình bậc 2 ở trên có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \Delta_1 = 25 - 4(8 - a) > 0 \\ \Delta_2 = 15^2 - 4.3.(a + 8) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{7}{4} \\ a < \frac{43}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{4} < a < \frac{43}{4}.$$

So với điều kiện (*), suy ra $4 < a < \frac{43}{4}$.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x+m} = x-1$ có nghiệm duy nhất?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{2x+m} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 (*) \end{cases}.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi hệ có nghiệm duy nhất.

Xét $x^2 - 4x + 1 - m = 0$; $\Delta' = 3 + m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì có nghiệm kép $x = 2 \geq 1$.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất khi có 2 nghiệm thỏa

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - m - 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

m không dương nên $m \in \{-3; -1; 0\}$.

Câu 23. Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất khi:

- A. $m \neq 3$. B. $m \neq 1$ và $m \neq 3$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq 1$ hoặc $m \neq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Câu 24. Tìm m để phương trình $(m-1)x^4 - mx^2 + m^2 - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ phương trình cho trở thành: $-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Do đó: $m=1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Khi $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$.

Phương trình cho trở thành $(m-1)t^2 - mt + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$.

Phương trình cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 = 0 < t_2$

Khi $t_1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$. Do có hai nghiệm phân biệt nên $m \neq 1$.

Với $m = -1 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2}$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm khi $\begin{cases} m \geq -\frac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (**)$

Từ (*) và (**) phương trình (1) có nghiệm $m \geq -\frac{5}{4}$.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình $\frac{(x+2)(mx+3)}{x-1} = 0$ có nghiệm duy nhất?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \neq 1$.

$$\frac{(x+2)(mx+3)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(mx+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{3}{m} \end{cases}$$

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $m = 0$ hoặc $\frac{-3}{m} = 1 \Leftrightarrow m = -3$

hoặc $\frac{-3}{m} = -2 \Leftrightarrow m = 6$

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x - 3 - m = 0$ có nghiệm $x \in [0; 4]$.

A. $m \in (-\infty; 5]$.

B. $m \in [-4; -3]$.

C. $m \in [-4; 5]$.

D. $m \in [3; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Phương trình có nghiệm khi $\Delta' = 4 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$ (1).

Khi đó, phương trình có nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{4 + m}$, $x_2 = 1 + \sqrt{4 + m}$.

Để phương trình có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì $\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$

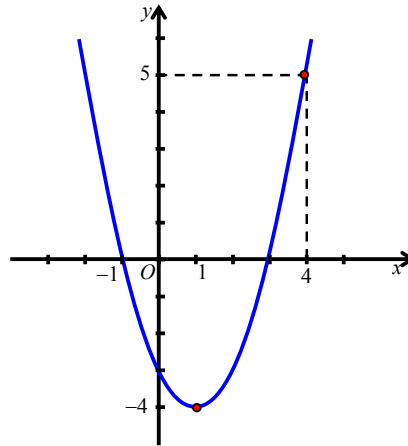
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 - \sqrt{4 + m} \leq 4 \\ 0 \leq 1 + \sqrt{4 + m} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + m} \leq 1 \\ \sqrt{4 + m} \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + m} \leq 1 \\ \sqrt{4 + m} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$$

So với điều kiện (1), $m \in [-4; 5]$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0; 4]$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương $m = x^2 - 2x - 3$.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:



Dựa vào đồ thị. Để phương trình $y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = m$ có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì $-4 \leq m \leq 5$

Câu 27. Tìm m để phương trình $\frac{2(2 - 2m - x)}{x + 1} = x - 2m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq 1$. B. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{3}{2}$. C. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{1}{2}$. D. $m \neq \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq -1$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-2m)(x+1)=2(2-2m-x) \Leftrightarrow x^2-2mx+x-2m=4-4m-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2m-3)x+2m-4=0 \quad (*)$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(2m-3)^2-4(2m-4)>0 \\ (-1)^2-(2m-3).(-1)+2m-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4m^2-20m+25>0 \\ 4m-6\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-5)^2>0 \\ 4m\neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \frac{5}{2} \\ m\neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2-2x-3-2m=0$ có đúng một nghiệm $x\in[0;4]$.

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } x^2-2x-3-2m=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=2m.$$

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm $x\in[0;4]$ thì đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-2x-3$ trên $[0;4]$ tại một điểm duy nhất.

Lập bảng biến thiên

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } \begin{cases} 2m=-4 \\ -3<2m\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ -\frac{3}{2}<m\leq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Câu 29. Cho phương trình $x^3-(2m+1)x^2+(4m-1)x-2m+1=0$. Số các giá trị của m để phương trình có một nghiệm duy nhất?

A. 0.

B. vô số.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương với

$$(x-1)(x^2-2mx+2m-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2mx+2m-1=0 (*) \end{cases}$$

Ta có, phương trình (*) có $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$.

Phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm nếu phương trình (*) có nghiệm kép $x=1$

$$\Rightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m=1.$$

Thay $m=1$ vào phương trình (*), ta được $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $m=1$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Câu 30. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

- A. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x > 1$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1+x-m=2m \Leftrightarrow 2x=3m+1 \Leftrightarrow x=\frac{3m+1}{2}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{3m+1}{2} > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = mx + 3 - m$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$?

- A. vô số B. 5. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + 3 - m = 0 \Leftrightarrow mx = m - 3$$

Với $m = 0$ thì phương trình tương đương: $0 = -3$.

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ thì phương trình có nghiệm } x = \frac{m-3}{m}$$

Để phương trình không có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ thì

$$\begin{cases} \frac{m-3}{m} < 0 \\ \frac{m-3}{m} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{m} < 0 \\ \frac{-m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ -3 < m < 0 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Tìm các giá trị của m để phương trình $2\sqrt{x+1} = x+m$ có nghiệm:

- A. $m > 2$. B. $m \geq 2$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$2\sqrt{x+1} = x+m \quad (1)$$

Phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x+m \geq 0 \\ 4(x+1) = x^2 + 2mx + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-m$.

$$\Delta' = 8 - 4m$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - m - \sqrt{8 - 4m} \\ x_2 = 2 - m + \sqrt{8 - 4m} > -m \end{cases}$$

Vậy $m \leq 2$.

Câu 33. Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5m + 1 = 0 \text{ có nghiệm là } S = \left[-\frac{a}{b}; +\infty\right), \text{ với } a, b \text{ là các số}$$

nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a.b$

- A. $T = -5$. B. $T = 5$. C. $T = 11$. D. $T = 55$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, $|t| \geq 2$ khi đó phương trình trở thành $2t^2 - 3t - 5m - 3 = 0$

Phương trình $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5m + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình có nghiệm t thỏa mãn $|t| \geq 2$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ và đường thẳng $d: y = 5m$.

Xét parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$				
$y = 2t^2 - 3t - 3$	$+\infty$	$\searrow$	11	$\searrow$	$-\frac{33}{8}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $5m \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{5}$.

Vậy khi $m \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ thì phương trình có nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow T=5$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax + by = c$ (1), trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

CHÚ Ý

a) Khi $a = b = 0$ ta có phương trình $0x + 0y = c$. Nếu $c \neq 0$ thì phương trình này vô nghiệm, còn nếu $c = 0$ thì mọi cặp số $(x_0; y_0)$ đều là nghiệm.

b) Khi $b \neq 0$, phương trình $ax + by = c$ trở thành $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (2)

Cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (2).

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình của phương trình (1) là một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (3)$$

Trong đó x, y là hai ẩn; các chữ số còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (3).

Giải hệ phương trình (3) là tìm tập nghiệm của nó.

II – HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là $ax + by + cz = d$, trong đó x, y, z là ba ẩn; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số.

Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (4).

Dạng 1: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 4 = y \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x - 4 = y \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = y \\ -4x + 2(2x - 4) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = y \\ -13 = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 3 \\ 9\left(\frac{1}{x}\right) - 10\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy $y - x = 5 - 3 = 2$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$$
 vô nghiệm

Lời giải

Cách 1.

Từ phương trình đầu ta có $y = mx - 2m$ (*).

Thế (*) vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x - m(mx - 2m) = m + 6 \Leftrightarrow (4 - m^2)x = -2m^2 + m + 6 \quad (**).$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) vô nghiệm.

$$(**) \text{ vô nghiệm khi và chỉ khi: } \begin{cases} 4 - m^2 = 0 \\ -2m^2 + m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Cách 2.

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2 - m)(2 + m).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m + 6 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 = (m - 2)(-2m - 3).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m + 6 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m - 2).$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} D = 0 \\ \begin{cases} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \quad (1) \\ 2x + y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Từ pt $\Leftrightarrow y = 2 - 2x$. Thế vào pt ta được:

$$mx - 2(2 - 2x) = 1 \Leftrightarrow (m + 4)x = 5 \quad (3)$$

$\Rightarrow m \neq -4$ thì pt có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} mx - (m + 1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} mx - (m+1)y = 3m & (1) \\ x - 2my = m+2 & (2) \\ x + 2y = 4 & (3) \end{cases},$$

Trừ theo về hai phương trình (2) và (3) ta được: $2(m+1)y = 2-m$ (4)

Nếu $m = -1$ thì (4) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Nếu $m \neq -1$ thì (4) $\Leftrightarrow y = \frac{2-m}{2(m+1)}$, thay vào (3) được $x = \frac{5m+2}{m+1}$.

Thế các giá trị x, y tìm được vào (1) ta được phương trình:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{5m+2}{m+1} - (m+1) \cdot \frac{2-m}{2(m+1)} &= 3m \\ \Leftrightarrow 2m(5m+2) - (m+1)(2-m) &= 6m(m+1) \\ \Leftrightarrow 5m^2 - 3m - 2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m+1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0^2 + y_0^2 = 10$.

Lời giải

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Khi đó

$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - mx \\ x + m(3 - mx) = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - mx \\ x = \frac{1-m}{1-m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{m+1} \\ y = \frac{2m+3}{m+1} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{m+1} \\ y_0 = \frac{2m+3}{m+1} \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } x_0^2 + y_0^2 = 10 \Leftrightarrow 1 + (2m+3)^2 = 10(m+1)^2 \Leftrightarrow 6m^2 + 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases} (TM).$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$$
 có nghiệm là

- A. $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$. B. $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$. D. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $a = \frac{1}{x}$ và $b = \frac{1}{y}$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 2a + 3b = 13 \\ 3a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases} (I)$, m là tham số. Mệnh đề nào **sai**?

- A. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\forall m \neq \pm 1$.
B. Khi $m = 1$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.
C. Khi $m = -1$ thì hệ (I) vô nghiệm.
D. Hệ (I) có vô số nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$, A đúng.

Hệ (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = 1 \Leftrightarrow m = 1$, B đúng. Hệ (I) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} \neq 1 \Leftrightarrow m = -1$, C đúng.

D sai.

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$. Giá trị m thuộc khoảng nào sau đây để hệ

phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $2x_0 - 3y_0 = 1$?

- A. $m \in (5; 9)$. B. $m \in (-5; 1)$. C. $m \in (0; 3)$. D. $m \in (-4; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(m; m + 1)$ mà

$2x_0 - 3y_0 = 1 \Leftrightarrow 2m - 3(m + 1) = 1 \Leftrightarrow m = -4$. Vậy $m \in (-5; 1)$.

- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & m \end{vmatrix} = 3m + 9; \quad D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9m - 6.$$

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \frac{3m+9}{m^2+2} \\ y = \frac{9m-6}{m^2+2} \end{cases}$.

$$\text{Ta có } A = 3x - y = \frac{3(3m+9)}{m^2+2} - \frac{9m-6}{m^2+2} = \frac{33}{m^2+2}.$$

Để A nguyên thì $m^2 + 2$ là ước của 33 mà $m^2 + 2 \geq 2$ nên ta có các trường hợp sau:

$$+ \text{ TH1: } m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

$$+ \text{ TH2: } m^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

$$+ \text{ TH3: } m^2 + 2 = 33 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{31}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để A nguyên.

- Câu 5.** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x - y = m+2 \\ mx - (m+1)y = -2 \end{cases}$ có nghiệm là $(2; y_0)$. Tổng các phần tử của tập S bằng
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$D = -(m+1)^2 + m = -m^2 - m - 1 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$D_x = -(m+1)(m+2) - 2 = -m^2 - 3m - 4$$

$$D_y = -2(m+1) - m(m+2) = -m^2 - 4m - 2$$

Suy ra với mọi giá trị của m thì hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2+3m+4}{m^2+m+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2+4m+2}{m^2+m+1} \end{cases}$

$$\text{Để } (2; y_0) \text{ là nghiệm của hệ thì } \frac{m^2+3m+4}{m^2+m+1} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-1; 2\}$

Câu 6. Hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$ vô nghiệm khi giá trị m bằng

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = 4 - m^2; D_x = \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m+6 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6; D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m+6 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$$

$$\text{Xét } D = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Khi $m = 2 \Rightarrow D_x = D_y = 0$ hệ phương trình có vô số nghiệm

Khi $m = -2 \Rightarrow D_x = -4 \neq 0$ hệ phương trình vô nghiệm

Câu 7. Gọi m_0 là giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = m \\ mx + y = m - \frac{2}{9} \end{cases}$ có vô số nghiệm. Khi đó:

A. $m_0 \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

D. $m_0 \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3m.$$

Để hệ phương trình vô số nghiệm thì $D = D_x = D_y = 0$

$$\text{Ta có } D = 0 \Leftrightarrow 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$\text{Thay } m = \frac{1}{3} \text{ vào hệ phương trình ta có: } \begin{cases} x + 3y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = \frac{1}{3} \\ x + 3y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}$ hệ phương trình vô số nghiệm.

Câu 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$. Gọi a_0 là giá trị của tham số a để tổng bình phương hai nghiệm của hệ phương trình đạt giá trị nhỏ nhất. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a_0 \in (-10; 0)$

B. $(5; 8)$

C. $a_0 \in (0; 5)$

D. $[8; 12]$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 - 2a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-a}{5} \\ y = \frac{3a}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{5-a}{5}\right)^2 + \frac{9a^2}{25} = \frac{10a^2 - 10a + 25}{25} = \frac{1}{5}(2a^2 - 2a + 5) = \frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\right) \geq \frac{9}{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 2y + z = -2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \\ z = 12 \end{cases}$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình là $(x; y; z) = (-8; -1; 12)$

Ví dụ 2. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$ có duy nhất một

nghiệm

Lời giải

$$\begin{cases} 2x+3y+4=0 \\ 3x+y-1=0 \\ 2mx+5y-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ 2m.2+5.2-m=0 \end{cases} \Rightarrow m=10.$$

Vậy $m=10$.

Ví dụ 3. Cho $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} mx+ny+pz=6 \\ 2mx-3ny+pz=-1 \\ mx+7ny-10pz=-15 \end{cases}$

biết hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 2; 3)$. Tìm m, n, p

Lời giải

Hệ phương trình $\begin{cases} mx+ny+pz=6 \\ 2mx-3ny+pz=-1 \\ mx+7ny-10pz=-15 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ nên ta có

$$\begin{cases} m+2n+3p=6 \\ 2m-6n+3p=-1 \\ m+14n-30p=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases}$$

Vậy $S = m + n + p = 1 + 1 + 1 = 3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Khi hệ phương trình $\begin{cases} x+2my-z=1 \\ 2x-my-2z=2 \\ x-(m+4)y-z=1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y; z)$ với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$, giá trị

$T = 2017x - 2018y - 2017z$ là

A. $T = -2017$.

B. $T = 2018$.

C. $T = 2017$.

D. $T = -2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Kí hiệu } \begin{cases} x+2my-z=1 & (1) \\ 2x-my-2z=2 & (2) \\ x-(m+4)y-z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}, \text{ từ (1) và (3) ta có } \begin{cases} x-z=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Ta có $T = 2017x - 2018y - 2017z = 2017(x - z) = 2017$.

1. Phương pháp**2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x^2 - 2x + 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow y = 1 - x$

Thế vào phương trình (2); ta được :

$$x^2 - 2x + 2(1 - x) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$

Hệ có 1 nghiệm : $(x; y) = (2; -1)$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ 2x^2 + xy - y^2 = 9 \end{cases}$$

Lời giải**Chọn D**

Đặt $y = tx$ thay vào hệ ta được
$$\begin{cases} x^2(1 - t) = 2 & (1) \\ x^2(2 + t - t^2) = 9 & (2) \end{cases}$$

Do $t = 1$ không thỏa mãn nên suy ra $\frac{2 + t - t^2}{1 - t} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 11t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

+ Với $t = 5$ thay vào ta được $-4x^2 = 2$.

+ Với $t = \frac{1}{2}$ thay vào ta được $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 > 1 \\ x = -2 < 1 \end{cases}$

Vậy $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow S = x_0 + y_0 = 3$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y = -1 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 3 \\ (x+y) + xy = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } S = x + y, P = x.y \text{ (} S^2 \geq 4P \text{)}$$

$$\text{Ta được hệ mới } \begin{cases} S^2 - P = 3 \\ S + P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ S^2 + S - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ S = 1 \\ S = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } S = 1 \Rightarrow P = -2$$

$$\text{Với } S = -2 \Rightarrow P = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x.y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - y \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; -1)$.

Ví dụ 4. Các nghiệm của hệ $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$ là

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 2x - y + 2) - x + 1 - y + 2 = 21 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x-1) - (y-2) = 21 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 38 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt $u = x - 1$; $v = y - 2$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} uv - (u + v) = 21 \\ u^2 + v^2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - (u + v) = 21 \\ (u + v)^2 - 2uv = 38 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S = u + v; P = uv \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} P - S = 21 \\ S^2 - 2P = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 21 \\ S^2 - 2S - 80 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}.$$

+ Khi $\begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases}$ thì $u; v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 + 8X + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 + \sqrt{3} \\ v = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} u = -4 - \sqrt{3} \\ v = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-4+\sqrt{3} \\ y-2=-4-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x-1=-4-\sqrt{3} \\ y-2=-4+\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+\sqrt{3} \\ y=-2-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3-\sqrt{3} \\ y=-2+\sqrt{3} \end{cases}.$$

+ Khi $\begin{cases} S=10 \\ P=31 \end{cases}$ thì $u; v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 31 = 0$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9 \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9 & (1) \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Có: $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2(y+4)x - 3y^2 - 12y - 9 = 0$, ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số, giải x theo y ta được $\begin{cases} x = -3y - 9 \\ x = y + 1 \end{cases}$,

Với $x = -3y - 9$ thì $(*) \Rightarrow \begin{cases} -3x - 9 \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases}.$

Với $x = y + 1$ thì

$$(2) \Rightarrow x^2 + 4x - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3x-2} + 14 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-2})^2 + (\sqrt{x+7} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3x-2} \\ \sqrt{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$ có tất cả các nghiệm là

- A. $(x; y) = (-1; -2); (x; y) = (-2; -1); (x; y) = (-1; 2); (x; y) = (2; -1).$
- B. $(x; y) = (-1; -2); (x; y) = (-2; -1).$
- C. $(x; y) = (1; 2); (x; y) = (2; 1).$
- D. $(x; y) = (-1; -2); (x; y) = (-2; -1); (x; y) = (1; 2); (x; y) = (2; 1).$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow x+y = \pm 3$$

Với $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ thì $(x;y) = (1;2); (x;y) = (2;1)$.

Với $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$ thì $(x;y) = (-1;-2); (x;y) = (-2;-1)$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\begin{cases} x^2 = 3x - y & (1) \\ y^2 = 3y - x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:

$$x^2 - y^2 = 4x - 4y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy hệ có hai nghiệm.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$ có một nghiệm

$(x_0; y_0)$. Khi đó $P = x_0 + y_0^2$ có giá trị là

A. 1.

B. $\frac{17}{16}$.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 & (1) \\ 2x + y + \frac{1}{2x-y} = 3 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 8x^2 + 12y^2 - 20xy = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x-3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = 3y \end{cases}$$

Với $x = y$ ta có $(2) \Rightarrow 3x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$: phương trình vô nghiệm.

Với $2x = 3y$ ta có $(2) \Rightarrow 4y + \frac{1}{2y} = 3 \Leftrightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Với $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow P = 1$.

Với $y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \Rightarrow P = \frac{7}{16}$.

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ trên có nghiệm.

A. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $[1; +\infty)$. C. $[0; 2]$. D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy(x + y) = 4m^2 - 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2xy = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2(2 - y)y = 4m^2 - 2m \end{cases} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow -2y^2 + 4y - 4m^2 + 2m = 0$$

$$\text{Hệ phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 2(-4m^2 + 2m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -8m^2 + 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq m \leq 1.$$

Câu 5. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $m > 1$. C. $m < -1$. D. $m \neq \pm 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = m^2 - 1 \Rightarrow (x + y)^2 = m^2 - 1.$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm khi } m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Câu 6: Gọi $(x; y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$. Tổng $x + y$

bằng.

A. 12. B. 8. C. 16. D. 0.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x \geq y > 0$

$$\text{Ta có : } \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ y^2 = 16x - 64 \end{cases}$$

$$\text{Thay } y^2 = 16x - 64 \text{ vào PT } x^2 + y^2 = 128 \text{ ta được PT: } x^2 + 16x - 192 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -24 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra PT có nghiệm } \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}. \text{ Vậy } x + y = 16$$

Câu 7. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2019y = x \\ y^3 - 2019x = y \end{cases}$ có số nghiệm là:

A. 4.

B. 6.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Trừ hai phương trình theo vế ta được: $x^3 - 2019y - y^3 + 2019x = x - y$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2018) = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + 2018 + \frac{3}{4}y^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

vì biểu thức $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + 2018 + \frac{3}{4}y^2 > 0, \forall x, y$.

Với $y = x$ ta được: $x^3 - 2020x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2020) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ x = \sqrt{2020} & \Rightarrow y = \sqrt{2020} \\ x = -\sqrt{2020} & \Rightarrow y = -\sqrt{2020} \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm.

Câu 8. Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

Tính $x - 2y$

A. 2.

B. -3.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{. Điều kiện: } \begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x+y \\ b = \sqrt{xy} \end{cases} (a \geq -2, b \geq 0) \text{ ta được hệ phương trình: } \begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+2\sqrt{a+(a-3)^2+1}=14 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-5a+10}=14-a \Leftrightarrow \begin{cases} 14-a \geq 0 \\ 4(a^2-5a+10)=(14-a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 14 \\ 3a^2+8a-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 14 \\ a=6 \\ a=-\frac{26}{3} \end{cases} \xrightarrow{a \geq -2} a=6 \Rightarrow b=3.$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ \sqrt{xy}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$$

$$x, y \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2-6X+9=0 \Leftrightarrow X=3 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x-2y=-3.$$

Câu 9: Tìm a để biểu thức $F = xy + 2(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases}$.

A. $a=0$.

B. $a=3$.

C. $a=-1$.

D. $a=-2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy=6-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=a^2-3 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện tồn tại } x, y: (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow a^2 \geq 4(a^2-3) \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2.$$

$$\text{Khi đó: } F = a^2 + 2a - 3 = (a+1)^2 - 4 \geq -4$$

$$\Rightarrow \min F = -4 \Leftrightarrow a = -1(t/m)$$

Do đó chọn đáp án C

Câu 10. Gọi $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases}$$
. Tính $|x_1 - x_2|$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}; S^2 \geq 4P, \text{ hệ đã cho trở thành}$$

$$\begin{cases} S^2 + S - 3P = 8 \\ 3S + P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 3(1 - 3S) = 8 \\ P = 1 - 3S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 10S - 11 = 0 \\ P = 1 - 3S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}^{(N)} \quad \begin{cases} S = -11 \\ P = 34 \end{cases}^{(L)}$$

$$\text{Với } S = 1; P = -2 \text{ ta có } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; -2); (-2; 1) \Rightarrow |x_1 - x_2| = |1 - (-2)| = |-2 - 1| = 3$, chọn A.

Câu 11. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để hệ
$$\begin{cases} x^3 = 2y + x + m \\ y^3 = 2x + y + m \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 4$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Trừ vế với vế của hai phương trình ta được: $x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow x = y$.

Thay y bởi x vào một trong hai phương trình của hệ ta được: $m = x^3 - 3x$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra: Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Chọn B.

Câu 12. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y + 12)x^2 = -6 \\ 5x^4 - (x^2 - 1)^2 \cdot y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$$
. Biết hệ có 2 nghiệm

là: $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$. Đặt $S = y_1 + y_2$. Khi đó S bằng:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y + 12)x^2 = -6 \\ 5x^4 - (x^2 - 1)^2 \cdot y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2 - 1)^2 = xy[y(x^2 - 1) + x] \\ 5(x^2 - 1)^2 = y^2(x^2 - 1)^2 + x^2 \end{cases}$$

Để thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ đều không là nghiệm của hệ phương trình.

$$\text{Với } x \neq 0; y \neq 0 \text{ ta có: Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6(x^2 - 1)^2}{x^2 y^2} = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{5(x^2 - 1)^2}{x^2 y^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} + \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2 - 1}{x}; v = \frac{1}{y}.$$

Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} 6u^2 v^2 = u + v \\ 5u^2 v^2 = u^2 + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2 v^2 = u + v \\ 5u^2 v^2 = (u + v)^2 - 2uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2 v^2 = u + v \\ 5u^2 v^2 = 36u^4 v^4 - 2uv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2 = u+v \\ 5uv = 36u^3v^3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2 = u+v \\ (2uv-1)\underbrace{(36u^2v^2 + 9uv + 2)}_{>0; \forall u,v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{3}{2} \\ uv = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ được $(u; v) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right) \right\}$. Khi đó $y_1 = 2; y_2 = 1 \Rightarrow S = y_1 + y_2 = 3$.

Câu 13. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2=4m^2-2m \end{cases}$ có nghiệm:

A. $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

B. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

C. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

D. $[1; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2=4m^2-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=2m^2-m \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $4 \geq 4(2m^2 - m) \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1$

Câu 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 + x - y = 0 & (1) \\ \sqrt{2x^2 + y + 9} + \sqrt{2y^2 - x + 1} = x + 4 & (2) \end{cases}$. Gọi nghiệm dương

của hệ phương trình là $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ trong đó $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Khi đó biểu thức

$P = (a-b)^{2018} + (c-d)^{2019}$ bằng

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $2x^2 + y + 9 \geq 0; 2y^2 - x + 1 \geq 0$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) - xy(x-y) + x - y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

Thế $x = y$ vào (2) ta được $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$ (3)

Đặt $\sqrt{2x^2 + x + 9} = u$; $\sqrt{2x^2 - x + 1} = v$ thì $u + v = x + 4$.

Mặt khác $u^2 - v^2 = 2(x + 4) = 2(u + v)$.

$$\text{Suy ra } (u + v)(u - v - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 0 \\ u - v = 2 \end{cases}$$

Với $u + v = 0$. Suy ra $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

$$\text{Với } u - v = 2 \text{ ta có } \begin{cases} u + v = x + 4 \\ u - v = 2 \end{cases} \Rightarrow 2u = x + 6$$

Khi đó ta được phương trình $2\sqrt{2x^2 + x + 9} = x + 6$

$$\Leftrightarrow 4(2x^2 + x + 9) = (x + 6)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(7x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = 0; \quad x = \frac{8}{7} \Rightarrow y = \frac{8}{7}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $(x, y) = \left\{ (0; 0), \left(\frac{8}{7}; \frac{8}{7} \right) \right\}$.

Do đó $a = 8; b = 7; c = 8; d = 7 \Rightarrow P = 2$

Dạng 4: Các bài toán thực tế phương trình, hệ phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Hiện nay tuổi của mẹ gấp 7 lần tuổi con. Sau 2 năm nữa tuổi của mẹ gấp 5 lần tuổi con. Hỏi mẹ sinh con lúc đó mẹ bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi x ($x \in \mathbb{N}^*$) là tuổi mẹ hiện nay, y ($y \in \mathbb{N}^*$) là tuổi con hiện nay.

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} x = 7y \\ x + 2 = 5(y + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y = 0 \\ x - 5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy mẹ sinh con năm $28 - 4 = 24$ tuổi.

Ví dụ 2: Một khách hàng vào cửa hàng bách hóa mua một đồng hồ treo tường, một đôi giày và một máy tính bỏ túi. Đồng hồ và đôi giày giá 420.000 đ; máy tính bỏ túi và đồng hồ giá 570.000 đ; máy tính bỏ túi và đôi giày giá 750.000 đ. Hỏi mỗi thứ giá bao nhiêu?

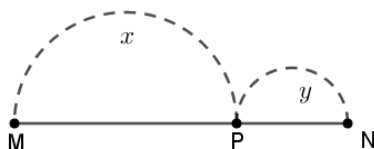
Lời giải

Gọi giá của đồng hồ, máy tính bỏ túi và đôi giày lần lượt là x, y, z .

Khi đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + z = 420.000 \\ x + y = 570.000 \\ y + z = 750.000 \end{cases}$$
 . Giải hệ này ta được
$$\begin{cases} x = 120.000 \\ y = 450.000 \\ z = 300.000 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hai người A và B xuất phát cùng một lúc ngược chiều từ thành phố M và N. Khi họ gặp nhau, người ta nhận thấy A đã đi nhiều hơn B là 6km. Nếu mỗi người tiếp tục đi theo hướng cũ với cùng vận tốc ban đầu thì A sẽ đến N sau 4,5 giờ, còn B đến M sau 8 giờ tính từ thời điểm họ gặp nhau. Gọi v_A, v_B lần lượt là vận tốc của người A và người B. Tìm vận tốc của mỗi người

Lời giải



Gọi P là điểm mà hai người A và B gặp nhau. Gọi đoạn $MP = x$ là quãng đường A đi được, $NP = y$ là quãng đường B đi được.

Khi họ gặp nhau, người ta nhận thấy A đã đi nhiều hơn B 6km có nghĩa là đoạn MP dài hơn NP là 6km và thời gian đi của hai người cho đến lúc gặp nhau là bằng nhau. Ta có hệ

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \frac{x}{v_A} = \frac{y}{v_B} \end{cases} \quad (1)$$

Nếu mỗi người tiếp tục đi theo hướng cũ với cùng vận tốc ban đầu thì A sẽ đến N sau 4,5 giờ,

còn B đến M sau 8 giờ tính từ thời điểm họ gặp nhau nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{y}{v_A} = 4,5 \\ \frac{x}{v_B} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4,5v_A \\ x = 8v_B \end{cases}$$

Thế vào ta có hệ :

D. 20 xe chở 3 tấn, 18 xe chở 5 tấn và 19 xe chở 7,5 tấn.

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số xe tải chở 3 tấn, y là số xe tải chở 5 tấn và z là số xe tải chở 7,5 tấn.

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

$$\text{Theo giả thiết của bài toán ta có } \begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7,5z = 290. \\ 22,5z = 6x + 15y \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 20, y = 19, z = 18$.

Câu 4: Có ba lớp học sinh 10A, 10B, 10C gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

- A.** 10A có 40 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 45 em.
- B.** 10A có 45 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 40 em.
- C.** 10A có 45 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 43 em.
- D.** 10A có 43 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 45 em.

Lời giải

Chọn A

Gọi số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là x, y, z .

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

$$\text{Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476. \\ 4x + 5y = 375 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 40, y = 43, z = 45$.

