

GV.THS NGUYỄN VŨ MINH
0917 05 00 99

HÀM SỐ

(TOÁN 12-CTST)

CHƯƠNG 01

FACEBOOK



01 : ĐƠN ĐIỀU - CỰC TRỊ

02 : GTLN - GTNN

03 : TIỆM CẬN

04 : KHẢO SÁT - VẼ ĐỒ THỊ

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Chương I: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát Hàm Số

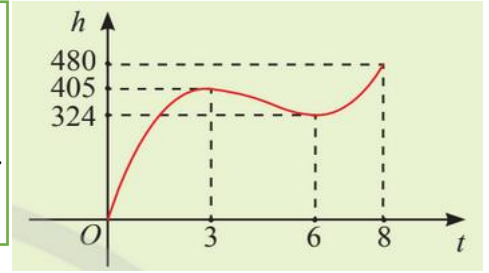


Bài 01: Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

1 Tính đơn điệu của hàm số

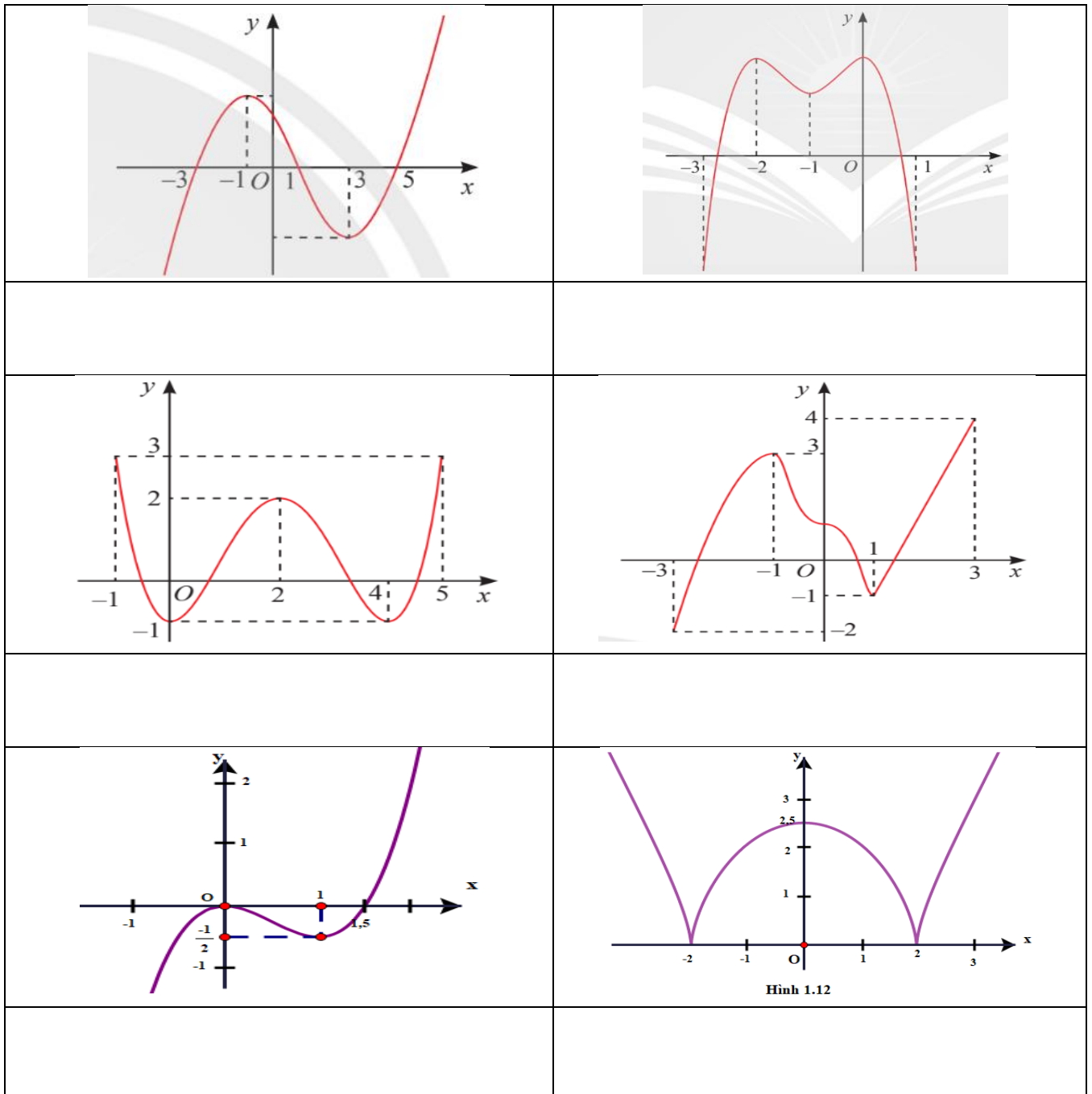
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .



Ví dụ 01: Từ hình vẽ hàm số $h(t)$ bên cạnh, hãy chỉ ra các khoảng đồng biến và nghịch biến ?

Ví dụ 02: Tìm các **khoảng đơn điệu** của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như các hình bên dưới ?



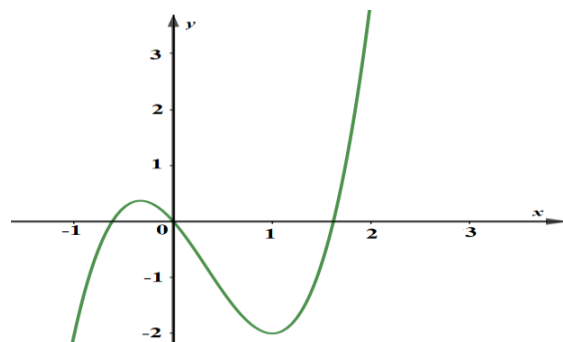
Hình 1.12



2.1 Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

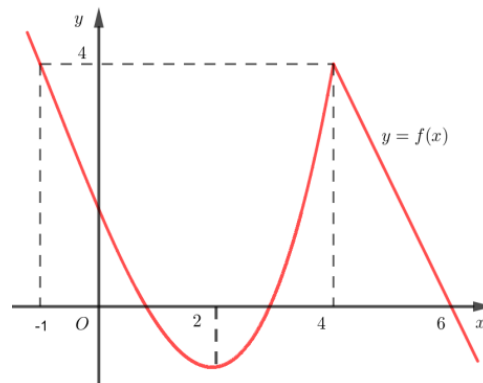
- A. $(-\infty; -2)$.
 B. $(1; 2)$.
 C. $(0; \frac{1}{2})$.
 D. $(0; 3)$.



2.2 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên

dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

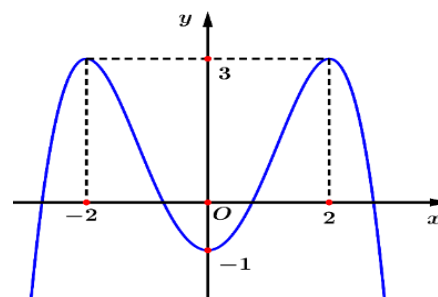
- A. $(2; 6)$.
 B. $(0; 4)$.
 C. $(3; 4)$.
 D. $(-1; 4)$.



2.3 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$.
 B. $(-\infty; -2)$.
 C. $(-2; 0)$.
 D. $(-2; 2)$.



Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà **đạo hàm bằng 0** hoặc **không tồn tại**.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 03: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây

a/ $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 13$

b/ $y = x^3 - 3x + 1$

c/ $y = x^4 - 5x^2 + 1$

d/ $y = -x^3 + x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

3.1 (Đề THPT QG 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

3.2 (sở GD Hải Dương 2023) Hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

3.3 (THPT Liên Trường 2019) Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 3x^2$. B. $y = -5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = x^3 + x^2 + 5x - 1$.

3.4 (sở GD Kiên Giang – 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau: Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào liệt kê dưới đây?

- A. $(-\infty; 8)$. B. $(-5; 5)$.
 C. $(-7; 8)$. D. $(-\infty; -5)$.

x	$-\infty$	-5	0	5	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			8		-7		8	
	$-\infty$							$-\infty$

3.5 (sở GD Hải Dương – 2023) Cho hàm số

$y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$.
 B. $(-\infty; -1)$.
 C. $(0; +\infty)$.
 D. $(-2; -1)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2		
		1				$-\infty$

3.6 (THPTQG 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2				
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Ví dụ 04: Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.



4.1 Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây: a/ $y = \frac{2x-2025}{x+1}$

b/ $y = \frac{x+1}{3-x}$

4.2 (THPT Sóc Sơn 2023) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

4.3 Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên với $x \neq 1$.

Ví dụ 05: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây a/ $y = \frac{x^2+x+4}{x-3}$

b/ $y = \frac{x^2-3x+5}{x+1}$

Ví dụ 06: (các bài toán ứng dụng thực tế) Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức

$$f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44 \text{ (tỉ USD)} \text{ với } x \text{ là số năm tính từ 2010 đến 2017 } (0 \leq x \leq 7)$$

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

6.1 Xét một chất điểm chuyển động dọc trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

6.2 Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$,

(v được tính bằng ft/s, $1 \text{ feet} = 0,3048 \text{ m}$)

Hỏi **gia tốc** của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?



(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Ví dụ 07: Câu hỏi **Đúng - Sai**

Xét các mệnh đề sau	Đúng	Sai
1. Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		
2. Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.		
3. Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		

Ví dụ 08: (**xét dấu dựa vào đạo hàm**) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-2)(x+3)^4(1-2x)^3$. Tìm khoảng đồng biến – nghịch biến của hàm số?



8.1 (sở GD Hải Dương – 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x+2)(1-x)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A. $(2;3)$. B. $(-1;1)$. C. $(0;2)$. D. $(-\infty;1)$.

8.2 (Sở GD Ninh Thuận 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-3)^{2023}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-3;1)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(-1;3)$. D. $(-1;+\infty)$.

8.3 (sở GD Bắc Ninh – 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3(x-2)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty;-1)$. B. $(0;1)$. C. $(-1;0)$. D. $(1;+\infty)$.

8.4 (sở GD Bắc Giang – 2023) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x^2-1)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty;0)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(-1;+\infty)$. D. $(-1;1)$.

8.5 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + x.f'(x) = x(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty;0)$. B. $(1;2)$. C. $(2;+\infty)$. D. $(0;2)$.

Ví dụ 09: (Đơn điệu hàm số tìm m – dạng mở rộng)

Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

Bước 1: Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Bước 2: Ghi điều kiện để hàm đơn điệu, chẳng hạn:

Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

🔍 **Lưu ý:** Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\bullet \quad \boxed{f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}}. \quad \bullet \quad \boxed{f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}}.$$

9.1 Tìm m để các hàm số sau luôn giảm trên từng khoảng xác định :

a/ $y = \frac{mx-1}{x+2}$

b/ $y = \frac{m^2x-1}{-4x+1}$

9.2 Tìm m để các hàm số sau luôn tăng trên từng khoảng xác định :

a/ $y = \frac{mx+4}{x-4}$

b/ $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 2(m^2+2)x - 4$

9.1 (THPTQG2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

9.2 Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathcal{D}$ của nó?



9.3 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx - m^2 + 3}{x + 2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

9.4 Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

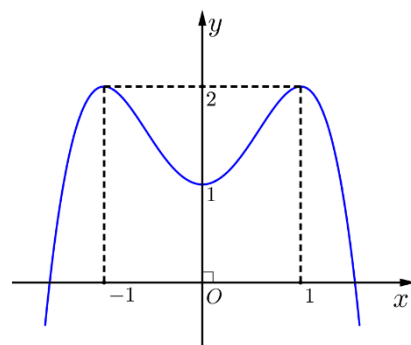
9.5 Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty; -3)$.



Trắc nghiệm

Câu 01: (Sở GD Ninh Thuận 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 0)$.
C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 1)$.



Câu 02: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

Câu 03: (THPT Đội Cấn 2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	-2		3		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1		0		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(3; 5)$. C. $(-2; 3)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 04: (Sở GD Bắc Ninh – 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; 3)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 05: (Sở GD Bắc Giang 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau: Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-3; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Câu 06: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số

m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 7m - 8}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $-8 < m < 0$.
B. $-8 < m \leq 0$.
C. $-8 \leq m < 1$.
D. $-8 \leq m \leq 0$.

Câu 07: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- A. $-4 < m < 1$. B. $-4 \leq m \leq 1$.
C. $-4 < m \leq -1$. D. $-4 < m < -1$.

