

GIẢI NHANH GTLN-GTNN MÔ ĐUN SỐ PHỨC VỚI ELIP

Thầy Lục Trí Tuyên – ĐT: 0972177717

Bồi dưỡng KT và LTĐH Cầu Giấy – Hồ Tùng Mậu HN

Khi thấy giả thiết là Elip không chính tắc: $ z - z_1 + z - z_2 = 2a$ với $(z_1 - z_2 < 2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c; \pm ci$. Tìm Min, Max của $P = z - z_0 $: Tính $ z_1 - z_2 = 2c$ và $b^2 = a^2 - c^2$	
(2) Nếu thấy $\left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right = 0$	$\max P = a; \quad \min P = b$
(3.1) Nếu thấy $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\max P = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a$ $\min P = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - a$
(3.2) Nếu thấy $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\max P = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a$
(3.3) Nếu thấy $ z_0 - z_1 = z_0 - z_2 $	$\min P = \left \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - b \right $

GIẢI THÍCH CỤ THỂ

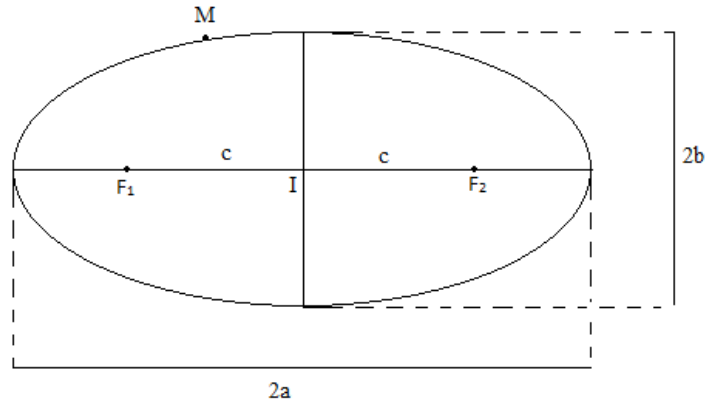
1. Hình dạng và thông số của Elip

- Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với độ dài $F_1F_2 = 2c$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thoả mãn

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Với $a > c > 0$ là số dương không đổi.

- Hình dạng:



- Mối quan hệ của a, b, c : $a^2 = b^2 + c^2$

2. Bài toán liên quan

Bài toán chung: Cho M chuyển động trên Elip (E) và một điểm A cố định. Tìm GTLN, GTNN của AM .

Bài toán số phức tương ứng: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ với $2a > |z_1 - z_2|$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z - z_0|$.

Sự tương ứng ở đây gồm:

- M là điểm biểu diễn z
- F_1, F_2 tương ứng là điểm biểu diễn z_1, z_2 .
- A là điểm biểu diễn z_0

3. Các dạng giải được

Bài toán 1. Phương trình (E) dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bài toán số phức tương ứng: Cho số phức z thỏa mãn $|z - c| + |z + c| = 2a$ hoặc $|z - ci| + |z + ci| = 2a$ (Elip đứng). Tìm GTLN, GTNN của $P = |z - z_0|$

Giải:

- Tính $b^2 = a^2 - c^2$

- Lập phương trình chính tắc của Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $|z - c| + |z + c| = 2a$. Hoặc $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ với $|z - ci| + |z + ci| = 2a$

- Rút y theo x dạng: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ đối với $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (tương tự đối với $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$)

- Thay vào P được $P^2 = (x - x_0)^2 + \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - y_0 \right)^2, x \in [-a; a]$ với $z_0 = x_0 + y_0 i$

- Dùng chức năng TABLE của máy tính cầm tay Casio tìm ra GTLN, GTNN của hàm P^2 từ đó có P .

Ví dụ minh họa:

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 6$. Tìm GTLN và GTNN của $P = |z - 1 + 3i|$

Giải:

- Có $a = 3, c = 2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$

- Phương trình chính tắc của Elip: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{9 - x^2}$

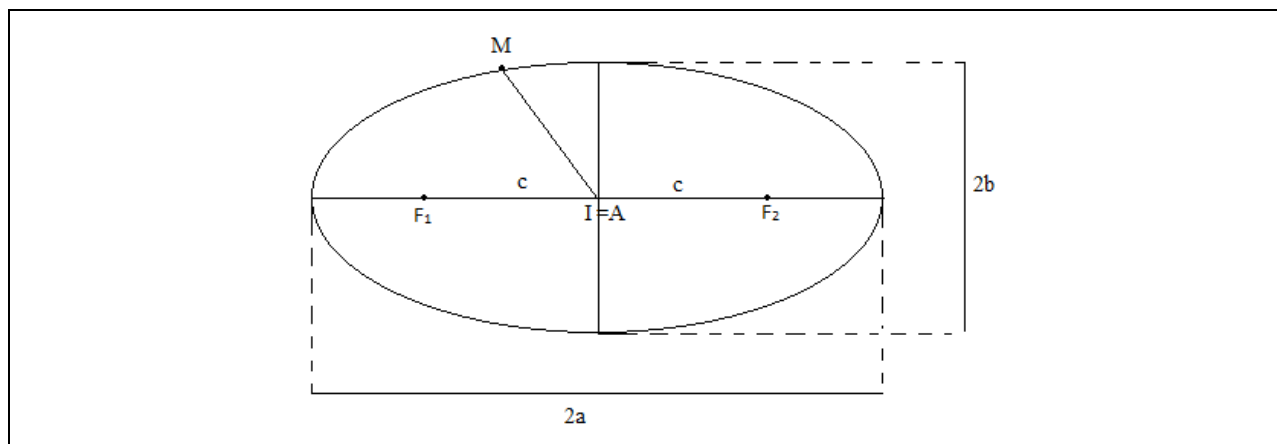
- Vậy $P^2 = (x - 1)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{9 - x^2} + 3 \right)^2 = f_{1,2}(x)$