CHƯƠNG 4. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Các mệnh đề dạng " $a < b$ " hoặc " $a < b$ " được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề " $a < b \Rightarrow c < d$ " đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là " $a < b \Rightarrow c < d$ "

Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$ Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < c$ và $c < d$ $\Rightarrow a + b < c + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0; c > 0$	$a < b$ và $c < d$ $\Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

Chú ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \leq b$ hoặc $a \geq b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các **bất đẳng thức không ngặt** và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các **bất đẳng thức ngặt**. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt. **II– BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN**

1. Bất đẳng thức Cô-si

Định lí

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \geq 0. \quad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

Hệ quả 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \forall a > 0.$$

Hệ quả 2

Nếu x, y không âm và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Hệ quả 3

Nếu x, y không âm và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức dựa vào định nghĩa và tính chất

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức (BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c . Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

b) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

d) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Lời giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) BĐT tương đương $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

d) BĐT tương đương $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b+c+d+e) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2\right) \\
&= \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq \frac{2}{1 + ab}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} - \frac{2}{1 + ab} &= \left(\frac{1}{a^2 + 1} - \frac{1}{1 + ab}\right) + \left(\frac{1}{b^2 + 1} - \frac{2}{1 + ab}\right) \\
&= \frac{ab - a^2}{(a^2 + 1)(1 + ab)} + \frac{ab - b^2}{(b^2 + 1)(1 + ab)} = \frac{a - b}{1 + ab} \left(\frac{b}{1 + b^2} - \frac{a}{1 + a^2}\right) = \frac{a - b}{1 + ab} \cdot \frac{b - a + a^2b - b^2a}{(1 + b^2)(1 + a^2)} \\
&= \frac{a - b}{1 + ab} \cdot \frac{(a - b)(ab - 1)}{(1 + b^2)(1 + a^2)} = \frac{(a - b)^2(ab - 1)}{(1 + ab)(1 + b^2)(1 + a^2)} \geq 0 \text{ (Do } ab \geq 1\text{)}.
\end{aligned}$$

Nhận xét : Nếu $-1 < b \leq 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x . Chứng minh rằng

$$\text{a) } x^4 + 3 \geq 4x \quad \text{b) } x^4 + 5 > x^2 + 4x \quad \text{c) } x^{12} + x^4 + 1 > x^9 + x$$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - 4x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2[(x + 1)^2 + 1] \geq 0 \text{ (đúng với mọi số thực } x \text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - x^2 - 4x + 5 > 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0$$

$$\text{Ta có } (x^2 - 1)^2 \geq 0, (x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$

+ Với $x < 1$: Ta có $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$

Vì $x < 1$ nên $1 - x > 0$, $1 - x^5 > 0$ do đó $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

+ Với $x \geq 1$: Ta có $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$

Vì $x \geq 1$ nên $x^3 - 1 \geq 0$ do đó $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

Vậy ta có $x^{12} + x^4 + 1 > x^9 + x$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4 + b^4 - 4ab + 2 \geq 0$

b) $2(a^4 + 1) + (b^2 + 1)^2 \geq 2(ab + 1)^2$

c) $3(a^2 + b^2) - ab + 4 \geq 2(a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1})$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (2a^2b^2 - 4ab + 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \pm 1$.

b) BĐT tương đương với $2(a^4 + 1) + (b^4 + 2b^2 + 1) - 2(a^2b^2 + 2ab + 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (2a^2 - 4ab + 2b^2) + (a^4 - 4a^2 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(a - b)^2 + (a^2 - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \pm 1$.

c) BĐT tương đương với $6(a^2 + b^2) - 2ab + 8 - 4(a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow [a^2 - 4a\sqrt{b^2 + 1} + 4(b^2 + 1)] + [b^2 - 4b\sqrt{a^2 + 1} + 4(a^2 + 1)] + (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2\sqrt{b^2 + 1})^2 + (b - 2\sqrt{a^2 + 1})^2 + (a - b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq y$. Chứng minh rằng;

a) $4(x^3 - y^3) \geq (x - y)^3$

b) $x^3 - 3x + 4 \geq y^3 - 3y$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương $4(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)^3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[4(x^2+xy+y^2)-(x-y)^2\right] \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)[3x^2+3xy+y^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right] \geq 0 \text{ (đúng với } x \geq y) \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

b) Bất đẳng thức tương đương $x^3 - y^3 \geq 3x - 3y - 4$

Theo câu a) ta có $x^3 - y^3 \geq \frac{1}{4}(x-y)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{4}(x-y)^3 \geq 3x - 3y - 4 \quad (*), \text{ Thật vậy,}$$

$$\text{BĐT } (*) \Leftrightarrow (x-y)^3 - 12(x-y) + 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-y)^2+2(x-y)-8\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)^2(x-y+4) \geq 0 \text{ (đúng với } x \geq y)$$

Đẳng thức xảy không xảy ra.

Loại 2: Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$$a \in [\alpha; \beta] \Rightarrow (a - \alpha)(a - \beta) \leq 0 \quad (*)$$

$$a, b, c \in [\alpha; \beta] \Rightarrow (a - \alpha)(b - \alpha)(c - \alpha) + (\beta - a)(\beta - b)(\beta - c) \geq 0 \quad (**)$$

Ví dụ 1 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :

$$a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2. \text{ Tương tự}$$

$$bc + ba > b^2; \quad ca + cb > c^2 \text{ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm}$$

Nhận xét : * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.

Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a - b| < c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 2 : Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a, b, c \in [0;1] \Rightarrow (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (*)$$

Ta có : $a^2b^2c^2 \geq 0$; $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a \quad \text{đpcm.}$$

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với $a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq 1$

Mà $a, b, c \in [0;1] \Rightarrow a^2 \leq a, b^2 \leq b, c^2 \leq c$ do đó

$$a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a)$$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 1$

Thật vậy: vì $a, b, c \in [0;1]$ nên theo nhận xét $(**)$ ta có

$$abc + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c - (ab + bc + ca) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 1$$

vậy BĐT ban đầu được chứng minh

Ví dụ 3 : Cho các số thực a, b, c thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh :

$$2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \geq 0.$$

Lời giải

Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1;1]$ nên ta có :

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{(1 + a + b + c)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0 \quad (**)$$

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \geq 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a < 9, b < 8, c \leq 7$ do đó áp dụng $(*)$ ta có

$(a - 4)(a - 9) \leq 0, (b - 5)(b - 8) \leq 0, (c - 6)(c - 7) \leq 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 13(a + b + c) + 118 \leq 0 \text{ suy ra}$$

$$a + b + c \geq \frac{1}{13}(a^2 + b^2 + c^2 + 118) = 16 \text{ vì } a^2 + b^2 + c^2 = 90$$

vậy $a + b + c \geq 16$ dấu “=” xảy ra khi $a = 4, b = 5, c = 7$

Ví dụ 5: Cho ba số a, b, c thuộc $[-1; 1]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 2$$

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $[-1; 1]$ nên $0 \leq a^2, b^2, c^2 \leq 1$

$$\text{Suy ra } (1 - b^2)(1 + b^2 - a^4) \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^4b^2 \leq 1 \quad (*)$$

Mặt khác $a^4 \geq a^{2012}, b^4 \geq b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $[-1; 1]$

$$\text{Suy ra } a^4 + b^4 - a^4b^2 \geq a^{2012} + b^{2012} - a^4b^2 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có } a^{2012} + b^{2012} \leq a^4b^2 + 1 \text{ hay } \frac{a^4b^2 + c^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b^4c^2 + a^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1 \text{ và } \frac{c^4a^2 + b^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1$$

$$\text{Cộng vế với ta được } \frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 3$$

$$\text{Hay } \frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 2 \text{ ĐPCM.}$$

Dạng toán 2: sử dụng bất đẳng thức cauchy(côsi) để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

- * Khi áp dụng bất đẳng thức côsi thì các số phải là những số không âm
- * BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích
- * Điều kiện xảy ra dấu “=” là các số bằng nhau
- * Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

$$\text{Đối với hai số: } x^2 + y^2 \geq 2xy; \quad x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}; \quad xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Đối với ba số: $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a, b là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4 \quad \text{b) } (a + b)^5 \geq 16ab\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2, \quad \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq \frac{4}{\sqrt{ab}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta có } 2 = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab \Rightarrow ab \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4 \quad \text{ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

$$\text{b) Ta có } (a + b)^5 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)} = 4\sqrt{ab} \quad \text{và}$$

$$(a^3 + 3ab^2) + (3a^2b + b^3) \geq 2\sqrt{(a^3 + 3ab^2)(3a^2b + b^3)} = 4\sqrt{ab(1 + b^2)(a^2 + 1)}$$

$$\text{Suy ra } (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3) \geq 16ab\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

$$\text{Do đó } (a + b)^5 \geq 16ab\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} \quad \text{ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

$$\text{b) } a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$$

$$\text{c) } (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$d) a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}, c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\text{Suy ra } \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{c}}\sqrt{\frac{c}{a}} = 8 \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$1 + a^2 \geq 2\sqrt{a^2} = 2a, \text{ tương tự ta có } 1 + b^2 \geq 2b, 1 + c^2 \geq 2c$$

$$\text{Suy ra } a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a} = 3abc$$

$$\text{Suy ra } a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc. \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

$$c) \text{ Ta có } (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + abc$$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt{ab.bc.ca} = 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 \text{ và } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\text{Suy ra } (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 + 3\sqrt[3]{abc} + abc = \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3 \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$a^2\sqrt{bc} \leq a^2\left(\frac{b+c}{2}\right), b^2\sqrt{ac} \leq b^2\left(\frac{a+c}{2}\right), c^2\sqrt{ab} \leq c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq \frac{a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b}{2} \quad (1)$$

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$$a^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3}, b^2a \leq \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3}, a^2c \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3},$$

$$c^2a \leq \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3}, b^2c \leq \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3}, c^2b \leq \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3}$$

Suy ra $a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

$$b) \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3} \right) (a + b)(b + c) \geq 16$$

$$c) \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 4.$$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, c + d \geq 2\sqrt{cd} \text{ và } \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a + b + c + d}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{b^3} \cdot \frac{b}{c^3} \cdot \frac{c}{d^3} \cdot \frac{d}{a^3}} = \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3} \right) (a + b)(c + d) \geq \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}} \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{cd} = 16 \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

c) Áp dụng câu a) ta có

$$\begin{aligned} VT &= 3 \cdot \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\ &\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}} \right)^3 \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}} = 4\sqrt[4]{\frac{8(a + b + c)^3}{27(a + b)(b + c)(c + a)}} \end{aligned}$$

$$\text{Như vậy ta chỉ cần chứng minh } 4\sqrt[4]{\frac{8(a + b + c)^3}{27(a + b)(b + c)(c + a)}} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 8(a + b + c)^3 \geq 27(a + b)(b + c)(c + a) (*)$$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} \right)^3 = \frac{8(a+b+c)^3}{27}$$

Suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: BĐT câu a) là bất đẳng thức cho bốn số không âm. Ta có BĐT côsi cho n số không âm như sau:

Cho n số không âm $a_i, i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Khi đó ta có } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a^2b + b^2c + c^2a \leq 3$$

$$\text{b) } \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 9 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = 9 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng BĐT côsi ta có } a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2, b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2, c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$$

$$\text{Cộng vế với vế lại ta được } a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 3 \quad (3)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a^2 + a^2b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot a^2b^2} = 2a^2b, \text{ tương tự ta có } b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2c, c^2 + c^2a^2 \geq 2c^2a$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a) \quad (4)$$

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b + b^2c + c^2a \leq 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\begin{aligned} 3 + a^2 &= 3 + (3 - b^2 - c^2) = (3 - b^2) + (3 - c^2) \geq 2\sqrt{(3 - b^2)(3 - c^2)} \\ \Rightarrow \frac{bc}{3 + a^2} &\leq \frac{bc}{2\sqrt{(3 - b^2)(3 - c^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{3 - c^2} \cdot \frac{c^2}{3 - b^2}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{3 - c^2} + \frac{c^2}{3 - b^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{ab}{3 + c^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right), \frac{ca}{3 + b^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right)$$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2} \leq \frac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Loại 2: Kỹ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x + y + z \geq a + b + c$ (hoặc $xyz \geq abc$), ta thường đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $ab \leq x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c$$

$$b) \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời giải

$$a) \text{ Áp dụng BĐT côsi ta có } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c, \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \geq 2a.$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

$$b) \text{ Áp dụng BĐT côsi ta có } \frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{2}{b}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}, \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 3abc$$

$$b) \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c} \cdot \frac{b^3c^3}{a}} = 2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 2abc^3, \frac{c^3a^3}{b} + \frac{a^3b^3}{c} \geq 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b}\right) \geq 2abc(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 3abc. \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 9$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^2} = 2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 2c^2, \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \geq 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

a) $8(a+b)(b+c)(c+a) \leq (3+a)(3+b)(3+c)$

b) $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$(a+b)(b+c) \leq \left(\frac{(a+b) + (b+c)}{2}\right)^2 = \frac{(3+a)^2}{4}$$

Tương tự ta có $(b+c)(c+a) \leq \frac{(3+c)^2}{4}, (c+a)(a+b) \leq \frac{(3+a)^2}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được $[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \leq 64[(3+a)(3+b)(3+c)]^2$

Suy ra $8(a+b)(b+c)(c+a) \leq (3+a)(3+b)(3+c)$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b) * TH1: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) > 0$:

+ Nếu cả ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ đều dương. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$(3-2a)(3-2b) \leq \left(\frac{(3-2a) + (3-2b)}{2} \right)^2 = c^2, \text{ tương tự ta có}$$

$$(3-2b)(3-2c) \leq a^2, (3-2c)(3-2a) \leq b^2$$

$$\text{Nhân vế với vế ta được } [(3-2a)(3-2b)(3-2c)]^2 \leq a^2 b^2 c^2$$

$$\text{Hay } (3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc.$$

+ Nếu hai trong ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a < 0, 3-2b < 0$ suy ra $6-2a-2b < 0 \Leftrightarrow c < 0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b; \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c.$$

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Lưu ý: Việc ta ghép $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng về trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\frac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\frac{a^2}{b+c} = \frac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \sqrt{\frac{a^3}{b+3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+3}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } P = \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{\sqrt{2a}(b+1)}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+1}} \cdot \frac{a}{\sqrt{b+1}} \cdot \frac{\sqrt{2a}(b+1)}{4}} = \frac{3\sqrt{2a}}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{\sqrt{2b}(c+1)}{4} \geq \frac{3\sqrt{2b}}{2}, \quad \frac{c}{\sqrt{a+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{2c}(a+1)}{4} \geq \frac{3\sqrt{2c}}{2}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$2P + \frac{\sqrt{2}}{4}(ab+bc+ca+a+b+c) \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{15\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}(ab+bc+ca) \quad (\text{vì } a+b+c=3)$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca \leq 3$

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow P \geq \frac{15\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}.3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

$$b) \text{ Đặt } Q = \sqrt{\frac{a^3}{b+3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+3}}$$

Ta có $Q = \frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $4\sqrt{a(b+3)} = 2\sqrt{4a(b+3)} \leq 4a + b + 3$

Suy ra $\frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} \geq \frac{4a^2}{4a + b + 3}$, tương tự ta có

$$\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} \geq \frac{4b^2}{4b + c + 3}, \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}} \geq \frac{4c^2}{4c + a + 3}$$

Cộng vế với vế lại ta được $Q \geq \frac{4a^2}{4a + b + 3} + \frac{4b^2}{4b + c + 3} + \frac{4c^2}{4c + a + 3} = L$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{4a^2}{4a + b + 3} + \frac{1}{16}(4a + b + 3) \geq 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a + b + 3} \cdot \frac{1}{16}(4a + b + 3)} = a$$

Tương tự ta có

$$\frac{4b^2}{4b + c + 3} + \frac{1}{16}(4b + c + 3) \geq b, \frac{4c^2}{4c + a + 3} + \frac{1}{16}(4c + a + 3) \geq c$$

Cộng vế với vế lại ta được $L + \frac{1}{16}[5(a + b + c) + 9] \geq a + b + c$

Vì $a + b + c = 3$ nên $L \geq \frac{3}{2}$ suy ra $Q \geq \frac{3}{2}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 6: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

Lời giải

Ta có $[(a-1)(b-1)][(b-1)(c-1)][(c-1)(a-1)] = (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow 2(ab + c + 1) \geq 2(a + b + c)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(ab + c + 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 1 \geq 2(ab + c)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} = 2c, \frac{1}{c^2} + 1 \geq \frac{2}{c} = 2ab$ (do $abc = 1$)

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 1 \geq 2(ab + c)$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x > 2$

b) $g(x) = 2x + \frac{1}{(x+1)^2}$ với $x > -1$

c) $h(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x \geq 2$

d) $k(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x - 2 + \frac{1}{x - 2} + 2$

Do $x > 2$ nên $x - 2 > 0$, $\frac{1}{x - 2} > 0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$x - 2 + \frac{1}{x - 2} \geq 2\sqrt{(x - 2) \cdot \frac{1}{x - 2}} = 2$$

Suy ra $f(x) \geq 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{x - 2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại) hoặc $x = 3$ (thỏa mãn)

Vậy min $f(x) = 4$ khi và chỉ khi $x = 3$.

b) Do $x > -1$ nên $x + 1 > 0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$g(x) = (x + 1) + (x + 1) + \frac{1}{(x + 1)^2} - 2 \geq 3\sqrt[3]{(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot \frac{1}{(x + 1)^2}} - 2 = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{(x + 1)^2} \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Vậy min $g(x) = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

c) Ta có $h(x) = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \frac{x}{4}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{3}{x} + \frac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{x} \cdot \frac{3x}{4}} = 3$

Mặt khác $x \geq 2$ suy ra $h(x) = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \frac{x}{4} \geq 3 + \frac{2}{4} = \frac{7}{2}$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{3x}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $\min h(x) = \frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

d) Ta có $k(x) = x + x + \frac{1}{8x^2} + \frac{7}{8x^2}$

$$\text{Áp dụng BĐT côsi ta có } x + x + \frac{1}{8x^2} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{1}{8x^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } 0 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{8x^2} \geq \frac{7}{2} \text{ suy ra } k(x) \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8x^2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy $\min k(x) = 5$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Loại 3: Kỹ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra (để tách ghép cho hợp lý) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = (1 + 2a)(1 + 2bc)$$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2 + m^2 \geq 2ma \Rightarrow 2a \leq \frac{a^2}{m} + m$ (với $m > 0$)

Do b, c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = c$ nên ta đánh giá $2bc \leq b^2 + c^2$.

Suy ra $A \leq \left(\frac{a^2}{m} + m + 1\right)(1 + b^2 + c^2) = B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ để là xuất hiện } a^2 + b^2 + c^2 \text{ nên ta sẽ tách như sau}$$

$$B = \frac{1}{m}(a^2 + m^2 + m)(1 + b^2 + c^2) \leq \frac{1}{m} \left(\frac{(a^2 + m^2 + m) + (1 + b^2 + c^2)}{2} \right)^2$$

$$\text{Suy ra } A \leq \frac{1}{4m}(m^2 + m + 2)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = m, b = c, a^2 + m^2 + m = 1 + b^2 + c^2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Từ đây ta có $m = \frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2 + \frac{4}{9} \geq \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \leq \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3}$ và $2bc \leq b^2 + c^2$

$$\text{Suy ra } A \leq \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1 \right) (b^2 + c^2 + 1)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1 \right) (b^2 + c^2 + 1) = \frac{3}{2} \left(a^2 + \frac{10}{9} \right) (b^2 + c^2 + 1) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2} \right)^2 = \frac{98}{27}$$

$$\text{Suy ra } A \leq \frac{98}{27}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$$

Vậy $\max A = \frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = c = \sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $2a + 4b + 3c^2 = 68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2 + c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a + 4b + 3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m, n, p dương)

$$a^2 + m^2 \geq 2am, b^2 + n^2 \geq 2bn \text{ và } \frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} + 4p^3 \geq 3pc^2$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^3 + m^2 + n^2 + 4p^3 \geq 2am + 2bn + 3pc^2 (*)$$

Để $2am + 2bn + 3pc^2$ có thể bội số của $2a + 4b + 3c^2$ thì

$$\frac{2m}{2} = \frac{2n}{4} = \frac{3p}{3} \Leftrightarrow m = \frac{n}{2} = p$$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a = m, b = n, c = 2p$

$$\text{Hay } a = m, b = 2m, c = 2m \Rightarrow 2m + 4(2m) + 3(2m)^2 = 68$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 10m - 68 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (nhận) hoặc } m = -\frac{17}{6} \text{ (loại)}$$

Suy ra $p = 2, n = 4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có

$$a^2 + 4 \geq 4a, b^2 + 16 \geq 8b \text{ và } \frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} + 32 \geq 6c^2$$

Cộng vế với vế ta được

$$a^2 + b^2 + c^3 + 52 \geq 4a + 8b + 6c^2, \text{ kết hợp với } 2a + 4b + 3c^2 = 68$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^3 \geq 84$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 4, c = 4$

$$\text{Vậy min } A = 84 \Leftrightarrow a = 2, b = 4, c = 4.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1 - x^3}} \text{ với } x < 1$$

$$\text{b) } B = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10} \text{ với } -2 \leq x \leq 5.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{(1 - x)(x^2 + x + 1)}}$$

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$\sqrt{(1 - x)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(1 - x) \cdot (x^2 + x + 1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2(1 - x) + x^2 + x + 1}{2} = \frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{x^2 - x + 3}{\frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 2(1 - x) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Vậy min}_{x < 1} A = 2\sqrt{2} \text{ khi } x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{x + 11}{\sqrt{-x^2 + 4x + 21} + \sqrt{-x^2 + 3x + 10}} = \frac{x + 11}{\sqrt{(x + 3)(7 - x)} + \sqrt{(x + 2)(5 - x)}}$$

Với $-2 \leq x \leq 5$ thì $x + 11$; $x + 3$; $7 - x$; $x + 2$; $5 - x$ là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+6)(7-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(2x+6) + (7-x)}{2} \right) = \frac{x+13}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+4)(5-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(2x+4) + (5-x)}{2} \right) = \frac{x+9}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)} \leq \frac{x+11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min_{-2 \leq x \leq 5} B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Loại 4: Kỹ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a + b + c} \right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a + b + c} \right)$, $\frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{a + b + c} \right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P \leq \frac{1}{2} \left(3 - \frac{a}{a + b + c} - \frac{b}{a + b + c} - \frac{c}{a + b + c} \right) = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

$$b) \frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2-b^2)}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

Cộng về theo về các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = \frac{a(a+2b^3)-2ab^3}{a+2b^3} \geq a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3} \geq b - \frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}$, $\frac{c^2}{c+2a^3} \geq c - \frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng về theo về các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq a + b + c - \frac{2}{3}(b\sqrt[3]{a^2} + a\sqrt[3]{c^2} + c\sqrt[3]{b^2})$$

Mặt khác $a + b + c = 3$ do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2} \leq \frac{1}{3}b.(a+a+1) = \frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2} \leq \frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2ca+a}{3}$

Cộng về theo về các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2ab+b}{3} + \frac{2bc+c}{3} + \frac{2ca+a}{3} = \frac{2}{3}(ab+bc+ca) + \frac{1}{3}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2}{3}.3 + \frac{1}{3}.3 = 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chúng minh rằng $\frac{c}{1+ab} + \frac{b}{1+ac} + \frac{a}{1+bc} \geq 1$

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{c}{1+ab} + \frac{b}{1+ac} + \frac{a}{1+bc}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{c}{1+ab} = c - \frac{abc}{1+ab} \geq c - \frac{abc}{2\sqrt{ab}} = c - \frac{\sqrt{(ca)(cb)}}{2} \geq c - \frac{ca+cb}{4}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b}{1+ac} \geq b - \frac{ba+bc}{4}, \frac{a}{1+bc} \leq a - \frac{ab+ac}{4}$$

Cộng về theo về các BĐT trên ta được:

$$P \geq a + b + c - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ca) (*)$$

$$\text{Hay } ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$$

$$\text{Suy ra } P \geq a + b + c - \frac{(a+b+c)^2 - 1}{4} = \frac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4} + 1 \quad (1)$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } a, b, c \in [0;1] \Rightarrow 3-a-b-c \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Và từ } (*) \text{ suy ra } a+b+c \geq 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P \geq 1$. ĐPCM

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

Dạng 3: đặt ẩn phụ trong bất đẳng thức.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x = f(a, b, c)$, $y = g(a, b, c)$, $z = h(a, b, c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t = f(a; b; c)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số dương a, b, c .

$$\text{a) Chứng minh rằng } \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{6b+8c}{2a+b} + \frac{3a+2b+c}{b+c} \geq 7$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

a) Đặt $x = a + b + c$, $y = 2a + b$, $z = b + c$

Suy ra $a = x - z$, $b = -2x + y + 2z$, $c = 2x - y - z$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{-x+y+z}{x} + \frac{4x-2y+4z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 7$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{4x}{y} - 2 + \frac{4z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 7$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 10 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2$, $\frac{4z}{y} + \frac{y}{z} \geq 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = z \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y = 2z$ suy ra không tồn tại a, b, c .

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x = a + b + c$, $y = b + c + 4a$, $z = c + a + 16b$

Suy ra $a = \frac{y-x}{3}$, $b = \frac{z-x}{15}$, $c = \frac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P = \frac{-6x+5y+z}{15x} + \frac{4x-y}{3y} + \frac{16x-z}{15z}$

$$\Rightarrow P = \frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} + \frac{z}{15y} + \frac{16x}{15z} - \frac{4}{5}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}$, $\frac{z}{15y} + \frac{16y}{15z} \geq \frac{8}{15}$

Suy ra $P \geq \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 2y = z \Leftrightarrow a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$

Vậy min $P = \frac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq \sqrt{\frac{b+c}{p-a}} + \sqrt{\frac{c+a}{p-b}} + \sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

Lời giải

Đặt $x = p - a$; $y = p - b$; $z = p - c$ suy ra $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$.

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên x, y, z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} \leq \left(2 + \frac{y+z}{x}\right) + 4 = \frac{y+z}{x} + 6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} \leq \frac{z+x}{y} + 6$, $4\sqrt{2 + \frac{x+y}{z}} \leq \frac{x+y}{z} + 6$

Cộng về với về các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x+y}{z}}\right) \leq \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 18\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6.$$

$$\text{Ta có } \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay tam giác đều.

Nhận xét : Đối với BĐT có giả thiết a, b, c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ

$$x = \frac{a+b-c}{2}, y = \frac{a-b+c}{2}, z = \frac{-a+b+c}{2} \text{ thì khi đó } a = y+z; b = z+x; c = x+y \text{ và}$$

x, y, z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x, y, z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 3: Cho x, y, z là số dương. Chứng minh rằng $x^3 + 2y^3 + 3z^3 \geq \frac{1590}{1331}(x + y + z)^3$

Lời giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3 \geq$

Đặt $a = \frac{x}{x+y+z}, b = \frac{y}{x+y+z}, c = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a, b, c$ dương và $a + b + c = 1$

BĐT trở thành $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}a, 2b^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}b, 3c^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}c$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$a^3 + 2b^3 + 3c^3 + \frac{588}{1331} \geq \frac{18}{11}(a + b + c) = \frac{18}{11}$$

$$\text{Suy ra } a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}.$$

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc (Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa)

Ví dụ 4: Cho x, y, z là số dương thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{15}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \text{ và } x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ nên } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

$$\text{Suy ra } x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z + \frac{9}{x+y+z}$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x + y + z + \frac{9}{x + y + z} = t + \frac{9}{t} \geq \frac{15}{2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$t + \frac{9}{t} = t + \frac{9}{4t} + \frac{27}{4t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{9}{4t}} + \frac{27}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15}{2} \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = a + b + c + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow 4 = abc + ab + bc + ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4 = abc + ab + bc + ca \geq abc + 3\sqrt[3]{(abc)^2} = t^3 + 3t^2$, với $t = \sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow t^3 + 3t^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có

$$P = a + b + c + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt[3]{abc} + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$$

Suy ra $P \geq 3t + \frac{4}{t} = \left(3t + \frac{3}{t}\right) + \frac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t + \frac{3}{t} \geq 2\sqrt{3t \cdot \frac{3}{t}} = 6$, mặt khác $t \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \geq 1$

Do đó $P \geq 3t + \frac{4}{t} \geq 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$ hay $a = b = c = 1$

Vậy min $P = 7 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 6: Cho x, y, z dương thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 14xyz}{4(x + y + z)^2 + 15xyz}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 8 \Leftrightarrow 8xyz = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 14xyz = (x + y + z)^2 + 2(x + y + z) + 2 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng BĐT côsi ta có: } 8 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{8}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } P \leq \frac{(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) + 2}{4(x + y + z)^2 + 15} = \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15} \text{ với } x + y + z = t > 0.$$

$$\text{Xét } \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15} - \frac{1}{3} = \frac{-t^2 + 6t - 9}{12t^2 + 45} = -\frac{(t - 3)^2}{12t^2 + 45} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15} \leq \frac{1}{3} \text{ do đó } P \leq \frac{1}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 3$ hay $x = y = z = 1$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{3} \text{ khi và chỉ khi } x = y = z = 1$$

Dạng 4: sử dụng bất đẳng thức phụ.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{a + b + c}{abc}$$

$$\text{b) } \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$.

$$\text{BĐT tương đương với } a^3 + b^3 - a^2b - b^2a \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a - b) + b^2(b - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a > 0, b > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b.$$

a) Ta có $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a \Leftrightarrow \frac{a}{b^3} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc}, \frac{c}{a^3} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ac}$

Cộng về với về rút gọn ta được $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

Tương tự : $\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BDT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho a, b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2 + 1 \geq 3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2 + b^2)^2 \leq (a+b)^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2 + 1 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2 + 24(a+b) + 16 \geq 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2 + 24(a+b) + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (3a+3b+4)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = -\frac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab \leq 0$.

Xét $ab > 0$. Áp dụng BDT $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2 + b^2)^2 = 16ab[2ab(a^2 + b^2)]^2 \leq 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left[\frac{2ab + (a^2 + b^2)}{2}\right]^2 = (a+b)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2 + b^2)^2 \leq (a+b)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

Ta có $(a^2 + b^2)(1 + 4) = 25 \geq (a + 2b)^2 \Leftrightarrow a + 2b \leq 5$

Suy ra $-2b \geq a - 5$

Do đó $P = \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b \geq \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} + a - 5 = 3a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3$

Do đó $3a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \geq 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1$, $b = 2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a = 1, b = 2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq 3$

b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ này hai lần ta có :

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq \\ &\geq ab.bc + bc.ca + ca.ab = abc(a + b + c) = 3abc \text{ (vì } a + b + c = 3 \text{)} \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} \geq 3$ hay $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

b) Áp dụng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(*)$

Lại áp dụng $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (ví dụ 1) ta có

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \Rightarrow abc \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{9} (**)$$

Áp dụng bất đẳng thức $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{(a + b + c)^2}{3}\right)^3 = 3$$

Vậy BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{2a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$b) \frac{1}{a + 3b} + \frac{1}{b + 3c} + \frac{1}{c + 3a} \geq \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c}$$

lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left. \begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4$$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

a) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{2a + b + c} = \frac{1}{(a + b) + (a + c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c}\right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{a + 2b + c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right); \frac{1}{a + b + 2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)$$

Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+b+2c} \geq \frac{4}{2a+4b+2c} = \frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{2a+b+c} \geq \frac{2}{a+b+2c}; \quad \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{2}{2a+b+c}$$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 6: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{3}{4}.$$

$$b) \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array} \right\} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 9$$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$a) \text{ Ta có BĐT } \Leftrightarrow \frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+1-1}{b+1} + \frac{c+1-1}{c+1} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{4}.$$

Áp dụng BĐT (*) ta có $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} = \frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

$$b) \text{ Áp dụng BĐT (*) ta có : } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác : } ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 9$$

$$\text{Suy ra : } \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9 + 21 = 30 \text{ đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ví dụ 7: Cho } a, b, c \text{ là các số thuộc } [0; 1] \text{ thỏa mãn } \frac{1}{4a^4 + 5} + \frac{2}{4b^4 + 5} + \frac{3}{4c^4 + 5} = \frac{6}{7}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab^2c^3$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\text{Với } x, y \text{ thuộc } [0, 1], \text{ ta luôn có } \frac{1}{4x^4 + 5} + \frac{1}{4y^4 + 5} \leq \frac{2}{4x^2y^2 + 5} \quad (*)$$

Thật vậy, BĐT (*)

$$\Leftrightarrow (2x^4 + 2y^4 + 5)(4x^2y^2 + 5) \leq (4x^4 + 5)(4y^4 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 8x^4y^4 - 10x^2y^2 + (x^4 + y^4)(5 - 4x^2y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4x^2y^2)(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \text{ (đúng với } x, y \in [0, 1])$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$$\text{Áp dụng BĐT (*) ta có: } \frac{1}{4a^4 + 5} + \frac{1}{4c^4 + 5} \leq \frac{2}{4a^2c^2 + 5}, \frac{1}{4b^4 + 5} + \frac{1}{4c^4 + 5} \leq \frac{2}{4b^2c^2 + 5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4a^4 + 5} + \frac{1}{4b^4 + 5} + \frac{2}{4c^4 + 5} \leq \frac{2}{4a^2c^2 + 5} + \frac{2}{4b^2c^2 + 5} \leq \frac{4}{4abc^2 + 5} \quad (1)$$

$$\text{Và } \frac{1}{4b^4 + 5} + \frac{1}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{b^2}{\sqrt{2}} + 5}, \frac{1}{c^4 + 5} + \frac{1}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{c^2}{\sqrt{2}} + 5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4b^4 + 5} + \frac{1}{4c^4 + 5} + \frac{2}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{b^2}{\sqrt{2}} + 5} + \frac{2}{4 \cdot \frac{c^2}{\sqrt{2}} + 5} \leq \frac{4}{4 \cdot \frac{bc}{\sqrt{2}} + 5} \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } \frac{4}{4abc^2 + 5} + \frac{4}{4 \cdot \frac{bc}{\sqrt{2}} + 5} \leq \frac{8}{4 \cdot \sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}} + 5}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có
$$\frac{1}{4a^4 + 5} + \frac{2}{4b^4 + 5} + \frac{3}{4c^4 + 5} + \frac{2}{7} \leq \frac{8}{4\sqrt[4]{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}} + 5}$$

Kết hợp giả thiết suy ra
$$\frac{8}{4\sqrt[4]{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}} + 5} \geq \frac{8}{7} \Rightarrow ab^2c^3 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Vậy $\max P = \frac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$ B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$ D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -c < -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -d > -c \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a > \frac{b+c}{2}.$ B. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a - c > b - a.$
- C. $a > b \Rightarrow a - c > b - c.$ D. $a > b \Rightarrow c - a > c - b.$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a + a > b + c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow a > \frac{b+c}{2} \longrightarrow \text{A đúng.}$
- $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a + a > b + c \Rightarrow a - c > b - a \longrightarrow \text{B đúng.}$
- $a > b \Rightarrow a + (-c) > b + (-c) \Rightarrow a - c > b - c \longrightarrow \text{C đúng.}$

- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > 0 \\ \frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \longrightarrow$ **B sai.**
- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d} \longrightarrow$ **C sai** vì chưa thiếu điều kiện a, b, c, d .
- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} > 1 \\ 1 > \frac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 > \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{d}{c} \longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 6: Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $-3a > -3b$. B. $a^2 > b^2$. C. $2a > 2b$. D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b$.