Câu 08: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (m+6)x - 2m - 1$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của tham số m để hàm số sẽ tăng trên $\mathbb{R}$ là

- A. $-2, 3$ B. $-2, 4$ C. $6; 9$ D. $-1; 4$

Câu 09: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-1)x - 3$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m < 0$.
B. $m \geq 0$.
C. $m \geq \frac{3}{2}$.
D. $0 < m < \frac{3}{2}$.

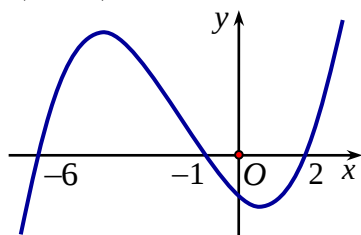
Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.



D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(2;3)$. B. $(-2;-1)$.
C. $(-1;0)$. D. $(0;1)$.

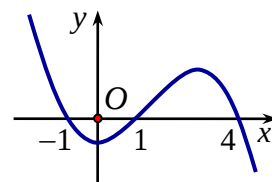
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(0;2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $(-2;-1)$.



Bài tập về nhà: Tìm m để các hàm số sau :

a/ $y = \frac{mx+1}{x+m}$ luôn giảm trên từng khoảng xác định

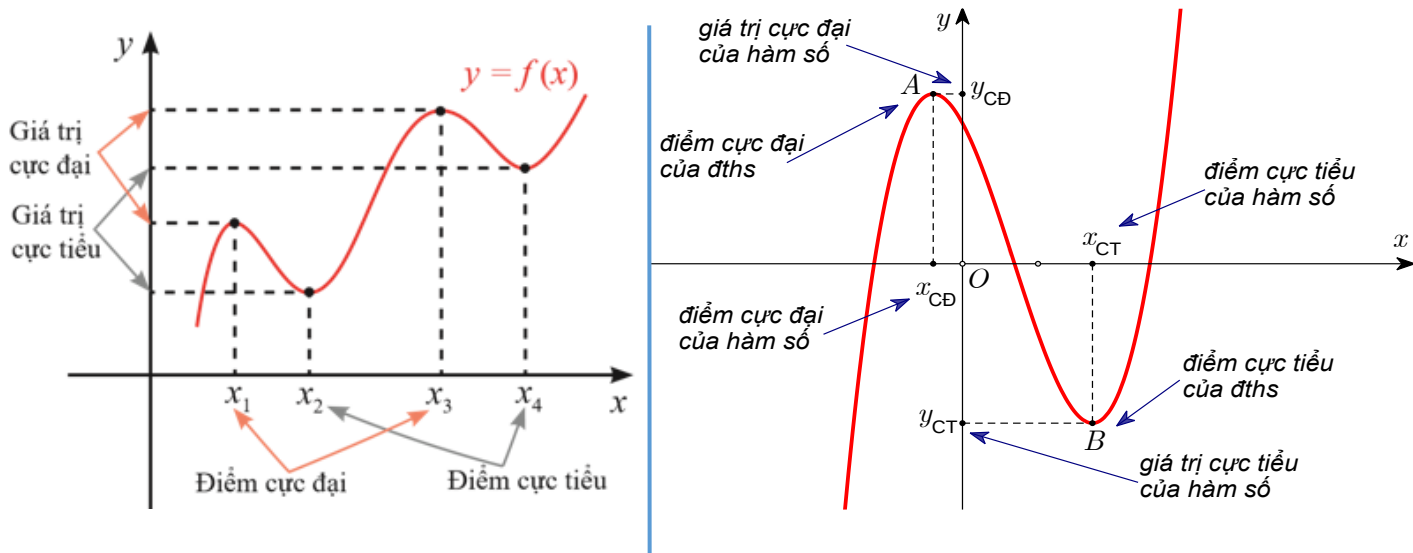
b/ $y = x^3 + 3mx^2 + 3x - 1$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$ (Đs : $-1 \leq m \leq 1$)

c/ $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$ luôn tăng (Đs : $m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2}$)

2 Cực trị của hàm số

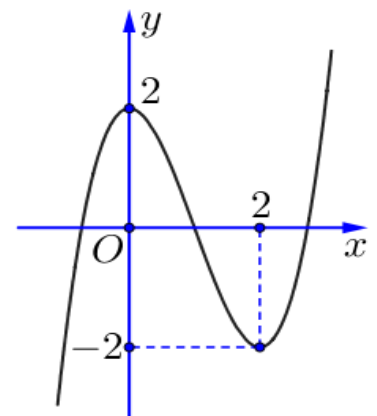
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

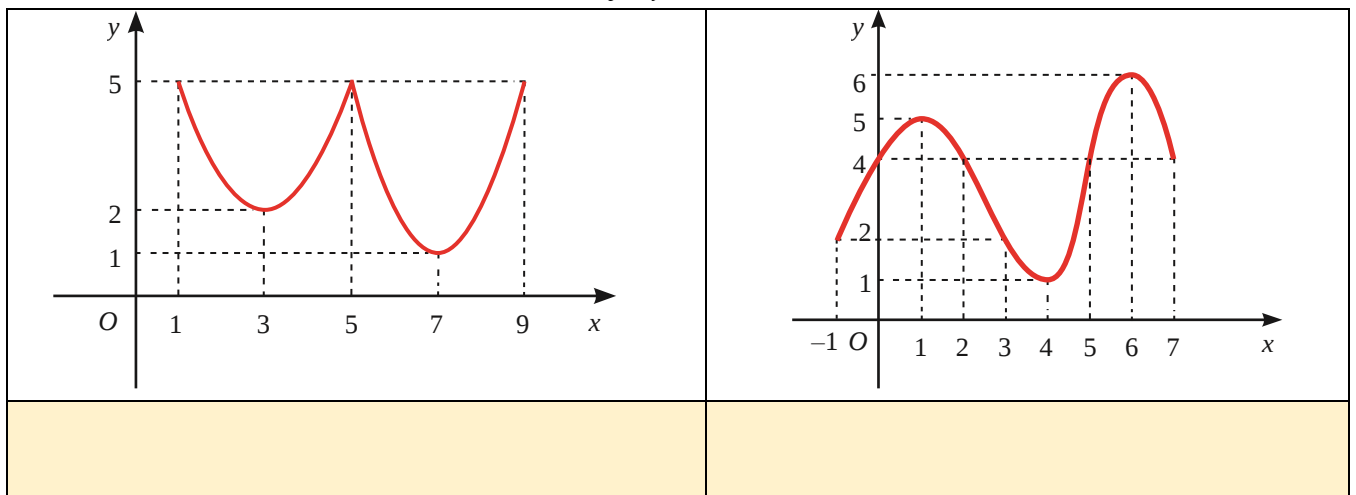


Ví dụ 01: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là :	
Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là :	
Điểm cực đại của hàm số là :	
Điểm cực tiểu của hàm số là :	
Điểm cực đại của đồ thị hàm số là :	
Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là :	



Ví dụ 02: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình vẽ.



Ví dụ 03: Tìm cực trị các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 6x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

c) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

d) $y = -3x^4 + 5$

e) $y = \frac{2}{3-x}$

f) $y = \frac{x+1}{5+3x}$

 **Cần nhớ:** Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có cực trị.

Các bước để tìm cực trị hàm số

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i=1, 2, \dots)$ mà **đạo hàm bằng 0** hoặc **không tồn tại**.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và **lập bảng biến thiên** của hàm số.
4. Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số..

Ví dụ 02: Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là các điểm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 2025$. Tính tổng $x_1 + 2x_2 + 3x_3$?

Ví dụ 03: Tìm cực trị các hàm số sau: a/ $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$

b/ $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

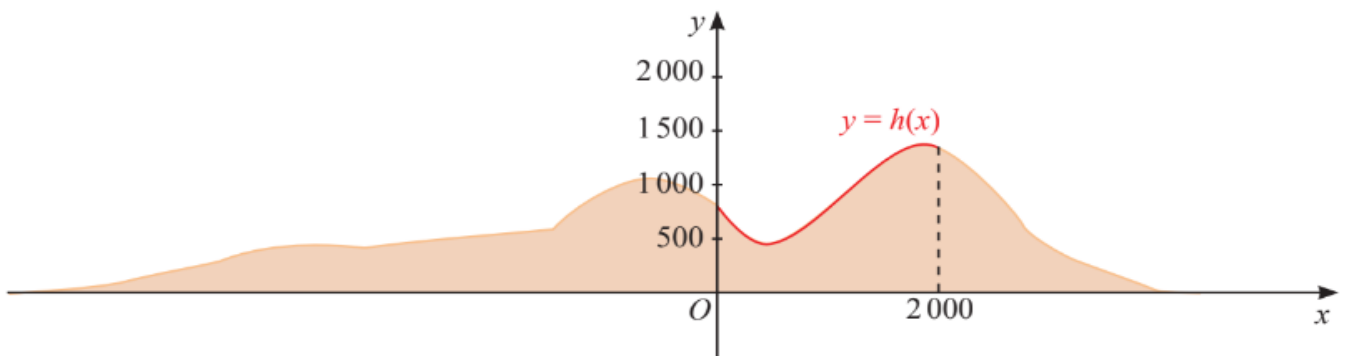
Ví dụ 04: Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị các hàm số sau:

a/ $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 4$

b/ $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$

Ví dụ 05: Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng **mét** được mô tả bởi hàm số

$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840$ với $0 \leq x \leq 2000$. Tìm **toạ độ các đỉnh** của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$ (**mét**)



Ví dụ 06: Cho hàm số $y = f(t) = \frac{3t-1}{-4+2t}$.

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		
2. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.		
3. Đồ thị hàm số không có cực trị.		
4. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$		

Ví dụ 07: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^{2024}(x-2)^{2019}(3x-1)^{2023}$.

Tìm số điểm cực trị của hàm số

7.1 (Sở Yên Bái 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 4.
C. 1. **D.** 3.

7.2 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-1)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

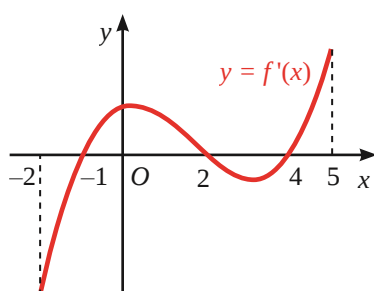
- A.** 4 **B.** 3
C. 1 **D.** 2

7.3 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Tìm điểm cực trị hàm số $y = f(x)$

7.4 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-2)(x+3)^2(1-2x)^3$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

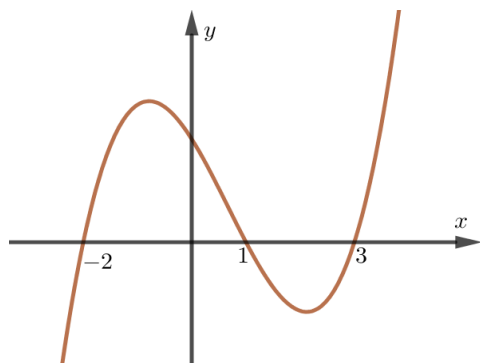
- A.** 0.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

Ví dụ 08: Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như **Hình**. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

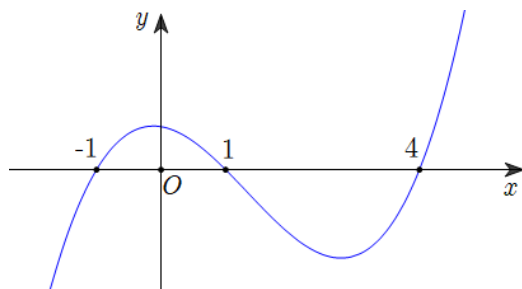


8.1 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

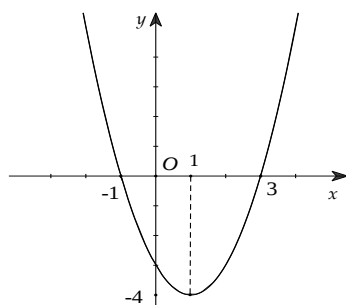
a/



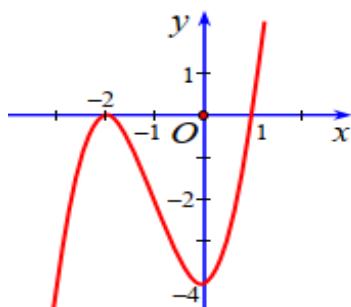
b/



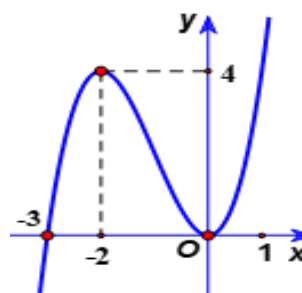
c/



d/



e/



Ví dụ 09: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Tìm các khoảng đơn điệu và điểm cực trị của hàm số ?