- Bấm TABLE các hàm $f_{1,2}(x)$ với $x \in [-3; 3]$ được GTLN, GTNN của P^2

Bài toán 2. Elip không chính tắc nhưng A là trung điểm của $F_1 F_2$ tức A là tâm Elip.

Bài toán số phức tương ứng: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ với $2a > |z_1 - z_2|$.

Tìm GTLN, GTNN của $P = |z - z_0|$. Với đặc điểm nhận dạng $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$



Giải:

- Tính $2c = |z_1 - z_2| \Rightarrow c = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$

- Tính $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

- Vì A là tâm Elip và M di chuyển trên Elip nên:

+ AM lớn nhất bằng a hay $\max P = a$

+ AM nhỏ nhất bằng b hay $\min P = b$

Ví dụ minh hoạ:

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |2z + 1 + 2i|$.

Giải:

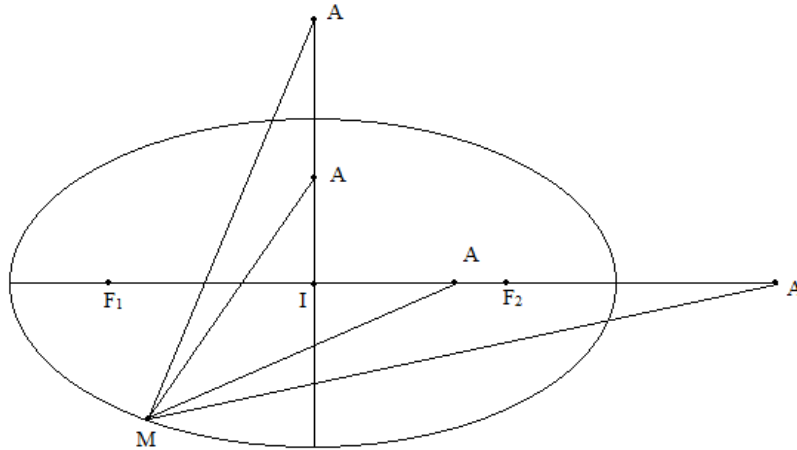
Ta có $P = |2z + 1 + 2i| \Rightarrow \frac{P}{2} = \left| z + \frac{1}{2} + i \right|$. Ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN của $P' = \left| z + \frac{1}{2} + i \right|$

Ta thấy $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -2 + i$ và $z_0 = -\frac{1}{2} - i$. Do đó $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$

- Tính $2c = |z_1 - z_2| = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$; $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. Vậy $b = \sqrt{16 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

Vậy $\max P' = 4$; $\min P' = \frac{\sqrt{39}}{2}$. Do đó $\max P = 8$ và $\min P = \sqrt{39}$

Bài toán 3. Elip không có dạng chính tắc, A không là trung điểm của F_1F_2 nhưng A nằm trên trục của Elip



Bài toán 3.1. A nằm trên trục lớn và phía ngoài Elip:

- Dấu hiệu nhận biết:
$$\begin{cases} z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \\ |z_0 - z_1| + |z_0 - z_2| > 2a \end{cases}$$

- Thì $\max P = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| + a$ và $\min P = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| - a$

Bài toán 3.2. A nằm trên trục lớn và ở phía trong Elip:

- Dấu hiệu nhận biết:
$$\begin{cases} z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \\ |z_0 - z_1| + |z_0 - z_2| < 2a \end{cases}$$

- Thì $\max P = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| + a$. Còn GTNN không xác định nhanh được.

Bài toán 3.3. A nằm trên trục nhỏ (bất kể trong hay ngoài) Elip:

- Dấu hiệu nhận biết: $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$

- Thì $\min P = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| - b$. Còn GTLN không xác định nhanh được.

Ví dụ minh hoạ:

Cho số phức z thoả mãn: $|z - i| + |z - 3 + 3i| = 6$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 6 + 7i|$

Giải:

$z_1 = i \Rightarrow F_1(0;1); z_2 = 3 - 3i \Rightarrow F_2(3;-3); z_0 = 6 - 7i \Rightarrow A(6;-7)$. I là trung điểm của F_1F_2 thì $I = \frac{z_1 + z_2}{2} = (\frac{3}{2}; -1)$

Có $z_0 - z_1 = 6 - 8i; z_0 - z_2 = 3 - 4i \Rightarrow z_0 - z_1 = 2(z_0 - z_2)$. Vậy A thuộc F_1F_2

Mặt khác $|z_0 - z_1| + |z_0 - z_2| = 10 + 5 > 6$. Vậy A nằm ngoài Elip.