Câu 7: Nếu $a + b < a$ và $b - a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $ab > 0$. B. $b < a$. C. $a < b < 0$. D. $a > 0$ và $b > 0$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a + b < a \\ b - a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ -a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0$.

Câu 8: Nếu $0 < a < 1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{a} > \sqrt{a}$. B. $a > \frac{1}{a}$. C. $a > \sqrt{a}$. D. $a^3 > a^2$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{1}{a} - \sqrt{a} = \frac{1 - a\sqrt{a}}{a} = \frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \sqrt{a}, \forall a \in (0; 1) \longrightarrow$ **A đúng.**
- $a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{(a - 1)(a + 1)}{a} < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{a}, \forall a \in (0; 1) \longrightarrow$ **B sai.**
- $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{a}, \forall a \in (0; 1) \longrightarrow$ **C sai.**

• $a^3 - a^2 = a^2(a-1) < 0 \Leftrightarrow a^3 < a^2, \forall a \in (0;1) \longrightarrow \mathbf{D \text{ sai.}}$

Câu 9: Cho hai số thực dương a, b . Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{a^2}{a^4+1} \geq \frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{ab}}{ab+1} \geq \frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} \leq \frac{1}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

• $\frac{a^2}{a^4+1} - \frac{1}{2} = \frac{2a^2 - a^4 - 1}{2(a^4+1)} = -\frac{(a^2-1)^2}{2(a^4+1)} \leq 0, \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow \mathbf{A \text{ sai.}}$

• $\frac{\sqrt{ab}}{ab+1} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{ab} - ab - 1}{2(ab+1)} = -\frac{(\sqrt{ab}-1)^2}{2(ab+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{ab+1} \leq \frac{1}{2}, \forall a, b > 0 \longrightarrow \mathbf{B \text{ sai.}}$

• $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{a^2+1} - a^2 - 2}{2(a^2+2)} = -\frac{(\sqrt{a^2+1}-1)^2}{2(a^2+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} \leq \frac{1}{2}, \forall a \longrightarrow \mathbf{C}$

đúng.

Câu 10: Cho $a, b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}, y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x > y$. B. $x < y$.
C. $x = y$. D. Không so sánh được.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x < y \Leftrightarrow \frac{1+a}{1+a+a^2} < \frac{1+b}{1+b+b^2} \Leftrightarrow (1+a)(1+b+b^2) < (1+b)(1+a+a^2)$

$\Leftrightarrow 1+b+b^2+a+ab+ab^2 < 1+a+a^2+b+ab+a^2b$

$\Leftrightarrow b^2+ab^2 < a^2+a^2b \Leftrightarrow (a^2-b^2)+ab(a-b) > 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+ab) > 0$ luôn đúng với mọi $a > b > 0$. Vậy $x < y$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 = \frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$. Vậy $m = 2\sqrt{2} + 1$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn C

Sai lầm thường gặp

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 4 + 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}} = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow x^2 = -3.$$

Vậy hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải đúng

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow t \geq 2.$$

$$\text{Lúc đó: } f(x) = g(t) = \frac{t^2 + 1}{t} = t + \frac{1}{t} = \underbrace{\frac{t}{4} + \frac{1}{t}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{3t}{4}}_{\geq \frac{3}{2}} \geq \frac{5}{2} \quad (\text{do } t \geq 2)$$

$$\text{Vậy } g(t) \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Min } g(t) = \frac{5}{2} \text{ khi } \begin{cases} \frac{t}{4} = \frac{1}{t} \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với $x > -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 + 1}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x + 1 + \frac{1}{x + 1} \geq 2\sqrt{(x + 1) \cdot \frac{1}{x + 1}} = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 = \frac{1}{x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Vậy } m = 2.$$

Câu 13: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{(x + 2)(x + 8)}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 18$. C. $m = 16$. D. $m = 6$.

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{(x+2)(x+8)}{x} = \frac{x^2 + 10x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 10.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8 \Rightarrow f(x) \geq 18.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{16}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy } m = 18.$$

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{1-x}$ với $1 > x > 0$.

A. $m = 2$.**B. $m = 4$.****C. $m = 6$.****D. $m = 8$.****Lời giải****Chọn D.**

$$\text{Ta có } f(x) - 4 = \frac{4}{x} + \frac{x}{1-x} - 4 = \frac{4}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{4(1-x)}{x} + \frac{x}{1-x}.$$

$$\text{Vì } x \in (0;1) \Rightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \text{ nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có}$$

$$f(x) - 4 = \frac{4(1-x)}{x} + \frac{x}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{4(1-x)}{x} \cdot \frac{x}{1-x}} = 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 8.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x > 0 \\ \frac{4(1-x)}{x} = \frac{x}{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } m = 8.$$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

A. $m = 2$.**B. $m = 4$.****C. $m = 8$.****D. $m = 16$.****Lời giải****Chọn B.**

$$\text{Cách 1. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$\text{Mặt khác } x(1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4} \longrightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x > 0 \\ x = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } m = 4.$$

Cách 2. Ta có $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x} + \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} + 2$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{1-x}} = 2 \Rightarrow f(x) \geq 4$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 32}{4(x-2)}$ với $x > 2$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{7}{2}$.

C. $m = 4$.

D. $m = 8$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 32}{4(x-2)} = \frac{x^2 - 4 + 36}{4(x-2)} = \frac{x+2}{4} + \frac{9}{x-2} = \frac{x-2}{4} + \frac{9}{x-2} + 1.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x-2}{4} + \frac{9}{x-2} \geq 2\sqrt{\frac{x-2}{4} \cdot \frac{9}{x-2}} = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3 + 1 = 4$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \frac{x-2}{4} = \frac{9}{x-2} \Leftrightarrow x = 8. \text{ Vậy } m = 4. \end{cases}$$

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x}$ với $x > 0$.

A. $m = 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 6$.

D. $m = 10$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } m = 6. \end{cases}$$

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 6$. C. $m = \frac{13}{2}$. D. $m = \frac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^4 + 3}{x} = x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 4 \Rightarrow f(x) \geq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } m = 4.$$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = (6x+3)(5x-2)$ với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

- A. $M = 0$. B. $M = 24$. C. $M = 27$. D. $M = 30$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức hệ quả của Côsi } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \text{ ta được}$$

$$f(x) = 3(2x+1)(5-2x) \leq 3 \cdot \frac{(2x+1+5-2x)^2}{4} = 27 \Rightarrow f(x) \leq 27.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2x+1 = 5-2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } M = 27.$$

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x \geq 1$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1+1} = \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2 + 1}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } (\sqrt{x-1})^2 + 1 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x-1})^2 \cdot 1} = 2\sqrt{x-1}.$$

$$\longrightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $M = \frac{1}{2}$.

Câu 21: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ với $x > 0$.

A. $M = \frac{1}{4}$.

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = 1$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2 + 4 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4} = 4x$

$$\longrightarrow f(x) \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2. \text{ Vậy } M = \frac{1}{4}.$$

Câu 22: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > 0$.

A. $M = 0$.

B. $M = \frac{1}{4}$.

C. $M = \frac{1}{2}$.

D. $M = 1$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x^2 + 2x + 1}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2x \longrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x$

$$\longrightarrow f(x) \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } M = \frac{1}{4}.$$

Câu 23: Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-6}$

A. $m = \sqrt{2}, M = 3$

B. $m = 3, M = 3\sqrt{2}$.

C. $m = \sqrt{2}, M = 3\sqrt{2}$.

D. $m = 3, M = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$ nên TXĐ $D = [-3; 6]$.

$$\text{Ta có } f^2(x) = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)}.$$

- Vì $\sqrt{(3+x)(6-x)} \geq 0, \forall x \in [-3; 6]$ nên suy ra $f^2(x) \geq 9 \longrightarrow f(x) \geq 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 6$. Vậy $m = 3$.

- Lại có $2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 3+x+6-x=9$ nên suy ra $f^2(x) \leq 18 \longrightarrow f(x) \leq 3\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+3=6-x \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Vậy $M = 3\sqrt{2}$.

Vậy $m = 3, M = 3\sqrt{2}$.

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$

A. $m = 0, M = 4\sqrt{5}$.

B. $m = 2, M = 4$.

C. $m = 2, M = 2\sqrt{5}$.

D. $m = 0, M = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8$ nên TXĐ $D = [4; 8]$.

- Ta có $f^2(x) = 3x - 8 + 4\sqrt{(x-4)(8-x)} = 3(x-4) + 4\sqrt{(x-4)(8-x)} + 4$.

Vì $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{(x-4)(8-x)} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [4; 8]$ nên suy ra $f^2(x) \geq 4 \longrightarrow f(x) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$. Vậy $m = 2$.

- Với $x \in [4; 8]$, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

- $x - \frac{4}{5} = x - 4 + \frac{16}{5} \geq 2\sqrt{(x-4) \cdot \frac{16}{5}} = \frac{8\sqrt{x-4}}{\sqrt{5}}. \quad (1)$

- $\frac{44}{5} - x = 8 - x + \frac{4}{5} \geq 2\sqrt{(8-x) \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}. \quad (2)$

Lấy (1) + (2) theo vế, ta được $\frac{8\sqrt{x-4} + 4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \leq x - \frac{4}{5} + \frac{44}{5} - x = 8$.

Suy ra $\frac{8\sqrt{x-4} + 4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{4f(x)}{\sqrt{5}} \leq 8 \Leftrightarrow f(x) \leq 2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{36}{5}$. Vậy $M = 2\sqrt{5}$.

Vậy $m = 2, M = 2\sqrt{5}$.

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}$

- A. $m = 3$. B. $m = \sqrt{10}$. C. $m = 2\sqrt{3}$. D. $m = \frac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{2}$ nên TXĐ $D = \left[-\frac{4}{3}; \frac{7}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y^2 &= (\sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4})^2 = 7-2x + 2\sqrt{(7-2x)(3x+4)} + 3x+4 \\ &= x+11 + 2\sqrt{(7-2x)(3x+4)} = \frac{1}{3}(3x+4) + 2\sqrt{(7-2x)(3x+4)} + \frac{29}{3}. \end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \sqrt{(7-2x)(3x+4)} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{7}{2}\right] \text{ nên suy ra } f^2(x) \geq \frac{29}{3} \longrightarrow f(x) \geq \frac{\sqrt{87}}{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}. \text{ Vậy } m = \frac{\sqrt{87}}{3}.$$

Câu 26: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{8-x^2}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 2\sqrt{2}$. D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } f^2(x) = (x + \sqrt{8-x^2})^2 = x^2 + 2x\sqrt{8-x^2} + 8 - x^2 = 8 + 2x\sqrt{8-x^2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } 2x\sqrt{8-x^2} \leq x^2 + (\sqrt{8-x^2})^2 = 8$$

$$\longrightarrow f^2(x) = 8 + 2x\sqrt{8-x^2} \leq 8 + 8 = 16 \longrightarrow f(x) \leq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (\sqrt{8-x^2})^2 \\ 2x\sqrt{8-x^2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Vậy } M = 4.$$

Câu 27: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; 3]$. B. $[0; 2]$. C. $[-2; 2]$. D. $\{-2; 2\}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + xy = 3 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3 = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Suy ra $(x+y)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+y \leq 2$.

Câu 28: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

- A. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. B. $[-1; 1]$. C. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. D. $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 - 3xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 + xy = (x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \geq -1 \end{cases}$$

Câu 29: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x+y$ là:

- A. $\sqrt[3]{2}$. B. 1. C. 8. D. $-\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Với mọi x, y ta có $(x+y)^2 \geq 4xy$.

Suy ra $(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2$ hay $(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Leftrightarrow x+y \geq 1$.

Câu 30: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y + xy$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[4; +\infty)$. D. $[0; 4]$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^2 + y^2 = x + y + xy$

$$\Leftrightarrow x + y = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - \frac{3}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Suy ra $x + y \geq \frac{1}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 4$.

Câu 31: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 3(x+y) + 4 = 0$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $\{2; 4\}$. B. $[0; 4]$. C. $[0; 2]$. D. $[2; 4]$.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết, ta có $3(x+y)-4=x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 6(x+y) + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x+y \leq 4.$$

Câu 32: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ là:

A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) = (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) = 5 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 9.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{1}{3}; y = \frac{2}{3}.$$

Câu 33: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Từ giả thiết, ta có } xy(x+y) = x + y + 3xy. (*)$$

$$\text{Vì } x > 0, y > 0 \text{ nên } x+y > 0. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow x+y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \geq \frac{4}{x+y} + 3$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq -1 \\ x+y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x+y \geq 4.$$

Câu 34: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} = xy + 2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy$ lần lượt là:

A. $\frac{1}{2}$ và 1.

B. 0 và 1.

C. $\frac{1}{4}$ và 1.

D. 1 và 2.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2, \text{ kết hợp với giả thiết ta được } xy + 2 \geq 2x^2y^2 + \frac{1}{xy}.$$

Đặt $xy = t > 0$, ta được $t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - (2t - 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Câu 35: Cho hai số thực a, b thuộc khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn $(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a - 1)(b - 1) = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab$ bằng

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giả thiết} \Leftrightarrow \frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = (1 - a)(1 - b). (*)$$

$$\bullet \frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right)(a + b) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ab} = 4ab. (1)$$

$$\bullet (1 - a)(1 - b) = 1 - (a + b) + ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab. (2)$$

Từ (1), (2) và kết hợp với (*), ta được

$$4ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab \Leftrightarrow 3ab + 2\sqrt{ab} - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{9}.$$

Câu 36: Cho hai số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $x + y = 4xy$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

- A. $[0;1]$. B. $\left[0; \frac{1}{4}\right]$. C. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. D. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 4xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do } x, y \in [0;1], \text{ suy ra } (1 - x)(1 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (x + y) + xy \geq 0. (*)$$

$$\text{Kết hợp } (*) \text{ và giả thiết, ta được } 1 - 4xy + xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

Câu 37: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết, ta có } x + 2y = xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2y)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)[(x+2y)-8] \geq 0 \Leftrightarrow x+2y \geq 8.$$

Câu 38: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + xy \geq 7$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là:

A. 8.

B. 5.

C. 7.

D. -11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết } x + y + xy \geq 7 \Leftrightarrow 2(x+1)(y+1) \geq 16.$$

$$\text{Ta có } 16 \leq 2(x+1)(y+1) = (x+1)(2y+2) \leq \left(\frac{1+x+2y+2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2y+3)^2 \geq 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y \geq 5 \\ x+2y \leq -11 \end{cases} \Leftrightarrow x+2y \geq 5.$$

Câu 39: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + xy$ là:

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } 6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \frac{(2x+2+3y+3)^2}{4} \leq \frac{(7+5)^2}{4} \leq 36.$$

$$\text{Suy ra } x + y + xy \leq 5.$$

Câu 40: Cho hai số thực x, y không âm và thỏa mãn $x^2 + 2y = 12$. Giá trị lớn nhất của $P = xy$ là:

A. $\frac{13}{4}$.

B. 4.

C. 8.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết, ta có } 16 = (x^2 + 4) + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x \cdot 2y}.$$

$$\text{Suy ra } xy \leq 8. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 2; y = 4.$$

Câu 41: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x > y$ và $xy = 1000$. Biết biểu thức $F = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ đạt giá

$$\text{trị nhỏ nhất khi } \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}. \text{ Tính } P = \frac{a^2 + b^2}{1000}$$

A. $P = 2$.

B. $P = 3$.

C. $P = 4$.

D. $P = 5$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } F = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2xy}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2.1000}{x - y} = x - y + \frac{2.1000}{x - y}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } F = x - y + \frac{2.1000}{x - y} \geq 2\sqrt{(x - y) \cdot \frac{2.1000}{x - y}} = 40\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ x - y = \frac{2.1000}{x - y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ x - y = 20\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F_{\min} = 40\sqrt{5} \text{ khi } \begin{cases} ab = 1000 \\ a - b = 20\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4000 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{1000} = 4.$$

Câu 42: Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x + y \geq 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{2y}$

A. $F_{\min} = 4\frac{1}{2}$.

B. $F_{\min} = 3\sqrt{2}$.

C. $F_{\min} = 4\frac{1}{3}$.

D. $F_{\min} = 4\frac{2}{3}$.

Lời giải**Chọn A**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số thực dương, ta có

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2x}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 \text{ và } \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{2}{y}} = 2.$$

$$\text{Khi đó } F = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = \frac{x + y}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) \geq \frac{3}{2} + 1 + 2 = 4\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{2} = \frac{1}{2x}; \frac{y}{2} = \frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } F_{\min} = 4\frac{1}{2}.$$

Câu 43: Cho $x > 8y > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + \frac{1}{y(x - 8y)}$ là

A. 3,

B. 6.

C. 8.

D. 9.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $F = x + \frac{1}{y(x-8y)} = (x-8y) + 8y + \frac{1}{y(x-8y)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F \geq 3\sqrt[3]{(x-8y).8y.\frac{1}{y(x-8y)}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-8y = 8y = \frac{1}{y(x-8y)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 44: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[-1; 7]$. B. $[3; 7]$. C. $[3; 7] \cup \{-1\}$. D. $[-7; 7]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -3 \end{cases}$, suy ra $x + y + 1 \geq 0$.

• Ta có $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$

$$= 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+3} \leq \frac{4+x-2}{2} + \frac{4+y+3}{2} = \frac{x+y+9}{2}$$

Suy ra $x + y + 1 \leq \frac{x+y+9}{2} \Leftrightarrow x + y \leq 7$.

• Lại có $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = 4(x + y + 1 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \geq 4(x + y + 1)$$

Suy ra $(x + y + 1)^2 \geq 4(x + y + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ x + y + 1 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$.

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a > 0, b > 0$ và $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F = \frac{4a+c}{b}$

- A. $F_{\min} = 1$. B. $F_{\min} = 2$. C. $F_{\min} = 3$. D. $F_{\min} = 5$.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \longrightarrow 4ac \geq b^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F = \frac{4a+c}{b} \geq \frac{2\sqrt{4ac}}{b} \geq \frac{2\sqrt{b^2}}{b} = \frac{2b}{b} = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} c = 4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 4a$.

Câu 46: Cho ba số thực a, b, c không âm và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$ lần lượt là:

- A. 1 và 3. B. 2 và 4. C. 2 và 3. D. 3 và 4.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$.

Ta có $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{a^2 b^2 c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{27} \geq a^2 b^2 c^2$.

Từ đó suy ra $4 \leq a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{27}}$ hay $\sqrt{\frac{S^3}{27}} \geq 4 - S \Leftrightarrow 3 \leq S \leq 4$.

Câu 47: Cho ba số thực dương x, y, z . Biểu thức $P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. 9.

Lời giải

Chọn C.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^2 + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{y}{zx} \cdot \frac{z}{xy}} = 3; \quad y^2 + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} \geq 3; \quad z^2 + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} \geq 3.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được $x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right) \geq 9$.

Suy ra $P \geq \frac{9}{2}$. Khi $x = y = z = 1$ thì $P = \frac{9}{2}$.

Câu 48: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 3\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}\right)$ bằng:

- A. 12. B. 3. C. 5. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^3 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \geq 4x \text{ hay } x^3 + 3\sqrt[3]{x} \geq 4x.$$

$$\text{Tương tự: } y^3 + 3\sqrt[3]{y} \geq 4y \text{ và } z^3 + 3\sqrt[3]{z} \geq 4z.$$

$$\text{Suy ra } P = x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 4(x + y + z) = 12.$$

Khi $x = y = z = 1$ thì $P = 12$.

Câu 49: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}$ bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{(x+y) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{x+y+\frac{4}{3}}{2}; \quad \sqrt{(y+z) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{y+z+\frac{4}{3}}{2} \text{ và } \sqrt{(z+x) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{z+x+\frac{4}{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(x+y) \cdot \frac{4}{3}} + \sqrt{(y+z) \cdot \frac{4}{3}} + \sqrt{(z+x) \cdot \frac{4}{3}} \leq x + y + z + 2 = 4.$$

$$\text{Do đó } P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \geq 2\sqrt{3}. \text{ Khi } x = y = z = \frac{2}{3} \text{ thì } P = 2\sqrt{3}.$$

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) \leq g(x)) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x .

Ta gọi $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ ($f(x_0) \leq g(x_0)$) là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau: $g(x) > f(x)$ ($g(x) \geq f(x)$).

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình (1).

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

Ta đã biết hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương với.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\begin{aligned} P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) < Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) > 0, \forall x \\ P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) > Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) < 0, \forall x \end{aligned}$$

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x), \quad P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$$

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

- 1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.
- 2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến hệ bất phương trình.
- 3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp
 - a) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.
 - b) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$$

rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Điều kiện xác định của bất phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+2}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện của bất phương trình là: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của của bất phương trình

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định của BPT : } \begin{cases} |x+1|-3 \neq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x-m \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

- Nếu $m = 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \{3\}$.
- Nếu $m > 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.
- Nếu $m < 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = [m; 3]$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{1-2x}$.

A. $x \in \mathbb{R}$.

B. $x \in (-\infty; 2]$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Bất phương trình xác định khi } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x + \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 2 - \sqrt{4-x}$.

A. $x \in [-5; 4]$.

B. $x \in (-5; 4]$.

C. $x \in [4; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; -5)$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} x+5 > 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x \leq 4.$

Câu 3: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1.$

A. $x \in [-1; +\infty)$.

B. $x \in (-1; +\infty)$.

C. $x \in [-1; +\infty) \setminus \{2\}.$

D. $x \in (-1; +\infty) \setminus \{2\}.$

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} \frac{x+1}{(x-2)^2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{m-2x} - \sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m < -2.$

B. $m > 2.$

C. $m > -\frac{1}{2}.$

D. $m > -2.$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} m-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{m}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}.$

• Nếu $\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \{-1\}.$

• Nếu $\frac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \emptyset.$

• Nếu $\frac{m}{2} > -1 \Leftrightarrow m > -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \left[-1; \frac{m}{2}\right].$

Dạng 2. Cặp bất phương trình tương đương

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 5 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với:

A. $2x < 5.$

B. $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2.$

C. $x < \frac{5}{2}$.

D. Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ kết hợp với điều kiện ta có $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$.

Ví dụ 3: Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x - 2) \leq 0$.

B. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$.

C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) < 0$.

D. $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x - 2) \geq 0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta xét từng bất phương trình trong đáp án A:

$$x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

$$x^2(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Cả hai bất phương trình có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương.

Ví dụ 4: Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $(a+1)x - a + 2 > 0$ và $(a-1)x - a + 3 > 0$ tương đương:

A. $a = 1$.

B. $a = 5$.

C. $a = -1$.

D. $a = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp trắc nghiệm: Thay lần lượt từng đáp án vào hai phương trình.

• Thay $a = 1$, ta được
$$\begin{cases} (a+1)x - a + 2 > 0 \longrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \\ (a-1)x - a + 3 > 0 \longrightarrow 0x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 Không thỏa.

• Thay $a = 5$, ta được
$$\begin{cases} (a+1)x - a + 2 > 0 \longrightarrow 6x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \\ (a-1)x - a + 3 > 0 \longrightarrow 4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 3 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với

A. $2x < 3$.

B. $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$.

C. $x < \frac{3}{2}$.

D. Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với:

$$2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 2: Bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $2x - 1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$.

B. $2x - 1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.

C. $(2x - 1)\sqrt{x - 2018} \geq \sqrt{x - 2018}$.

D. $\frac{2x - 1}{\sqrt{x - 2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x - 2018}}$.

Lời giải

Chọn B.

Nếu ta cộng $\frac{1}{x-3}$ vào hai vế bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ thì điều kiện của bất phương trình sẽ thay đổi suy ra đáp án A sai.

Tương tự nếu ta nhân hoặc chia hai vế bất phương trình đã cho với $\sqrt{x - 2018}$ thì điều kiện của bất phương trình ban đầu cũng sẽ thay đổi suy ra đáp án C và D sai.

Câu 3: Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x + 5 > 0$?

A. $(x - 1)^2 (x + 5) > 0$.

B. $x^2 (x + 5) > 0$.

C. $\sqrt{x + 5} (x + 5) > 0$.

D. $\sqrt{x + 5} (x - 5) > 0$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Bất phương trình $(x - 1)^2 (x + 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án A sai.

Bất phương trình $x^2 (x + 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án B sai.

Bất phương trình $\sqrt{x + 5} (x + 5) > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Câu 4: Bất phương trình $(x + 1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với

A. $\sqrt{x(x + 1)^2} \leq 0$.

B. $(x + 1)\sqrt{x} < 0$

C. $(x + 1)^2 \sqrt{x} \leq 0$.

D. $(x + 1)^2 \sqrt{x} < 0$

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ có điều kiện $x \geq 0 \rightarrow (x+1)\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có: $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$. Đáp án A sai.

Ta có: $(x+1)\sqrt{x} < 0$ vô nghiệm vì từ điều kiện $x \geq 0 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x} \geq 0$. Đáp án B sai.

Ta có: $(x+1)^2 \sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 5: Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x$ tương đương với

A. $(1-2x)\sqrt{x-1} \geq x(1-2x)$.

B. $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.

C. $(1-x^2)\sqrt{x-1} \geq x(1-x^2)$.

D. $x\sqrt{x-1} \leq x^2$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x \longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Ta có: $(1-2x)\sqrt{x-1} \geq x(1-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$. Đáp án A sai.

Ta có: $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Câu 6: Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+2)x \leq m+1$ và $3m(x-1) \leq -x-1$ tương đương:

A. $m = -3$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Viết lại $(m+2)x \leq m+1$ (1) và $(3m+1)x \leq 3m-1$ (2).

• Thay $m = -3$, ta được $\begin{cases} (m+2)x \leq m+1 \longrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ (3m+1)x \leq 3m-1 \longrightarrow -8x \leq -10 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$. Không thỏa mãn.

• Thay $m = -2$ thì hệ số của x ở (1) bằng 0, hệ số của x ở (2) khác 0. Không thỏa mãn.

• Thay $m = -1$ thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) âm. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Đến đây dùng phương pháp loại trừ thì chỉ còn đáp án D.

• Thay $m = 3$, ta được $\begin{cases} (m+2)x \leq m+1 \longrightarrow 5x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5} \\ (3m+1)x \leq 3m-1 \longrightarrow 10x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$.

Câu 7: Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+3)x \geq 3m-6$ và $(2m-1)x \leq m+2$ tương

đương:

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 4$.

D.

$m = 0$ hoặc $m = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Thay $m = 1$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Thay $m = 0$, ta được $\begin{cases} (m+3)x \geq 3m-6 \longrightarrow 3x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ (2m-1)x \leq m+2 \longrightarrow -x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2 \end{cases}$. Ta thấy thỏa mãn nhưng chưa

đủ kết luận là đáp án B vì trong đáp án D cũng có $m = 0$. Ta thử tiếp $m = 4$.

Thay $m = 4$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa mãn.

Vậy với $m = 0$ thỏa mãn.

Dạng 3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\frac{2x-5}{3} > \frac{x-3}{2}$

Lời giải

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2(2x-5) > 3(x-3) \Leftrightarrow 4x-10 > 3x-9 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1; +\infty)$.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|2-x|+3x-1 \leq 6$ có tập nghiệm là

Lời giải

$$\text{Ta có: } |2-x|+3x-1 \leq 6 \Leftrightarrow |2-x| \leq 7-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \leq 7-3x \\ 2-x \geq -7+3x \\ 7-3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ -4x \geq -9 \\ x \leq \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{9}{4} \\ x \leq \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 3: Bất phương trình $4m^2(2x-1) \geq (4m^2+5m+9)x-12m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m = -1$.

B. $m = \frac{9}{4}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $(4m^2 - 5m - 9)x \geq 4m^2 - 12m$.

Để dàng thấy nếu $4m^2 - 5m - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \frac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm

đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0x \geq 16$: vô nghiệm.

Với $m = \frac{9}{4}$ bất phương trình trở thành $0x \geq -\frac{27}{4}$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 4: Bất phương trình $m^2(x-1) \geq 9x+3m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $m = \emptyset$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - 9)x \geq m^2 + 3m$.

Để dàng thấy nếu $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x > 18$: vô nghiệm

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \geq 0$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = -3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $ax + b > 0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Nếu $a > 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ nên $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$.

Nếu $a < 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$ nên $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right) \neq \emptyset$.

Nếu $a = 0$ thì $ax + b > 0$ có dạng $0x + b > 0$

Với $b > 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

Với $b \leq 0$ thì $S = \emptyset$.

Câu 2: Bất phương trình $ax + b > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi:

A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Nếu $a > 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ nên $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$.

Nếu $a < 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$ nên $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right) \neq \emptyset$.

Nếu $a = 0$ thì $ax + b > 0$ có dạng $0x + b > 0$

Với $b \leq 0$ thì $S = \emptyset$.

Với $b > 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

Câu 3: Bất phương trình $ax + b \leq 0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Nếu $a > 0$ thì $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ nên $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right] \neq \emptyset$.

Nếu $a < 0$ thì $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ nên $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$.

Nếu $a = 0$ thì $ax + b \leq 0$ có dạng $0x + b \leq 0$

Với $b \leq 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

Với $b > 0$ thì $S = \emptyset$.

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $5x - 1 \geq \frac{2x}{5} + 3$ là:

A. $S = \mathbb{R}$.

B. $S = (-\infty; 2)$.

C. $S = \left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

D. $S = \left[\frac{20}{23}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $5x - 1 \geq \frac{2x}{5} + 3 \Leftrightarrow 25x - 5 \geq 2x + 15 \Leftrightarrow 23x \geq 20 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{23}$.

Câu 5: Bất phương trình $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn -10 ?

A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1 \leq \frac{x+2}{3}+x \Leftrightarrow 9x+15-6 \leq 2x+4+6x \Leftrightarrow x \leq -5$.