9.1 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

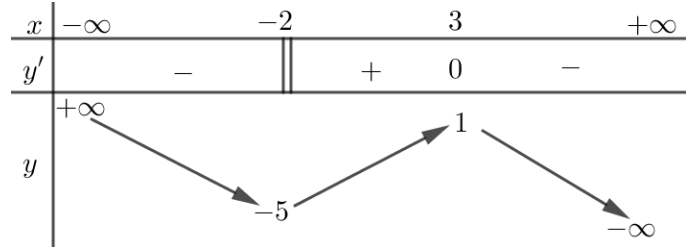
x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	+	-	0	+

Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại ?

9.2 (THPT Tiên Du 2023) Cho hàm số $y = f(x)$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ: Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A.** $x = -5$. **B.** $x = 3$.
C. $x = -2$. **D.** $x = 1$.



9.3 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 3. **B.** 1.
C. 4. **D.** 2.

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	+	0	-	0	+

9.4 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

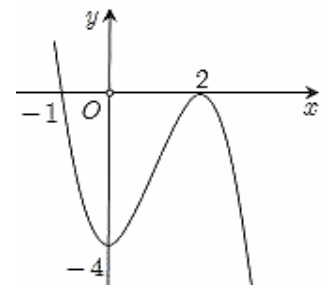
x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 1. **B.** 4.
C. 3. **D.** 2.

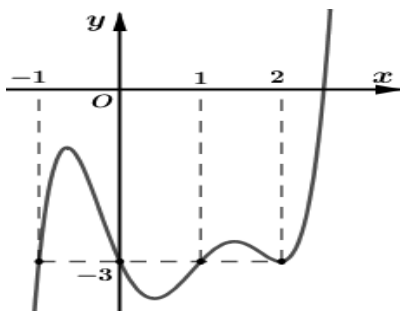
Ví dụ 10: (bài nâng cao) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

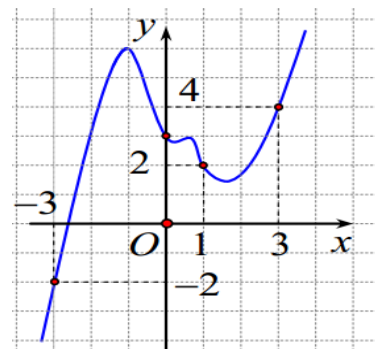


10.1 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A.** 2.
B. 3.
C. 4.
D. 7.

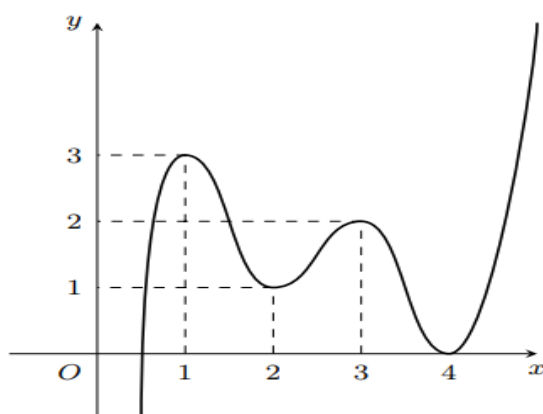


10.2 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - 2x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng. Vẽ BBT và tìm cực trị (nếu có).



10.3 Cho hàm số đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $h(x) = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(3; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; 3)$.

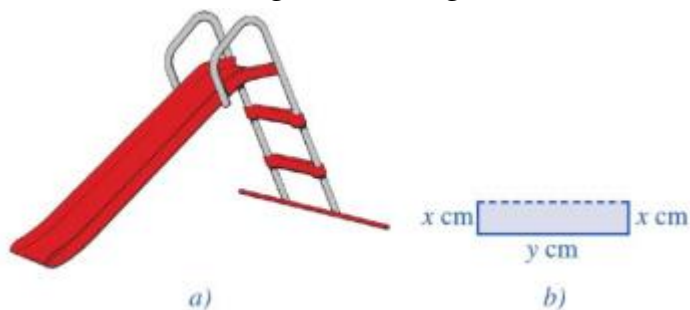
D. $(-\infty; 1)$.

Ví dụ 11: (bài nâng cao) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1 + x_2| = 2$.

11.1 Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10$.

Ví dụ 12: (toán thực tế) Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình 5a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình vẽ. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



- a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .
b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Ví dụ 13: (bài nâng cao) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$

13.1 $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

13.2 (Sở Hải Dương 2022) Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = -1$.
- B. $m = 0$.
- C. $m = 1$.
- D. $m \in \emptyset$.

13.3 Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$?

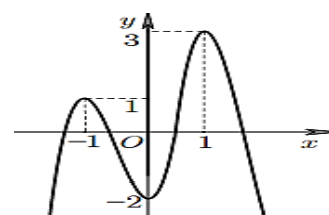
- A. $m = -2$.
- B. $m = -3$.
- C. $m = 0$.
- D. $m = -1$.



Trắc nghiệm

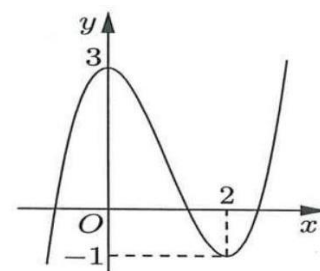
Câu 01: (THPT Quế Võ 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0.
- B. -2.
- C. 1.
- D. -1.



Câu 02: (Minh Họa THPTQG 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là:

- A. -1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.



Câu 03: Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1+4x-x^4}$ có tọa độ là:

- A. (1; 2).
- B. (0; 1).
- C. (2; 3).
- D. (3; 4).

Câu 04: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị $A(1; 3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 05: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:

- A. -8 . B. -2 .
C. 2 . D. 4 .

Câu 06: Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3 . Khi đó, giá trị của tích $x_1 x_2 x_3$ là:

- A. 0 .
B. 5 .
C. 1 .
D. 3 .

Câu 07: Hàm số nào sau đây không có cực trị?

- A. $y = 2x + \frac{2}{x+1}$. B. $y = x^3 + 3x^2$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 08: Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$.

- A. $x = -1$. B. $x = 1$.
C. $(1; -2)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 09: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2-x}$ là:

- A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. 3 .

Câu 10: (Đề THPT Quốc Gia 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3 . B. 0 . C. 2 . D. 1 .

Câu 11: (SGD Bình Dương 2018) Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0 . B. 2 . C. 3 . D. 1 .

Câu 12: (SGD Kon Tum 2023) Hàm số nào sau đây có đúng một điểm cực trị?

- A. $y = 2x^4 - 4x^2 - 5$. B. $y = \frac{1}{x+2}$. C. $y = x^4 + 2x^2$. D. $y = x^3 + 3x^2$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x+1)^2(x-2025)^4 \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là.

- A. 2 . B. 1 .
C. 3 . D. 0 .

Câu 14: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (4+4m)x + m^2$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $(-2; +\infty)$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
D. $\emptyset$.

Câu 15: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = -2x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2-1)x + 2 \text{ có hai điểm cực trị.}$$

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 - (2m+1)x + 4$ có đúng hai cực trị.

A. $m < \frac{4}{3}$.

B. $m > -\frac{2}{3}$.

C. $m < -\frac{2}{3}$.

D. $m > -\frac{4}{3}$.

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

Câu hỏi 01: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3	0	$+\infty$

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.		
2. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.		
3. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.		
4. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.		

Câu hỏi 02: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số đã cho có điểm cực đại $x = 3$.		
2. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.		
3. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.		
4. Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = 4$		

Câu hỏi 03: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$		
2. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$		
3. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$		
4. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$		

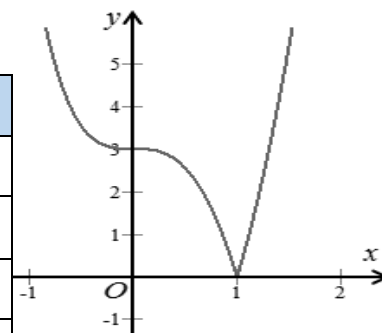
Câu hỏi 04: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				1		$-\infty$
			$-\frac{1}{3}$				

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.		
2. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.		
3. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$.		
4. Hàm số không có cực trị.		

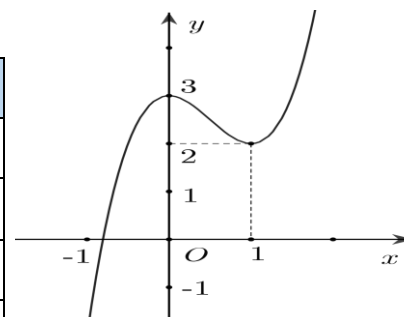
Câu hỏi 05: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.		
2. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.		
3. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.		
4. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.		



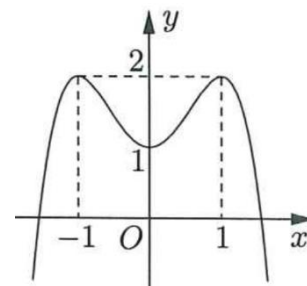
Câu hỏi 06: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Câu hỏi	Đúng	Sai
1. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$		
2. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$		
3. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$		
4. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và $(1; +\infty)$		
5. Giao điểm đồ thị và Ox là $((-1; 0))$		
6. Giao điểm đồ thị và Oy là $((0; 3))$		



Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 01: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



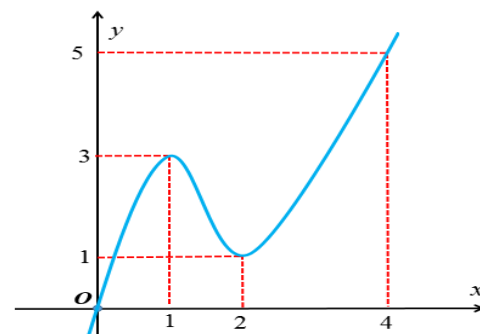
a) Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số ?

b) Tìm c ?

c) Số cực trị của hàm số ?

d) Khoảng đồng biến của hàm số ?

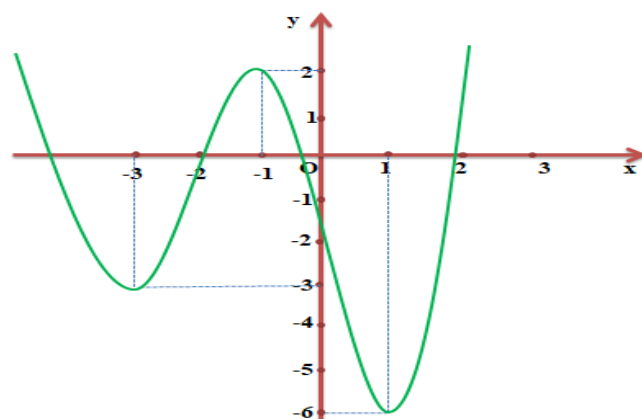
Câu 02: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

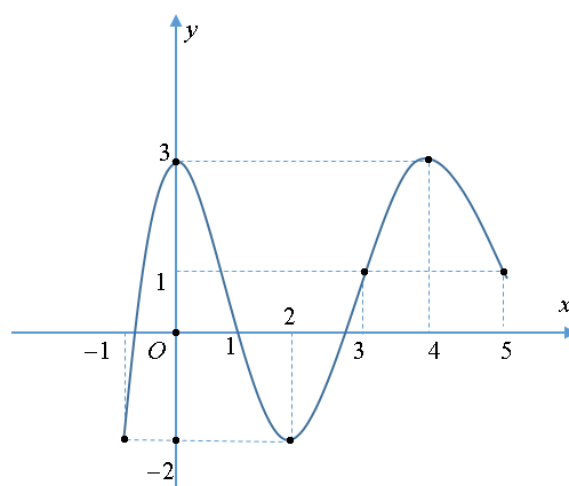
Câu 03: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 04: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 05: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

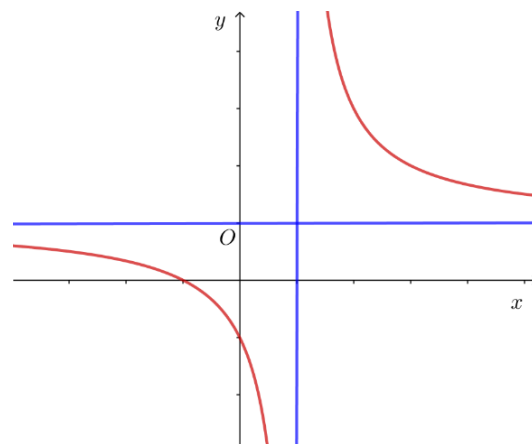
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		$+\infty$		$+\infty$
						4	

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

Câu 06: Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$

(a là số thực cho trước và $a \neq -1$)

có đồ thị như trong hình bên. Tìm giá trị số thực a ?