Vậy $\max P = AI + a = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| + a = \frac{21}{2}; \min P = AI - a = \left| z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| - a = \frac{9}{2}$

Bấm máy: Thấy ngay $a = 3$

- Gán z_0 vào A ; z_1 vào B và z_2 vào C

- Kiểm tra A, B, C thẳng hàng: $\frac{A-B}{A-C} = k \in \mathbb{R}^+$

- Kiểm tra A nằm ngoài Elip: $|A-B| + |A-C| > 6$

- Bấm $\max P = \left| A - \frac{B+C}{2} \right| + 3; \max P = \left| A - \frac{B+C}{2} \right| - 3$

ELIP SUY BIẾN

Bài toán: Cho số phức z thoả mãn: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ nhưng có $|z_1 - z_2| = 2a$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z - z_0|$

Giải:

- Bài toán tương đương với bài toán hình học: $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$. Tìm GTLN, GTNN của $T = AM$.

- Giả thiết $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$ tương đương với M di chuyển trong đoạn thẳng F_1F_2 . Do đó:

+ Viết phương trình đường thẳng F_1F_2 với $x \in [x_1; x_2]$ (ở đây x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của F_1, F_2)

+ Rút y theo x từ phương trình F_1F_2 vào T được $T = f(x)$ với $x \in [x_1; x_2]$.

+ Tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ trên đoạn $x \in [x_1; x_2]$.

Ví dụ minh họa

Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 + 7i| = 10$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z - 1 - 4i|$

Giải

Với các quy ước từ ban đầu, có $F_1(-2;1)$, $F_2(4;-7)$ và $A(1;4)$. M là điểm biểu diễn z .

Có $F_1F_2 = 10$ do đó $|z + 2 - i| + |z - 4 + 7i| = 10 \Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng F_1F_2 .

Có $\overrightarrow{F_1F_2} = (6; -8)$ nên phương trình tham số của F_1F_2 : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$. Với $x \in [-2; 4]$

$\Rightarrow t \in [0; 2]$.

Có $P^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 = (3t-3)^2 + (4t+3)^2 = 25t^2 + 6t + 18$ với $\Rightarrow t \in [0; 2]$.

Khảo sát hàm $f(t) = 25t^2 + 6t + 18$ trên $[0; 2]$ được GTNN của $f(t)$ bằng 18, GTLN bằng 130.

Vậy $\min P = 3\sqrt{2}$ và $\max P = \sqrt{130}$

GTLN-GTNN CỦA MÔ ĐUN SỐ PHỨC KHÔNG ELIP

Thầy Lục Trí Tuyên – ĐT: 0972177717
Ngõ 20, Hồ Tùng Mậu, Cầu Giấy, Hà Nội
Website: <https://estudy.edu.vn>

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA

- Cho số phức $z = a + bi$, mô đun của z ký hiệu là $|z|$ được tính bởi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay $\overrightarrow{OM}$
- Mỗi số phức $z = a + bi$ có thể coi là một vectơ $\vec{u} = (a; b)$
- Tổng (hiệu) hai số phức bằng tổng (hiệu) hai vectơ
- $|z| = |\vec{u}|$

2. TÍNH CHẤT:

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$; $|z|^2 = |\vec{u}|^2$; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$;
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z| = |\bar{z}|$; $|z^n| = |z|^n$;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = -k \cdot z_2$ ($k > 0$)
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = k \cdot z_2$ ($k > 0$)
- Cho M, N lần lượt biểu diễn hai số phức z_1, z_2 , thì $MN = |z_1 - z_2|$
- M biểu diễn z và I biểu diễn z_0 thì $|z - z_0| = R \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm I bán kính R.
- M biểu diễn z , F_1 biểu diễn z_1 và F_2 biểu diễn z_2 thì $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của F_1F_2 .

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ÁP DỤNG

Dạng 1: Tìm $|z|$ hoặc z thoả mãn phương trình $z \cdot f(|z|) = g(|z|)$ nghĩa là phương trình bậc nhất ẩn z chứa $|z|$.

Cách giải

+ Nhận biết: Phương trình đã cho chỉ có bậc nhất với z nhưng có thể đứng nhiều nơi, còn lại là các biểu thức chứa $|z|$.

+ Nhóm z sang một vế đưa về dạng: $\boxed{z \cdot f(|z|) = g(|z|)}$ (*)

+ Lấy mô đun hai vế của (*) sử dụng tính chất $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$ được phương trình ẩn là $|z|$.

+ Giải phương trình được $|z|$.

+ Thế $|z|$ trở lại (*) giải ra z

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho số phức z khác 0 thỏa mãn $z\sqrt{3z\bar{z}+1} = |z|(2+6iz)$

Hướng dẫn: Ta thấy trong phương trình chỉ có bậc nhất với z , còn lại là $|z|$ (chú ý là $z\bar{z} = |z|^2$).
Vậy đây là dạng toán đang tìm hiểu!.