Vì $x \in \mathbb{Z}, -10 < x \leq -5$ nên có 5 nghiệm nguyên

Câu 6: Tập nghiệm S của bất phương trình $(1-\sqrt{2})x < 3-2\sqrt{2}$ là:

A. $S = (-\infty; 1-\sqrt{2})$.

B. $S = (1-\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $S = \mathbb{R}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $(1-\sqrt{2})x < 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x > \frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$.

Câu 7: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $x(2-x) \geq x(7-x)-6(x-1)$ trên đoạn $[-10;10]$ bằng:

A. 5.

B. 6.

C. 21.

D. 40.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $x(2-x) \geq x(7-x)-6(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x^2 \geq 7x-x^2-6x+6 \Leftrightarrow x \geq 6 \xrightarrow[x \in \mathbb{Z}]{x \in [-10;10]} x \in \{6;7;8;9;10\}$.

Câu 8: Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1 \leq (x-1)(x+3)+x^2-5$ có tập nghiệm

A. $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

B. $S = \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

C. $S = \mathbb{R}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1 \leq (x-1)(x+3)+x^2-5$

tương đương với $2x^2+5x-3-3x+1 \leq x^2+2x-3+x^2-5 \Leftrightarrow 0.x \leq -6 \Leftrightarrow x \in \emptyset \longrightarrow S = \emptyset$.

Câu 9: Tập nghiệm S của bất phương trình $5(x+1)-x(7-x) > -2x$ là:

A. $S = \mathbb{R}$.

B. $S = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $5(x+1)-x(7-x) > -2x$ tương đương với:

$$5x + 5 - 7x + x^2 > -2x \Leftrightarrow x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \longrightarrow S = \mathbb{R}.$$

Câu 10: Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2 + (x-3)^2 + 15 < x^2 + (x-4)^2$ là:

- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (0; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương $x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + 15 < x^2 + x^2 - 8x + 16$

$$\Leftrightarrow 0.x < -9 : \text{ vô nghiệm } \longrightarrow S = \emptyset.$$

Câu 11: Tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x} < (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$ là:

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = [3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3]$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Bất phương trình tương đương

$$x + \sqrt{x} < 2x - 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3 \longrightarrow S = (3; +\infty)$$

Câu 12: Tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x-2} \leq 2 + \sqrt{x-2}$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = (-\infty; 2]$. C. $S = \{2\}$. D. $S = [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \geq 2$. Bất phương trình tương đương $x \leq 2 \longrightarrow x = 2$.

Câu 13: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \frac{4}{\sqrt{x-4}}$ bằng:

- A. 15. B. 11. C. 26. D. 0.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x > 4$. Bất phương trình tương đương :

$$x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6 \Rightarrow 4 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 5; x = 6 \longrightarrow S = 5 + 6 = 11.$$

Câu 14: Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-3)\sqrt{x-2} \geq 0$ là:

- A. $S = [3; +\infty)$. B. $S = (3; +\infty)$.
C. $S = \{2\} \cup [3; +\infty)$. D. $S = \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \geq 2$.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

Câu 15: Bất phương trình $(m-1)x > 3$ vô nghiệm khi

A. $m \neq 1$.

B. $m < 1$.

C. $m = 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn C.

Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x > 3$: vô nghiệm.

Câu 16: Bất phương trình $(m^2 - 3m)x + m < 2 - 2x$ vô nghiệm khi

A. $m \neq 1$.

B. $m \neq 2$.

C. $m = 1, m = 2$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - 3m + 2)x < 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: vô nghiệm.

Với $m = 2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Câu 17: Tập nghiệm S của bất phương trình $(x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2$ là:

A. $S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty \right)$.

B. $S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty \right)$.

C. $S = \left[-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6} \right]$.

D. $S = \left[-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6} \right]$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $(x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2$ tương đương với:

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 \geq x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \longrightarrow S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty \right).$$

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x < m$ vô nghiệm.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Rõ ràng nếu $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x + m < 6x - 2$ vô nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - m - 6)x < -2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = -2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x < -5$: vô nghiệm.

Suy ra $S = \{-2; 3\} \longrightarrow -2 + 3 = 1$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx - 2 \leq x - m$ vô nghiệm.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình tương đương với $(m - 1)x \leq 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x \leq 1$: nghiệm đúng với mọi x .

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Bất phương trình $(m^2 + 9)x + 3 \geq m(1 - 6x)$ nghiệm đúng với mọi x khi

- A. $m \neq 3$. B. $m = 3$. C. $m \neq -3$. D. $m = -3$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương với $(m + 3)^2 x \geq m - 3$.

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \geq -6$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(x + m)m + x > 3x + 4$ có tập nghiệm là $(-m - 2; +\infty)$.

- A. $m = 2$. B. $m \neq 2$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn C.

Đề ý rằng, bất phương trình $ax + b > 0$ (hoặc < 0 , ≥ 0 , ≤ 0)

- Vô nghiệm ($S = \emptyset$) hoặc có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$ thì chỉ xét riêng $a = 0$.
- Có tập nghiệm là một tập con của $\mathbb{R}$ thì chỉ xét $a > 0$ hoặc $a < 0$.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x > 4-m^2$.

Xét $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$, bất phương trình $\Leftrightarrow x > \frac{4-m^2}{m-2} = -m-2 \rightarrow S = (-m-2; +\infty)$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(x-m) \geq x-1$ có tập nghiệm là $(-\infty; m+1]$.

- A.** $m = 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình viết lại $(m-1)x \geq m^2-1$.

Xét $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x \geq \frac{m^2-1}{m-1} = m+1 \rightarrow S = [m+1; +\infty)$.

Xét $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x \leq \frac{m^2-1}{m-1} = m+1 \rightarrow S = (-\infty; m+1]$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1) < 2x-3$ có nghiệm.

- A.** $m \neq 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x < m-3$.

- Rõ ràng $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì bất phương trình có nghiệm.
- Xét $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, bất phương trình trở thành $0x < -1$ (vô lí).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 2$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1) < 3-x$ có nghiệm.

- A.** $m \neq 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình viết lại $(m+1)x < m+3$.

Rõ ràng $m+1 \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, bất phương trình trở thành $0x < 2$ (luôn đúng với mọi x).

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi m .

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m^2+m-6)x \geq m+1$ có nghiệm.

A. $m \neq 2$.

B. $m \neq 2$ và $m \neq 3$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn A.

Rõ ràng $m^2+m-6 \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

$$\text{Xét } m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \longrightarrow 0x \geq 3 \longrightarrow S=\emptyset \\ m=-3 \longrightarrow 0x \geq -2 \longrightarrow S=\mathbb{R} \end{cases}.$$

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 2$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x-1 < mx+m$ có nghiệm.

A. $m=1$.

B. $m=0$.

C. $m=0; m=1$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình viết lại $(m^2-m)x < m+1$.

Rõ ràng $m^2-m \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

$$\text{Xét } m^2-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \longrightarrow 0x < 1 \longrightarrow S=\mathbb{R} \\ m=1 \longrightarrow 0x < 2 \longrightarrow S=\mathbb{R} \end{cases}.$$

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 28: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $mx+6 < 2x+3m$ với $m < 2$. Hỏi tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S ?

A. $(3;+\infty)$.

B. $[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;3)$.

D. $(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương với $(m-2)x < 3m-6$.

$$\text{Với } m < 2, \text{ bất phương trình tương đương với } x > \frac{3m-6}{m-2} = 3 \longrightarrow S = (3;+\infty)$$

Suy ra phần bù của S là $(-\infty;3]$.

Câu 29: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1) \geq 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

A. $m=3$

B. $m=1$

C. $m=-1$

D. $m=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \geq m+1$.

- Với $m=1$, bất phương trình trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm. Do đó $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m > 1$, bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left[\frac{m+1}{2m-2}; +\infty \right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m=3$: thỏa mãn $m > 1$.

- Với $m < 1$, bất phương trình tương đương với $x \leq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left(-\infty; \frac{m+1}{2m-2} \right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x-m < 3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4; +\infty)$.

A. $m \neq 1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình tương đương với $2x-m < 3x-3 \Leftrightarrow x > 3-m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3-m; +\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4; +\infty)$ thì $3-m = 4 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx+4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$.

A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right]$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right]$.

Lời giải

Chọn A.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx+4 > 0, \forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8; 8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m+4 \geq 0 \\ 8m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)-mx+x+5 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2018; 2]$.

- A. $m < \frac{7}{2}$. B. $m = \frac{7}{2}$. C. $m > \frac{7}{2}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \longrightarrow x < \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}$

$\longrightarrow S = \left(-\infty; \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}\right)$ (vì $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-2018; 2] \subset \left(-\infty; \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}\right) \Leftrightarrow 2 < \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$.

Cách 2. Ta có $(m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5 < 0$.

Hàm số bậc nhất $y = (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5$ có hệ số $m^2 - m + 1 > 0$ nên đồng biến.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(2) < 0 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1).2 - 2m^2 + 5 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)+m+x \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

- A. $m \geq -2$. B. $m = -2$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 + 1)x \geq 2m^2 - m \longrightarrow x \geq \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \longrightarrow S = \left[\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-1; 2] \cap \left[\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}; +\infty\right) \neq \emptyset \longrightarrow \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x+1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 3x+1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 2x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$.

Ví dụ 2: Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \quad 1$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{2x-1}{3} > -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}.$$

Ví dụ 3: Tìm m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13} \\ \longrightarrow S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right].$$

$$\text{Bất phương trình } 2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{2m-8}{5}; +\infty\right).$$

$$\text{Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \text{ là tập hợp có đúng một phần tử} \\ \Leftrightarrow \frac{8}{13} = \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m = \frac{72}{13}.$$

Ví dụ 4: Tìm m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-m < 2 \end{cases}$$
 có nghiệm

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } 2x-1 > 0 \text{ có tập nghiệm } S_1 = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Bất phương trình } x-m < 2 \text{ có tập nghiệm } S_2 = (-\infty; m+2).$$

$$\text{Hệ có nghiệm khi và chỉ khi } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m+2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 5: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} mx \leq m-3 \\ (m+3)x \geq m-9 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Lời giải

$$\text{Giả sử hệ có nghiệm duy nhất thì } \frac{m-3}{m} = \frac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Thử lại với } m = 1, \text{ hệ bất phương trình trở thành } \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 < x-2 \end{cases}$ là:

- A. $S = (-\infty; -3)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (-3; 2)$. D. $S = (-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > x \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3.$$

Câu 2: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \frac{5-2x}{2} \end{cases}$ là:

- A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \frac{5-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -2x+2 \\ 6+2x > 5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 3 \\ 4x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 3: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 < -x+2017 \\ 3+x > \frac{2018-2x}{2} \end{cases}$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \left(\frac{2012}{8}; \frac{2018}{3}\right)$.
C. $S = \left(-\infty; \frac{2012}{8}\right)$. D. $S = \left(\frac{2018}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x-1 < -x+2017 \\ 3+3x > \frac{2018-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 2018 \\ 6+6x > 2018-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 2018 \\ 8x > 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2018}{3} \\ x > \frac{2012}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2018}{3} < x < \frac{2012}{8}.$$

Câu 4: Tập $S = \left[-1; \frac{3}{2}\right)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình sau đây ?

- A. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{3}{2} \longrightarrow S = \left[-1; \frac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \longrightarrow S = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **B sai.**

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1 \longrightarrow S = (-\infty; -1]$. **C sai.**

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \longrightarrow S = \emptyset$. **D sai.**

Câu 5: Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases}$ là:

A. $S = (-3; 5)$.

B. $S = (-3; 5]$.

C. $S = [-3; 5)$.

D. $S = [-3; 5]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 < x+3 \\ 2x \leq 3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 5 \longrightarrow S = [-3; 5)$.

Câu 6: Biết rằng bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \\ 3x \leq x+5 \end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn $[a; b]$. Hỏi $a+b$ bằng:

A. $\frac{11}{2}$.

B. 8.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{47}{10}$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ 5-3x \leq 2x-6 \\ 3x \leq x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \\ 11 \leq 5x \\ 2x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq \frac{11}{5} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Suy ra $a+b = \frac{11}{5} + \frac{5}{2} = \frac{47}{10}$.

Câu 7: Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$ là:

A. Vô số.

B. 4.

C. 8.

D. 0.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 42x + 5 > 28x + 49 \\ 8x + 3 < 4x + 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 44 \\ 4x < 47 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{44}{14} \\ x < \frac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{44}{14} < x < \frac{47}{4} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}.$$

Câu 8: Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases}$ bằng:

A. 21.

B. 27.

C. 28.

D. 29.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \text{ Suy ra tổng bằng } 21.$$

Câu 9: Cho bất phương trình $\begin{cases} (1-x)^2 \leq 8-4x+x^2 \\ (x+2)^3 < x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$. Tổng nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+x^2 \leq 8-4x+x^2 \\ x^3+6x^2+12x+8 < x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \leq 8-4x \\ 12x+8 < 13x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 7 \\ -x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{7}{2} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Suy ra tổng cần tính là $0+3=3$.

Câu 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -11$.

B. $m \geq -11$.

C. $m < -11$.

D. $m \leq -11$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $3(x-6) < -3$ có tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 5)$.

Bất phương trình $\frac{5x+m}{2} > 7$ có tập nghiệm $S_2 = \left(\frac{14-m}{5}; +\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{14-m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -11$.

Câu 11: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 1 \leq 0$ có tập nghiệm $S_1 = [-1; 1]$.

Bất phương trình $x - m > 0$ có tập nghiệm $S_2 = (m; +\infty)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 12: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (m^2 + 1)x < 4 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m < 1$.

C. $m < -1$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ có tập nghiệm $S_1 = [2; +\infty)$.

Bất phương trình $(m^2 + 1)x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{m^2 + 1}$ (do $m^2 + 1 > 0$).

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{4}{m^2 + 1}\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{4}{m^2 + 1} > 2$

Giải bất phương trình $\frac{4}{m^2 + 1} > 2 \Leftrightarrow 4 > 2(m^2 + 1) \Leftrightarrow 2 > 2m^2 \Leftrightarrow m^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Câu 13: Hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx - 1) < 2 \\ m(mx - 2) \geq 2m + 1 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < \frac{1}{3}$.

B. $0 \neq m < \frac{1}{3}$.

C. $m \neq 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2 x < m + 2 \\ m^2 x \geq 4m + 1 \end{cases}$.

• Với $m = 0$, ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$: hệ bất phương trình vô nghiệm.

• Với $m \neq 0$, ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \frac{m+2}{m^2} \\ x \geq \frac{4m+1}{m^2} \end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m+2}{m^2} > \frac{4m+1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Vậy $0 \neq m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 \geq 3 \\ x-m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m > 2$.

B. $m = 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2x-1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2 \longrightarrow S_1 = [2; +\infty)$.

Bất phương trình $x-m \leq 0 \Leftrightarrow x \leq m \longrightarrow S_2 = (-\infty; m]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow 2 = m$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m^2x \geq 6-x \\ 3x-1 \leq x+5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $m^2x \geq 6-x \Leftrightarrow (m^2+1)x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{m^2+1} \longrightarrow S_1 = \left[\frac{6}{m^2+1}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $3x-1 \leq x+5 \Leftrightarrow x \leq 3 \longrightarrow S_2 = (-\infty; 3]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \frac{6}{m^2+1} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m(x+1) \geq x+3 \\ 4mx+3 \geq 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = \frac{3}{4}; m = \frac{5}{2}$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} (2m-1)x \geq 3-2m \\ (4m-4)x \geq -3 \end{cases}$.

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì

$$\frac{3-2m}{2m-1} = \frac{-3}{4m-4} \Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \text{ hoặc } m = \frac{5}{2}.$$

Thử lại

- Với $m = \frac{3}{4}$, hệ trở thành $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}-1\right)x \geq 3-\frac{3}{2} \\ -x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$: thỏa mãn.
- Với $m = \frac{5}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} 4x \geq -2 \\ 6x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$: không thỏa mãn.

Vậy $m = \frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 17: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+4 > x+9 \\ 1-2x \leq m-3x+1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m > \frac{5}{2}$. **B.** $m \geq \frac{5}{2}$. **C.** $m < \frac{5}{2}$. **D.** $m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $3x+4 > x+9 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \longrightarrow S_1 = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $1-2x \leq m-3x+1 \Leftrightarrow x \leq m \longrightarrow S_2 = (-\infty; m]$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 18: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+7 \geq 8x+1 \\ m+5 < 2x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m > -3$. **B.** $m \geq -3$. **C.** $m < -3$. **D.** $m \leq -3$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2x+7 \geq 8x+1 \Leftrightarrow -6x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 1 \longrightarrow S_1 = (-\infty; 1]$.

Bất phương trình $m+5 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{m+5}{2} \longrightarrow S_2 = \left(\frac{m+5}{2}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow 1 \leq \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \geq -3$.

Câu 19: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > \frac{72}{13}$. B. $m \geq \frac{72}{13}$. C. $m < \frac{72}{13}$. D. $m \leq \frac{72}{13}$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $(x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 7x + 1$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 \geq 7x + 1 \Leftrightarrow 8 \geq 13x \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13} \longrightarrow S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right].$$

Bất phương trình $2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow 2m - 8 \leq 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{2m-8}{5}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

Câu 20: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \\ mx + 1 > (m-2)x + m \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 3$. B. $m \geq 3$. C. $m < 3$. D. $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $3x + 5 \geq x - 1 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3 \longrightarrow S_1 = [-3; +\infty)$.

Bất phương trình $(x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 2x + 1 + 9$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 \leq -2x + 1 + 9 \Leftrightarrow 6x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 1 \longrightarrow S_2 = (-\infty; 1].$$

Suy ra $S_1 \cap S_2 = [-3; 1]$.

Bất phương trình $mx + 1 > (m-2)x + m \Leftrightarrow mx + 1 > mx - 2x + m$

$$\Leftrightarrow 1 > -2x + m \Leftrightarrow 2x > m - 1 \Leftrightarrow x > \frac{m-1}{2} \longrightarrow S_3 = \left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right).$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 21: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x-3) < 5(x-4) \\ mx + 1 \leq x - 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2(x-3) < 5(x-4) \Leftrightarrow x > \frac{14}{3} \longrightarrow S_1 = \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $mx + 1 \leq x - 1 \Leftrightarrow (m-1)x \leq -2$. (*)

- Với $m = 1$, khi đó (*) trở thành $0x \leq -2$: vô nghiệm $\longrightarrow$ hệ vô nghiệm.

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m = 1$.

- Với $m > 1$, ta có (*) $\Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right]$

$\longrightarrow$ hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{-2}{m-1} \leq \frac{14}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{3(m-1)} \leq \frac{14(m-1)}{3(m-1)} \Leftrightarrow -6 \leq 14(m-1) \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{7} \text{ (do với } m > 1 \rightarrow m-1 > 0 \text{)}.$$

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m > 1$.

- Với $m < 1$, ta có (*) $\Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$.

Khi đó $S_1 \cap S_2$ luôn luôn khác rỗng nên $m < 1$ không thỏa mãn.

Vậy $m \geq 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm.

BÀI 3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

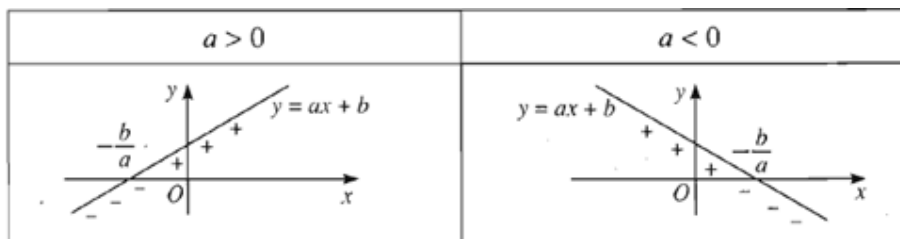
2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lý

Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Minh họa bằng đồ thị



II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lý về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x) > 0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ. Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x} \geq 1$.

Giải.

Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$\frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0$$

Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x}{1-x}$

Ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \leq x < 1$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ. Giải bất phương trình $|-2x+1|+x-3 < 5$.

Giải.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{neu } -2x+1 \geq 0 \\ -(-2x+1) & \text{neu } -2x+1 < 0. \end{cases}$$

Do đó, ta xét phương trình trong hai khoảng

$$\text{a) Với } x \leq \frac{1}{2} \text{ ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ (-2x+1)+x-3 < 5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -x < 7 \end{cases}.$$

Hệ này có nghiệm là $-7 < x \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{b) Với } x > \frac{1}{2} \text{ ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (2x-1)+x-3 < 5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases}.$$

Hệ này có nghiệm là $\frac{1}{2} < x < 3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left[-7; \frac{1}{2}\right]$ và $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7 < x < 3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)| \leq a$ và $|f(x)| \geq a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a \\ |f(x)| \geq a &\Leftrightarrow f(x) \leq -a \text{ hoặc } f(x) \geq a \end{aligned} \quad (a > 0)$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét dấu nhị thức bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{3x-6}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 2]$. B. $x \in (-\infty; 2)$. C. $x \in (2; +\infty)$. D. $x \in [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3x-6} \leq 0 \Leftrightarrow 3x-6 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. vậy $x \in (-\infty; 2)$

Ví dụ 2: Cho biểu thức $f(x) = (x+5)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 5) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (3; +\infty)$.
C. $x \in (-5; 3)$. D. $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = -5; x = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Ví dụ 3: Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x+3)(2-x)}{x-1}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) > 0$ là

- A. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in (-3; 1) \cup (1; 2)$. D. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$2-x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$-$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Ví dụ 4: Cho biểu thức $f(x) = \frac{(4x-8)(2+x)}{4-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in (-\infty; -2] \cup [2; 4)$.

B. $x \in (3; +\infty)$.

C. $x \in (-2; 4)$.

D. $x \in (-2; 2) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

Phương trình $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$; $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$; $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
$4x-8$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$4-x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; 4)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho biểu thức $f(x) = 2x-4$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in [2; +\infty)$.

B. $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $x \in (-\infty; 2]$.

D. $x \in (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty)$.

Câu 2: Cho biểu thức $f(x) = x(x-2)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

C. $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2; x = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
x	—	0	+		+
$x-2$	—		—	0	+
$3-x$	+		+		0
$f(x)$	+	0	—	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$

Câu 3: Cho biểu thức $f(x) = 9x^2 - 1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) < 0$ là

A. $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}; x = -\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x-1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 4: Cho biểu thức $f(x) = (2x-1)(x^3-1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(2x-1)(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$

Phương trình $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$ $ $+$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0 $+$
x^2+x+1	$+$	$ $	$-$	$ $ $+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Câu 5: Cho biểu thức $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-5)(1-x)}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 0] \cup (1; 5)$.

C. $x \in [0; 1) \cup [3; 5)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x = 0$; $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ và $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	3	5	$+\infty$			
x	−	0	+		+		+		+
$x-3$	−		−		−	0	+		+
$x-5$	−		−		−		−		+
$1-x$	+		+		−		−		−
$f(x)$	−	0	+		−	0	+		−

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1) \cup [3; 5)$.

Câu 6: Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.

C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x} = \frac{4x - 12}{x(x - 4)}$.

Phương trình $4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x = 0$ và $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	3	4	$+\infty$		
$4x-12$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
x	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x-4$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$

$f(x)$	-		+	0	-		+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

Câu 7: Cho biểu thức $f(x) = \frac{2-x}{x+1} + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $x \in (-\infty; -1)$.

B. $x \in (-1; +\infty)$.

C. $x \in (-4; -1)$.

D. $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{2-x}{x+1} + 2 = \frac{2-x+2(x+1)}{x+1} = \frac{x+4}{x+1}$.

Phương trình $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$ $ $+$
$x+1$	$-$	$ $	$-$	0 $+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$ $+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -1)$.

Câu 8: Cho biểu thức $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

B. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

C. $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

D. $x \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2} = \frac{3x-2-2+x}{3x-2} = \frac{4x-4}{3x-2}$.

Phương trình $4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ và $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$4x-4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$3x-2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Câu 9: Cho biểu thức $f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) > 0$ là

A. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$.

B. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right]$.

D. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = -\frac{4}{3x+1} - \frac{3}{2-x} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3x+1} = \frac{5x+11}{(x-2)(3x+1)}$.

Phương trình $5x+11=0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{5}$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$		
$5x+11$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x-2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$3x+1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Câu 10: Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất

phương trình $f(x) < 0$ là

- A.** $x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$. **B.** $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$. **D.** $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)} < 0$.

Phương trình $x+12=0 \Leftrightarrow x=-12$; $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-12	-4	-3	0	$+\infty$			
$x+12$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$		
x	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$x+3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Câu 11: Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 1$?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1 - f(x) = 1 - \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} = 1 - \frac{x^2-x-6}{x^2-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$.

Phương trình $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
$x+5$	$-$	0	$+$	$ $	$+$

$x-1$	-		-		-	0	+
$x+1$	-		-	0	+		+
$1-f(x)$	-	0	+		-		+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $1-f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -1) \cup (1; +\infty)$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Bất phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(x+3)(x-1) \leq 0$ là

A. 1.

B. -4.

C. -5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = (x+3)(x-1)$

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $(x+3)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3; 1]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-3, -2, -1, 0, 1$.

Suy ra tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng -5 .

Ví dụ 2: Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1) > 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x(x-2)(x+1)$.

Phương trình $x=0$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Ta có bảng xét dấu

	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x									
x		$-$		$-$		0		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		0	
$x+1$		$-$		0		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		0		$+$		0	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $(2x+8)(1-x) > 0$ có dạng $(a;b)$. Khi đó $b-a$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 9. D. không giới hạn.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = (2x+8)(1-x)$

Phương trình $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x							
$2x+8$		$-$		0		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		0	
$f(x)$		$-$		0		$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x) > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-4; 1)$.

Khi đó $b=1, a=-4 \Rightarrow b-a=5$.

Câu 2: Tập nghiệm $S = (-4; 5)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+4)(x+5) < 0$.

B. $(x+4)(5x-25) < 0$.

C. $(x+4)(5x-25) \geq 0$.

D. $(x-4)(x-5) < 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Phương trình $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ và $5x-25=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$ $+\infty$	-5	-4	4	5		
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x+4)(x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
$(x+4)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$(x-4)(x-5)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S = (-4; 5)$ là nghiệm của bất phương trình $(x+4)(5x-25) < 0$.

Câu 3: Tập nghiệm $S = [0; 5]$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x(x-5) < 0$.

B. $x(x-5) \leq 0$.

C. $x(x-5) \geq 0$.

D. $x(x-5) > 0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x(x-5)$.

Phương trình $x=0$ và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$ $+\infty$	0	5	
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $x \in [0;5] \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \leq 0$.

Câu 4: Tập nghiệm $S = (-\infty;3) \cup (5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+3)(x-5)(14-2x) \leq 0$.

B. $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.

C. $(x-3)(x-5)(14-2x) < 0$.

D. $(x+3)(x-5)(14-2x) < 0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$; $14-2x=0 \Leftrightarrow x=7$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	3	5	7	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$14-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+3)(x-5)(14-2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$(x-3)(x-5)(14-2x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S = (-\infty;3) \cup (5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.

Câu 5: Hỏi bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x) \leq 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = (2-x)(x+1)(3-x)$

Phương trình $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

$x+1$	—	0	+		+		+
$3-x$	+		+		+		—
$f(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên dương.

Câu 6: Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1) > 0$ là

A. -9.

B. -6.

C. -4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2(x+2)(x-1) > 0$

Vì $(x-2)^2 > 0, \forall x \neq 2$ nên bất phương trình trở thành $\begin{cases} x \neq 2 \\ (x+2)(x-1) > 0 \end{cases}$.

Đặt $f(x) = (x+2)(x-1)$. Phương trình $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $x \neq 2$, ta được $\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Do đó, nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình là -3 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình là 3 . Vậy tích cần tính là $(-3).3 = -9$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $2x(4-x)(3-x)(3+x) > 0$ là

A. Một khoảng

B. Hợp của hai khoảng.

C. Hợp của ba khoảng.

D. Toàn trục số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = 2x(4-x)(3-x)(3+x)$.

Phương trình $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $4-x = 0 \Leftrightarrow x = 4$;

Và $3-x = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $3+x = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	0	3	4	$+\infty$	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$3-x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$4-x$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 0 < x < 3 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$.

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là hợp của ba khoảng.

Câu 8: Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $f(x) = x(x+2)$.

Phương trình $x = 0$ và $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là $x = 1$.

Dạng 3. Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1$ có tập nghiệm là

A. $S = (-1; 2)$.

B. $S = [-1; 2)$.

C. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} < 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$. Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$2-x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Bất phương trình $\frac{3}{1-x} \geq \frac{5}{2x+1}$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

B. $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{11}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\frac{3}{1-x} \geq \frac{5}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)} \geq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$. Ta có $11x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{11}$; $\begin{cases} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	1	$+\infty$
$11x-2$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{11} \leq x < 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

Ví dụ 3: Bất phương trình $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 2$ có tập nghiệm là

A. $S = \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left[-1; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{(x-1)(x+1)} \leq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$. Ta có $1-3x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$; $\begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$1-3x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$

$x+1$	–	0	+		+		+
$f(x)$	+		–	0	+		–

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $\frac{2-x}{2x+1} \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. B. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. C. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. D. $S = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có Đặt $f(x) = \frac{2-x}{2x+1}$. Ta có $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2-x$	$+$	$ $	0	$-$	
$2x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1} \leq 0$ là

- A. $S = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup [2; 3]$.
C. $S = [-1; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = \frac{(3-x)(x-2)}{x+1}$. Ta có $\begin{cases} 3-x=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}; \quad x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
$3-x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1$ là

A. $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$.

B. $S = (-2; 1] \cup (2; +\infty)$.

C. $S = [-2; 1) \cup (2; +\infty)$

D. $S = (-2; 1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$. Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x-2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; -1] \cup (2; +\infty)$.

Câu 4: Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3}$ có tập nghiệm là

A. $S = (-\infty; -12) \cup (-4; 3) \cup (0; +\infty)$.

B. $S = [-12; -4) \cup (-3; 0)$.

C. $S = (-\infty; -12) \cup [-4; 3] \cup (0; +\infty)$.

D. $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)} < 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$. Ta có $x+12=0 \Leftrightarrow x=-12$; $\begin{cases} x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \\ x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-12	-4	-3	0	$+\infty$			
$x+12$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$		
x	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$x+3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < x < -4 \\ -3 < x < 0 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Câu 5: Bất phương trình $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$ có tập nghiệm S là

A. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup [1; 3]$.

B. $T = [-1; 0) \cup (-3; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$.

D. $T = (-1; 0] \cup (-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)}{(x+1)(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x(x-3)}{x+1} < 0 \end{cases} \text{ (vì } (x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Đặt $f(x) = \frac{x(x-3)}{x+1}$. Ta có $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$		
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$-$
$x-3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $x \neq 1$, ta được tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$.

Câu 6: Bất phương trình $\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}$ có nghiệm nguyên lớn nhất là

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -2$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{x(x+4)}{x(x-3)(x+3)} - \frac{2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} < -\frac{4x(x+3)}{x(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)} < 0.$$

Đặt $f(x) = \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}$. Ta có $3x+22=0 \Leftrightarrow x = -\frac{22}{3}$; $\begin{cases} x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{22}{3}$	-3	3	$+\infty$		
$3x+22$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x-3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$-$	$ $	$+$	$ $	$+$

$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{22}{3}\right) \cup (-3; 3)$.

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình là $x = 2$.

Dạng 4. Bất phương trình chứa trị tuyệt đối

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Nghiệm của bất phương trình $|2x - 3| \leq 1$ là

- A. $1 \leq x \leq 3$. B. $-1 \leq x \leq 1$. C. $1 \leq x \leq 2$. D. $-1 \leq x \leq 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|2x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Ví dụ 2: Bất phương trình $|1 - 3x| > 2$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1 - 3x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x > 2 \\ 1 - 3x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 > 3x \\ 3x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Ví dụ 3: Bất phương trình: $|3x - 3| \leq |2x + 1|$ có nghiệm là

- A. $[4; +\infty)$. B. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$. C. $\left[\frac{2}{5}; 4\right]$. D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|3x - 3| \leq |2x + 1| \Leftrightarrow |3x - 3|^2 \leq |2x + 1|^2 \Leftrightarrow (3x - 3)^2 - (2x + 1)^2 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (3x - 3 - 2x - 1)(3x - 3 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(5x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{2}{5}; 4\right]$.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x-1|}{x+2} < 1$ là

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

TH1. Với $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, ta có $\frac{|x-1|}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S_1 = (1; +\infty)$.