Câu 07: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

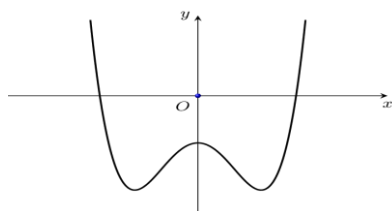
Tìm giá trị cực tiểu của hàm số đã cho ?

Câu 08: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



Câu 09: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	2	$-\infty$	

Câu 11: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$			
		1				
				-15		
				$-\infty$	$-\infty$	

Câu 12: Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
y	0	-2	$+\infty$	1	$+\infty$	0	1



Bài tập

Bài 01: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

b) $y = \frac{x^2 - 8x + 10}{x - 2}$

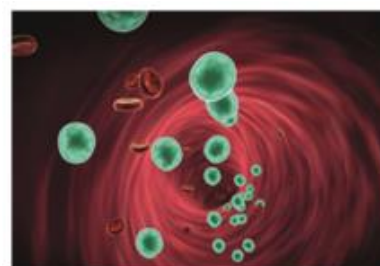
Bài 02: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 4}$

b) $y = x \ln x$

Bài 03: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

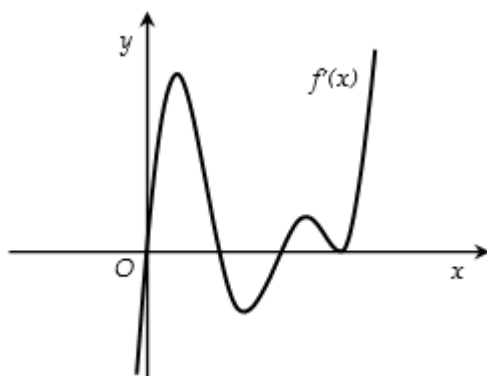


Khi đó hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$:

a) Tăng trong khoảng thời gian nào?

b) Đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm

Bài 04: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



Bài 05: Tìm để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{m}{2}x^2 + (2m-3)x - 8m^{2023}$

b) $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + 2m^2$



Chương I: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát Hàm Số

Bài 02: Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số

1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .

Số M được gọi là **giá trị lớn nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu $M = \max_D f(x)$.

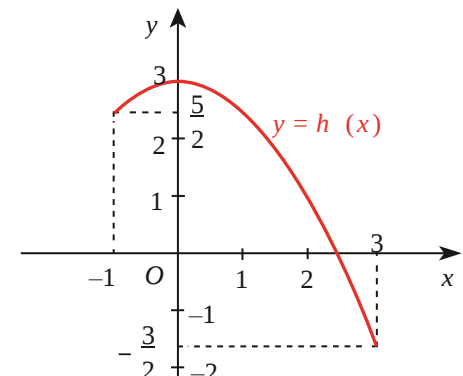
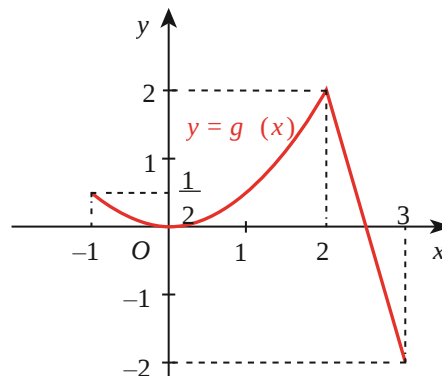
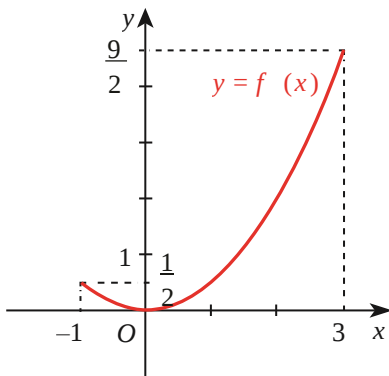
Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min_D f(x)$.

Chú ý:

- Ta quy ước khi chỉ nói GTLN hay GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.
- GTLN và GTNN của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

Ví dụ 01: Hình vẽ dưới đây cho ta đồ thị của **ba hàm số**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2; g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & , x \leq 2 \\ -4x + 10 & , x \geq 2 \end{cases} \text{ và } h(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ trên đoạn } [-1; 3].$$



- Hàm số nào đạt giá trị lớn nhất tại một điểm cực đại của nó?
- Các hàm số còn lại đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào?

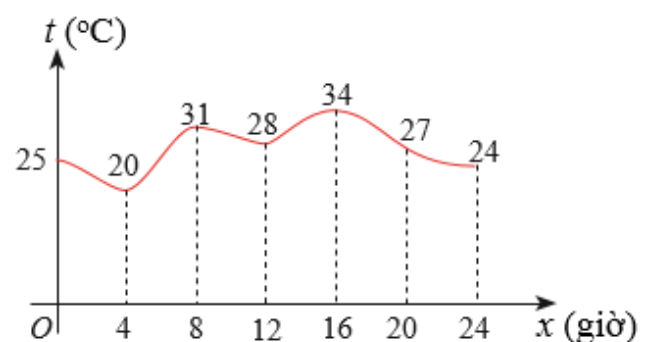
Ví dụ 02: Hình vẽ bên dưới cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.

Khẳng định nào sau đây đúng? Vì sao?

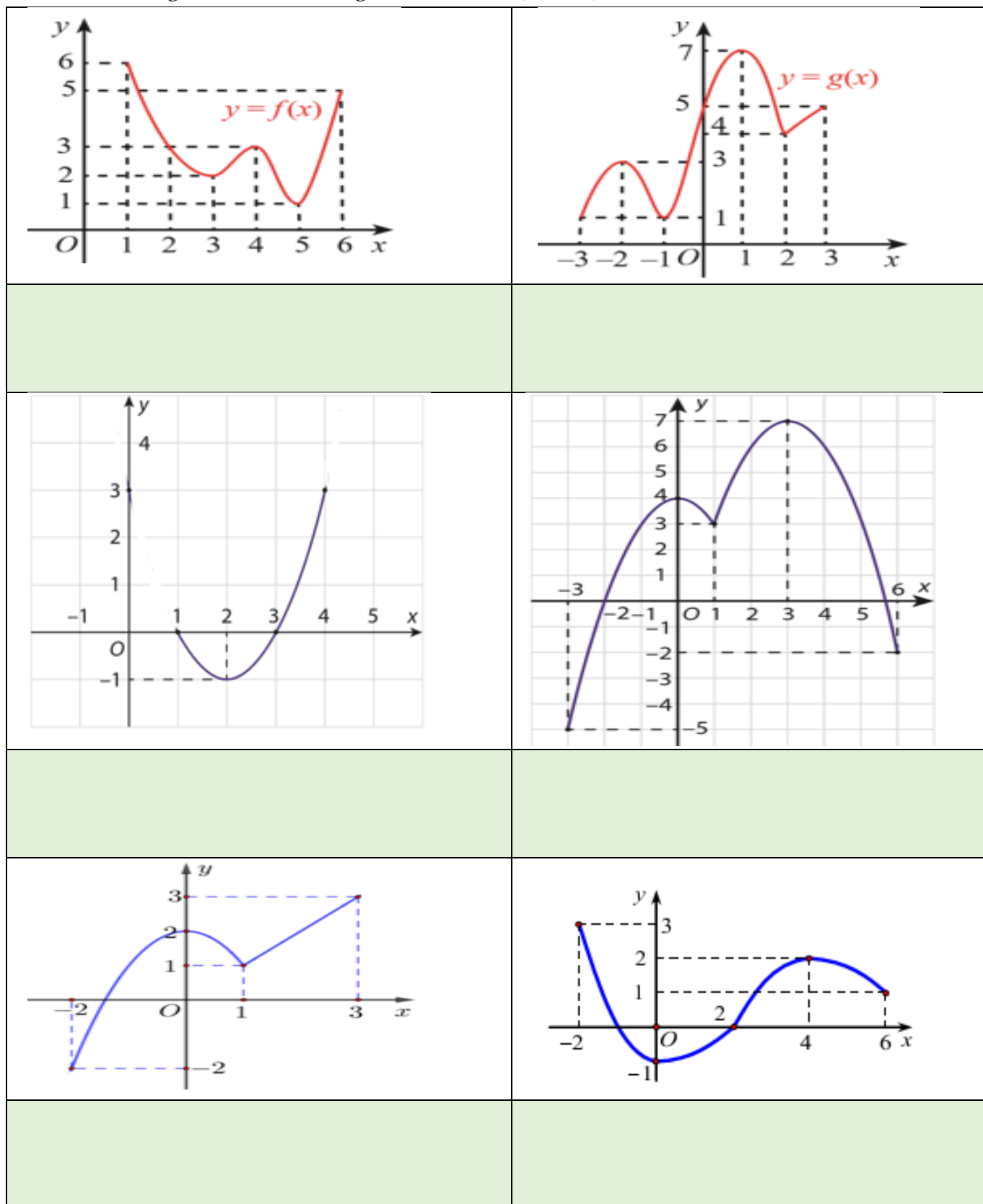
- Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .
- Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 40°C .
- Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 34°C .

a) Hãy xác định thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày.

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu?



Ví dụ 03: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số có đồ thị như hình vẽ sau

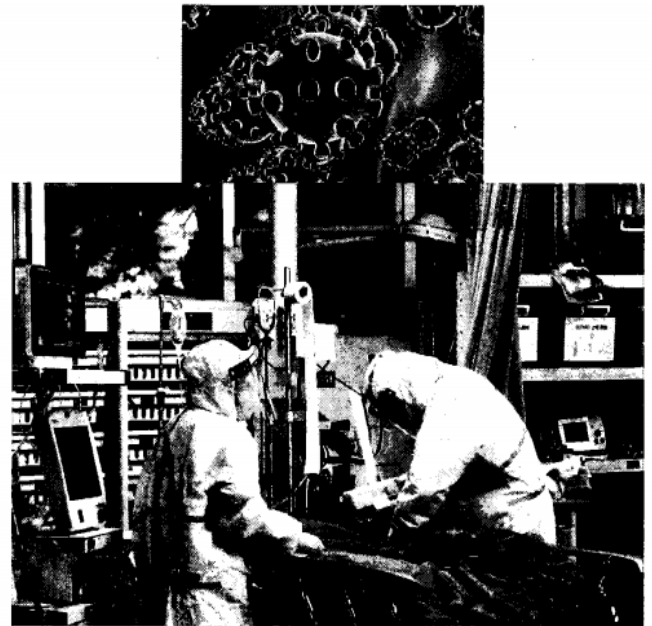
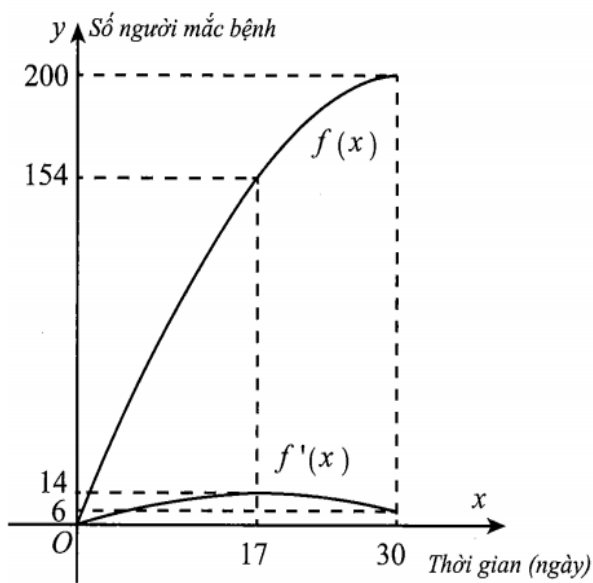


Ví dụ 04: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$;

b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$.