Chuyển hết z sang một vế ta được: $z(\sqrt{3|z|^2+1}-6|z|i) = 2|z|$ (*).

Lấy mô đun 2 vế của (*) ta được: $|z|\sqrt{(3|z|^2+1)+36|z|^2} = 2|z| \Leftrightarrow \sqrt{39|z|^2+1} = 2$ (do $z \neq 0$)
 $\Leftrightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Tìm $|z|$

Hướng dẫn: Điều kiện $z \neq 0$, quy đồng ta được $(2+i)|z|z = \sqrt{10} + z - 2iz$
 $\Leftrightarrow (2|z|-1+(|z|+2)i)z = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2} \cdot |z| = \sqrt{10} \Rightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 = 10 \Rightarrow |z| = 1$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $z-4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$. Tìm $|z|$

Đáp số: $|z| = 2$

Hướng dẫn: Dồn z về một vế ta được $z(1+3i) = (|z|+4) + (|z|-4)i$

Lấy mô đun 2 vế, suy ra $|z|\sqrt{10} = \sqrt{(|z|+4)^2 + (|z|-4)^2} \Leftrightarrow 10|z|^2 = 2|z|^2 + 32 \Leftrightarrow |z| = 2$

Ví dụ 4: Tìm $|z|$ biết $(1+i)z - \frac{1}{|z|} = i - 2$

Đáp số: $|z| = 1$

Hướng dẫn: Quy đồng và dồn z về một vế ta được $(1+i)|z|z = (1-2|z|) + |z|i$. Lấy mô đun 2

vế ta được $\sqrt{2}|z|^2 = \sqrt{(1-2|z|)^2 + |z|^2} \Leftrightarrow 2|z|^4 = 5|z|^2 - 4|z| + 1$ (chú ý $|z| > 0$)

Nhằm thấy phương trình có nghiệm $|z| = 1$, phương trình bậc 3 còn lại vô nghiệm với $|z| > 0$.

Dạng 2: Cho $|z_1| = m$, $|z_2| = n$ và $|az_1 + bz_2| = p$ tính $q = |cz_1 + dz_2|$.

Cách giải

Coi $z_1 = \vec{u}$ và $z_2 = \vec{v}$ thì $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = m^2$, $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = n^2$ và $(a\vec{u} + b\vec{v})^2 = p^2$; $(c\vec{u} + d\vec{v})^2 = q^2$.

Khai triển:

$$p^2 = a^2m^2 + b^2n^2 + 2ab.\vec{u}\vec{v} \quad (1)$$

$$q^2 = c^2m^2 + d^2n^2 + 2cd.\vec{u}\vec{v} \quad (2)$$

Bây giờ khử $\vec{u}\vec{v}$ là xong:

Nhân (1) với cd và nhân (2) với ab rồi trừ đi, được:

$$cd.p^2 - ab.q^2 = cd(a^2m^2 + b^2n^2) - ab(c^2m^2 + d^2n^2)$$

$$\Leftrightarrow cd.p^2 - ab.q^2 = acm^2(ad - bc) - bdn^2(-bc + ad) \quad \boxed{\Leftrightarrow cd.p^2 - ab.q^2 = (ad - bc)(acm^2 - bdn^2)}$$

Đặc biệt: Khi $a = b = 1$ và $c = -d = 1$, ta có công thức hình bình hành

$$\boxed{2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: cho các số phức thỏa mãn $|z_1| = 1$; $|z_2| = 3$ và $|z_1 - 3z_2| = 2$. Tính $P = |2z_1 + 3z_2|$

Đáp số: $P = \sqrt{241}$

Hướng dẫn: coi các số phức z_1, z_2 là các vector $\vec{u}, \vec{v}$ ta có:

$$4 = |z_1 - 3z_2|^2 = |z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 6\vec{u}.\vec{v} \quad (1)$$

$$P^2 = |2z_1 + 3z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Nhân (1) với 2 rồi cộng với (2) ta được: $8 + P^2 = 6|z_1|^2 + 27|z_2|^2 \Rightarrow P^2 = 241 \Rightarrow P = \sqrt{241}$

Ví dụ 2: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 3$. Tìm GTLN của $P = |z_1| + |z_2|$

Đáp số: $\max P = \sqrt{34}$

Hướng dẫn: coi các số phức z_1, z_2 là các vector $\vec{u}, \vec{v}$ ta có:

$$25 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (1) \text{ và } 9 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2). \text{ Cộng (1) với (2) được } 34 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

. Mặt khác, theo bất đẳng thức BNC, ta có $P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow P^2 \leq 34$
 $\Rightarrow P \leq \sqrt{34}$.