TH2. Với $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, ta có $\frac{|x-1|}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -2 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $x < 1$, ta được tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ví dụ 5: Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $x+12 \geq |2x-4|$ là

A. 5.

B. 19

C. 11.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

TH1. Với $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, ta có $x+12 \geq |2x-4| \Leftrightarrow x+12 \geq 2x-4 \Leftrightarrow x \leq 16$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$, ta được tập nghiệm $S_1 = [2; 16]$.

TH2. Với $2x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, ta có $x+12 \geq -2x+4 \Leftrightarrow 3x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{3}$.

Kết hợp với điều kiện $x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \left[-\frac{8}{3}; 2\right)$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{8}{3}; 16\right]$.

Vậy số nghiệm nguyên x thỏa mãn bất phương trình là 19.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|x-1| < 1$ là

A. $-2 < x < 2$.

B. $0 < x < 1$.

C. $x < 2$.

D. $0 < x < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Câu 2: Bất phương trình $|3x-4| \leq 2$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|3x-4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 3x-4 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 3x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $|x-3| > -1$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-3; 3)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $|x-3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $|x-3| > -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $|5x-4| \geq 6$ có dạng $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính tổng $P = 5a + b$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Bất phương trình $|5x-4| \geq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \geq 6 \\ 5x-4 \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 10 \\ 5x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{2}{5} \end{cases}$.

Cách 2. TH1. Với $5x-4 \geq 0$, bất phương trình $|5x-4| \geq 6 \Leftrightarrow 5x-4 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$.

TH2. Với $5x-4 < 0$, bất phương trình $|5x-4| \geq 6 \Leftrightarrow -5x+4 \geq 6 \Leftrightarrow 5x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{5}$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [2; +\infty)$.

Mặt khác $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ suy ra $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a + b = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = 0$.

Câu 5: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \geq 2$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

$$\text{Bất phương trình } \left| \frac{2-x}{x+1} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} \geq 2 \\ \frac{2-x}{x+1} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} - 2 \geq 0 \\ \frac{2-x}{x+1} + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3x}{x+1} \geq 0 \\ \frac{4+x}{x+1} \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1), ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0$.

Giải (2), ta có bất phương trình (2) $\Leftrightarrow -4 \leq x < -1$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -1) \cup (-1; 0]$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên x cần tìm là $x = \{-4; -3; -2; 0\}$.

Câu 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $1 \leq |x-2| \leq 4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Bất phương trình } 1 \leq |x-2| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \leq 4 \\ |x-2| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x-2 \leq 4 \\ x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 6 \\ x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 1] \cup [3; 6]$.

Vậy số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình là 8.

Câu 7: Bất phương trình $|x-3| > |2x+4|$ có nghiệm là

A. $\left(-7; \frac{1}{3}\right)$.

B. $\left(7; -\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-7; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $(-\infty; -7) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |x-3| > |2x+4| \Leftrightarrow |x-3|^2 > |2x+4|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 - (2x+4)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3-2x-4)(x-3+2x+4) > 0 \Leftrightarrow (-x-7)(3x+1) > 0 \Leftrightarrow -7 < x < -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(-7; -\frac{1}{3}\right).$$

Câu 8: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x trong $[-2017; 2017]$ thỏa mãn bất phương trình

$$|2x+1| < 3x ?$$

A. 2016.

B. 2017.

C. 4032.

D. 4034.

Lời giải

Chọn A

TH1. Với $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1| < 3x \Leftrightarrow 2x+1 < 3x \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$ suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

TH2. Với $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1| < 3x \Leftrightarrow -2x-1 < 3x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.

Kết hợp với điều kiện $x < -\frac{1}{2}$ suy ra $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (1; +\infty)$.

Câu 9: Bất phương trình $|3x-4| \geq x-3$ có nghiệm là

A. $\left[-\infty; \frac{7}{4}\right]$.

B. $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$.

C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |3x-4| \geq x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \geq x-3 \\ 3x-4 \leq -(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$.

Câu 10: Nghiệm của bất phương trình $\frac{|x+2|-x}{x} \leq 2$ là

A. $(0; 1]$.

B. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

D. $[0; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \neq 0$.

TH1. Với $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, ta có

$$\frac{|x+2|-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x+2-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-2; 0) \cup [1; +\infty)$.

TH2. Với $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$, ta có $\frac{|x+2|-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x-2-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{2x+2}{x} \leq 2$

$$\Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm là $S_2 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

Câu 11: Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $|x+2|+|-2x+1| \leq x+1$ là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có Xét bất phương trình $|x+2|+|-2x+1| \leq x+1$ (*).

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x+2	-	0	+	+
-2x+1	+		+	0
				-

TH1. Với $x < -2$, khi đó (*) $\Leftrightarrow (-x-2)+(-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow -2 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

TH2. Với $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x+2-2x+1 \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

TH3. Với $x \geq \frac{1}{2}$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x+2-(-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, ta được tập nghiệm $S_3 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \emptyset$.

Câu 12: Bất phương trình $|x+2|-|x-1| < x-\frac{3}{2}$ có tập nghiệm là

A. $(-2; +\infty)$.

B. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Xét bất phương trình $|x+2|-|x-1| \leq x - \frac{3}{2}$ (*).

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$

TH1. Với $x < -2$, khi đó (*) $\Leftrightarrow -x-2+x-1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

TH2. Với $-2 \leq x < 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x+2+x-1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $-2 \leq x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

TH3. Với $x \geq 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x+2-x+1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S_3 = \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $|x+1|-|x-2| \geq 3$ là

A. $[-1; 2]$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $|x+1|-|x-2| \geq 3$ (*).

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$

TH1. Với $x < -1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow -x-1+x-2 \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq 3$ (vô lý) suy ra $S_1 = \emptyset$.

TH2. Với $-1 \leq x < 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1+x-2 \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Kết hợp với điều kiện $-1 \leq x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

TH3. Với $x \geq 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1-x+2 \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq 3$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$, ta được tập nghiệm $S_3 = [2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [2; +\infty)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\left| \frac{-5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right|$ là

- A. một khoảng. B. hai khoảng. C. ba khoảng. D. toàn trục số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Bất phương trình $\left| \frac{-5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| - 2|x+2| < 0 \quad (*)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$

TH1. Với $x < -2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x+1+2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x < -5$.

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -5)$.

TH2. Với $-2 < x < 1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x+1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$.

Kết hợp với điều kiện $-2 < x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = (-1; 1)$.

TH3. Với $x > 1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x-1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta được tập nghiệm $S_3 = (1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 15: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

TH1. Với $x \geq 0$, ta có $\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2-3x}{x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2-3x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, ta được tập nghiệm $S_1 = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right]$.

TH2. Với $x < 0$, ta có $\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2+3x}{x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2+3x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $x < 0$, ta được tập nghiệm $S_2 = \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \right]$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right] \cup \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \right]$.

Vậy số nghiệm nguyên x cần tìm là 1 ($x = 1$).

BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax + by \leq c$ ($ax + by < c, ax + by \geq c; ax + by > c$)

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

II – BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$

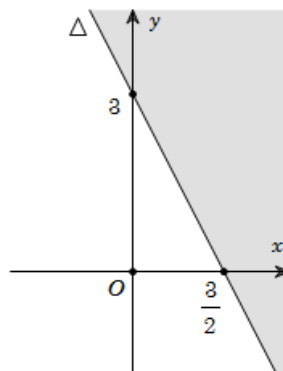
Chú ý:

Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$

Ví dụ. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 3$

Giải

Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x + y = 3$



Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$ ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2.0+0 < 3$ nên nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

III – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Giải.

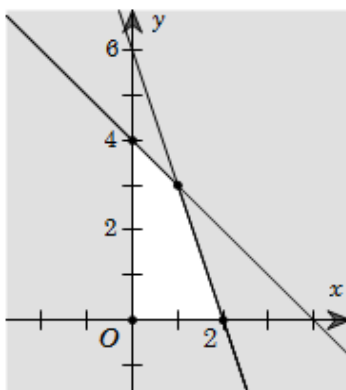
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : 3x + y = 6$$

$$d_2 : x + y = 4$$

$$d_3 : x = 0 \quad (Oy)$$

$$d_4 : y = 0 \quad (Ox)$$



Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1) (d_2) (d_3) (d_4) không chứa điểm M_0 . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.

IV – ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là Quy hoạch tuyến tính.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x - 5y + 3z \leq 0$. B. $3x^2 + 2x - 4 > 0$. C. $2x^2 + 5y > 3$. D. $2x + 3y < 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo định nghĩa bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 2. Cặp số $(1; -1)$ là nghiệm của bất phương trình

- A. $x + 4y < 1$. B. $x + y - 2 > 0$. C. $-x - y < 0$. D. $-x - 3y - 1 < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $1 + 4(-1) = -3 < 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x^2 + 3y > 0$ B. $x^2 + y^2 < 2$ C. $x + y^2 \geq 0$ D. $x + y \geq 0$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì $x + y \geq 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai.

Câu 2. Cho bất phương trình $2x + 3y - 6 \leq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.
B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.
C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.
D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d): 2x + 3y - 6 = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x; y) = (0; 0)$ là nghiệm của bất phương

trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d) .

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x + 2(y + 3) \geq 4(x + 1) - y + 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

- A. (3;0) B. (3;1) C. (2;1) D. (0;0)

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x + 2(y + 3) \geq 4(x + 1) - y + 3 \Leftrightarrow -x + 3y - 1 \geq 0$.

Vì $-2 + 3.1 - 1 > 0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ (2;1).

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

- A. (0;0) B. (-4;2) C. (-2;2) D. (-5;3)

Lời giải

Chọn A

Ta có $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3 \Leftrightarrow -2x + 4y - 8 < 0$.

Vì $-2.0 + 4.0 - 8 < 0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ (0;0).

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. (0;0) B. (1;1) C. (4;2) D. (1;-1)

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x) \Leftrightarrow x + 2y < 4$.

Vì $-4 + 2.2 < 4$ là mệnh đề sai nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình: $x - 4y + 5 > 0$

- A. (-5;0) B. (-2;1) C. (0;0) D. (1;-3)

Lời giải

Chọn A

Vì $-5 - 4.0 + 5 > 0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

- A. $-3x + 2y - 4 > 0$ B. $x + 3y < 0$ C. $3x - y > 0$ D. $2x - y + 4 > 0$

Lời giải

Chọn A

Vì $-3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 4 > 0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x + 2y - 4 > 0$.

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

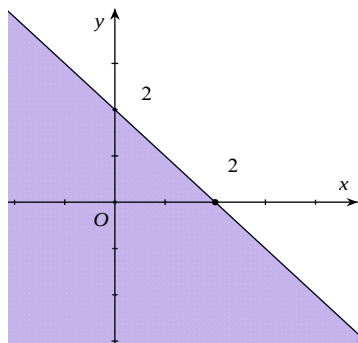
- A. $2x - 3y - 1 > 0$. B. $x - y < 0$. C. $4x > 3y$. D. $x - 3y + 7 < 0$.

Lời giải

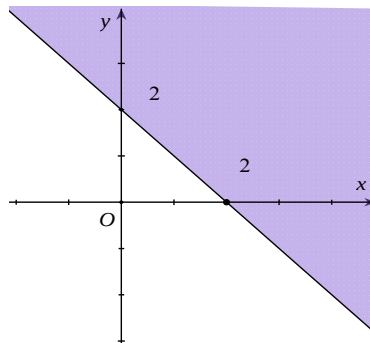
Chọn B

Vì $2 - 3 < 0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x - y < 0$.

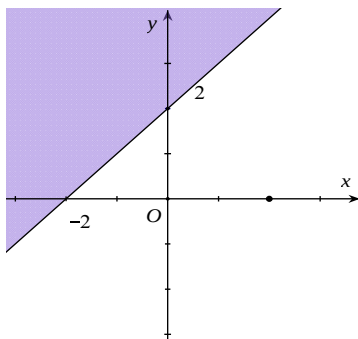
Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 2$ là phần **tô đậm** trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



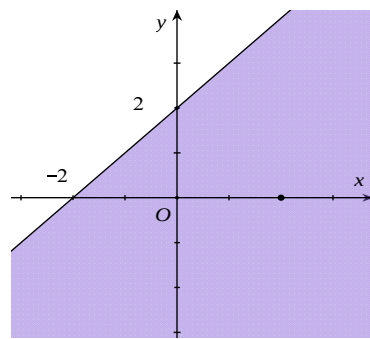
A.



B.



C.



D.

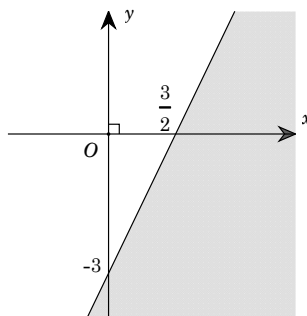
Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất

phương trình $x - y \leq 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 2$.

Câu 10. Phần **tô đậm** trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x - y < 3$

B. $2x - y > 3$

C. $x - 2y < 3$

D. $x - 2y > 3$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và $B(0; -3)$ nên có phương trình $2x - y = 3$.

Mặt khác, cặp số $(0; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x - y > 3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x - y > 3$.

Dạng 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0; 1)$

B. $N(-1; 1)$

C. $P(1; 3)$

D. $Q(-1; 0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0; 1) \Rightarrow \begin{cases} 0 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1; 1) \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot (-1) + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$: Đúng. **Chọn B.**

Câu 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;0)$

C. $N(0;-2)$

D. $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.0 + 0 + 5 > 0 \\ 0 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.1 + 0 + 5 > 0 \\ 1 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.}$$

$$\text{Với } N(0;-2) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.(-2) - 1 > 0 \\ 2.0 + (-2) + 5 > 0 \\ 0 + (-2) + 1 < 0 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn C.}$$

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(2;1)$

C. $N(1;1)$

D. $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2} + \frac{0}{3} - 1 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{3.0}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - 1 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \\ 2 + \frac{1}{2} - \frac{3.1}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn B.}$$

Câu 4. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;2)$

C. $N(2;1)$

D. $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 5. Điểm $M(0; -3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y > -3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0; -3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;1)$

C. $N(-1;1)$

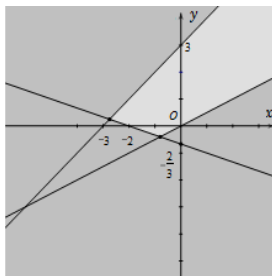
D. $P(-1;-1)$

Lời giải

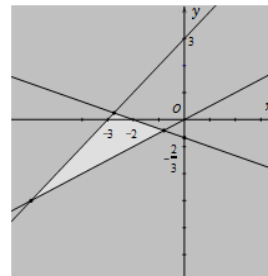
Chọn C

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

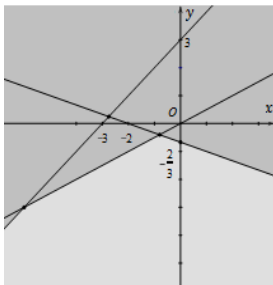
Câu 7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



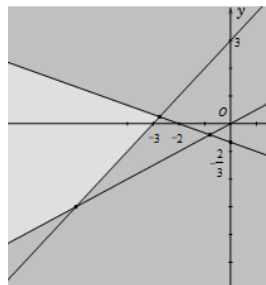
A.



B.



C.



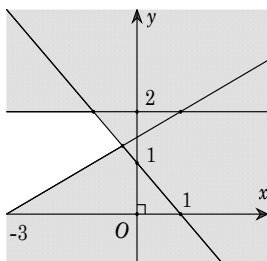
D.

Lời giải

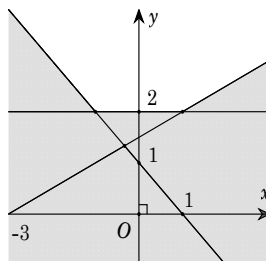
Chọn A

Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

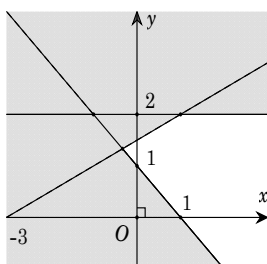
Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$$
 là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



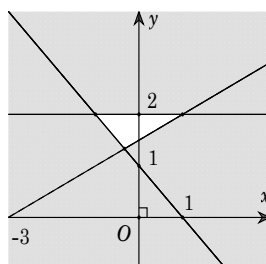
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 9. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?

Lời giải

Chọn B

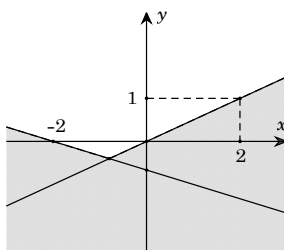
A. $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án **A.**

Chọn điểm $M(1;0)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 1 - 0 > 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 > 1 \end{cases}$: Đúng và miền nghiệm không chứa biên.

Câu 10. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \leq -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và

C. Chọn điểm

$M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0 - 2 \cdot 1 > 0 \\ 0 + 3 \cdot 1 < -2 \end{cases}$: Sai.

Dạng 3. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x, y) = ax + by$ với (x, y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.

Bước 2: Tính giá trị của F tương ứng với (x, y) là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

Bước 3: Kết luận:

- Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.

- Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

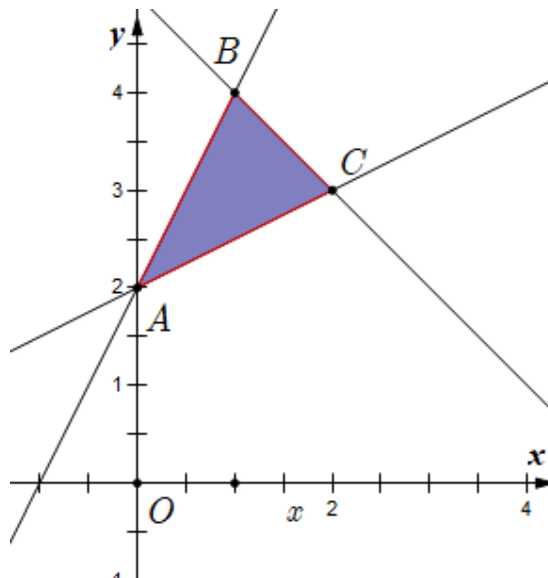
Ví dụ 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

- A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$. B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.
C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$. D. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A(0; 2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(1; 4)$ thì $F = 3$

Tại $C(2; 3)$ thì $F = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

Ví dụ 2 : Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x; y) = 4x + 3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$ là

A. $F_{\min} = 23$

B. $F_{\min} = 26$

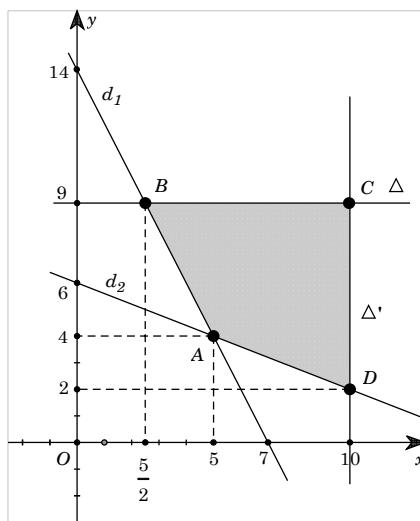
C. $F_{\min} = 32$

D. $F_{\min} = 67$

Lời giải**Chọn C**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng

$$d_1: 2x + y - 14 = 0, \quad d_2: 2x + 5y - 30 = 0, \quad \Delta: y = 9, \quad \Delta': x = 10.$$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(5;4) = 32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right) = 37 \\ F(10;9) = 67 \\ F(10;2) = 46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min} = 32.$$

Ví dụ 3: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

- A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. B. 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.
C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. D. 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải**Chọn C**

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x + 10y$ là số gam đường cần dùng;

$x + y$ là số lít nước cần dùng;

$x + 4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \quad (*)$$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P = 60x + 80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn $(*)$.

Ví dụ 4 : Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

- A. 30kg loại I và 40 kg loại II. B. 20 kg loại I và 40 kg loại II.
C. 30kg loại I và 20 kg loại II. D. 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x + 4y \leq 200$.

Tổng số giờ làm việc: $30x + 15y \leq 1200$.

Lợi nhuận tạo thành: $L = 40x + 30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases} \text{ sao cho } L = 40x + 30y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Ví dụ 5: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

- A. 32 triệu đồng. B. 35 triệu đồng. C. 14 triệu đồng. D. 30 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

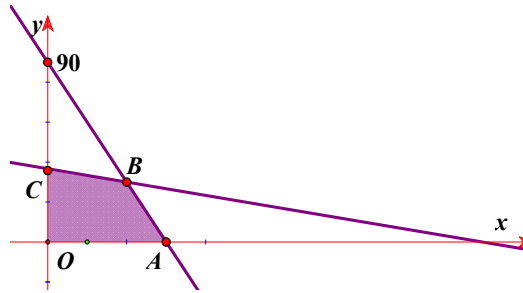
Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60; 0)$ thì $T = 30$ triệu đồng.

Tại $B(40; 30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện

$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

tại điểm M có tọa độ

là:

A. $(4; 1)$

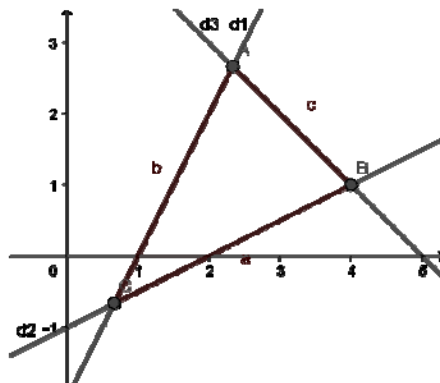
B. $\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

D. $(5; 0)$

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$$(d_1): y = 2x - 2$$

$$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$(d_3): y = 5 - x$$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

$$\text{Tọa độ các đỉnh: } A\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right); B(4; 1); C\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Ta có: } F(4; 1) = -3; F\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$$

Câu 2. Cho x, y thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = (x; y) = 40000x + 30000y$$

A. $P_{\max} = 2000000$

B. $P_{\max} = 2400000$

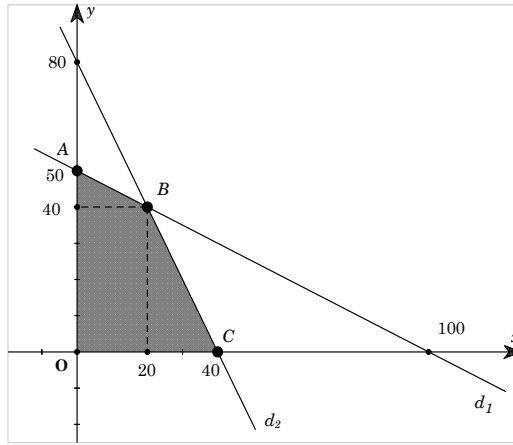
C. $P_{\max} = 1800000$

D. $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0$, $d_2: 2x + y - 80 = 0$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$$O(0;0), A(0;50), B(20;40), C(40;0).$$

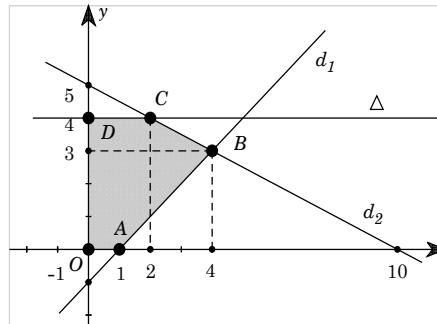
$$\text{Ta có } \begin{cases} P(0;0) = 0 \\ P(0;50) = 1500000 \\ P(20;40) = 2000000 \\ P(40;0) = 1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max} = 2000000.$$

- Câu 3.** Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. $F_{\max} = 6$ B. $F_{\max} = 8$ C. $F_{\max} = 10$ D. $F_{\max} = 12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1 : x - y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y - 10 = 0$, $\Delta : y = 4$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0), A(1;0), B(4;3), C(2;4), D(0;4)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(0;0) = 0 \\ F(1;0) = 1 \\ F(4;3) = 10 \longrightarrow F_{\max} = 10. \\ F(2;4) = 10 \\ F(0;4) = 8 \end{cases}$$

Câu 4. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

- A. 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B
- B. 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B
- C. 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B
- D. 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có:
 $400 \leq x + y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600, y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases} \quad \text{để } T(x, y) = 9x + 7,5y \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu 5. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B₁, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- ☐ Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B₁, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- ☐ Cách thứ hai cắt được 2 hộp B₁, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B₁ tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp.

Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

- A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
- B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.
- C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
- D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$$
 sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A cần 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B cần được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy II hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

- A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B
- B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B
- C. Sản xuất $\frac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\frac{49}{9}$ tấn sản phẩm B
- D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x + 6y \leq 36 \\ 2x + 3y \leq 23 \\ 3x + 2y \leq 27 \end{cases}$$
 để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

A. $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

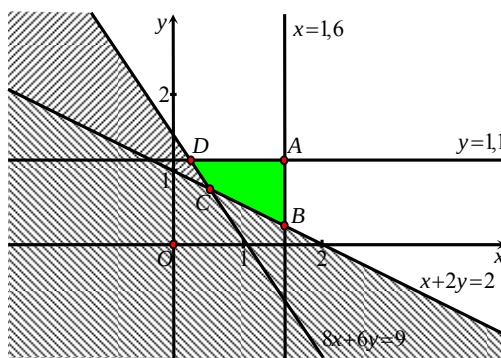
Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 sao cho

$T = 160.x + 110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.

BÀI 5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Người ta đã chứng minh được định lý về dấu tam thức bậc hai sau đây

Định lý

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , trừ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

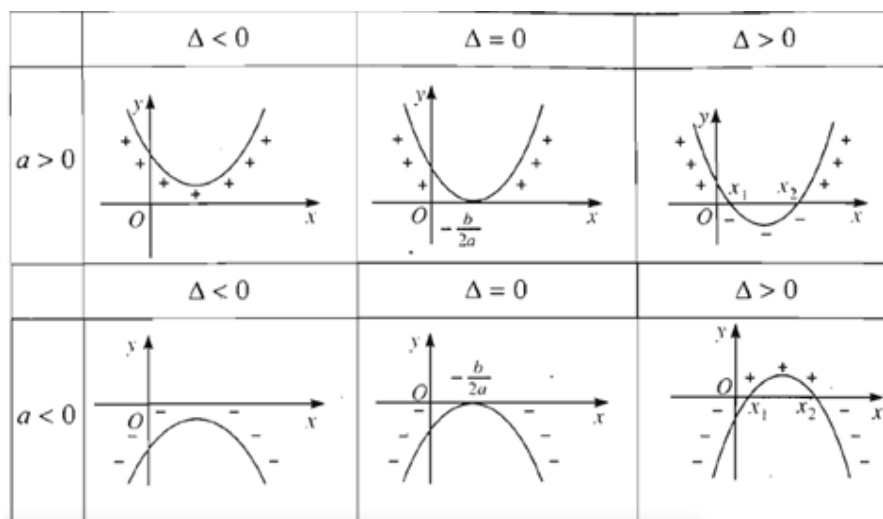
Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của $f(x)$.

Chú ý

Trong định lý trên, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$.

Minh họa hình học

Định lý về dấu của tam thức bậc hai có minh họa hình học sau



II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a > 0$).

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét dấu của tam thức bậc hai áp dụng vào giải bất phương trình bậc hai đơn giản

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x \in (-\sqrt{5}; 1)$.

B. $x \in (-\sqrt{5}; +\infty)$.

C. $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		1	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$.

Ví dụ 2: Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $x \in [1; 2]$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $x \in (1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 < 0$ là:

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

B. $\emptyset$.

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2 + x - 1 \leq 0$ là

A. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 6x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$.

Câu 2: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$.

Câu 3: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$.

Câu 4: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$.

Câu 5: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x)$ không đổi dấu. D. Tồn tại x để $f(x) = 0$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\Delta < 0$ và $a \neq 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A.** $x \in (0; +\infty)$. **B.** $x \in (-2; +\infty)$. **C.** $x \in \mathbb{R}$. **D.** $x \in (-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 1 - 2 \cdot 5 = -9 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{9}{2}$	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{9}{2}$. Mà x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 8: Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$:

- A.** Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. Âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$. **D.** Âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$1+2\sqrt{3}$	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} < x < 1 + 2\sqrt{3}$.

Câu 9: Tam thức bậc hai $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. Dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$.

C. Dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$.

D. Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < \sqrt{2}$.

Câu 10: Cho $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

B. $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 3]$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

D. $f(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Câu 11: Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau:

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta được

$$f(x) > 0 \text{ với } 2 < x < 3 \text{ và } f(x) < 0 \text{ với } x < 2 \text{ hoặc } x > 3.$$

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ là:

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$. B. $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$. C. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		5	$+\infty$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$ là:

A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. B. $[-1; 7]$. C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. D. $[-7; 1]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-x^2 + 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $-x^2 + 6x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7$.

Câu 14: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.

A. $S = 0$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		-

Dựa vào bảng xét dấu $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là:

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 < 0$ là

A. $[1; 4]$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$.

Câu 17: Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2 - x - 12 \leq 0$ là ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$. Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2 - x - 12 \leq 0$ là 4.

Câu 18: Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[8; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $[6; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Vì $\frac{13}{2} \in [6; +\infty)$ và $\frac{13}{2} \notin S$ nên $[6; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. **B.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$. **C.** $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$. **D.** $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

Phương trình $3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$3x^2 - 10x + 3$	+	0	-	+	+
$4x - 5$	-	-	0	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$ là

A. $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$. **B.** $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in [-1; +\infty)$. **D.** $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 5x + 4) \geq 0$.

Phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$ và $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$

$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+		+
$x - 2$	-		-		-	0	+
$(x - 2)(x^2 + 5x + 4)$	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x - 2)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải bất phương trình $x(x + 5) \leq 2(x^2 + 2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x(x + 5) \leq 2(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^2 + 5x \leq 2x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$

Xét phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 2: Biểu thức $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$ âm khi

A. $x \in (1; 2)$.

B. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.

C. $x \geq 4$.

D. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = (4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$

Phương trình $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có $x^2 + 5x + 9 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 9 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	1	2	$+\infty$	
$4-x^2$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
x^2+5x+9	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -2 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty).$$

Dạng 3. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7).$

B. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty).$

C. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty).$

D. $S = \left(\frac{3}{4}; 7\right) \cup (7; +\infty).$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(4x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases}$

Phương trình $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ và $4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	4	7	$+\infty$

$x-7$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$4x^2-19x+12$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ 2x-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$		
$2x+9$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
x^2-4	$+$	$ $	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x=1$) thỏa mãn yêu cầu.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Biểu thức $f(x) = \frac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\frac{3}{11}; +\infty\right)$.

B. $x \in \left(-\frac{3}{11}; 5\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.

D. $x \in \left(-5; -\frac{3}{11}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x^2 + 5x - 7 = -(x^2 - 5x + 7) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, bất phương trình $f(x) > 0 \Leftrightarrow 11x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{11} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.

Câu 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$			
$-x^2+4x-3$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$x^2-3x-10$	$+$	$\parallel$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Câu 3: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bất phương trình } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \quad (*).$$

Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ và } x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+		+		+
$x^2 + 5x + 6$		+		-		+
$f(x)$		+		-		+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup [-1; 1]$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x = \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm.

Dạng 4. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$.

$$\text{Phương trình } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$2x^2-5x+2$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3-x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4-3x-x^2 > 0$.

Phương trình $4-3x-x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$		
$4-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $4-3x-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; 1)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2+x-6} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+x-6 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$ và $x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	2	$+\infty$			
x^2+x-6		$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+4$		$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\begin{cases} x^2+x-6 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5-4x-x^2}$ xác định là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5 - 4x - x^2 \geq 0$.

$$\text{Phương trình } 5 - 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$		
$5-4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $5 - 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x = 1$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (-\infty; 1)$.