Ví dụ 05: Sau khi phát hiện dịch bệnh viêm đường hô hấp cấp do vi rút 2019-nCoV gây ra, nhóm các chuyên gia y tế đã nghiên cứu độc lập tại một địa phương của thành phố Vũ Hán trong 1 tháng. Theo thống kê, số người nhiễm bệnh được biểu thị là đồ thị hàm số $f(x)$. Tốc độ truyền bệnh (người/ngày) được biểu thị bởi đồ thị hàm số $f'(x)$.



Tại thời điểm tốc độ truyền bệnh lớn nhất thì số người mắc bệnh là:

- A. 154. B. 6. C. 14. D. 200.

2 Tìm GTLN – GTNN của hàm số trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2: Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.

Bước 3: Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

$$\text{Khi đó: } M = \max_{[a;b]} f(x), \quad m = \min_{[a;b]} f(x)$$

Ví dụ 01: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[0;2]$

Ví dụ 02: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a/ $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$

b/ $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$

c/ $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$

d/ $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$

Ví dụ 03: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a/ $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

b/ $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ví dụ 04: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a/ $y = e^x - x$ trên đoạn $[-1; 2]$;

b/ $y = x \ln x$ trên đoạn $[e^{-2}; e]$

c/ $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$.

d/ $y = x^2 - 4 \ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$

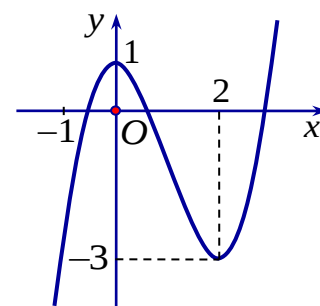
Ví dụ 05: Tìm **tập giá trị** của hàm số: $y = x^4 - 2x^2 - 2$:

- A. $(-3; +\infty)$. B. $[-2; +\infty)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $[-3; +\infty)$.

Ví dụ 06: (**tìm GTLN – GTNN theo BBT hoặc đồ thị**) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau

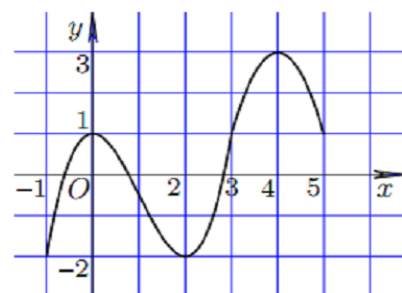
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
 B. Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -3$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 D. Giá trị lớn nhất của hàm số là 1.



6.1 (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng

- A. 4.
 B. -1.
 C. 1.
 D. 2.



6.2 Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y			6		2	9	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.
 B. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 6$ và $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$.
 C. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$.
 D. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5; 7)} f(x) = 6$.

6.3 (Sở GD Kon Tum 2023) Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

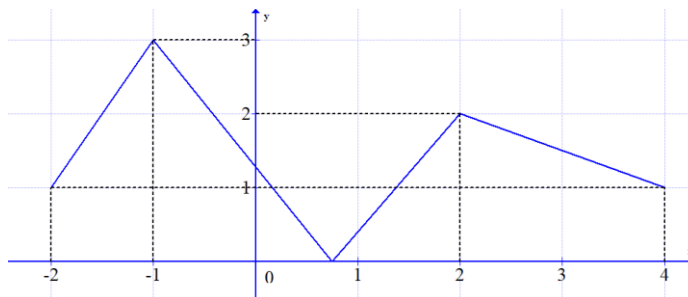
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	1	$+\infty$	

- A. 0. B. 3.
C. 2. D. 1.

6.4 Tìm tập giá trị hàm số (có hình vẽ bên)

trên $[-1; 2]$

- A. $T = [0; 2]$.
B. $T = [0; 3]$.
C. $T = [1; 3]$.
D. $T = [2; 3]$.



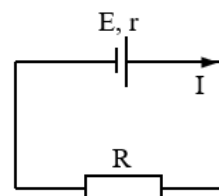
Ví dụ 07: (Các bài toán thực tế) Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

- a) Viết công thức biểu diễn R theo p .
b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

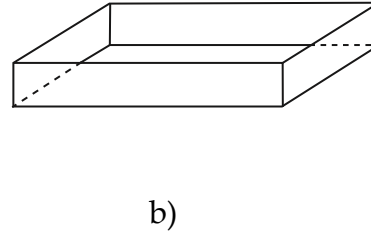
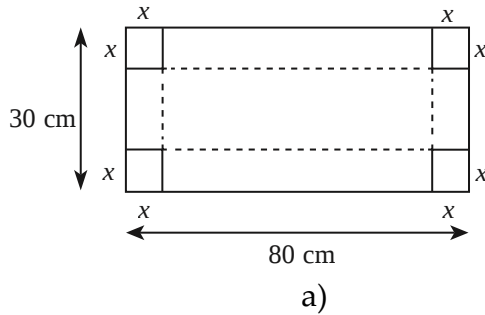
7.1 Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ y có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số: $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

7.2 Trong Vật lí, khi một điện trở ngoài có giá trị R (Ω) được nối qua một nguồn điện E (V) với một điện trở trong r (Ω) thì công suất (tính bằng W) của điện trở ngoài là: $P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$. Khi R

thay đổi, E và r cố định, ta xem P là hàm số theo R . Tìm công suất lớn nhất của điện trở ngoài.



7.3 Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Ví dụ 08: Tìm GTLN - GTNN của hàm số $y = f(x) = 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2025$ trên $[-3; 81]$

Ví dụ 09: (ứng dụng Vật Lý) Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

9.1 Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

9.2 Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

9.3 Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

9.4 Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu?

9.5 Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng

 Trắc nghiệm

Câu 01: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$ trên $[-2; 1]$

. Tính $T = M + 2m$.

- A. $T = -\frac{13}{2}$. B. $T = -10$. C. $T = -\frac{21}{2}$. D. $T = -14$.

Câu 02: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

- A. $T = [1; 9]$. B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$. C. $T = (1; 9)$. D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$.

Câu 03: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ là

- A. -3 . B. $-\frac{5}{3}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. 1 .



Câu 04: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là

- A. $-\frac{7}{2}$. B. $-\frac{13}{3}$. C. 1. D. -3.

Câu 05: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$. B. $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. C. $\min_{[2;4]} y = -6$. D. $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$.

Câu 06: Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

- A. $\frac{52}{3}$. B. 20. C. 6. D. $\frac{65}{3}$.

Câu 07: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. $\min_{[2;4]} y = 3$. B. $\min_{[2;4]} y = 7$. C. $\min_{[2;4]} y = 5$. D. $\min_{[2;4]} y = 0$.

Câu 08: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{x-3}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A. $\min_{x \in [-1;2]} y = 3$. B. $\min_{x \in [-1;2]} y = -3$. C. $\min_{x \in [-1;2]} y = 0$. D.
 $\min_{x \in [-1;2]} y = -4$.

Câu 09: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên $[-1; 1]$.

- A. $m = -4$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m = -5$.

Câu 10: Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. 8. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 11: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ lần lượt là

- A. $\sqrt{2}; 1$. B. $\sqrt{2}; 1$. C. $\sqrt{2}; -1$. D. $\sqrt{2}; 1$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2^x$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. 2. D. -1.

Câu 13: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x.e^x$ trên đoạn $[-2; -1]$ bằng

- A. $\frac{1}{e}$. B. $-\frac{1}{e}$. C. $\frac{2}{e^2}$. D. $-\frac{2}{e^2}$.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \log_2(x+1)$ trên đoạn $[1; 7]$.

- A. $m = 1; M = 7$. B. $m = 1; M = 8$. C. $m = 1; M = 3$. D. $m = 3; M = 8$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2.e^x$ trên đoạn $[1; 3]$ là

- A. e^3 . B. e . C. 0. D. e^4 .

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 1$ trên $[1; 8]$ là

- A. -2. B. 1. C. -3. D. 2.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 3\ln x$ trên đoạn $[1; e]$ bằng

- A. 1. B. $3 - 3\ln 3$. C. e . D. $e - 3$.

Câu 18: Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ theo thứ tự là

- A. 1 và $e-1$. B. $\frac{1}{2} + \ln 2$ và $e-1$. C. 1 và e . D. 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln x - \ln(x^2 + 1)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi:

- A. $x=1$. B. $x=\frac{1}{2}$.
 C. $x=\frac{3}{2}$. D. $x=\frac{3}{4}$.

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{x+1} - 2$ trên đoạn $[0;3]$.

- A. $e^4 - 2$. B. $e^2 - 2$.
 C. $e - 2$. D. $e^3 - 2$.

Câu 21: **Cao huyết áp còn gọi là tăng huyết áp** và khái niệm thường dùng trong dân chúng là bệnh tăng xông (**tension**). Đây là **bệnh lý thường gặp** trong cộng đồng và gia tăng theo tuổi, **chiếm 8-12% dân số**. Một số yếu tố nguy cơ làm gia tăng nguy cơ cao huyết áp như tiểu đường, thuốc lá, tăng lipid máu, di truyền. **Độ giảm huyết áp** của một bệnh nhân được cho bởi công thức

$G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x (**mg**) > 0 là liều lượng

thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp **giảm nhiều nhất** thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng

- A. 20 mg B. 15 mg
 C. 30 mg D. Không xác định được

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x^3 - 4x^4$ là:

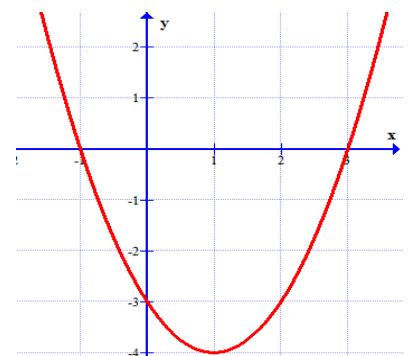
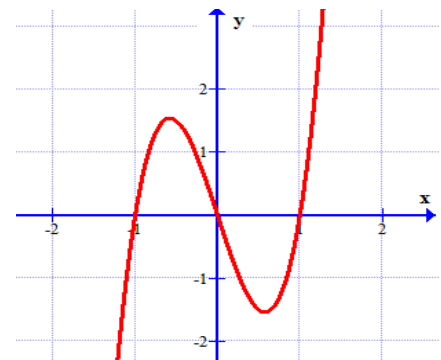
- A. 3 B. 1
 C. 4 D. 2

Câu 23: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = 0$.
 C. $x = 1$. D. $x = 2$.

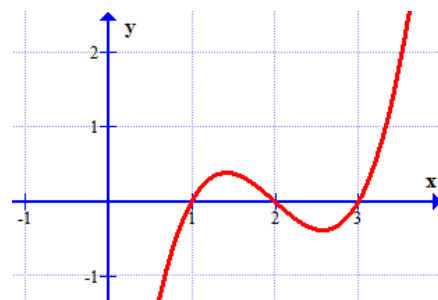
Câu 24: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[-1; 4]$ tại x bằng bao nhiêu?

- A. $x = 3$.
 B. $x = 0$.
 C. $x = 4$.
 D. $x = -1$



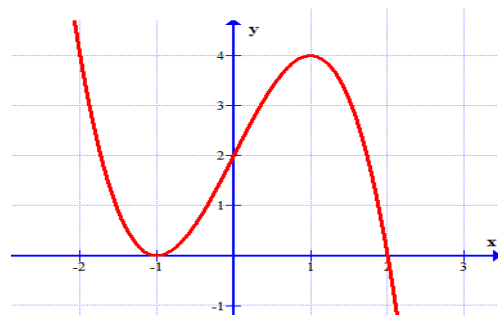
Câu 25: đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2018$ bằng bao nhiêu?

- A. 2018.
- B. 2017.
- C. 2021.
- D. 2026.



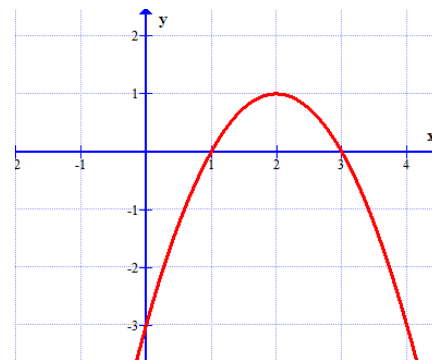
Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[-2;2]$ tại x bằng bao nhiêu?

- A. $x=2$.
- B. $x=0$.
- C. $x=-2$.
- D. $x=1$.



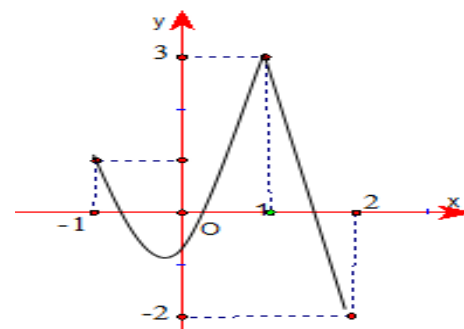
Câu 27: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0;3]$ tại x bằng bao nhiêu?