Ví dụ 3: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2z_2| = 5$ và $|3z_1 - z_2| = 3$. Tìm GTLN của $P = |z_1| + |z_2|$

Đáp số: $\max P = \sqrt{\frac{155}{14}}$

Hướng dẫn: coi các số phức z_1, z_2 là các vector $\vec{u}, \vec{v}$ ta có:

$$25 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (1) \text{ và } 9 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2). \text{ Nhân (1) với 3 và nhân (2) với 2 rồi cộng lại ta có: } 93 = 21|z_1|^2 + 14|z_2|^2.$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức BNC cho P^2 :

$$P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}(\sqrt{21}|z_1|) + \frac{1}{\sqrt{14}}(\sqrt{14}|z_2|) \right)^2 \leq \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{14} \right) (21|z_1|^2 + 14|z_2|^2) = \frac{155}{14}$$

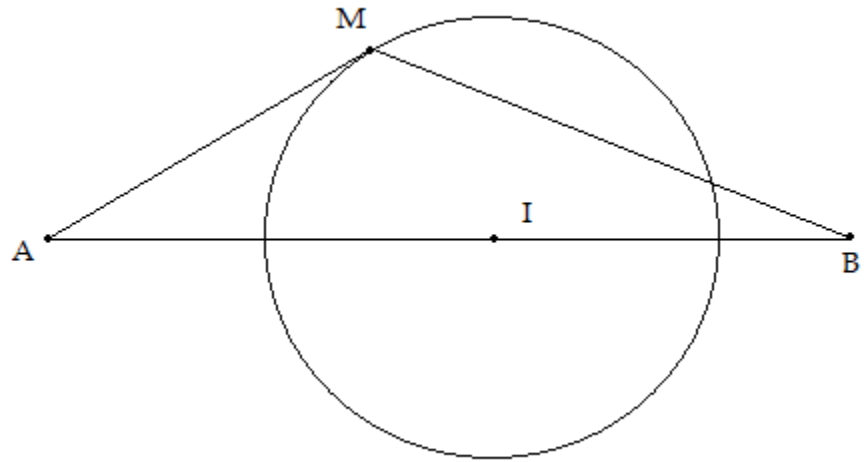
$$\Rightarrow P \leq \sqrt{\frac{155}{14}}.$$

Dạng 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_0| = R$. Tìm GTLN của $P = a|z - z_1| + b|z - z_2|$ biết rằng $z_0 - z_1 = -k(z_0 - z_2)$, $k > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$.

Cách giải

Ý nghĩa hình học: Cho điểm M chuyển động trên đường tròn tâm I bán kính R. Cho A, B là 2 điểm cố định thỏa mãn I nằm trong đoạn thẳng AB. Tìm giá trị lớn nhất của $P = aMA + bMB$.

Trừ khi I là trung điểm của AB, nếu không sử dụng hình học để giải bài này là nhiệm vụ không hề dễ dàng. Ta sẽ dùng các tính chất về mô đun của số phức để giải quyết bài toán.



Ta có:

$$|z - z_1|^2 = |z - z_0 + z_0 - z_1|^2$$

$$= |z - z_0|^2 + |z_0 - z_1|^2 + 2\vec{u} \cdot (-k\vec{v}) \quad (1)$$

$$|z - z_2|^2 = |z - z_0 + z_0 - z_2|^2 = |z - z_0|^2 + |z_0 - z_2|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

với $\vec{u}$ là vector biểu diễn $z - z_0$ và $\vec{v}$ là vector biểu diễn $z_0 - z_2$ với lưu ý $z_0 - z_1 = -k(z_0 - z_2)$

Nhân (2) với k rồi cộng với (1) ta được:

$$|z - z_1|^2 + k|z - z_2|^2 = (1+k)\left(R^2 + k|z_0 - z_2|^2\right) \text{ (không đổi)}$$

Áp dụng bất đẳng thức BNC cho P^2 , ta có:

$$P^2 = \left(a|z - z_1| + b|z - z_2|\right)^2 = \left(a|z - z_1| + \frac{b}{\sqrt{k}}\sqrt{k}|z - z_2|\right)^2 \leq \left(a^2 + \frac{b^2}{k}\right)\left(|z - z_1|^2 + k|z - z_2|^2\right)$$

$$\Rightarrow P^2 \leq \left(a^2 + \frac{b^2}{k}\right)(1+k)\left(R^2 + k|z_0 - z_2|^2\right).$$

Vậy, với công thức cộng kênh như vậy rất khó nhớ, cho nên các em nên nhớ cách làm của nó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm GTLN của $T=|z+i|+|z-2-i|$

Đáp số: $\max T = 4$

Hướng dẫn: Tâm I đường tròn trong giả thiết là $z_0 = 1$, bán kính $r = \sqrt{2}$. Điểm A và B ứng với hai số phức $z_1 = -i$ và $z_2 = 2+i$. Dễ thấy rằng $z_0 - z_1 = -(z_0 - z_2)$. Vậy thậm chí I là trung điểm của AB. Ta có:

$$|z+i|^2 = |z-1+1+i|^2 = |z-1|^2 + |1+i|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} \quad (1)$$

$$|z-2-i|^2 = |z-1-1-i|^2 = |z-1|^2 + |1+i|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} \quad (2). \text{ Với } \vec{u}, \vec{v} \text{ biểu diễn } z-1 \text{ và } 1+i.$$