C. $D = [-5; 1]$.

D. $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0$.

Phương trình

$$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	$\sqrt{5}$	$+\infty$		
$(2-\sqrt{5})x^2+(15-7\sqrt{5})x+25-10\sqrt{5}$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; \sqrt{5}]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}.$

B. $D = \left(\frac{1}{3}; 1\right).$

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty).$

D. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2 - 4x + 1 > 0.$

Phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$3x^2-4x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty).$

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{5-2x}}.$

A. $D = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$

B. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right].$

C. $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$

D. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right).$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases}.$

Phương trình $x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ và $5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$	$+$	$ $	$+$
$5 - 2x$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.

A. $D = [4; +\infty)$.

B. $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

C. $D = (-\infty; -5)$.

D. $D = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15} \geq 0$.

Phương trình $x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$ và $-x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5		-3		3		4		$+\infty$
x^2-x-12		+		+	0	-		-	0	+
$-x^2-2x+15$		-		+		+		-		-
$f(x)$		-		+	0	-		+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$.

A. $D = [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $D = (-\infty; -4] \cup \left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \left[-4; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1} \geq 0$.

Phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$ và $2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
x^2+5x+4		+	0	-	0	+		+
$2x^2+3x+1$		+		+		-		+
$f(x)$		+	0	-		-		+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2}}$.

A. $D = (-5; 4]$.

B. $D = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2} \geq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 8 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \geq 0.$$

Phương trình $x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$		
$x^2 + x - 20$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 + x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai Vô nghiệm – có nghiệm – có hai nghiệm phân biệt

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > 1$. B. $-3 < m < 1$. C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 0$. B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$ (*).

TH1. Với $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Suy ra với $m = 2$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Do đó $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. B. $-5 \leq m \leq -1$. C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 + 2m + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-5=0 \Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$.

Do đó, với $\begin{cases} 5 \neq m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \neq 1$ B. $2 < m < 6$. C. $-1 < m < 6$. D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra với $m = 1$ không thỏa mãn ycbt. Do đó

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m - 2)^2 - 4(m - 1)(3 - 2m) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases} \text{ suy ra } 17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hệ bất phương trình $(*) \Leftrightarrow m \neq 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 = 0$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $-\frac{3}{5} < m < 3$. D. $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ $(*)$.

TH1. Với $m = 0$, khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4 = 0$ (vô lý).

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m - 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai TH, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ (*).

TH1. Với $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

- Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).
- Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}.$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét $2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m + 2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x-1+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > 1$.

C. $-\frac{3}{4} < m < 1$.

D. $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0, \text{ có } \Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases} \text{ suy ra } m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

Câu 8: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân

biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right]$.

C. $m \in \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m + 3)^2 + 4(m - 3)(m + 1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m - 1)(5m + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Dạng 6. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m > 6$.

B. $m < 6$.

C. $6 > m > 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m + 3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 < m < 6$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$.

D. $-3 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \frac{2m}{m-2} > 0 \\ \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$. B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$. C. $m > 1$. D. $1 < m < 6$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ \frac{5}{9} < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 4: Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) \geq 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Câu 5: Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. B. $-1 < m < \frac{5}{2}$. C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow 2.(2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}.$$

Câu 6: Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2).(-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Câu 7: Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

- A. $0 < m < 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Với } m \in (0; 2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{ theo bài ra, ta có } |x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m) > 0 \Leftrightarrow 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

- A. $1 < m < 2$. B. $1 < m < 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét phương trình } (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0 \quad (*), \text{ có } a+b+c=0.$$

$$\text{Suy ra phương trình } (*) \Leftrightarrow (x-1)[(m-1)x - m + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (m-1)x = m-3 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{m-3}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình (*) suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1} \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra, ta có } x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \frac{3m-7}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Kết hợp với (I), ta được $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

- A.** $m < 2 \vee m > 6.$ **B.** $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6.$ **C.** $2 < m < 6.$ **D.** $-2 < m < 6.$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (*), có $\Delta' = m + 2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1; 2\} \\ m > -2 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (*) suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra, ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với (I), ta được $\begin{cases} m > 6 \\ m \in (-2; -1) \cup (-1; 2) \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

- A.** $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty).$ **B.** $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right).$
C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1).$ **D.** $m \in (7; +\infty).$

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1. \end{cases} (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\frac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1. \end{aligned}$$

Dạng 7. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình vô nghiệm – có nghiệm – nghiệm đúng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$ dương với mọi x khi:

A. $-1 < m < \frac{11}{4}$.

B. $-\frac{11}{4} < m < 1$.

C. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{11}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có $a = 3 > 0$. Do đó $f(x) > 0, \forall x$ khi

$$\Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+4) = 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{11}{4}.$$

Câu 2: Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$ không dương với mọi x khi:

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = 6$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) \leq 0, \forall x$ (không dương) khi

$$\Delta = (m-2)^2 + 8(-m+4) = m^2 - 12m + 36 \leq 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Câu 3: Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$ âm với mọi x khi:

- A. $m < -14$ hoặc $m > 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$. C. $-2 < m < 14$. D. $-14 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) < 0, \forall x$ khi

$$\Delta = (m+2)^2 + 8(m-4) = m^2 + 12m - 28 \leq 0 \Leftrightarrow -14 < m < 2.$$

Câu 4: Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi x khi:

- A. $m > 28$. B. $0 \leq m \leq 28$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 28$.

Lời giải

Chọn B

Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x$ (không âm) khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m^2 - 28m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 28.$$

Câu 5: Bất phương trình $x^2 - mx - m \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $-4 < m < 0$. C. $m < -4$ hoặc $m > 0$. D. $-4 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x) = x^2 - mx - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên bất phương trình $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta = m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m-1)x + m < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x) = -x^2 + (2m-1)x + m$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta = (2m-1)^2 + 4m = 4m^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Câu 7: Bất phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. C. $m \in [-2; 2]$. D. $m \in (-2; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ khi và chỉ khi $f(x) > 0$ nghiệm đúng với

mọi x .

Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + m+2$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x khi $\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2) = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 8: Tam thức $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$ dương với mọi x khi:

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > \frac{1}{2}$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 2 > 0, \forall x$ nên $f(x)$ dương với mọi x khi $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Câu 9: Tam thức $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$ không dương với mọi x khi:

- A. $m \leq 4$. B. $m \geq 4$. C. $m < 4$. D. $m > 4$.

Lời giải

Chọn A

- Với $m = 4$, ta có $f(x) = -1 < 0$: đúng với mọi x .
- Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tam thức $f(x) = mx^2 - mx + m+3$ âm với mọi x khi:

- A. $m \in (-\infty; -4]$. B. $m \in (-\infty; -4)$.
C. $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

- Với $m = 0$ thay vào ta được $f(x) = 3 < 0$ (vô lý) suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4$$

Câu 11: Tam thức $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$ không âm với mọi x khi:

- A. $m \geq -2$. B. $m \leq -2$. C. $m > -2$. D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn A

- Với $m = -2$, tam thức bậc hai trở thành $1 > 0$: đúng với mọi x .
- Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

- A.** $m > -\frac{1}{3}$. **B.** $m \geq -\frac{1}{3}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > 15$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$. (*)

TH1. Với $3m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) trở thành $4-\frac{1}{3} \geq 0$ (luôn đúng).

TH2. Với $3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m^2 + 46m + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A.** $\frac{1}{3} \leq m < 2$. **B.** $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$. **C.** $m \geq \frac{1}{3}$. **D.** $m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$

- Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành $-5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$: không nghiệm đúng với mọi x .

- Khi $m = 2$ thì bất phương trình trở thành $-1 \leq 0$: nghiệm đúng với mọi x .

• Khi $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < 2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 1 < 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

• Xét $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = -2$, bất phương trình trở thành $-4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m = 2$, bất phương trình trở thành $1 < 0$: vô nghiệm. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.

• Xét $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \Delta = (m - 2)^2 - 4(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -3m^2 - 4m + 20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m > 2 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{(m + 4)x^2 - (m - 4)x - 2m + 1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \leq 0$.

B. $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$.

C. $m \geq -\frac{20}{9}$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) \text{ xác định với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

TH1: $m = -4$ thì $f(x) = 8x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{8} \rightarrow m = -4$ không thỏa.

TH2: $m \neq -4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{20}{9} \leq m \leq 0.$

Câu 16: Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ khi

- A.** $-1 \leq m \leq 3.$ **B.** $-1 < m < 3.$ **C.** $-1 < m \leq 3.$ **D.** $m > -1.$

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$

- $m = -1$ thì $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: thỏa mãn.
- $m \neq -1$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 3.$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$ luôn dương.

- A.** $m \geq -\frac{5}{8}.$ **B.** $m < -\frac{5}{8}.$ **C.** $m < \frac{5}{8}.$ **D.** $m \geq \frac{5}{8}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Do đó $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}.$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

- A.** $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$ **C.** $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$ **D.** $m \in [0; 2].$

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m.$

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' = 0 \longrightarrow f(x) = 0$ tại $x = \frac{m-2}{2}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình có nghiệm.

• $\Delta' > 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Vậy cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \geq 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

• $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không có m thỏa mãn.

• $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\frac{b}{2a} = -1 \\ m = 2 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất

phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này có $m = 0$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn.

• $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [x_1; x_2]$.

Do đó trường hợp này có $m < 0$ hoặc $m > 2$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ thỏa mãn.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$ và $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m + 1$.

• $m = 0 \longrightarrow$ bất phương trình trở thành $2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

• $m > 0$, ta biện luận các trường hợp như câu. Do đó $m > 0$ thỏa mãn.

• $m < 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4} \longrightarrow f(x) = 0$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$.

Do đó $-\frac{1}{4} < m < 0$ thỏa mãn. Hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{1}{4}$.

Dạng 8. Hệ bất phương trình bậc hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-4x+3 < 0 \end{cases}$ là:

A. $S = [1; 2)$.

B. $S = [1; 3)$.

C. $S = (1; 2]$.

D. $S = [2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $2-x \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2-4x+3 < 0$ là $S_2 = (1; 3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2]$.

Câu 2: Tìm x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ x^2-11x+28 \geq 0 \end{cases}$.

A. $x > 3$.

B. $3 < x \leq 7$.

C. $4 \leq x \leq 7$.

D. $3 < x \leq 4$.

Lời giải

Chọn D

Tập nghiệm của $x^2-2x-3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2-11x+28 \geq 0$ là $S_2 = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; +\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x^2-6x+8 > 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $S = (1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 6x + 8 > 0$ là $S_2 = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 4: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ là:

A. $S = 1$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = [1; 2]$.

D. $S = [-1; 1]$.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ là $S_1 = [1; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 1 \leq 0$ là $S_2 = [-1; 1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \{1\}$.

Câu 5: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$.

A. $x \geq 1$.

B. $x \leq \frac{1}{3}$.

C. $x \in \emptyset$.

D. $x \leq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $3x^2 - 4x + 1 > 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ là $S_2 = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $-2x^2 - 5x + 4 < 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2 - 3x + 10 > 0$ là $S_2 = (-5; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left(-5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4; 1\}$.

Câu 7: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1 \leq x < 2$.

B. $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $-1 \leq x \leq 1$.

C. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x \leq 3$.

D. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập nghiệm của $x^2 - 9 < 0$ là $S_1 = (-3; 3)$.

Tập nghiệm của $(x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0$ là $S_2 = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$.

Câu 8: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x - 1| < 3 \end{cases}$ là:

A. $(1; 2)$.

B. $[1; 2]$.

C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $x^2 - 7x + 6 < 0$ là $S_1 = (1; 6)$.

Tập nghiệm của $|2x - 1| < 3$ là $S_2 = (-1; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2)$.

Câu 9: Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 < 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án B. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 > 0$ là $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Đáp án **C**. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 + x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án **D**. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-1; 3)$.

Câu 10: Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$
 là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x - 10 \leq 0$ là $S_2 = \left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2 - 5x + 3 > 0$ là $S_3 = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 2\}$.

Câu 11: Hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$$
 vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -\frac{8}{3}$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \geq -\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1; \frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 12: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0(1) \\ x - m > 0(2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra $S_1 = [-1; 1]$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > m$. Suy ra $S_2 = (m; +\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 13: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0(1) \\ x < m-1(2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 5$.

D. $m > 5$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Suy ra $S_1 = (-3; 4)$.

Bất phương trình có $S_2 = (-\infty; m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m-1 > -3 \Leftrightarrow m > -2$.

Câu 14: Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $-3 < m < 6$.

B. $-3 \leq m \leq 6$.

C. $m < -3$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$-9(x^2 - x + 1) < 3x^2 + mx - 6 < 6(x^2 - x + 1) \quad (\text{do } x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 - (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow (1)$ và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 144 < 0 \\ (m+6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Câu 15: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 2 + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq 0 \\ \frac{13x^2 - 26x + 14 - m}{2x^2 - 3x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2 + m \geq 0(1) \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0(2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow (1)$ và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4.3(2+m) \leq 0 \\ 26^2 - 4.13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-5}{3} \\ m < 1 \end{cases}$$

Câu 16: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

Bất phương trình $x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 \leq m^2 - 1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2 - 1$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 - 1} \leq x - m \leq \sqrt{m^2 - 1} \text{ (điều kiện: } m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 1} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Suy ra } S_2 = [m - \sqrt{m^2 - 1}; m + \sqrt{m^2 - 1}].$$

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 - 1} > 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 1} > 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ m^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

B. $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$.

Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = [1 - \sqrt{m}; 1 + \sqrt{m}]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m + 1]$.

$$\text{Hệ có nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 + \sqrt{m} \\ 1 - \sqrt{m} \leq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Câu 18: Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0(1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0(2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

B. $m \geq \frac{3}{2}$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Suy ra $S_1 = [-1; 4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm.

Với $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m-1}; +\infty \right)$. Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Với $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m-1} \right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{3}{2}$.

Câu 19: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0(1) \\ mx \geq 3m + 1(2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > -\frac{1}{11}$.

D. $m > \frac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -8 \leq x \leq -2$. Suy ra $S_1 = [-8; -2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m = 0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm.

Với $m > 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m}; +\infty \right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m < 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{3m+1}{m} \right]$. Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$$\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$.

Câu 20: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

A. $0 \leq a \leq 2$.

B. $0 \leq a \leq 4$.

C. $2 \leq a \leq 4$.

D. $0 \leq a \leq 8$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$. Suy ra $S_1 = [1; 5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [a+1-\sqrt{2a}; a+1+\sqrt{2a}]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \geq 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$.

CHƯƠNG V. THỐNG KÊ

BÀI 1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ, TẦN SUẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ÔN TẬP

1. Số liệu thống kê

- **Thống kê** là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lý số liệu.
- **Dấu hiệu (điều tra)** là một vấn đề hay hiện tượng nào đó mà người điều tra quan tâm tìm hiểu. Mỗi đối tượng điều tra gọi là một **đơn vị điều tra**. Mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là giá trị của dấu hiệu trên đơn vị điều tra đó.
- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một **mẫu**. Số phần tử của một mẫu được gọi là **kích thước mẫu**. Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một **mẫu số liệu** (mỗi giá trị như thế còn gọi là một số liệu của mẫu).
- Nếu thực hiện điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là điều tra toàn bộ. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là điều tra mẫu.

2. Tần số

Tần số của giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong mẫu số liệu.

II. Tần suất

Tần suất f_i của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N hay $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

Bảng phân bố tần số - tần suất.

- **Bảng phân bố tần số** (gọi tắt là **bảng tần số**) được trình bày như sau:

Bảng ngang

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	..	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	..	n_m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Bảng dọc

Giá trị (x)	Tần số (n)
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3
..	
x_m	n_m

Cộng	$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Trên hàng tần số, người ta dành một ô để ghi kích thước mẫu N hàng tổng các tần số (tức N

$$= \sum_{i=1}^m n_i).$$

- **Bảng phân bố tần suất** (gọi tắt là *bảng tần suất*) được trình bày như sau:

Bảng ngang

Giá trị (x)	x ₁	x ₂	x ₃	..	x _m	
Tần suất (%)	f ₁	f ₂	f ₃	..	f _m	100%

Bảng dọc

Giá trị (x)	Tần suất (n)
x ₁	f ₁
x ₂	f ₂
x ₃	f ₃
..	
x _m	f _m
Cộng	100%

- **Bảng phân bố tần số - tần suất** (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất*).

Bảng dọc

Giá trị (x)	x ₁	x ₂	x ₃	..	x _m	
Tần số (n)	n ₁	n ₂	n ₃	..	x _m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$
Tần suất %	f ₁	f ₂	f ₃	..	f _m	

Bảng dọc

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (n)
x ₁	n ₁	f ₁
x ₂	n ₂	f ₂
x ₃	n ₃	f ₃
..	..	..
x _m	n _m	f _m
Cộng	$N = \sum_{i=1}^m n_i$	100%

III. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Nếu kích thước mẫu số liệu khá lớn, thì người ta thường chia số liệu thành nhiều lớp dưới dạng $[a; b]$ hay $[a; b)$ (thường có độ dài các lớp bằng nhau). Khi đó tần số của lớp $[a; b]$ là số giá trị

$x_i \in [a; b]$ (hay $x_i \in [a; b)$) xuất hiện trong lớp đó. Tần suất của lớp $[a; b]$ là $f = \frac{n}{N}$ trong đó n là tần số của lớp $[a; b]$ và N là kích thước mẫu.

- Bảng phân bố tần suất ghép lớp được xác định tương tự như trên.

- Giá trị đại diện của lớp $[a; b]$ là $c = \frac{a + b}{2}$

Bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

Lớp giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (n)
$[x_1, x_2)$	n_1	f_1
$[x_2, x_3)$	n_2	f_2
$[x_3, x_4)$	n_3	f_3
..	..	..
$[x_k, x_m]$	n_m	f_m
Cộng	$N = \sum_{i=1}^m n_i$	100%

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Để điều tra số con trong mỗi gia đình của một chung cư gồm 100 gia đình, người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 1 và thu được mẫu số liệu sau đây.

3 2 4 1 3 5 1 1 2 3 1 2 1 3 4 1 1 2 3 5

Dấu hiệu ở đây là gì?

A. Số gia đình ở tầng 1.

B. Số người trong mỗi gia đình.

C. Số tầng ở trong khu chung cư.

D. Số con trong mỗi gia đình.

Lời giải

Chọn D.

Dấu hiệu là: Số con trong mỗi gia đình.

Câu 2: Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các học sinh lớp 10A cho ở bảng dưới đây.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	2	5	8	6	10	7	2

Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

A. 40.

B. 39.

C. 41.

D. Không tính được.

Lời giải

Chọn C.

Số học sinh lớp 10A là: $1 + 2 + 5 + 8 + 6 + 10 + 7 + 2 = 41$ (học sinh)

Câu 3: Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

A. 10.

B. 20.

C. 200.

D. 300.

Lời giải

Chọn B

Ta có 20 số liệu thống kê nên ta có kích thước mẫu là 20.

Câu 4: Điểm thi học kì I của lớp 10A được ghi lại trong bảng sau.

8	6,5	7	5	5,5	8	4	5	7
8	4,5	10	7	8	6	9	6	8
6	6	2,5	8	8	7	4	10	6
9	6,5	9	7,5	7	6	6	3	6
6	9	5,5	7	8	6	5	6	4

Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu trong bảng trên là.

A. 14.

B. 13.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào bảng ta thấy có 13 giá trị khác nhau.

Câu 5: Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng phân bố tần số ghép lớp như sau.

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Tần số
1	[10;20)	8
2	[20;30)	18
3	[30;40)	24
4	[40;50)	10
	Cộng	60

Hỏi số lá có chiều dài từ 30cm đến 50cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 50%.

B. 56%.

C. 56,7%.

D. 57%.

Lời giải

Chọn C

Ta có tần suất của lớp [30;40) là $\frac{24 \times 100}{60} = 40$.

Tần suất của lớp [40;50) là $\frac{10 \times 100}{60} \approx 16,7$.

Vậy số lá có chiều dài từ 30cm đến 50cm chiếm $40\% + 16,7\% = 56,7\%$.

Câu 6: Thống kê điểm môn Toán trong một kì thi của 500 em học sinh ở một trường phổ thông thấy số bài được điểm 9 chiếm tỉ lệ 4,0%. Hỏi tần số của giá trị $x_i = 9$ là bao nhiêu?

A. 10.

B. 20.

C. 30.

D. 40.

Lời giải

Chọn B

Ta có tần số của giá trị $x_i = 9$ là $n_i = \frac{4 \times 500}{100} = 20$.

Câu 7: Thống kê về điểm thi môn Toán trong một kì thi của 450 em học sinh trong một kì thi ở một trường phổ thông. Người ta thấy có 99 bài được điểm 7. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 7$ là bao nhiêu?

A. 7%.

B. 22%.

C. 45%.

D. 50%.

Lời giải

Chọn B

Ta có tần suất của giá trị $x_i = 7$ là $f_i = \frac{99 \times 100\%}{450} = 22\%$

Câu 8: Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường được thống kê như bảng sau.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70;80)	3
[80;90)	6
[90;100)	12
[100;110)	6
[110;120)	3
Cộng	30

Tần suất ghép lớp của lớp [100;110) là.

- A. 20%. B. 40%. C. 60%. D. 80%.

Lời giải

Chọn A

Ta có tần suất ghép lớp của lớp [100;110) là $\frac{6 \times 100\%}{30} = 20\%$.

Câu 9: Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thử được thống kê theo bảng sau. Hãy điền số thích hợp vào dấu ô chứa dấu (*).

Tuổi thọ (giờ)	Tần số	Tần suất (%)
1150	13	10
1160	6	20
1170	*	40
1180	6	20
1190	3	10
Cộng	30	100%

- A. 3. B. 6. C. 9. D. 12.

Lời giải

Chọn D

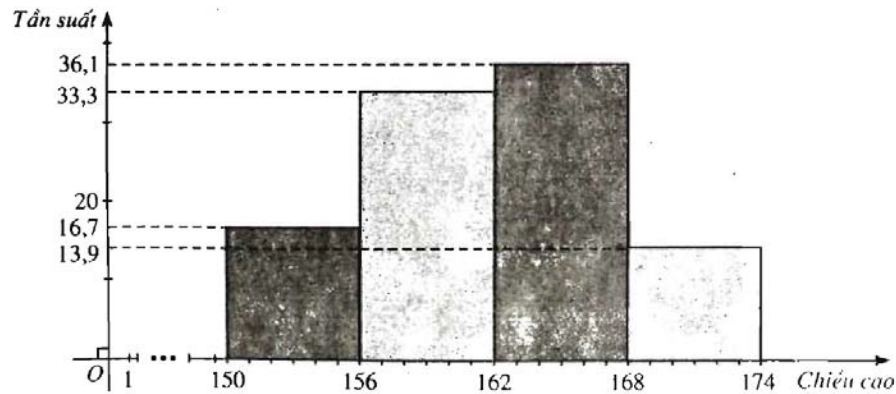
Ta có tần số của giá trị 1170 là $\frac{30 \times 40\%}{100\%} = 12$.

BÀI 2. BIỂU ĐỒ

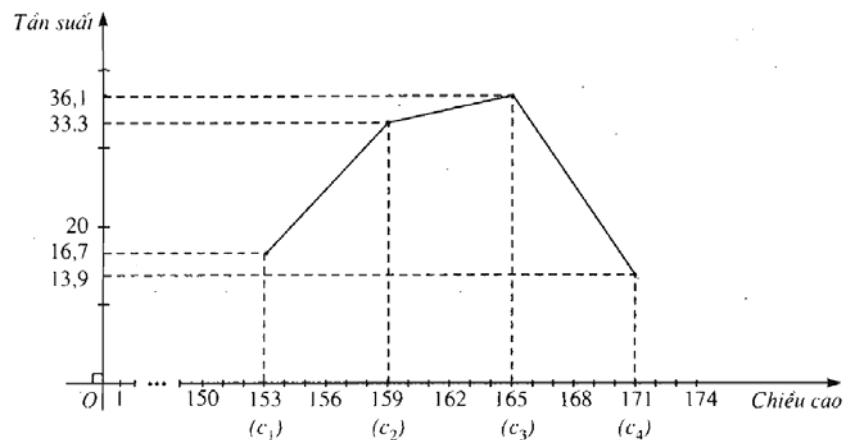
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT HÌNH CỘT VÀ ĐƯỜNG GẤP KHÚC TẦN SUẤT

1. Biểu đồ tần suất hình cột



2. Đường gấp khúc tần suất



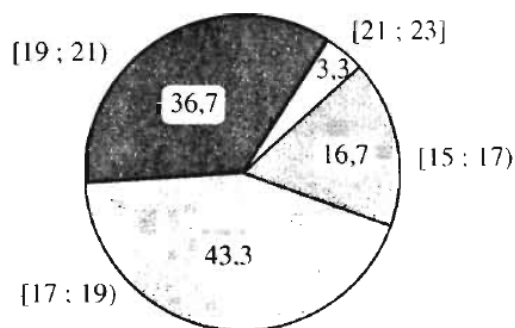
II. BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến 1990 (30 năm).

Lớp nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	Tần suất (%)
[15 ; 17)	16,7
[17 ; 19)	43,3
[19 ; 21)	36,7
[21 ; 23]	3,3
Cộng	100 (%)

Bảng 6

Bảng phân bố tần số tần suất ghép lớp có thể miêu tả bằng biểu đồ hình quạt



Hình 36 b)

Hình 36b miêu tả bảng 6.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số vé không bán được trong 40 buổi chiếu phim:

Lớp	[0;5);	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	Cộng
Tần số	3	4	2	20	5	6	40

Ta vẽ biểu đồ tần suất hình cột với 6 cột hình chữ nhật, các đáy tương ứng là [0;5);[5;10);[10;15);[15;20);[20;25);[25;30). Mỗi lớp trên trục Ox dài 5cm, 1% trên trục Oy dài 1cm. Hỏi cột cao nhất có diện tích là:

A. 25

B. 50

C. 62,5

D. 250

Lời giải

Chọn D

Cột cao nhất là cột có đáy [15;20), có tần suất là 50% $\Rightarrow$ diện tích cột có đáy [15;20) là $50.5=250$

Câu 2: Với mỗi tỉnh người ta ghi lại số phần trăm những trẻ mới sinh có khối lượng dưới 2500g. Sau đây là kết quả khảo sát ở 43 tỉnh trong một năm (đơn vị %)

5,1	5,2	5,2	5,8	6,4	7,3	6,5	6,9	6,6
6,5	6,8	5,2	5,1	6,0	4,6	6,9	7,4	7,7
6,4	7,4	6,9	5,4	7,0	7,9	6,8	8,1	7,6
8,0	8,7	5,9	5,2	6,8	7,7	7,1	6,2	5,4

7,6	7,0	7,1	7,4	8,6	6,7	7,9		

Ta vẽ biểu đồ tần số hình cột với 5 cột hình chữ nhật, các đáy tương ứng là [4,5;5,5);[5,5;6,5);[6,5;7,5);[7,5;8,5);[8,5;9,5). Hỏi cột nào có chiều cao lớn nhất

- A.** [4,5;5,5) **B.** [5,5;6,5) **C.** [6,5;7,5) **D.** [7,5;8,5)

Lời giải

Chọn C

Từ dãy số liệu ta có bảng phân bố tần số -tần suất ghép lớp như sau:

Lớp	[4,5;5,5)	[5,5;6,5)	[6,5;7,5)	[7,5;8,5)	[8,5;9,5)	Cộng
Tần số	9	6	17	8	3	43
Tần suất (%)	20,93	13,95	39,53	18,60	6,98	100 (%)

Nhìn vào bảng ta thấy hình chữ nhật đáy [6,5;7,5) có chiều cao 17 là lớn nhất

Câu 3: Chọn 36 học sinh nam của một trường THPT và đo chiều cao của họ ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị centimet):

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164
164	164	164	165	165	165	165	165	166	166
166	166	167	167	168	168	168	168	169	169
170	171	171	172	172	174				

Ta vẽ biểu đồ hình quạt với 5 lớp: [159,5;162,5); [162,5;165,5); [165,5;168,5); [168,5;171,5); [171,5;174,5)

Hình quạt nào có diện tích lớn nhất?

- A.** [159,5;162,5) **B.** [162,5;165,5) **C.** [165,5;168,5) **D.** [168,5;171,5)

Lời giải

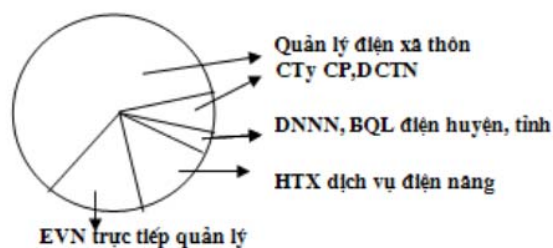
Chọn B

Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp như sau

Lớp	Tần số
[159,5;162,5)	6
[162,5;165,5)	12
[165,5;168,5)	10
[168,5;171,5)	5
[171,5;174,5)	3
Cộng	36

Từ đó ta thấy lớp [162,5;165,5) có tần số 12 là cao nhất, nên có diện tích lớn nhất

Câu 4: Cơ cấu quản lý kinh doanh điện nông thôn thể hiện qua biểu đồ hình quạt như hình vẽ.



Cơ cấu quản lý điện nào lớn nhất?

A. Quản lý điện xã thôn.

B. EVN Trực tiếp quản lý

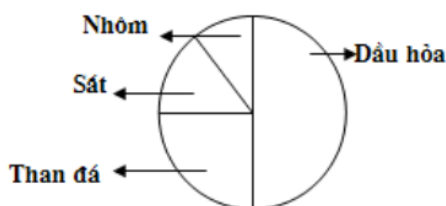
B. HTX dịch vụ điện năng

D. DNNN, BQL điện huyện, tỉnh

Lời giải

Chọn A

Câu 5: Biểu đồ hình quạt của thống kê giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu hỏa là 800 triệu USD. Hỏi giá trị xuất khẩu của than đá là bao nhiêu triệu USD



A. 100

B. 200

C. 250

D. 400

Lời giải

Chọn D

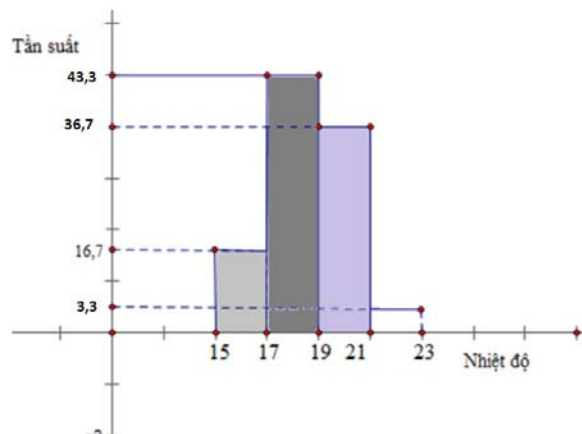
Dựa vào biểu đồ ta thấy dầu hỏa chiếm 50%. Vậy tổng giá trị xuất khẩu của tất cả 4 mặt hàng là:

$$800:50\%=1600 \text{ (triệu USD)}$$

Dựa vào biểu đồ, ta thấy than đá chiếm 25%. Vậy giá trị xuất khẩu về than đá của nước ta là:

$$1600.25\%=400 \text{ (triệu USD)}$$

Câu 6: Cho biểu tần suất hình cột của thống kê nhiệt độ thành phố Vinh từ năm 1961 đến 1990 (30 năm) như hình vẽ. Hỏi Lớp nhiệt độ $[17;19)$ chiếm bao nhiêu %?



A. 16,7 %

B. 43,3%

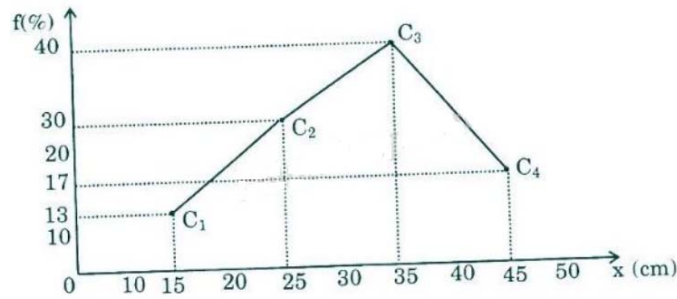
C. 36,7%

D. 3,3%

Lời giải

Chọn B

Câu 7: Cho biểu đồ đường gấp khúc tần suất của thống kê chiều dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành như hình vẽ. Hỏi tần suất phần trăm của lớp $[20;30)$ là?