- A. $x=3$.
- B. $x=0$.
- C. $x=2$.
- D. $x=1$.



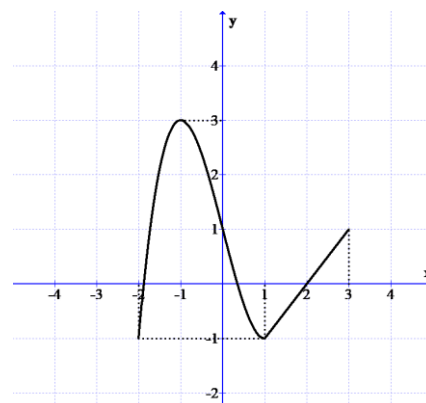
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$. Ta có $M+m$ bằng

- A. 1.
- B. 4.
- C. 2.
- D. 0



Câu 29: (Minh Hoạ THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

- A. 0.
- B. 1.
- C. 4.
- D. 5.



Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn

$\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số

$y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào

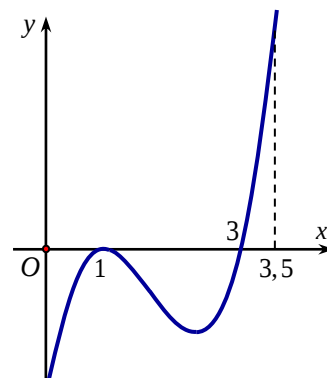
dưới đây?

A. $x_0 = 2$.

B. $x_0 = 1$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$.



Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi

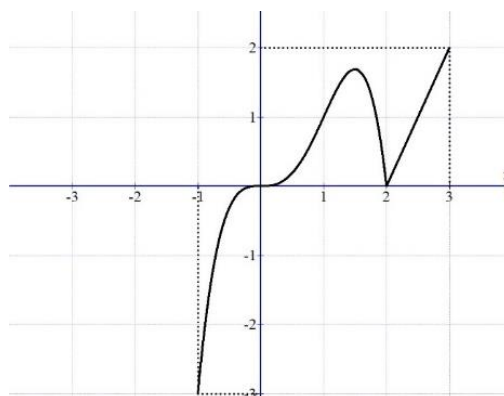
M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

A. 15.

B. 11.

C. 4.

D. 13.



Câu 32: (Chuyên ĐH Vinh 2023) Cho hàm số

$f(x) = x + \frac{4}{x}$. GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 4]$

là

A. $f(3)$.

B. $f(2)$.

C. $f(1)$.

D. $f(4)$.

***Câu 33: (Sở GD BR VT 2023)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 12x^2 + 10$ trên $[0; 6]$ đạt

được tại điểm

A. $x = \sqrt{6}$.

B. $x = 0$.

C. $x = -26$.

D. $x = 6$.

Câu 35: Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số

$y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.

Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$.

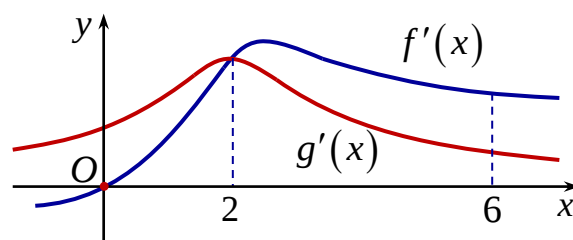
Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A. $h(6)$, $h(2)$.

B. $h(2)$, $h(6)$.

C. $h(0)$, $h(2)$.

D. $h(2)$, $h(0)$.



Câu 36: (Sở GD Vĩnh Phúc 2021) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \leq 0$
- B. $m > 4$
- C. $0 < m \leq 2$
- D. $2 < m \leq 4$



Bài tập

Bài 01: Tìm GTLN-GTNN các hàm số sau

a/ $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$;

b/ $y = x^3 + \frac{3}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

c/ $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

d/ $y = \sqrt{8+2x-x^2}$

e/ $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; 0]$

f/ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

Bài 02: Tìm GTLN-GTNN các hàm số sau

a/ $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$.

b/ $y = 2 \sin x + 5x - 1$ trên đoạn $[0; \pi]$.

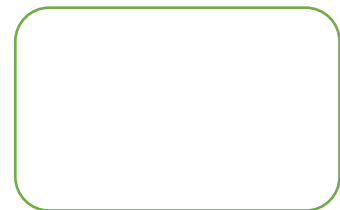
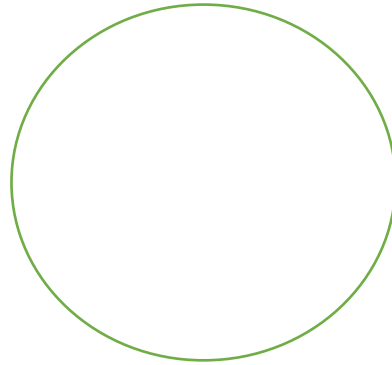
Bài 03: Tìm GTLN-GTNN các hàm số sau

a/ $y = xe^{-2x^2}$ trên đoạn $[1; 2]$.

c/ $y = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-1; 0]$

b/ $y = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$

d/ $y = e^{2x}$ trên đoạn $\left[\frac{\ln 2}{2}; \ln 2\right]$





Bài 04: Hộp sữa 1 l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Bài 05: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng 1 (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$$

với $0 \leq t \leq 0,5$. (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

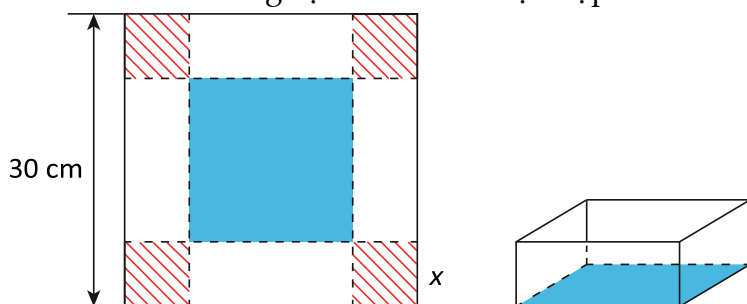
Bài 06: Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức:

$S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ (tấn) ($1 \leq t \leq 60$). Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

Bài 07: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

- Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
- Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Bài 08: Trong một trò chơi, mỗi đội được phát một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng 30 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội chơi là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm bìa lại (Hình vẽ) và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Đội nào thiết kế được hộp có thể tích lớn nhất sẽ giành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của các hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất.



Bài 09: Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7

Bài 10: Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

Bài 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2mx+1}{m-x}$ trên $[2;3]$ là $-\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng bao nhiêu

PHƯƠNG PHÁP CASIO GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN GTLN – GTNN

❶ Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền $[a; b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh **MODE 7** (Lập bảng giá trị)

❷ Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

Note:

+ Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$

(có thể làm tròn để Step đẹp)

Ví dụ 01: (chuyên KHTN –2017) Tìm GTLN của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

A. $\max = \frac{67}{27}$

B. $\max = -2$

C. $\max = -7$

D. $\max = -4$

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập **Start 1 End 3 Step** $\frac{3-1}{19}$

		X		F(X)	
1	1.1052	-4	-4.514		
3	1.2105	-4	-4.998		

1

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(3) = -2$

		X		F(X)	
19	2.8947	-3	-3.081		
21	3	-2	-2		

Vậy $\max = -2$, dấu = đạt được khi $x = 3 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Ví dụ 02: (HSG Ninh Bình 2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

A. $M = 3$

B. $M = 3\sqrt{2}$

C. $M = 2\sqrt{3}$

D. $M = 2 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$

Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start -3 End 6 Step 0.5

		X		F(X)	
9	1.5	4.236	4.236		
10	2	4.2426	4.2426		
11	2.5	4.236	4.236		

1.5

$3\sqrt{2}$

4.242640687

Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 4.2421 = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6 \times 10^{-3} \approx 0$

Sử dụng Casio $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bấm thử 01: Tích giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ là

A. 6

B. -75

C. 4

D. -35

Bấm thử 02: Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-2; 4]$ là:

A. -22.

B. 14.

C. -2.

D. -18.

ÔN LẠI CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

1. Quy tắc tính đạo hàm: Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Khi đó $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$.

Chú ý:

① Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$.

② Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.



2. Bảng đạo hàm

Chú ý: Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.x^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'. \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'. \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u'.a^u \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Chương I: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát Hàm Số



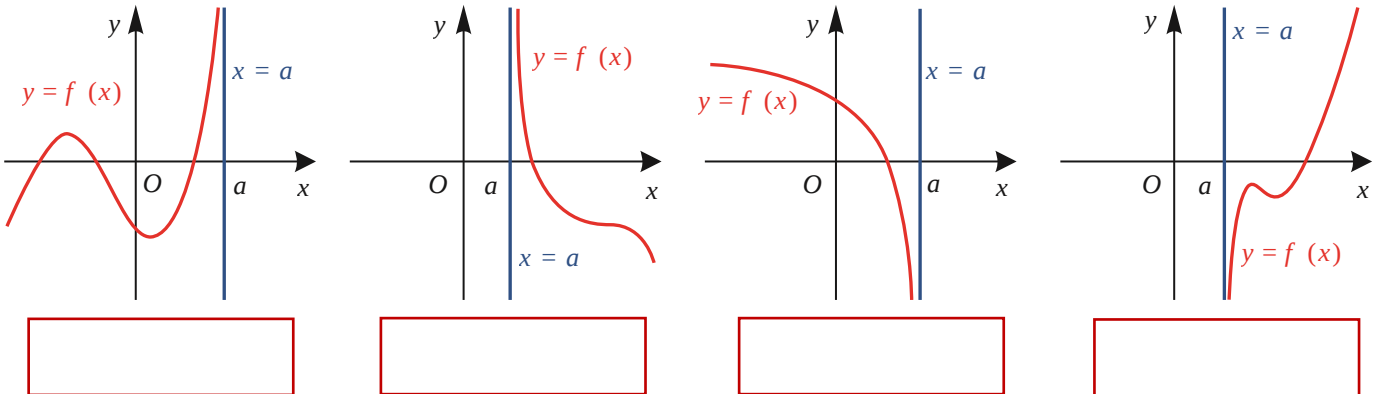
Bài 03: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như dưới.

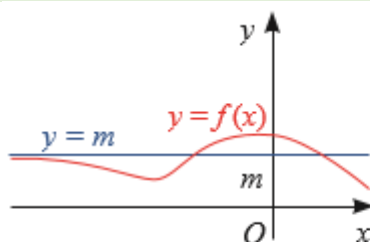


Ví dụ 01: Tìm tiệm cận đứng của các đồ thị hàm số sau: a) $y = \frac{2x+3}{-x+5}$ c) $y = \frac{x^2-2x}{x-1}$

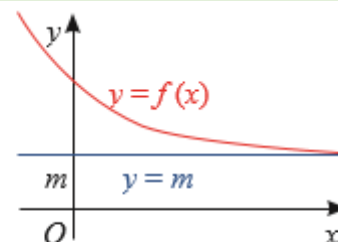
2 Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$$



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$

Nhận xét về TCN

Để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta cần **tính giới hạn của hàm số tại vô cực**.

Tìm giới hạn ở vô cực của hàm $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức không căn:

• Bậc của $P(x)$ **nhỏ hơn** bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ **Tiệm cận ngang** $Ox: y = 0$.

• Bậc của $P(x)$ **bằng bậc** của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)} = y_0$

Suy ra tiệm cận ngang $y = y_0$

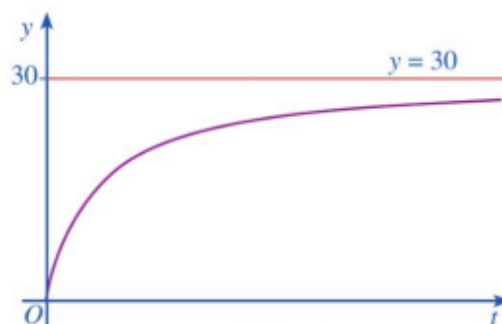
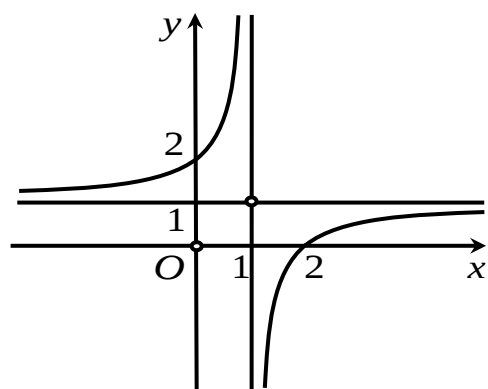
• Bậc của $P(x)$ **lớn hơn** bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ **Không có tiệm cận ngang**.

• Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

Ví dụ 01: Tìm TCN của các đồ thị hàm số sau: a) $y = f(x) = \frac{x-e}{4x+1}$ c) $y = g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$



Ví dụ 03: Số dân của thị trấn x năm **kể từ năm 1970** được ước tính bởi công thức

$y = f(x) = \frac{26x+10}{x+5}$ ($f(x)$ được tính bằng **nghìn người**). Xem $f(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm **TCN** của đồ thị hàm số đó.

Ví dụ 05: (trả lời nhanh) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 3 + \frac{2x}{x-1}$

Ví dụ 04: Tính diện tích của hình chữ nhật tạo bởi 2 tiệm cận, 2 trục tọa độ của các hàm số sau

a/ $y = \frac{5x+1}{x-1}$

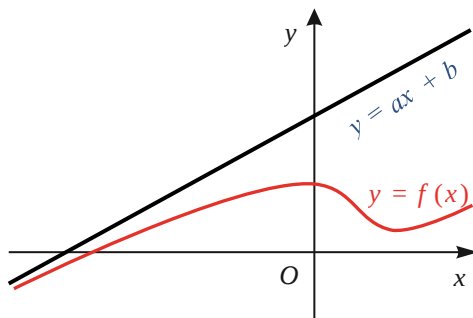
b/ $y = \frac{2x+1}{x+5}$

3 Đường tiệm cận xiên

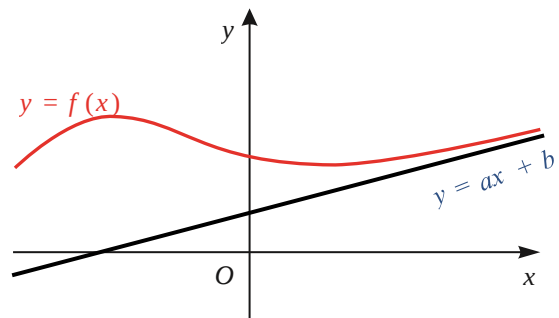
Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ là **đường tiệm cận xiên** (hay **TCX**) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình vẽ bên dưới.



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a , b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{hoặc} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Ví dụ 01: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2}$ theo **hai cách**?

Hai hàm số thường gặp

a) Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)

TCD: $x = -\frac{d}{c}$ (nghiệm của mẫu)

TCN: $y = \frac{a}{c}$

b) Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

Thực hiện phép chia đa thức: $y = Ax + B + \frac{C}{dx+e}$ ($AC \neq 0$)

TCD: $x = -\frac{e}{d}$ (nghiệm của mẫu)

TCX: $y = Ax + B$

Công thức nhanh tìm TCX: $y = \frac{a}{d}x + \left(\frac{bd - ae}{d^2}\right)$

Ví dụ 02: (trả lời ngắn) Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$.

Ví dụ 03: Tìm TCD và TCX của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$.

Ví dụ 04: Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức: $C(x) = \frac{50x + 2000}{x}$.

Tìm các đường tiệm cận của hàm số $C(x)$.

Ví dụ 05: Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngả lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này



Hình 11



Bài tập

Bài 01: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = 5^x$ và $y = g(x) = \log_3 x$

Bài 02: Đồ thị của hàm số $y = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2x^2 - 5x - 7}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Cần nhớ:

2.1 (THPTQG 2017) Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

2.2 Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 20}{x^2 - 5x - 14}$.

2.3 Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 4|x| + 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

2.4 Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{6-x^2}}{x^2 + 3x - 4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận.

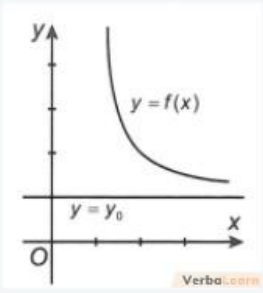
Bài 03: Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Bài 04: (sử dụng lý thuyết tiệm cận) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(-2; 1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

1. Tiệm cận ngang

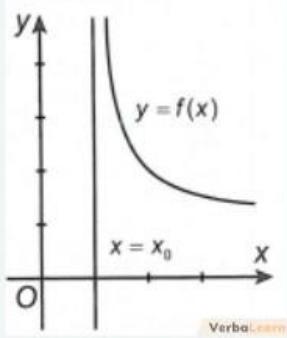
Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$



1. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$



4.1 Cho hàm số $y = f(x)$ có các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

4.2 Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2025$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2025$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2025$ và $y = -2025$
 B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2025$ và $x = -2025$
 D. Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang.

4.3 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$. Số tiệm cận ngang của (C) là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

4.4 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \neq \pm 1$, có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.
 D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

4.5 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường $x = 2$ và $x = -2$.
 B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường $y = 2$ và $y = -2$.

4.6 Nếu hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2023$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là

- A. $x = 2023$ B. $x = -2023$ C. $y = 2023$ D. $y = -2023$

4.7 Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$, $y = -3$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$, $x = -3$.

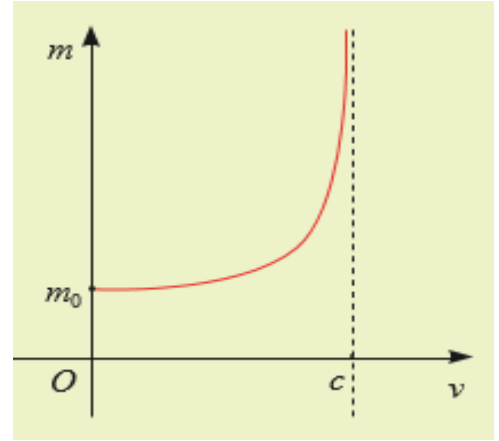
4.8 Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
 B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
 C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
 D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Bài 05: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m sao cho đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Bài 06: Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, trong đó

m_0 là khối lượng nghỉ của hạt, $c = 300000$ km/s là tốc độ ánh sáng. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m(v)$. Từ đó, có nhận xét gì khi hạt di chuyển với tốc độ càng gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt thay đổi như thế nào?



Bài 07: Một bể chứa 5 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200 + t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Bài 08: Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị hàm số được cho trong bảng biến thiên dưới đây và giải thích?

a/

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-5

b/

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$f'(x)$		-		+	0	-		
$f(x)$	$+\infty$		-1	$-\infty$		2		$-\infty$

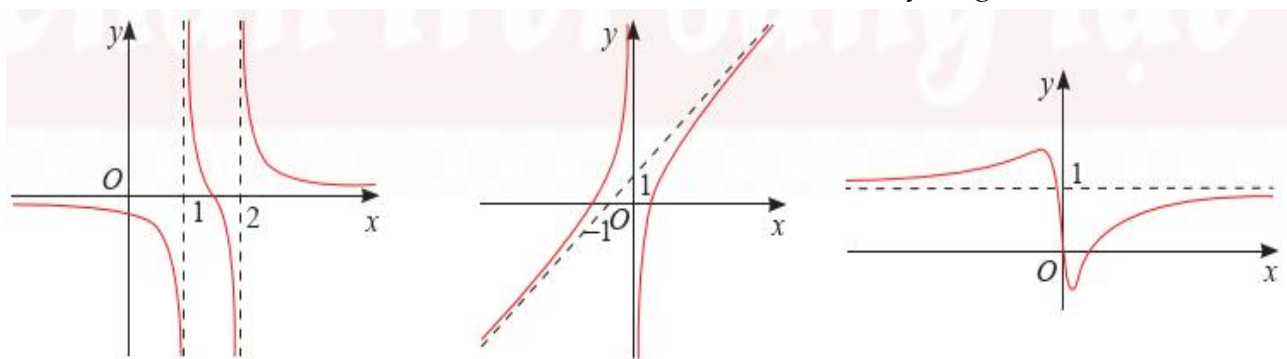
c/

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

d/

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	-1

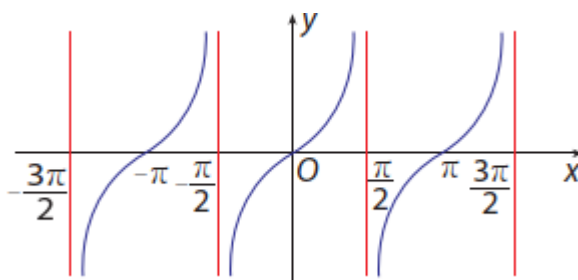
Bài 09: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây và giải thích?



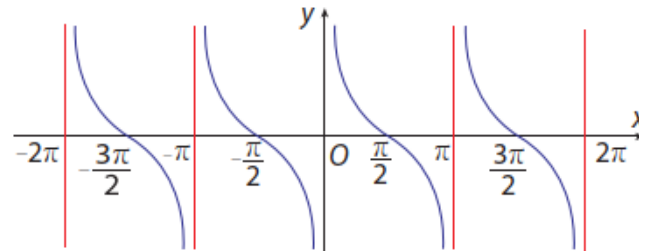
a) $y = \frac{2x-3}{5x^2-15x+10}$

b) $y = \frac{x^2+x-1}{x}$

c) $y = \frac{16x^2-8x}{16x^2+1}$



d) $y = \tan x$



e) $y = \cot x$

Bài 10: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-2x-m}$ có đúng một đường tiệm cận đứng?

Giải: Để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-2x-m}$ có đúng một đường tiệm cận đứng thì ta xét các TH:

TH1: Phương trình $x^2-2x-m=0$ có nghiệm kép $x \neq 3$.

TH2: Phương trình $x^2-2x-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=3$.



Trắc nghiệm

Câu 01: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (C) có tiệm cận đứng $x = \frac{2}{3}$.
B. (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{2}{3}$.
C. (C) có tiệm cận ngang $y = -\frac{2}{3}$.
D. (C) có tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 02: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

- A. $x=1$.
B. $y=-1$.
C. $y=2$.
D. $x=-1$.

Câu 03: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x+1 + \frac{2}{x+2}$ có phương trình là

- A. $x=-2$.
B. $y=x+1$.
C. $y=x-1$.
D. $y=0$.

Câu 04: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ có dạng $y = ax + b$. Giá trị của $a + b$ là:

- A. 0.
B. -3.
C. -2.
D. 3.

Câu 05: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2.
B. 3.
C. 1.
D. 4.

Câu 06: (THPTQG2017) Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

- A. 3.
B. 1.
C. 0.
D. 2.

Câu 07: (THPTQG2017) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

- A. 0.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

Câu 08: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$.
B. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.
C. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
D. $y = \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

Câu 09: Đồ thị hàm số nào dưới đây không có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x^2+3x+3}{x-2}$.
B. $y = \frac{\sqrt{16x^2+1}}{x-2}$.
C. $y = \frac{2017x-2018}{2018x-2019}$.
D. $y = \frac{2}{x}$.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{8x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4.
B. 1.
C. 3.
D. 2.

Câu 11: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = x^4 - x^2 - 2$.
B. $y = \frac{3x^2-1}{x+1}$.
C. $y = \frac{2-x}{x}$.
D. $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{2x+2019}{|x|+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có đúng một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$, $y = -2$ và không có tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có hai tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{2x + 1}$. Các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là

- A. $y = 1$, $y = -1$. B. $y = -\frac{1}{2}$
- C. $y = 1$. D. $y = 2$.

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là

- A. 2. B. 4.
- C. 3. D. 1.

Câu 15: Tổng số đường TCD và TCN của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x}{3x - 2}$ bằng

- A. 1. B. 2.
- C. 3. D. 0.

Câu 16: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + x} - 1}{x + 2}$ là

- A. 2. B. 1.
- C. 4. D. 3.

Câu 17: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$ là

- A. $T = 2$. B. $T = 1$.
- C. $T = 0$. D. $T = 3$.

Câu 18: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ là

- A. $y = -1$. B. $y = 1$.
- C. Không có. D. $y = 0$.

Câu 19: (Tạp Chí Toán Học & Tuổi trẻ – 2017) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$ tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng:

- A. 1. B. 2.
- C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 20: Đường thẳng nào dưới đây là *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y = 3 + \frac{1}{x - 3}$.

- A. $y = -3$. B. $y = 0$.
- C. $x = -3$. D. $y = 3$.