Cộng (1) với (2) ta được:

$$|z+i|^2 + |z-2-i|^2 = 2|z-1|^2 + 4 = 8 \text{ (không đổi)}$$

Áp dụng BNC:

$$T^2 = (|z+i| + |z-2-i|)^2 \leq 2(|z+i|^2 + |z-2-i|^2) = 16 \Rightarrow T \leq 4$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=2$. Tìm GTLN của $T=|z|+|z-3-6i|$

Đáp số: $\max T = 3\sqrt{7}$

Hướng dẫn: Ta có

$$|z|^2 = |z-1-2i+1+2i|^2 = |z-1-2i|^2 + |1+2i|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} \quad (1)$$

$$|z-3-6i|^2 = |z-1-2i-2-4i|^2 = |z-1-2i|^2 + 4|1+2i|^2 - 4\vec{u}.\vec{v} \quad (2). \text{ Với } \vec{u}, \vec{v} \text{ biểu diễn } z-1-2i \text{ và } 1+2i.$$

Nhân (1) với 2 rồi cộng với (2) được:

$$2|z|^2 + |z-3-6i|^2 = 3|z-1-2i|^2 + 6|1+2i|^2 = 12 + 30 = 42$$

Áp dụng bất đẳng thức BNC:

$$T^2 = (|z| + |z-3-6i|)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}|z| + |z-3-6i| \right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 1 \right) (2|z|^2 + |z-3-6i|^2) = 63 \Rightarrow T \leq 3\sqrt{7}$$

Dạng 4. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{z_0}{z}\right| \leq k, (k > 0)$ hay dạng tương đương $|z^2 + z_0| \leq k|z|, (k > 0)$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z|$.

Cách giải

Áp dụng bất đẳng thức $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$, ta có $\left||z|^2 - |z_0|\right| \leq |z^2 + z_0|$. Mặt khác, $|z^2 + z_0| \leq k|z|$

$$\Rightarrow \left||z|^2 - |z_0|\right| \leq k|z| \Rightarrow -k|z| \leq |z|^2 - |z_0| \leq k|z| \Rightarrow \begin{cases} |z|^2 - k|z| - |z_0| \leq 0 \\ |z|^2 + k|z| - |z_0| \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4|z_0|}}{2} \leq |z| \leq \frac{k + \sqrt{k^2 + 4|z_0|}}{2}$. Đánh giá 1 lần đối với hàm 2 biến đảm bảo dấu “=” xảy ra. Tôi không giải chi tiết ở đây.

$$\text{Vậy } \min T = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4|z_0|}}{2} \text{ và } \max T = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4|z_0|}}{2}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 2$. Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của $|z|$.

Tính $T = M + m$

Đáp số: $T = 2\sqrt{5}$

Hướng dẫn: $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow |z^2 + 4i| = 2|z|$. Áp dụng bất đẳng thức $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$, ta có

$$\left||z|^2 - 4\right| \leq |z^2 + 4i| \Rightarrow -2|z| \leq |z|^2 - 4 \leq 2|z| \Rightarrow -1 + \sqrt{5} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}.$$

Vậy $M = 1 + \sqrt{5}$ và $m = -1 + \sqrt{5}$. Do đó $T = 2\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z^2 + 1 - 2i| \leq \sqrt{2}|z|$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z|$.

Hướng dẫn: Ta có thể đưa về dạng quen thuộc bằng cách chia cả hai vế cho $|1+i|$, ta được

$$\left|z^2 + \frac{1-2i}{1+i}\right| \leq |z|.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$, ta có $\left| |z|^2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right| \leq \left| z^2 + \frac{1-2i}{1+i} \right| \leq |z|$

$$\Rightarrow -|z| \leq |z|^2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \leq |z| \Rightarrow -1 + \sqrt{1+2\sqrt{10}} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{1+2\sqrt{10}}.$$

Vậy $\max T = 1 + \sqrt{1+2\sqrt{10}}$ và $\min T = -1 + \sqrt{1+2\sqrt{10}}$

Dạng 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z - z_2| = k > 0$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z - z_0|$

Cách giải

Ý nghĩa hình học: Gọi M là điểm biểu diễn z , có $|z_1 \cdot z - z_2| = k \Leftrightarrow \left| z - \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{k}{|z_1|} \Leftrightarrow IM = R$ với

I biểu diễn $\frac{z_2}{z_1}$ và $R = \frac{k}{|z_1|}$. Vậy M chuyển động trên đường tròn tâm I bán kính R . Gọi A là

điểm biểu diễn z_0 thì $T = AM$. Bài toán trở thành: “cho M di chuyển trên đường tròn tâm I bán kính R và A là điểm cố định. Tìm GTLN, GTNN của AM ”

Như vậy, nhìn vào hình vẽ ta thấy ngay:

$$\min T = |AI - R| = \left| \left| z_0 - \frac{z_2}{z_1} \right| - \frac{k}{|z_1|} \right| = \frac{||z_1 \cdot z_0 - z_2| - k|}{|z_1|}$$

$$\max T = |AI + R| = \left| \left| z_0 - \frac{z_2}{z_1} \right| + \frac{k}{|z_1|} \right| = \frac{|z_1 \cdot z_0 - z_2| + k}{|z_1|}$$