A. 13,3%

B. 30%

C. 40%

D. 16,7%

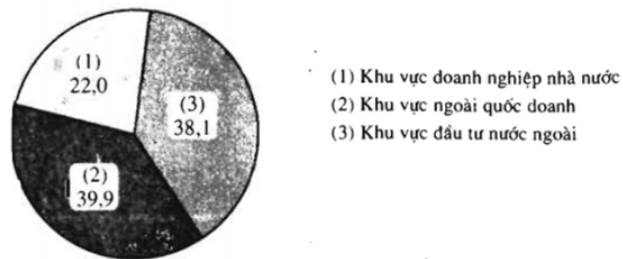
Lời giải

Chọn B

Giá trị đại diện của lớp $[20;30)$ là 25, nhìn vào biểu đồ ta thấy lớp $[20;30)$ chiếm 30%

Câu 8: Cho biểu đồ hình quạt về cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 1999, phân theo thành phần

Kinh tế. Hỏi khu vực doanh nghiệp nhà nước chiếm bao nhiêu %?



A. 22%

B. 38,1

C. 39,9%

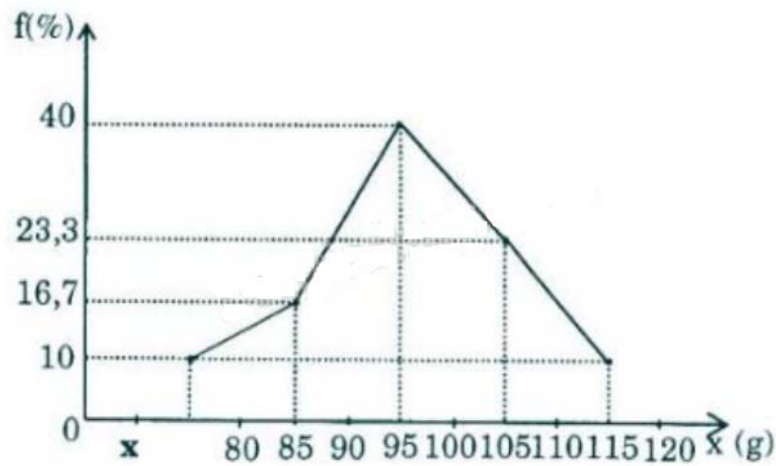
D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A

Câu 9: Cho biểu đồ đường gấp khúc tần suất của thống kê khối lượng 30 củ khoai tây được thu hoạch ở nông

trường T (đơn vị gam). Hỏi lớp $[90;100)$ có tần suất bao nhiêu %?



A. 10%

B. 20%

C. 40%

D. 30%

Lời giải

Chọn C

Giá trị đại diện của lớp [90;100) là 95, dựa vào biểu đồ ta thấy lớp [90;100) có tần suất 40%

Câu 10: Bảng cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000 phân theo ngành kinh tế (%) như sau

Các thành phần kinh tế	Tỉ trọng (%)
Khu vực doanh nghiệp nhà nước	23,5%
Khu vực ngoài quốc doanh	32,2 %
Khu vực đầu tư nước ngoài	44,3%
Cộng	100%

Nếu vẽ biểu đồ hình quạt thì khu vực có diện tích lớn nhất là:

A. Khu vực doanh nghiệp nhà nước

B. Khu vực ngoài quốc doanh

C. Khu vực đầu tư nước ngoài

D. Không có khu vực nào cả

Lời giải

Chọn C

BÀI 3. SỐ TRUNG BÌNH. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (HAY SỐ TRUNG BÌNH)

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{N}$
- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}$
- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i c_i}{N} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{N} \quad (c_i \text{ là giá trị đại diện của lớp thứ } i)$$

II. SỐ TRUNG VỊ

Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là:

- Số đứng giữa $\frac{N+1}{2}$ nếu N lẻ;
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa (số thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2} + 1$) nếu N chẵn.

III. MỐT

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_o .

Chú ý: – Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

– Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

– Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng một làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều một.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho bảng thống số liệu thông kê điểm kiểm tra 1 tiết môn Toán của 40 học sinh như sau:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Số trung vị (M_e) và một (M_o) của bảng số liệu thống kê trên là

- A. $M_e = 8; M_o = 40$.
- B. $M_e = 6; M_o = 18$.
- C. $M_e = 6; M_o = 6$.
- D. $M_e = 7; M_o = 6$

Lời giải

Chọn C

Theo công thức trung vị đối với N chẵn thì ta có:

Số đứng vị trí $\frac{N}{2}$ là 6 và số đứng vị trí $\frac{N}{2} + 1$ là 6.

Vậy số trung vị $M_e = 6$.

$M_0 = 6$ do số điểm 6 có tần suất xuất hiện nhiều nhất là 18 lần.

Câu 2: Bạn An đạt được điểm môn Toán như sau: điểm hệ số 1: 7; 9; 8; 8; 8, điểm hệ số 2: 7; 8; 8, điểm thi học kỳ (hệ số 3): 8. Điểm trung bình môn Toán của An là

- A. $\approx 8,1$. B. $\approx 7,6$. C. $\approx 7,9$. D. $\approx 7,7$.

Lời giải

Chọn C

Điểm trung bình môn toán của An là: $\frac{7+9+8+8+8+7.2+8.2+8.2+8.3}{1+1+1+1+1+2+2+2+3} = \frac{55}{7} \approx 7,9$.

Câu 3: Số trung bình của dãy số liệu 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 7; 8; 9; 9; 9 gần đúng với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

- A. 5,14. B. 5,15. C. 5. D. 6

Lời giải

Chọn A

Số trung bình của dãy số liệu 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 7; 8; 9; 9; 9 là

$$x_{TB} = \frac{1+1+2+3+3+4+5+5+6+7+8+9+9+9}{14} = \frac{36}{7} \approx 5,142857.$$

Câu 4: Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

Thời gian (giây)	8,3	8,4	8,5	8,7	8,8
Tần số	2	3	9	5	1

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là:

- A. 8,54. B. 4. C. 8,50. D. 8,53

Lời giải

Chọn D

$$\bar{x} = \frac{(8,3.2 + 8,4.3 + 8,5.9 + 8,7.5 + 8,8.1)}{20} = 8,53.$$

Câu 5: Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau:

7	2	3	5	8	2
8	5	8	4	9	6
6	1	9	3	6	7
3	6	6	7	2	9

Tìm một của điểm điều tra

A. 2.

B. 7.

C. 6.

D. 9

Lời giải

Chọn C

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số	1	3	3	1	2	5	3	3	3	N=24

Ta thấy điểm 6 có tần số lớn nhất nên $M_0 = 6$.

Câu 6: Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trứng gà:

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	10
40	6
45	4
50	2
Cộng	30

Số trung vị là

A. 37,5.

B. 40.

C. 35.

D. 75

Lời giải

Chọn C

Ta thấy N chẵn nên số trung vị là: $M_e = \frac{35+35}{2} = 35$

Câu 7: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình cộng là

A. $\bar{x} = 15,20$.

B. $\bar{x} = 15,21$.

C. $\bar{x} = 15,23$.

D. $\bar{x} = 15,25$

Lời giải

Chọn C

$$\bar{x} = \frac{(9.1 + 10.1 + 11.3 + 12.5 + 13.8 + 14.13 + 15.19 + 16.24 + 17.14 + 18.10 + 19.2)}{100} = 15,23.$$

Câu 8: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung vị là:

A. $M_e = 15$.

B. $M_e = 15,50$.

C. $M_e = 16$.

D. $M_e = 16,5$

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $N=100$ chẵn nên số trung vị là: $M_e = \frac{15+16}{2} = 15,5$.

Câu 9: Bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau:

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
[40;50)	4	13	45	180	8100
[50;60)	6	19	55	330	18150
[60;70)	10	31	65	650	42250
[70;80)	6	19	75	450	33750
[80;90)	4	13	85	340	28900
[90;100]	2	6	95	190	18050
N	32	100%		2140	149200

Số điểm trung bình là:

A. $\bar{x} = 66,88$.

B. $\bar{x} = 68,68$.

C. $\bar{x} = 88,66$.

D. $\bar{x} = 68,88$

Lời giải

Chọn A

$$\bar{x} = \frac{4.45 + 6.55 + 10.65 + 6.75 + 4.85 + 2.95}{32} = 66,88 \text{ hoặc tính } \bar{x} = \frac{\sum n_i c_i}{N} = \frac{2140}{32} = 66,88.$$

Câu 10: Để được cấp chứng chỉ A - Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ, học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm, thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100, và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên. Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

A. 97,5.

B. 92,5.

C. 95,5.

D. 97,8

Lời giải

Chọn A

Gọi x là số điểm trong lần kiểm tra cuối mà Minh cần đạt được để được cấp chứng chỉ. Ta có số điểm qua 5 lần thi của Minh là $64,5 \cdot 5 = 322,5$ suy ra:

$$\frac{x + 322,5}{6} = 70 \Rightarrow x = 70 \cdot 6 - 322,5 = 97,5$$

BÀI 4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG SAI

Để đo mức độ chênh lệch (**độ phân tán**) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình ta dùng **phương sai** s^2 và **độ lệch chuẩn** $s = \sqrt{s^2}$.

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2 \end{aligned}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i c_i \right)^2 \end{aligned}$$

(c_i , n_i , f_i là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ;

N là số các số liệu thống kê $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)

II. ĐỘ LỆCH CHUẨN

Chú ý: Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng lớn.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nếu đơn vị của số liệu là kg thì đơn vị của phương sai là ?

- A. kg B. kg^2 C. Không có đơn vị D. kg^3

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa phương sai: Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, \dots, x_N\}$,

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2 , được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \text{ Do đó nếu đơn vị của mẫu là } kg \text{ thì đơn vị của phương sai là } kg^2$$

Câu 2: Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Mệnh đề đúng là:

- A. Giá trị trung tâm của lớp [50;53) là 52
- B. Tần số của lớp [58;60) là 95
- C. Tần số của lớp [52;54) là 35
- D. Số 50 không phụ thuộc vào lớp [54;56)

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa tần số và giá trị trung tâm ta loại A,B,C. Do đó ta chọn D

Câu 3: Chọn đáp án đúng trong những đáp án sau: Độ lệch chuẩn là gì ?

- A. Bình phương của phương sai
- B. Một nửa của phương sai
- C. Căn bậc hai của phương sai
- D. Căn bậc ba của phương sai

Lời giải

Chọn C

Căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn

Câu 4: Điều tra về một khối 10 ta có kết quả như sau: ?

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		N=100

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là ?

- A. 156,5
- B. 157,5
- C. 157
- D. 158

Lời giải

Chọn C

Ta gọi trung điểm của $x_4 = \frac{156+158}{2} = 157$ giá trị đại diện của nhóm thứ 4

Câu 5: Cho dãy số liệu thống kê 1,2,3,4,5,6,7,8 Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê gần bằng ?

- A. 2.30
- B. 3.30
- C. 4.30
- D. 5.30

Lời giải

Chọn A

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(1.1 + 2.1 + 3.1 + 4.1 + 5.1 + 6.1 + 7.1 + 8.1) = 4,5$$

$$s^2 = \frac{1}{8}[1.(1-4,5)^2 + 1.(2-4,5)^2 + \dots + 1.(8-4,5)^2] = 5,25$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} \approx 2,30$$

Câu 6: Tỉ số giữa tần số và kích thước mẫu người ta gọi là ?

- A.** Một **B.** Phương sai **C.** Tần suất **D.** Trung vị

Lời giải

Chọn C

Tần số là tỉ số giữa tần số và kích thước mẫu

Câu 7: Cho dãy số liệu thống kê 10,8,6,2,4 Độ lệch chuẩn của mẫu là?

- A.** 2.8 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 2.4

Lời giải

Chọn A

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(10.1 + 8.1 + 6.1 + 2.1 + 4.1) = 6$$

$$s^2 = \frac{1}{5}[1.(10-6)^2 + 1.(8-6)^2 + 1.(6-6)^2 + 1.(2-6)^2 + 1.(4-6)^2] = 8$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} \approx 2,8$$

Câu 8: Cho bảng số liệu ghi lại điểm của 40 học sinh bài kiểm tra một tiết môn Toán

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Mốt của bảng số liệu trên là ?

- A.** $M_0 = 40$ **B.** $M_0 = 18$ **C.** $M_0 = 6$ **D.** $M_0 = 7$

Lời giải

Chọn C

Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất

Câu 9: 100 học sinh tham dự giải toán (thang điểm là). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm (x)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số (n)	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Trung bình cộng của bảng số liệu trên là ?

- A.** 15 **B.** 15,23 **C.** 15.5 **D.** 16

Lời giải

Chọn C

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(9.1 + 10.1 + 11.3 + 12.5 + \dots + 19.2) = 15,23$$

Câu 10: Điều tra về học sinh khối 10 ta có kết quả sau:

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		N=100

Độ lệch chuẩn là ?

A. 0.78

B. 1.28

C. 2.17

D. 1.73

Lời giải

Chọn C

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(5.151 + 18.153 + 40.155 + 26.157 + 8.159 + 3.161) = 155,46$$

$$s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^6 n_i (c_i - \bar{x})^2 \approx 4,71$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} \approx 2,17$$

CHƯƠNG 6. CUNG LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

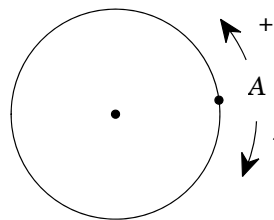
BÀI 1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

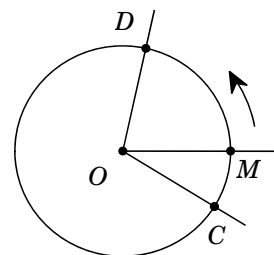
I – KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A và B . Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu A điểm cuối B .



Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.

2. Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC tới vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một **góc lượng giác**, có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD) .

3. Đường tròn lượng giác

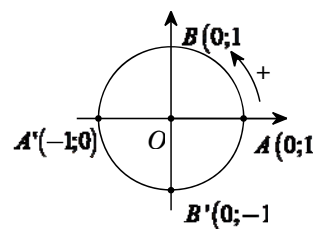
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm

$A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc A).



II – SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Độ và radian

a) Đơn vị radian

Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

c) Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , cung nửa đường tròn có số đo là $\pi \text{ rad}$ và có độ dài là πR . Vậy cung có số đo $\alpha \text{ rad}$ của đường tròn bán kính R có độ dài

$$\ell = R\alpha.$$

2. Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung $\widehat{AM}$ là $sđ \widehat{AM}$.

Ghi nhớ

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π .

Ta viết

$$sđ \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A , điểm cuối là M .

3. Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Chú ý Vì mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại, đồng thời số đo của các cung và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau, nên từ nay về sau khi ta nói về cung thì điều đó cũng đúng cho góc và ngược lại.

4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức $sđ \widehat{AM} = \alpha$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1 : xác định các yếu tố liên quan đến cung và góc lượng giác.

1. Phương pháp

Ngoài việc sử dụng định nghĩa góc và cung lượng giác, công thức tính độ dài cung tròn khi biết số đo, mối liên hệ giữa đơn vị độ, radian và hệ thức salơ chúng ta cần lưu ý đến kết quả sau:

Nếu một góc(cung) lượng giác có số đo a^0 (hay $\alpha \text{ rad}$) thì mọi góc(cung) lượng giác cùng tia đầu(điểm đầu), tia cuối(điểm cuối) với nó có số đo dạng $a^0 + k360^0$ (hay $\alpha + k2\pi \text{ rad}$, $k \in \mathbb{Z}$), mỗi góc(cung) ứng với mỗi giá trị của k . Từ đó hai góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$, $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$,

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

b) Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$, $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$,

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

Ví dụ 2: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

Lời giải

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04m$

c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12m$

Ví dụ 3: Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều

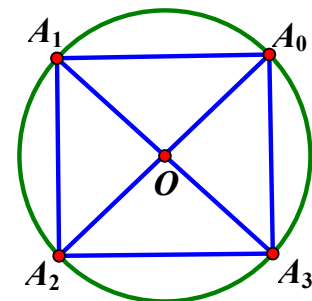
ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\text{p}}{A_0A_i}, \overset{\text{p}}{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).

Lời giải

Ta có $\overset{\text{p}}{A_0OA_0} = 0$ nên $\overset{\text{p}}{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\overset{\text{p}}{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \overset{\text{p}}{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{\text{p}}{A_0OA_2} = \pi \text{ nên } \overset{\text{p}}{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\widehat{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_3 = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Nhu vậy } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_i = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0,1,2,3, k \in Z$$

$$\text{Theo hệ thức salơ ta có } \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_iA_j = \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_j - \overset{\text{p}}{\text{sđ}} A_0A_i + k2\pi = (j-i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z.$$

Ví dụ 4: Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

$$\text{a) } \frac{33\pi}{4} \qquad \text{b) } -\frac{291983\pi}{3} \qquad \text{c) } 30$$

Lời giải

$$\text{a) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } \frac{33\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq \frac{33\pi}{4} + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq \frac{33}{4} + k2 \leq 2, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow -\frac{33}{8} \leq k \leq -\frac{25}{8}, k \in Z \Leftrightarrow k = -4$$

$$\text{Suy ra } \alpha = \frac{33\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{291983}{3} + k2 \leq 2, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{291983}{6} \leq k \leq \frac{291989}{6}, k \in Z \Leftrightarrow k =$$

$$\text{Suy ra } \alpha = -\frac{291983\pi}{3} + 48664 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{c) Mọi góc lượng giác } (Ou, Ov) \text{ có số đo là } 30 + k2\pi, k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \text{ nên } 0 \leq 30 + k2\pi \leq 2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 0 \leq \frac{15}{\pi} + k \leq 1, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15}{\pi} \leq k \leq \frac{\pi-15}{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -4$$

Suy ra $\alpha = 30 + (-4).2\pi = 30 - 8\pi \approx 4,867$.

Ví dụ 5: Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}$; $-\frac{22}{7}$; $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

Lời giải

Hai góc có cùng tia đầu, tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π do đó

Vì $-\frac{29\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = (-2).2\pi$, $-\frac{22}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = -3\pi$, $\frac{6\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \pi$ và $\frac{41\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = 3.2\pi$ nên các số $-\frac{29\pi}{7}$; $\frac{41\pi}{7}$ là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Ví dụ 6: Cho $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ và $sđ(Ou', Ov') = \beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học uOv , $u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ và $sđ(Ou', Ov') = \beta$ suy ra tồn tại α_0 , $\pi < \alpha_0 \leq \pi$, ϕ_0 , $\pi < \beta_0 \leq \pi$ và số nguyên k_0, l_0 sao cho $\alpha = \alpha_0 + k_0 2\pi$, $\beta = \beta_0 + l_0 2\pi$.

Khi đó $|\alpha_0|$ là số đo của $\widehat{uOv}$ và $|\beta_0|$ là số đo của $\widehat{u'Ov'}$.

Hai góc hình học uOv , $u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi $|\alpha_0| = |\beta_0| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \beta_0 \\ \alpha_0 = -\beta_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
- B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào SGK cơ bản trang 134 ở dòng 2.

- Câu 2:** Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:
- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
 - B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Chọn B

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng 6, ta **chọn B**.

- Câu 3:** Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác AB xác định:
- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải

Chọn D

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng cuối, ta **chọn D**.

- Câu 4:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?
- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
 - C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải

Chọn D

- Câu 5:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?
- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
 - B. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
 - C. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
 - D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Chọn D

- Câu 6:** Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?
- A. Cung có độ dài bằng 1.
 - B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
 - C. Cung có độ dài bằng đường kính.
 - D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Lời giải

Chọn D

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

- Câu 7:** Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$.
 - B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$.
 - C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
 - D.

$$\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

Lời giải

Chọn C

$\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180^0 .

Câu 8: Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $1 \text{ rad} = 1^0$. **B.** $1 \text{ rad} = 60^0$. **C.** $1 \text{ rad} = 180^0$. **D.**

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180^0 .

Suy ra 1 rad tương ứng với x^0 . Vậy $x = \frac{180.1}{\pi}$.

Câu 9: Nếu một cung tròn có số đo là a^0 thì số đo radian của nó là:

- A.** $180\pi a$. **B.** $\frac{180\pi}{a}$. **C.** $\frac{a\pi}{180}$. **D.** $\frac{\pi}{180a}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Câu 10: Nếu một cung tròn có số đo là $3a^0$ thì số đo radian của nó là:

- A.** $\frac{a\pi}{60}$. **B.** $\frac{a\pi}{180}$. **C.** $\frac{180}{a\pi}$. **D.** $\frac{60}{a\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trong trường hợp này là $3a \longrightarrow \alpha = \frac{3a.\pi}{180} = \frac{a\pi}{60}$.

Câu 11: Đổi số đo của góc 70^0 sang đơn vị radian.

- A.** $\frac{70}{\pi}$. **B.** $\frac{7}{18}$. **C.** $\frac{7\pi}{18}$. **D.** $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{a.\pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}.$$

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm 70 shift DRG 1 =

Câu 12: Đổi số đo của góc 108^0 sang đơn vị radian.

- A.** $\frac{3\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{10}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Tương tự như câu trên.

Câu 13: Đổi số đo của góc $45^{\circ}32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,7947. B. 0,7948. C. 0,795. D. 0,794.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $45^{\circ}32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^{\circ}$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm $45^{\circ}32^0 = \text{shift DRG } 1 =$

Câu 14: Đổi số đo của góc $40^{\circ}25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

- A. 0,705. B. 0,70. C. 0,7054. D. 0,71.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^{\circ}25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^{\circ}$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 4 để chuyển về chế độ rad.

Bước 2. Bấm $40^{\circ}25^0 = \text{shift DRG } 1 =$

Câu 15: Đổi số đo của góc $-125^{\circ}45'$ sang đơn vị radian.

- A. $-\frac{503\pi}{720}$. B. $\frac{503\pi}{720}$. C. $\frac{251\pi}{360}$. D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Lời giải

Chọn A

Tương tự như câu trên.

Câu 16: Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. 15° . B. 10° . C. 6° . D. 5° .

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Từ công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \longrightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^{\circ}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = 15^0$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm (shift $\pi \div 12$) shift DRG 2 =

Màn hình hiện ra kết quả bất ngờ.

Câu 17: Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $33^0 45'$. B. $-29^0 30'$. C. $-33^0 45'$. D. $-32^0 55'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(-\frac{135}{4} \right)^0 = -33^0 45'$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm (shift $-3\pi \div 16$) shift DRG 2 =

Câu 18: Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-286^0 44' 28''$. B. $-286^0 28' 44''$. C. -286^0 . D. $286^0 28' 44''$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^0 = -286^0 28' 44''$.

Cách 2. Bấm máy tính:

Bước 1. Bấm shift mode 3 để chuyển về chế độ độ, phút, giây.

Bước 2. Bấm -5 shift DRG 2 =

Câu 19: Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $42^0 97' 18''$. B. $42^0 58'$. C. $42^0 97'$. D. $42^0 58' 18''$.

Lời giải

Chọn D

Tương tự như câu trên.

Câu 20: Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-114^0 59' 15''$. B. $-114^0 35'$. C. $-114^0 35' 29''$. D. $-114^0 59'$.

Lời giải

Chọn C

Tương tự như câu trên.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.
B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Lời giải

Chọn A

Từ công thức $\ell = R\alpha \longrightarrow \ell$ và α tỷ lệ nhau.

Câu 22: Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

- A. $\ell = 3,93\text{cm}$. B. $\ell = 2,94\text{cm}$. C. $\ell = 3,39\text{cm}$. D. $\ell = 1,49\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93\text{cm}$.

Câu 23: Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm .

- A. 30cm . B. 40cm . C. 20cm . D. 60cm .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30\text{ cm}$.

Câu 24: Một đường tròn có đường kính bằng 20cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

- A. 6,01cm . B. 6,11cm . C. 6,21cm . D. 6,31cm .

Lời giải

Chọn B

Cung có số đo 35° thì có số đo radian là $\alpha = \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{35\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$.

Bán kính đường tròn $R = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$.

Suy ra $\ell = \alpha R = \frac{7\pi}{36} \cdot 10 \approx 6,11\text{ cm}$.

Câu 25: Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}\text{cm}$ trên đường tròn có bán kính 20 cm .

- A. 1,5 rad . B. 0,67 rad . C. 80° . D. 88° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{2}{3} \approx 0,67\text{ rad}$.

Câu 26: Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Lời giải

Chọn B

$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2\text{ rad}$.

Câu 27: Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là:

- A. $\pi/2$. B. $\pi/3$. C. $\pi/4$. D. $\pi/6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{1}{6}\pi R}{R} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 28: Một cung có độ dài 10cm , có số đo bằng radian là $2,5$ thì đường tròn của cung đó có bán kính là:

A. $2,5\text{cm}$.

B. $3,5\text{cm}$.

C. 4cm .

D. $4,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

Câu 29: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu?

A. $\frac{8}{5}\pi$.

B. $\frac{5}{8}\pi$.

C. $\frac{3}{5}\pi$.

D. $\frac{5}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A.

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là

$$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R.$$

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi.$$

Câu 30: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

A. 30° .

B. 40° .

C. 50° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C.

72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10 \cdot 2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18}R$.

$$\text{Theo công thức } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5}{18}\pi R}{R} = \frac{5}{18}\pi \text{ mà } a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^\circ.$$

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10 \cdot 360}{72} = 50^\circ$.

Câu 31: Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?

A. $k \in \emptyset$.

B. $k = 3$.

C. $k = -5$.

D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Theo đề } (Ox, Oy) = 1822^\circ 30' \longrightarrow 22^\circ 30' + k \cdot 360^\circ = 1822^\circ 30' \longrightarrow k = 5.$$

Câu 32: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

A. $k = 4$.

B. $k = 5$.

C. $k = 6$.

D. $k = 7$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } 10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5.$$

Câu 33: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

C. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn A.

Góc lượng giác (OG, OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4}.2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 34: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

A. $-45^\circ.$

B. $315^\circ.$

C. 45° hoặc $315^\circ.$

D.

$-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn D.

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 35: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

A. $120^\circ.$

B. $-240^\circ.$

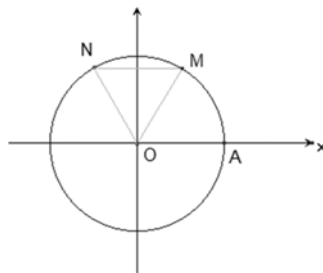
C. -120° hoặc $240^\circ.$

D.

$120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ, \widehat{MON} = 60^\circ$

Nên $\widehat{AON} = 120^\circ$. Khi đó số đo cung AN bằng 120° .

Câu 36: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:

A. $255^\circ.$

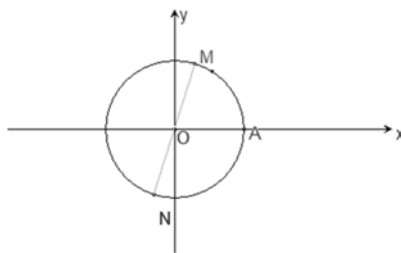
B. $-105^\circ.$

C. -105° hoặc $255^\circ.$

D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ$, $\widehat{MON} = 180^\circ$

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng $-105^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$.

Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

A. α và β ; γ và δ .

B. β và γ ; α và δ .

C. α , β , γ .

D. β , γ , δ .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1. Ta có $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách 2. Gọi A , B , C , D là điểm cuối của các cung α , β , γ , δ

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B \equiv C$, $A \equiv D$.

Câu 38: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **SAI** trong các kết quả sau đây:

A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$.

C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$.

D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn B.

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối.

Khi đó $a = b + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $k = \frac{a-b}{2\pi}$.

Dễ thấy, ở **đáp án B** vì $k = \frac{\frac{\pi}{10} - \frac{152\pi}{5}}{2\pi} = -\frac{303}{20} \notin \mathbb{Z}$.

Câu 39: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k2\pi}{3}$.

B. $k\pi$.

C. $\frac{k\pi}{2}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Câu 40: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k\pi}{2}$.

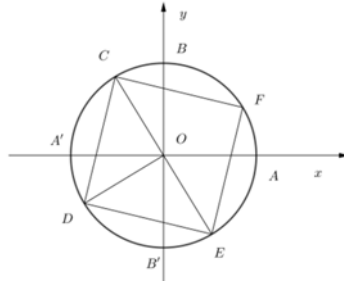
B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG α

1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung $\widehat{AM}$ có số đo $\widehat{AM}$ (còn viết $\widehat{AM}$)

- Tung độ $y = \overline{OK}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\boxed{\sin \alpha = \overline{OK}.}$$

- Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\boxed{\cos \alpha = \overline{OH}.}$$

- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\operatorname{tg} \alpha$)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\operatorname{cotg} \alpha$)

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung** α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

2. Hệ quả

- $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

- Vì $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$; $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$ nên ta có

$$\boxed{\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1. \end{aligned}}$$

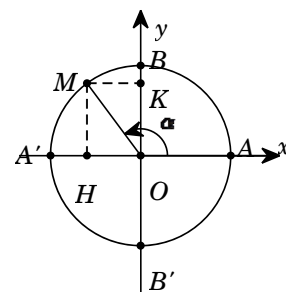
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α và β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

- $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác



Góc phần tư Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\tan \alpha$	+	–	+	–
$\cot \alpha$	+	–	+	–

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

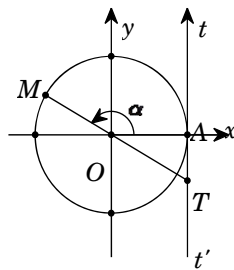
II – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG

1. Ý nghĩa hình học của $\tan \alpha$

Từ A vẽ tiếp tuyến $t'At$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại A .

Gọi T là giao điểm của OM với trục $t'At$.

$\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.

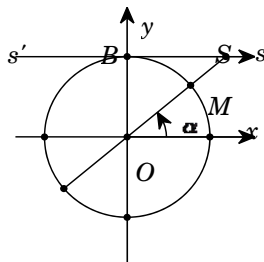


2. Ý nghĩa hình học của $\cot \alpha$

Từ B vẽ tiếp tuyến $s'Bs$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại B.

Gọi S là giao điểm của OM với trục $s'Bs$

$\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{BS}$ trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục cotang**.



III – QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

1) Cung đối nhau: α và $-\alpha$

$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$

2) Cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

3) Cung hơn kém π : α và $(\alpha + \pi)$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan \alpha \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

4) Cung phụ nhau: α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1: biểu diễn góc và cung lượng giác.

1. Phương pháp giải.

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau

- Góc α và góc $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn bởi số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m . Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $(m - 1)$ rồi biểu diễn các góc đó.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{11\pi}{2}$

c) 120°

d) -765°

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot 2\pi$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{4}$.

b) Ta có $-\frac{13\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-3) \cdot 2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{13\pi}{2}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{2}$ và là điểm B' .

c) Ta có $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120° .

d) Ta có $-765^\circ = -45^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765° trùng với góc -45° .

$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm)

Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB'}$) là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765° .

Ví dụ 2 : Trên đường tròn lượng giác gốc A . Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi;$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Lời giải

- Ta có $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$

Với $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ được biểu diễn bởi điểm A

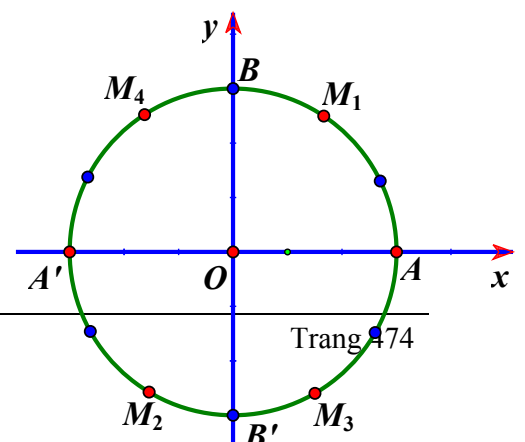
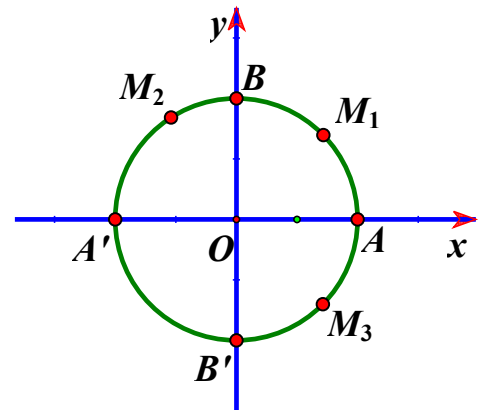
$k = 1 \Rightarrow x_1 = \pi$ được biểu diễn bởi A'

- $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có

số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_1

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_2



- $x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_3

$k = 1 \Rightarrow x_6 = \frac{2\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_4 .

- Do các góc lượng giác x_1, x_2, x_3 được biểu diễn bởi đỉnh của đa giác đều $AM_1M_4A'M_2M_3$ nên các góc lượng giác đó có thể viết dưới dạng một công thức duy nhất là $x = \frac{k\pi}{3}$.

Dạng toán 2 : xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2 \sin 30^0 (-\cos 8^0)}{2 \cos(8^0 - 90^0) - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^0)}{2 \cos(90^0 - 8^0) - \sin 8^0} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2 \sin 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{\sin 8^0} = 0$$

c) Vì $25^0 + 65^0 = 90^0 \Rightarrow \sin 65^0 = \cos 25^0$ do đó

$$C = (\sin^2 25^0 + \cos^2 25^0) + \sin^2 45^0 + \sin^2 60^0 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

$$d) D = -\left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right] \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Nên } D = -\left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8}\right] \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1.$$

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$b) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$c) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$$

$$d) \sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ suy ra } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$$

$$b) \text{ Ta có } -\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$$

$$\text{Và } 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \tan(\pi - \alpha) > 0$$

$$\text{Vậy } \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) > 0.$$

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0$.

Dạng toán 3 : chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x (\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP \text{ ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP \text{ ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } VT &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} \\ &= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$$

Lời giải

Vì $A + B + C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot(\pi - A) = \tan A \cdot (-\cot A) = -1$$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$$

$$c) C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0$$

$$b) \text{ Ta có } \sin(900^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2.360^\circ + x) = \sin(180^\circ + x) = -\sin x$$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos(90^\circ + 360^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\sin(x - 630^\circ) = \sin(x - 2.360^\circ + 90^\circ) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x$$

$$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x$$

$$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$c) \text{ Ta có } \sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right) \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

Dạng toán 4 : tính giá trị của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.

- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$ suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

c) Vì $\tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ta có $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-2\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$.

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ và $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0$ nên $\cos \alpha < 0$

Vì vậy $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Vì $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ nên $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ và } \cot \alpha = -\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

$$\text{b) Cho } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Tính } A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24 \text{ hay } \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

$$\text{Do đó } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Ta lại có } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{b) Ta có } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27 + 3 + 2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } C &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } \sin x + \cos x = m \text{ nên } m^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ hay } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Câu 2: Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$.

B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$. **C.** $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. **D.**

$\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Câu 3: Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ ba} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Câu 4: Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là

đúng ?

A. $\sin \alpha > 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 5: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \cos \alpha$ cùng dấu?

A. Thứ II.
III.

B. Thứ IV.

C. Thứ II hoặc IV.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

Chọn D.

Câu 6: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

A. Thứ I.
IV.

B. Thứ II hoặc IV.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. Thứ II.
IV.

B. Thứ I hoặc II.

C. Thứ II hoặc III.

D. Thứ I hoặc

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha.$$

Đẳng thức $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV. **Chọn D.**

Câu 8: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

A. Thứ III.
IV.

B. Thứ I hoặc III.

C. Thứ I hoặc II.

D. Thứ III hoặc

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha.$$

Đẳng thức $|\sin \alpha| = \sin \alpha \longrightarrow \sin \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc II. **Chọn C.**

Câu 9: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$.

B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$.

C. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$.

D. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$.

Lời giải

Ta có $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cung $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ I

$$\longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \text{ Chọn A.}$$

Câu 10: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$.

B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$.

C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Lời giải

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ điểm cuối cung $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ III $\longrightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$. **Chọn D.**

Câu 11: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$.

C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$.

D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \longrightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases} \text{ Chọn D.}$$

Câu 12: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi + \alpha)$.

B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

C. $\cos(-\alpha)$.

D. $\tan(\pi + \alpha)$.

Lời giải

Ta có

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha; \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 13: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) < 0$.

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0$.

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \leq 0$.

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \geq 0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0 \end{cases} \longrightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0.$$

Câu 14: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

A. $M \geq 0$.

B. $M > 0$.

C. $M \leq 0$.

D. $M < 0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow M > 0.$$

Câu 15: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

A. $M \geq 0$.

B. $M > 0$.

C. $M \leq 0$.

D. $M < 0$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \longrightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow M < 0.$$

Câu 16: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] &= \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Câu 17: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

$$\begin{aligned}\text{A. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. & \text{B. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= \frac{1}{2}. \\ \text{C. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= -\frac{1}{2}. & \text{D. } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 18: Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 2. \qquad \text{C. } P = 4. \qquad \text{D. } P = 8.$$

Lời giải

Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$\begin{aligned}P &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \text{ Chọn C.}\end{aligned}$$

Câu 19: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 1. \qquad \text{C. } P = 4. \qquad \text{D. } P = 8.$$

Lời giải

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$. **Chọn B.**

Câu 20: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

$$\text{A. } P = 0. \qquad \text{B. } P = 1. \qquad \text{C. } P = 2. \qquad \text{D. } P = 3.$$

Lời giải

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$. **Chọn B.**

Câu 21: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 22: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$. B. $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$. D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \longrightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$.

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 23: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$).
C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$). D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018$.

Lời giải

Chọn D.

Vì $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 1$.

Câu 24: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 25: Để $\tan x$ có nghĩa khi

- A. $x = \pm \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k\pi$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 26: Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

- A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$\cot\left(x - \frac{\pi}{2018}\right)$ có nghĩa khi $x - \frac{\pi}{2018} \neq k\pi \longleftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2018} + k\pi$. **Chọn D.**

Câu 27: Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$.

Đẳng thức xác định khi $\begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 28: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$.

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$.

D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 29: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ$.

B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ$.

C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'$.

D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ$.

Lời giải

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án. **Chọn C.**

Câu 30: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$

B. $\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha.$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$

D. $\tan(\pi+2\alpha)=\cot(2\alpha).$

Lời giải

Chọn B.

Trong khoảng giá trị từ 90° đến 180° , khi giá trị góc tăng thì giá trị cos của góc tương ứng giảm.

Câu 31: Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)$ bằng

A. $-\sin\alpha.$

B. $\cos\alpha.$

C. $\sin\alpha.$

D. $-\cos\alpha.$

Lời giải

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$ **Chọn B.**

Câu 32: Cho $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $-\frac{1}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$ **D.** $\frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\frac{1}{3}.$

Câu 33: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi+\alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha.$

B. $\cot\alpha.$

C. $\tan\alpha.$

D. $-\cot\alpha.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\tan(2017\pi+\alpha)=\tan\alpha.$

Câu 34: Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được

A. $A=\cos\alpha+\sin\alpha.$

B. $A=2\sin\alpha.$

C. $A=\sin\alpha-\cos\alpha.$

D. $A=0.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

Câu 35: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)$ ta được

A. $S = 0$.

B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$.

C. $S = 2 \sin x \cos x$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)$

$$= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Câu 36: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P + Q = 0$.

B. $P + Q = -1$.

C. $P + Q = 1$.

D. $P + Q = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Khi đó $P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$.

Câu 37: Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$ có giá trị bằng?

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin(10\pi + x) = \sin x$.

Và $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\cos(8\pi - x) = \cos x$.

Khi đó $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$

$$= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 2.$$

Câu 38: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}$.

B. $\frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $\frac{2}{\sin^2 x}$.

D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) = \cot x$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot(7\pi - x) = -\cot x$.

Suy ra $P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2\cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}$.

Câu 39: Biết rằng $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x$ và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$.

Kết hợp với giá trị $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Suy ra $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Câu 40: Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. Một giá trị

khác.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có $\tan(4\pi + 1,25) = \tan 1,25$ suy ra $\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 = 1$

Và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$; $\cos(6\pi - x) = \cos(x - 6\pi) = \cos x$.

Khi đó $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos(6\pi - x) = 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

Mặt khác $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = 0$.

Câu 41: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A + C) = -\sin B$.

B. $\cos(A + C) = -\cos B$.

C. $\tan(A+C) = \tan B$.

D. $\cot(A+C) = \cot B$.

Lời giải

Chọn B.

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A+C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A+C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A+C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A+C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Câu 42: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

A. $\sin C = -\sin(A+B)$.

B. $\cos C = \cos(A+B)$.

C. $\tan C = \tan(A+B)$.

D. $\cot C = \cot(A+B)$.

Lời giải

Chọn D.

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - (A+B)$.

Do đó C và $A+B$ là 2 góc bù nhau $\Rightarrow \sin C = \sin(A+B)$; $\cos C = -\cos(A+B)$.

Và $\tan C = -\tan(A+B)$; $\cot C = \cot(A+B)$.

Câu 43: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $A+B+C = \pi \Leftrightarrow A+B = \pi - C$

Do đó $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

Câu 44: A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

A. $\sin A = -\sin(2A+B+C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A+B+2C)$.

Lời giải

A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A+B+C = 180^\circ \Leftrightarrow A+B = 180^\circ - C$.

Ta có $\sin(A+B+2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$. **Chọn D.**

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$.

B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$$

$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \longleftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$.

B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 50: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Câu 51: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$.

B. $P = \frac{3}{7}$.

C. $P = \frac{12}{25}$.

D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Thay $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{12}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$.

B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$.

C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$.

D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Thay
$$\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$
 vào P , ta được $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 54: Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = -2\sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

Theo giả thiết: $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}.$

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow P = -2\sqrt{2}.$$

Câu 55: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$.

A. $P = 4$.

B. $P = -4$.

C. $P = 6$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 4.$$

Câu 56: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$.

B. $P = \frac{1}{3}$.

C. $P = \frac{7}{3}$.

D. $P = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1|. \text{ Vì } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan \alpha > 1 \longrightarrow P = \tan \alpha - 1.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \longrightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Câu 57: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \longleftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \alpha = \pi.$$

$$\text{Thay } \alpha = \pi \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 58: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $P = 1.$

C. $P = -1.$

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \longleftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Thay $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 59: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos^2\alpha}.$

A. $P = \frac{30}{11}.$

B. $P = \frac{31}{11}.$

C. $P = \frac{32}{11}.$

D. $P = \frac{34}{11}.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \longrightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Thay $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{31}{11}.$

Câu 60: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 7\sin\alpha}.$

A. $P = -\frac{4}{9}.$

B. $P = \frac{4}{9}.$

C. $P = -\frac{4}{19}.$

D. $P = \frac{4}{19}.$

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos\alpha$ ta được $P = \frac{3\tan\alpha - 2}{5 + 7\tan\alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$

Câu 61: Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}.$

A. $P = -\frac{15}{13}.$

B. $P = \frac{15}{13}.$

C. $P = -13.$

D. $P = 13.$

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được $P = \frac{3+4 \cot \alpha}{2-5 \cot \alpha} = \frac{3+4 \cdot \frac{1}{3}}{2-5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$.

Câu 62: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$.

B. $P = \frac{9}{65}$.

C. $P = -\frac{9}{65}$.

D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải

Chọn A.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 4}{5 \tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}.$$

Câu 63: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = -\frac{8}{13}$.

B. $P = \frac{2}{19}$.

C. $P = -\frac{2}{19}$.

D. $P = -\frac{8}{19}$.

Lời giải

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

Câu 64: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

A. $P = \frac{9}{13}$.

B. $P = \frac{10}{13}$.

C. $P = \frac{11}{13}$.

D. $P = \frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $P = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. (*)

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13}.$$

Câu 65: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $P = \frac{9}{16}$.

B. $P = \frac{9}{32}$.

C. $P = \frac{9}{8}$.

D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết, ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{25}{16} \longrightarrow P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{9}{32}$.

Câu 66: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$.

B. $P = \frac{49}{25}$.

C. $P = \frac{7}{5}$.

D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$.

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

Thay $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125}$.

Câu 67: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ suy ra $\sin \alpha < \cos \alpha$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$. Vậy $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 68: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

A. $P = 2 - m$.

B. $P = 2 - m^2$.

C. $P = m^2 - 2$.

D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - m^2 \longrightarrow P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 69: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha = 2^2 - 2.1 = 2$.

Câu 70: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

A. $P = 100$.

B. $P = 110$.

C. $P = 112$.

D. $P = 115$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 5^3 - 3.5 = 110$.

Câu 71: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

A. $P = 12$.

B. $P = 14$.

C. $P = 16$.

D. $P = 18$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Chọn B.

Khi đó $P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14$.

Câu 72: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = -\sqrt{5}$.

D. $P = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \longrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}.$

Thay $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ vào P , ta được $P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5}.$

Câu 73: Cho góc α thỏa mãn $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}.$

B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}.$

C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}.$

D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

• $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

• $5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \\ 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}.$

Câu 74: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

A. $P = \frac{1}{2}.$

B. $P = \frac{1}{4}.$

C. $P = \frac{1}{6}.$

D. $P = \frac{1}{8}.$

Lời giải

Chọn C.

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha < 0$) $\longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$ và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6}$.

Câu 75: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4 \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra $M = 2$.

Câu 76: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$. **B.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. **D.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Câu 77: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$. **B.** $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$. **D.** $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Câu 78: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$.

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x.$

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Câu 79: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x.$

A. $M = \tan^2 x.$

B. $M = \sin^2 x.$

C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x .$

D. $M = 1.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$

Câu 80: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x.$

A. $M = \cot^2 x.$

B. $M = \cos^2 x.$

C. $M = 1.$

D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $M = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x).$

A. $M = \sin^2 x.$

B. $M = \cos^2 x.$

C. $M = -\sin^2 x.$

D. $M = -\cos^2 x.$

Lời giải

Chọn A.

Ta biến đổi: $M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha.$

A. $M = 1 + \sin^2 \alpha.$

B. $M = \sin \alpha.$

C. $M = 2 \sin \alpha.$

D. $M = 3.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $M = \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$

$$= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$$

$$= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3.$$

Câu 83: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

A. $M = -4$.

B. $M = -2$.

C. $M = 2$.

D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 84: Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

A. $P = |\sin \alpha|$.

B. $P = \sin \alpha$.

C. $P = \cos \alpha$.

D. $P = |\cos \alpha|$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|.$$

Câu 85: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.

C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$.

D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Câu 86: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$.

D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 87: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

A. $P = \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1$.

C. $P = -\cos^2 \alpha$.

D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 88: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \cos x + \sin x$.

B. $P = \cos x - \sin x$.

C. $P = \cos 2x - \sin 2x$.

D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Câu 89: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

A. $P = 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$.

C. $P = 2 \cot^2 \alpha$.

D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 90: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

A. $P = 2$.

B. $P = 1 + \tan \alpha$.

C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. .$$

Suy ra $P = \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Câu 91: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2 \cos \alpha$.

C. $P = 2 \tan \alpha$.

D. $P = 2 \sin \alpha$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 92: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

$$\text{Và } \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x. \text{ Suy ra } P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

BÀI 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I – CÔNG THỨC CỘNG**

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

II – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

III – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH**1. Công thức biến đổi tích thành tổng**

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng toán 1: tính giá trị lượng giác, biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức lượng giác một cách linh hoạt để biến đổi biểu thức lượng giác nhằm triệt tiêu các giá trị lượng giác của góc không đặc biệt và đưa về giá trị lượng giác đặc biệt.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$, $\cot \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

$$\text{Mà } \cos 36^\circ = \cos(2.18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\sin 54^\circ = \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$$

$$= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$$

$$\text{Do đó } 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Vì } 0 < \sin 18^\circ < 1 \text{ nên } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

- $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

- $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8}$

Ta lại có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$ suy ra

$$1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

Do $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$

Vậy $\cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

c) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

d) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Cách 1: Ta có $\cos 202^\circ 30' = \cos (180^\circ + 22^\circ 30') = -\cos 22^\circ 30'$

Do đó $A = -\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2} [\sin (22^\circ 30' + 202^\circ 30') + \sin (22^\circ 30' - 202^\circ 30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^\circ + \sin (-180^\circ)]$

$$= \frac{1}{2} [\sin (180^\circ + 45^\circ) - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $B = \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{16} \right) \right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{8}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

$$c) C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$d) D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$a) A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$b) B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$$

$$c) C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$d) D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Cách 1: Ta có } B &= \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} \right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ} \\ &= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$$

$$\text{Suy ra } 1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$$

Vậy $B = 2$

$$c) C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
 &= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \\
 &= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \\
 &= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) \\
 &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right)$
- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right).$

Ví dụ 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{b) } B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$$

$$\text{c) } C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$$

$$\text{d) } D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$$

Lời giải

a)

$$A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \text{ do đó}$$

$$16 \sin 20^\circ \cdot B = 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$\begin{aligned} &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

c) $D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Suy ra $T = -\frac{1}{2}$.

Vậy $D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$.

Ví dụ 5: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

- Ta có $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ (1)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2}$$
 (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = 2 \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = 0$$

- Từ giả thiết ta có $(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0 \text{ (Do } \cos(\alpha - \beta) = 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng toán 2: xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin x > 0, \cos x > 0.$$

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 2: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Ta có $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)(\cos 2\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ (Vì $\cos 2\alpha + 2 > 0$)

Ta có $1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

Vậy $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7$

$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 2 = 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 8 = 9(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$

$\Leftrightarrow 8 = 9 \sin^2 2\alpha$

$\Leftrightarrow 16 = 9(1 - \cos 4\alpha)$

$\Leftrightarrow \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$

Vậy $\cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right)$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ do đó } \tan \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\text{Ta có } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right) = -1$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ với } \alpha \text{ làm các biểu thức có nghĩa.}$$

Ví dụ 5: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \tan \alpha = -2 \tan \beta$.

$$\text{Tính } A = \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) + \sin \left(\beta - \frac{5\pi}{12} \right) \sin \left(\beta - \frac{\pi}{12} \right).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } \begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right) \sin^2 \beta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3}$$

Do đó $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ta có $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 + 2\sin^2 \beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12}$$

Do đó $A = -\frac{2 + 3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}$

Dạng toán 3: chứng minh đẳng thức, đơn giản biểu thức lượng giác và chứng minh biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích*, chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$

$$c) \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= \left(\sin^2 \alpha\right)^3 + \left(\cos^2 \alpha\right)^3 \\ &+ 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right) \\ &= \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{2 \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \cot^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a) \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b) \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Do } 0 < \alpha < \pi \text{ nên } \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \sin \alpha > 0$$

Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}\right)^2 &= 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha}\sqrt{1 - \cos \alpha} &= 2\left[1 - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} &= \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})^2}{(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha})(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha})} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{b) } \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \text{ với } \sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin \left(\alpha + \beta \right), \alpha + \beta \neq k2\pi$$

$$\text{c) } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta] \\ &= -\frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 \alpha) - (1 - 2 \sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

$$\text{b) Từ giả thiết ta có } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Do } \alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ suy ra } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2}\right)[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$\text{b) } B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Vì } \alpha + \frac{\pi}{6} &= \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \text{ và} \\ \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) &= -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ nên} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Đơn giản biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a} & \text{b) } B &= \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

c) $C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb)$ ($n \in \mathbb{N}$)

Lời giải

a) $A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$

b) Ta có $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a$ và

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

Suy ra $B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}$.

c) Ta có $C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb)$

$$= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

Suy ra $C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$

Ví dụ 6: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$

không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải

Ta có $M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$

Ta có $\sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$

Mà $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b)$ nên

$$\cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) = 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1]$$

$$= 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b)$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4\cos^2(a-b)}{4 - 8\cos^2(a-b) - \frac{1}{2} \cdot [2 - 10\cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4\cos^2(a-b)}{3 - 3\cos^2(a-b)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 4\sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\text{b) } \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3\sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 4\sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -4\sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos(-2\alpha) \right)$$

$$= -2\sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2\alpha \right) = 2\sin \alpha \left(\frac{1}{2} + 1 - 2\sin^2 \alpha \right)$$

$$= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

$$\text{b) Theo câu a) ta có } \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\text{Do đó } \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \dots, \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$\text{Suy ra } VT = \frac{3\sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3\sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$,
 $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

Dạng toán 4: bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$\left(2 \cos 2\alpha - 1 \right)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) > \left(\sqrt{2 \sin \alpha} - 2 \right) (3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos 2\alpha - 1 \right)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2 \sin \alpha} = t, \text{ vì } 0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0 (*)$$

$$+ \text{ Nếu } 0 \leq t < 1: (*) \Leftrightarrow t^8 + t^2(1 - t^3) + 1 - t > 0 \text{ đúng vì } 1 - t > 0, 1 - t^3 > 0, t^2 \geq 0 \text{ và } t^8 \geq 0.$$

$$+ \text{ Nếu } 1 \leq t \leq \sqrt{2}: (*) \Leftrightarrow t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0 \text{ đúng vì } t^5(t^3 - 1) \geq 0, t(t - 1) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x$, $|t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5	$\frac{1}{2}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dạng toán 5: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{b) } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\text{c) } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Lời giải

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A+B+C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$b) VT = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A+B+C = \pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$c) VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A+B+C = \pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

$$a) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$b) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

Lời giải

$$a) \text{ Đẳng thức tương đương với } \tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) \quad (*)$$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ không vuông nên } A+B \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A + B) = -\tan C$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A + B + C = \pi \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

$$\text{b) Vì } A + B + C = \pi \Rightarrow \cot(A + B) = -\cot C$$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A + B) = \frac{1}{\tan(A + B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

$$\text{Hay } \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } \tan A \tan B \tan C \geq \sqrt{3} \text{ với } ABC \text{ là tam giác nhọn.}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \text{ do đó}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$= -2 \left(\sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Vì } \left| \cos \frac{A-B}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

$$\text{Nếu } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi \text{ thì } \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}.$$

Thật vậy, do $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ nên

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Áp dụng bổ đề ta có: } \frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}, \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}$$

Suy ra

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \leq 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó } \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} \text{ hay } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ nên

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{b) } \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{c) } \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ Với tam giác } ABC \text{ không vuông.}$$

Lời giải

a) Vì $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} > 0$ và $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}$, $\sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}. \text{ ĐPCM.}$$

b) +TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$

$\cos A \cos B \cos C < 0$. Mà $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$ do đó bất đẳng thức luôn đúng.

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$.

Vì $\cos(A+B) = -\cos C$ và $\cos(A-B) \leq 1$ nên $\cos A \cos B \leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}$, $\cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}$.

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(\cos A \cos B)(\cos B \cos C)(\cos C \cos A) \leq \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

c) Ta có $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$

Mà $\sin(A+B) = \sin C$, $\cos(A+B) = -\cos C$ nên

$$\tan A + \tan B = \frac{2 \sin C}{-\cos C + \cos(A-B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2}$$

Tương tự ta có $\tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2}$, $\tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x + y + z \geq a + b + c$ ta có thể đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $2b, 2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz \geq abc$ với x, y, z, a, b, c không âm ta đi chứng minh $xy \geq a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ với mọi x, y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Cộng vế với vế ta được

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\left(\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

Mà

$$\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \leq 2\sqrt{\sin \left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]} = 2\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 4\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi x, y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}}$$

$$\text{Do đó } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \frac{1}{\sin A \sin B} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sin A \sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ &\geq \frac{\cos(A+B) + 1}{2} = \sin^2 \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

Ta lại có

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\text{Hay } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh

$$f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

khi đó $f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A) + f(B) + f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)\right] \geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0 \text{ và}$$

$$\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ suy ra } \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos 2y + \cos 2z = 2 - 2(\sin^2 y + \sin^2 z) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A, B, C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử

$$A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2} > 0$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Do đó } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

Mà

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

(1)

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}\cos^2 \frac{B}{2}} = \sqrt{3} \cos \frac{B}{2},$$

$$3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \geq 2\sqrt{3\sin^2 \frac{B}{2}\cos^2 \frac{B}{2}} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}\right) \leq \frac{3}{2} + 3\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ĐPCM.}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] \\ &= \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 6: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cdot \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cdot \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0} &= \frac{\tan(180^0 + 45^0) - \tan 9^0 \cdot \cot 69^0}{\cot(180^0 + 81^0) + \tan(180^0 + 21^0)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^0 \cdot \tan 21^0}{\tan 9^0 + \tan 21^0} = \frac{1}{\tan(9^0 + 21^0)} = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Câu 9: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

Câu 10: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} M = 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$$

$$= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

$$\text{Vậy giá trị biểu thức } M = -\frac{1}{2}.$$

Câu 11: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cos a$.
- B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.
- C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.
- D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ta được

$$\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a).$$

Câu 13: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$.
- B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
- C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$.
- D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, ta được

$$\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a.$$

Câu 14: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.
- D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Câu 15: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.
- B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.
- C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.
- D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Câu 17: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3 \cos a - 4 \cos^3 a.$

B. $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

C. $\cos 3a = 3 \cos^3 a - 4 \cos a.$

D. $\cos 3a = 4 \cos a - 3 \cos^3 a.$

Lời giải

Chọn B

Câu 18: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a.$

C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a.$

D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a.$

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Nếu $\cos(a+b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|.$

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|.$

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } \cos(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow a = -b + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\Rightarrow |\sin(a+2b)| = \left| \sin\left(-b + 2b + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 20: Nếu $\sin(a+b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|.$

B. $|\cos(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|.$

D. $|\cos(a+2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = k\pi \rightarrow a = -b + k\pi.$

$\Rightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$

Câu 21: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y.$

A. $M = \cos x.$

B. $M = \sin x.$

C. $M = \sin x \cos 2y.$

D. $M = \cos x \cos 2y.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = \sin[(x-y)+y] = \sin x.$

Câu 22: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2\cos^2 a.$

B. $M = 1 - 2\sin^2 a.$

C. $M = \cos 4a.$

D. $M = \sin 4a.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$, ta được

$M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$

Câu 23: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2\sin^2 b.$

B. $M = 1 + 2\sin^2 b.$

C. $M = \cos 4b.$

D. $M = \sin 4b.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$, ta được

$M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b)$
 $= \cos(a+b-(a-b)) = \cos 2b = 1 - 2\sin^2 b.$

Câu 24: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. 18° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a+b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 25: Đẳng thức nào sau đây đúng:

A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}.$

B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$

C. $\sin(a+b) = \frac{1}{2} \sin 2(a+b).$

D. $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}.$

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

• Đáp án A.

$$\text{Ta có } \cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

• Đáp án B.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$$

Câu 26: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)].$

B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$

C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a}.$

D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a.$

Lời giải

Chọn B

Câu 27: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

A. $M = \sqrt{2} \sin x.$

B. $M = -\sqrt{2} \sin x.$

C. $M = \sqrt{2} \cos x.$

D. $M = -\sqrt{2} \cos x.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Câu 28: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}. \text{ Mà } A + B + C = 180^\circ, \text{ do đó}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \cos[180^\circ - (A + B)] = -\cos(A + B) \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}. \end{aligned}$$

Câu 29: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{5}, \tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A + B + C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9} \\ \Rightarrow \tan(A + B + C) &= \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A + B + C = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 30: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}.$$

Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Câu 31: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2.$

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{C+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{C+B}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Rightarrow \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Câu 32: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B. B. Cân tại A. C. Cân tại C. D. Vuông tại B.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin(C + A) + \sin(C - A)$$

$$\text{Mặt khác } A + B + C = \pi \Rightarrow B = \pi - (A + C) \Rightarrow \sin B = \sin(A + C).$$

$$\text{Do đó, ta được } \sin(C - A) = 0 \Rightarrow A = C.$$

Câu 33: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 34: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

- A. $P = -\frac{24}{25}$. B. $P = \frac{24}{25}$. C. $P = -\frac{12}{25}$. D. $P = \frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 35: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \longrightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right).$$

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Thay vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25} \right) = \frac{11}{100}.$$

Câu 38: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}.$$

Câu 39: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}. \text{ Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Câu 40: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

Câu 41: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Câu 42: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$. C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D.

$P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ nên ta chọn } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Thay } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ và } \cos\alpha = \frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}.$$

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = -\frac{1}{7}.$

B. $P = \frac{1}{7}.$

C. $P = -7.$

D. $P = 7.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ nên ta chọn } \sin\alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Suy ra } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } \tan\alpha = \frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{1}{7}.$$

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}.$

B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

C. $P = -\frac{1}{5}.$

D. $P = \frac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha).$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1, \text{ suy ra } \sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm\frac{3}{5}.$$

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

- A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$.

Từ giả thiết $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$.

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha$.

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \longrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \longrightarrow \sin \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \longrightarrow P = 2\sqrt{19}.$$

Câu 50: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P^2 = 1 + \sin \alpha. \text{ Với } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ suy ra } P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ vào } P^2, \text{ ta được } P^2 = \frac{1}{5}. \text{ Suy ra } P = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 51: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}$.

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Do đó $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$.

B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

Vì $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

Do đó ta chọn $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

C. $P = -\frac{24}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ (do } \sin \alpha > 0 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Câu 54: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. $\frac{56}{65}$.

B. $\frac{63}{65}$.

C. $-\frac{33}{65}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \text{ mà } a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{ mà } b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$$

Câu 55: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

A. $\frac{16}{65}$.

B. $-\frac{16}{65}$.

C. $\frac{18}{65}$.

D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, có } \cos \beta = \frac{3}{5} \text{ với } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

Câu 56: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b).$$

A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\ &= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}. \end{aligned}$$

Câu 57: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên suy ra } \begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1+2\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos 2(a+b) = 2\cos^2(a+b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}.$$

Câu 58: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 59: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 60: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma$.

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Câu 61: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ vì } 90^\circ < b < 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Khi đó } \cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 62: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Khi đó } \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ vì } 270^\circ < 2a < 360^\circ.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}.$$

Câu 63: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan 2a = \tan[(a + b) + (a - b)] = \frac{\tan(a + b) + \tan(a - b)}{1 + \tan(a + b) \cdot \tan(a - b)} = \frac{7 + 4}{1 - 7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}.$$

Câu 64: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$.

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Câu 65: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$.

$$\text{Suy ra } \cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cdot \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \text{ nên suy ra}$$

$$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3.$$

Câu 66: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

A. $\frac{p}{q-1}$.

B. $-\frac{p}{q-1}$.

C. $\frac{2p}{1-q}$.

D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta

$$\text{có } \begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}. \text{ Khi đó } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}.$$

Câu 67: Nếu $\tan \alpha; \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha; \cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

Khi đó $P = r \cdot s = (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta}$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}. \text{ Vậy } P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}.$$

Câu 68: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lí Viet, ta

có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$

Khi đó $P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 69: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 70: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$

- A. $M = \sin 2\alpha.$ B. $M = \cos 2\alpha.$ C. $M = -\cos 2\alpha.$ D. $M = -\sin 2\alpha.$

Lời giải

Chọn D

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } M &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 71: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}.$ B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}.$
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$ D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 72: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

- A. $M = \tan x - \tan y.$ B. $M = \cot x - \cot y$
C. $M = \cot y - \cot x.$ D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y \end{aligned}$$

Câu 73: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

- A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$. B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x \right)$.
C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$. D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Câu 74: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

- A. $\tan 2x$ B. $\sin x$. C. $2 \tan x$. D. $2 \sin x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

- A. $\cos x$. B. $2 \cos x - 1$. C. $2 \cos x$. D. $\cos x - 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

Câu 76: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

- A. 0. B. $2 \cos^2 x$. C. 2. D. $\cos 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$.

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha \end{aligned}$$

Câu 78: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$. Do đó:

$$A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 79: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = \frac{1}{9}$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2 \tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)}{\cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Câu 83: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Câu 84: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

- A. $M = 1, m = -5$. B. $M = 3, m = 1$.
C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1 \\ &\Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 85: Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 &\Rightarrow 2 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \geq -2 \\ &\Rightarrow 4 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq P \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 86: Biểu thức $P = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 87: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 88: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $T = 2M - m^2$.

A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 112$. D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 89: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. D.

$$P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Câu 90: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 91: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D.

$M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq P \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.