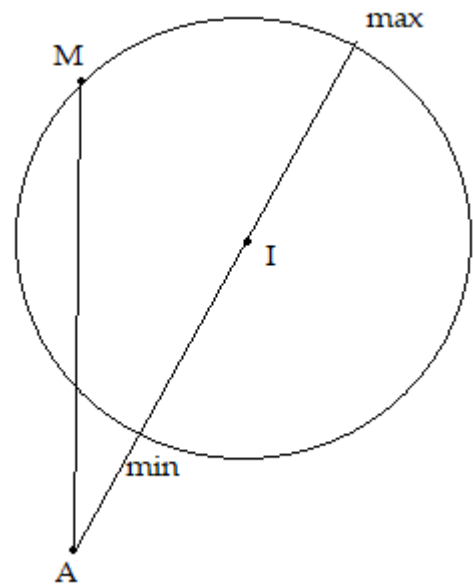
(từ số như là thay z_0 vào phương trình đường tròn vậy)

Lưu ý: Không phải phương trình đường tròn nào cũng có dạng $|z_1 \cdot z - z_2| = k > 0$, mà đôi khi nó ở dạng

$|z_1 z - z_2| = |z_1 z - z_3|$ với $|z_1| \neq |z_2|$. Do đó, để kiểm tra điều

kiện giả thiết là phương trình đường tròn hay đường

thẳng trong trường hợp lạ, cách tốt nhất là gọi $z = x + yi$ rồi thay vào giả thiết để biết $(x; y)$ thỏa mãn phương trình nào.



VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 4$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z + 1 - i|$

Đáp số: $\min P = 4 - \sqrt{13}$ và $\max P = 4 + \sqrt{13}$

Hướng dẫn: Viết T dạng $T = |z - z_0|$ thì $z_0 = -1 + i$. Thay vào phương trình đầu ta được $|z_0 - 1 + 2i| = |-2 + 3i|$.

Vậy $\min P = 4 - \sqrt{13}$ và $\max P = 4 + \sqrt{13}$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|2iz - 1 + 3i| = 1$. Tính GTLN, GTNN của $T = |z + 2 - 3i|$

Đáp số: $\min P = \frac{5\sqrt{2} - 1}{2}$ và $\max P = \frac{5\sqrt{2} + 1}{2}$.

Hướng dẫn: Viết T dạng $T = |z - z_0|$ thì $z_0 = -2 + 3i$. Thay z_0 vào $|2iz - 1 + 3i|$ ta được $|2iz_0 - 1 + 3i| = |-7 - i| = 5\sqrt{2}$.

Vậy $\min P = \frac{5\sqrt{2} - 1}{2}$ và $\max P = \frac{5\sqrt{2} + 1}{2}$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 1| = |z + 2i|$. Tìm GTLN, GTNN của $T = |z + 1 + 2i|$

Đáp số: $\min T = \frac{\sqrt{65}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{3}$ và $\max T = \frac{\sqrt{65}}{3} + \frac{\sqrt{11}}{3}$

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), và $M(x; y)$ biểu diễn z thì $|2z - 1| = |z + 2i|$
 $\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y)^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 1 = 0$.

Vậy M nằm trên đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

Có $T = |z + 1 + 2i| = AM$ với $A(-1; -2)$.

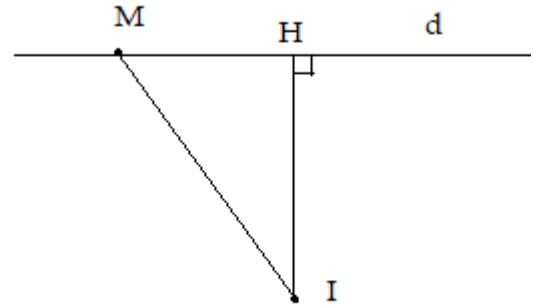
Vậy $\min T = AI - R = \frac{\sqrt{65}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{3}$ và $\max T = AI + R = \frac{\sqrt{65}}{3} + \frac{\sqrt{11}}{3}$

Dạng 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm GTNN của $T = |z - z_0|$.

Cách giải

Ý nghĩa hình học: Điều kiện $|z - z_1| = |z - z_2|$ thực chất là phương trình đường thẳng.

Nếu ta gọi M là điểm biểu diễn z , A là điểm biểu diễn z_1 và B biểu diễn z_2 thì giả thiết tương đương với $MA = MB$ hay M nằm trên trung trực của AB . Gọi I là điểm biểu diễn z_0 thì $T = IM$.



Vậy IM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên d . Giá trị nhỏ nhất bằng $\min T = d(I, d)$.

Lưu ý: Không phải phương trình đường thẳng nào cũng có dạng $|z - z_1| = |z - z_2|$, cho nên khi gặp giả thiết lạ, cách tốt nhất để nhận biết giả thiết là đường thẳng hay đường tròn là gọi $z = x + yi$ rồi thay vào phương trình.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Tìm GTNN của $|z|$.

Đáp số: $\min |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$ thì $M(x; y)$ là điểm biểu diễn z . Từ $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$ (d). Vậy M di chuyển trên (d).

Có $|z| = OM$, do đó $|z|$ nhỏ nhất bằng $d(O; d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 1 + i|$

Đáp số: $\min T = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$, ta có $z + 3 - (\bar{z} + 1 + 3i) = ((x + 3) + (y - 1)i) \times ((x + 1) + (-y + 3)i)$.
 Tích này có phần ảo là $(x + 3)(-y + 3) + (y - 1)(x + 1)$. Phần ảo bằng 0
 $\Leftrightarrow 3x - 3y + 9 - x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$ (d). Vậy nếu gọi M là điểm biểu diễn z thì M chạy trên đường thẳng (d).

Gọi $A(1; -1)$ là điểm biểu diễn $-1 + i$ thì $T = AM$. Giá trị T nhỏ nhất bằng khoảng cách từ A đến (d). Vậy $\min T = \frac{|1 + 1 + 4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

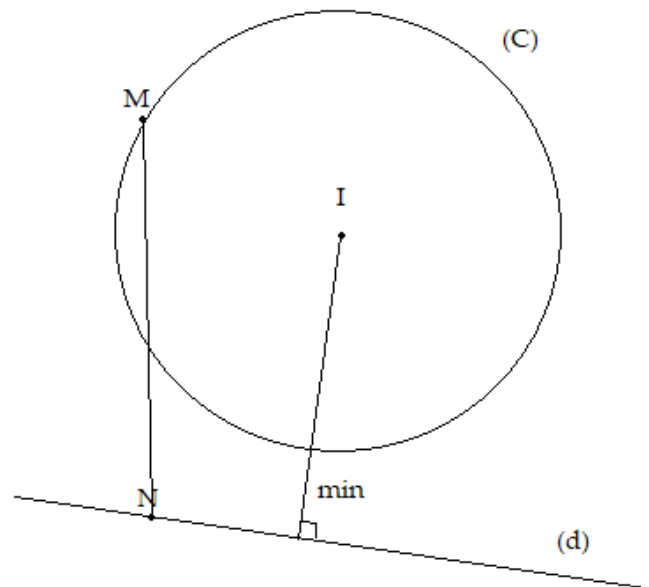
Dạng 7. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_1^*| = R$ và $|z_2 - z_2^*| = |z_2 - z_3^*|$, với z_1^*, z_2^*, z_3^* cho trước. Tìm GTNN của $T = |z_1 - z_2|$

Cách giải

Ý nghĩa hình học: Gọi M, N là các điểm biểu diễn z_1, z_2 . Giả thiết $|z_1 - z_1^*| = R$ tương đương với M thuộc đường tròn tâm I bán kính R (gọi là đường tròn (C)). Giả thiết $|z_2 - z_2^*| = |z_2 - z_3^*|$ tương đương với N thuộc đường thẳng (d). Bài toán trở thành tìm M thuộc (C) và N thuộc (d) sao cho $T = MN$ ngắn nhất.

Từ hình vẽ ta thấy ngay giá trị nhỏ nhất của MN bằng $d(I, (d)) - R$

Vậy $\min T = d(I, (d)) - R$.



VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z_1 - z_2|$.

Đáp số: $\min MN = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn: : Gọi M, N là các điểm biểu diễn z_1, z_2 . Giả thiết $|z_1 + 5| = 5$ tương đương M thuộc đường tròn tâm $I(-5;0)$ bán kính $R = 5$. Giả thiết $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \Leftrightarrow$ N thuộc đường thẳng (d): $8x + 6y - 35 = 0$. Vậy $\min MN = d(I, (d)) - R = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 4 - 3i| = 2$ và $|z_2 + 2 - 3i| = |z_2 - 1 + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z_1 - z_2|$.

Đáp số: $\min MN = \frac{23\sqrt{34}}{34} - 2$

Hướng dẫn: Gọi M, N là các điểm biểu diễn z_1, z_2 . Giả thiết $|z_1 + 4 - 3i| = 2$ tương đương M thuộc đường tròn tâm $I(-4;3)$ bán kính $R = 2$. Giả thiết $|z_2 + 2 - 3i| = |z_2 - 1 + 2i| \Leftrightarrow$ N thuộc đường thẳng (d): $3x - 5y + 4 = 0$. Vậy $\min MN = d(I, (d)) - R = \frac{23}{\sqrt{34}} - 2 = \frac{23\sqrt{34}}{34} - 2$.

Lời kết:

- Các bài toán trên có thể giải bằng phương pháp đại số bằng cách rút một ẩn theo ẩn còn lại từ giả thiết để thay vào biểu thức cần đánh giá thành hàm số dạng $T = f(x)$. Sau đó tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ trên miền xác định của $f(x)$.
- Các đánh giá đảm bảo chặt chẽ cần chứng tỏ có đẳng thức (dấu “=”) xảy ra. Để tránh phức tạp vấn đề tôi không trình bày ở đây. Tuy nhiên các bài toán tổng quát đã nêu đều đảm bảo điều đó.