Câu 21: (THPTQG2017) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng ?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

C. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$.

D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên các khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$. Với giả thiết đó, hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

B. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

C. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

B. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là các đường thẳng $x = 2$; $x = -2$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

D. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là các đường thẳng $y = 2$; $y = -2$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

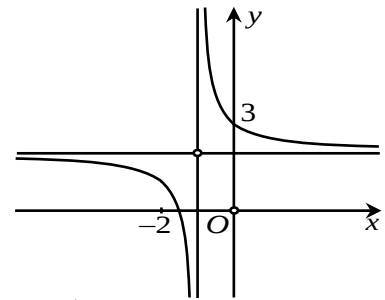
Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=2$.

C. $x=-1$ và $y=-2$.

B. $x=-1$ và $y=2$.

D. $x=1$ và $y=-2$.



Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

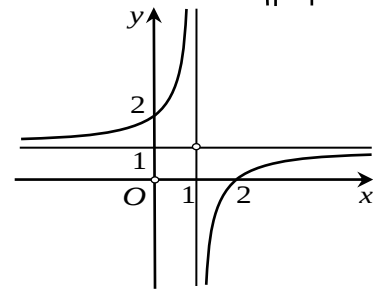
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

A. $x=1$.

B. $x=2$.

C. $y=2$.

D. $y=1$.



Câu 30: Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.

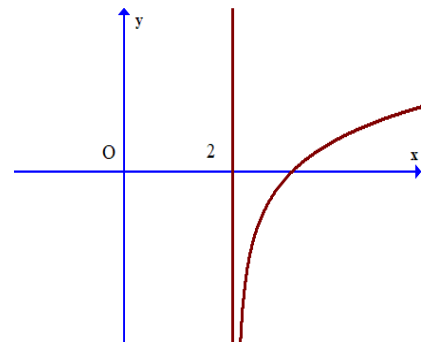
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là đường thẳng:

A. $x=2$.

B. $x=0$.

C. $y=2$.

D. $y=0$.



Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình

dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	-2	$+\infty$	3

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0	1	$+\infty$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	2  $+\infty$	3  5	

A. 2. **B. 3.** **C. 1.** **D. 4.**

[illegible]

A. Hàm số có hai điểm cực trị.
B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	
y		

A. 3. **B. 2.** **C. 1.** **D. 0.**

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	+
y	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	

A. 1. **B. 3.** **C. 4.** **D. 2.**

58

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 38: (Sở Hải Dương 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	-	+	+
y	1	3	-2	$+\infty$

Câu 39: (THPT Thuận Thành 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$

là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	4	6

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	0

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{3}{2016x - 2016m}$. Tìm m để đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+1}{bx-2}$. Xác định a và b để đồ thị hàm số nhận đường thẳng

$x=1$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=1; b=2$.

B. $a=-1; b=-2$.

C. $a=2; b=2$.

D. $a=2; b=-2$.

Chương I: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát Hàm Số

Bài 04: Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

1 Sơ đồ khảo sát hàm số

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Xét sự biến thiên của đồ thị hàm số

- Tìm đạo hàm y' , xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3: Vẽ đồ thị của hàm số

- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm),...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)
- Vẽ đồ thị hàm số và chỉ ra tâm đối xứng của đồ thị (nếu có)

2 Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1/ Tập xác định. $D = \mathbb{R}$

2/ Sự biến thiên

2.1 Xét chiều biến thiên của hàm số

2.2 Tìm cực trị

2.3 Tìm các giới hạn tại vô cực ($x \rightarrow \pm\infty$) (Hàm bậc ba và các hàm đa thức không có TCD và TCN.)

2.4 Lập bảng biến thiên. Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

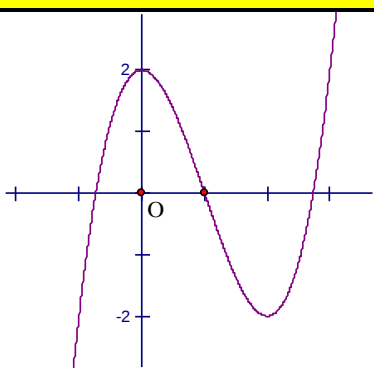
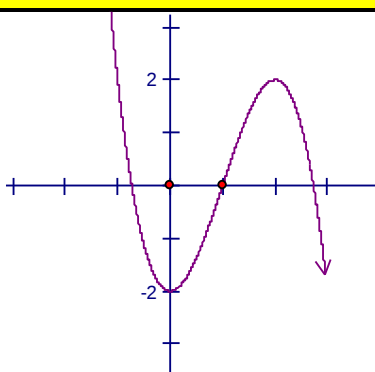
3/ Đồ thị: - Giao của đồ thị với trục Oy: $x=0 \Rightarrow y=d \Rightarrow (0; d)$

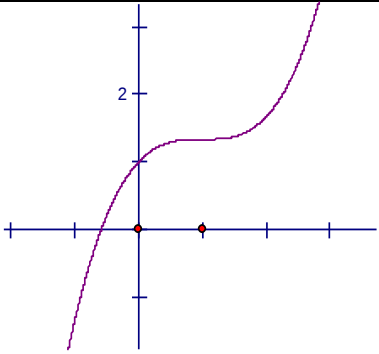
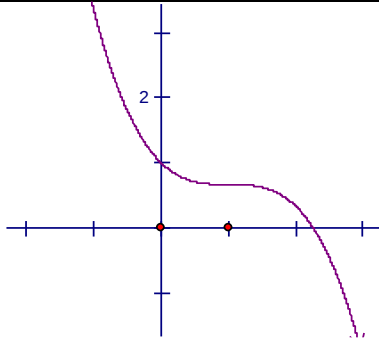
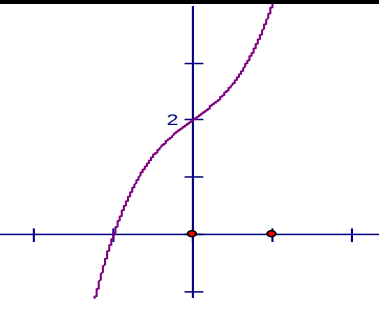
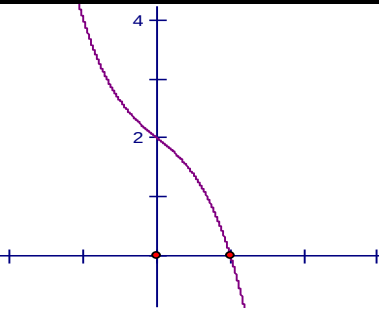
- Giao của đồ thị với trục Ox: $y=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow x=?$

- Các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có).

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Các dạng đồ thị hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Dấu của a Dấu Δ	$a > 0$	$a < 0$
Pt $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		

Pt $y' = 0$ có nghiem kép		
Pt $y' = 0$ vô nghiệm		

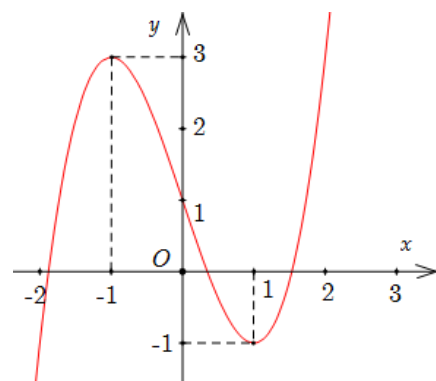
Ví dụ 01: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2$

Ví dụ 02: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

Ví dụ 03: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Ví dụ 04: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Ví dụ 05: Tìm hàm số bậc ba có đồ thị như hình bên dưới



3 Khảo sát hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0; ad - bc \neq 0)$

1/ Tập xác định:

2/ Sự biến thiên

2.1 Xét chiều biến thiên của hàm số Tính đạo hàm $y' = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

+ y' luôn âm (hoặc dương) với mọi $x \neq -\frac{d}{c}$

+ Hàm số đồng biến (nghịch biến) trên các khoảng $(-\infty; -\frac{d}{c})$ và $(\frac{d}{c}; +\infty)$

2.2 Tìm cực trị: Hàm số đã cho không có cực trị

2.3 Tiệm cận: $y = \frac{a}{c}$ là **tiệm cận ngang** và $x = -\frac{d}{c}$ là **tiệm cận đứng**

2.4 Lập bảng biến thiên. Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

3/ Đồ thị

- Giao của đồ thị với trục Oy: $x=0 \Rightarrow y = \frac{b}{d} \Rightarrow (0; \frac{b}{d})$

- Giao của đồ thị với trục Ox: $y=0 \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = 0 \Rightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow (-\frac{b}{a}; 0)$

- Lấy thêm một số điểm (nếu cần)

- Nhận xét về đặc trưng của đồ thị. Đồ thị nhận điểm $I(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c})$ là giao hai đường tiệm cận làm **tâm đối xứng**

Các dạng đồ thị hàm số: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$, hàm số đồng biến	$D = ad - bc < 0$, hàm số nghịch biến

Ví dụ : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. **Sự biến thiên:** Chiều biến thiên: $y' = \frac{4}{(x+2)^2}$.

$y' > 0, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$

và $(-2; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 3$ là **tiệm cận ngang**

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -2$ là **tiệm cận đứng**

Bảng biến thiên

+ Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

+ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-4; 5)$, $(-3; 7)$, $(-1; -1)$, $(2; 2)$.

+ Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 3)$ của hai tiệm cận làm **tâm đối xứng**.

Vẽ

Ví dụ 01: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$

Ví dụ 02: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

Ví dụ 03: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{5+x}{2-x}$

Ví dụ 04: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x+2}{2x+3}$

4 Khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a, m \neq 0)$

Chú ý: Đồ thị của hàm số

- Nhận giao điểm của **tiệm cận đứng** và **tiệm cận xiên** làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - \frac{1}{1-2x}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Đạo hàm $y' = 2 - \frac{2}{(1-2x)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 3$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -1$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1-2x} = 0$.

Suy ra đường thẳng $y = 2x$ là **tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số.

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = +\infty$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số.

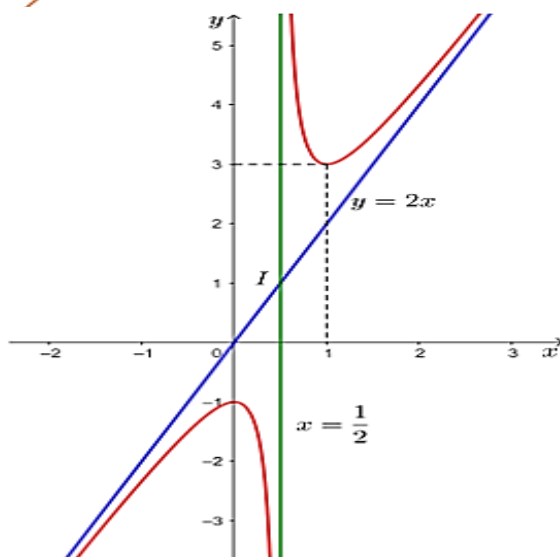
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

+ Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

+ Đồ thị hàm số không cắt trục Ox.

+ Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.





Ví dụ 01: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Ví dụ 02: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = x - \frac{1}{x}$

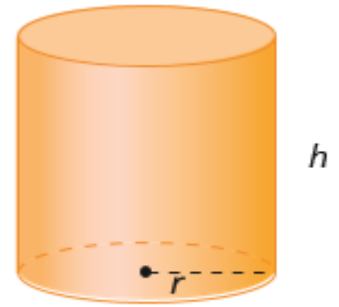
Ví dụ 03: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$

Ví dụ 04: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$

Ví dụ 05: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$

4 Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số vào thực tế

Ví dụ 01: Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



Hình 1.41

Ví dụ 02: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao của hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

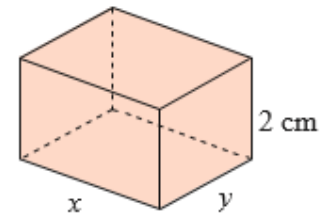
a) Hãy biểu thị y theo x .

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$$

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)



Ví dụ 03: Trong Vật lý, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3 (\Omega)$. Đặt $R_1 = x (\Omega), x > 0$.

a) Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.

b) Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

Bài 03: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.



Bài tập

Bài 01: Tìm giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$ và trục Ox. Sau đó viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại các giao điểm đó

Bài 02: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và đồ thị là (C) như hình vẽ

Hãy trả lời các câu hỏi sau :

a/ Tiệm cận ngang là

b/ Miền xác định D =

c/ Đạo hàm

A. $y' > 0, \forall x \in D$

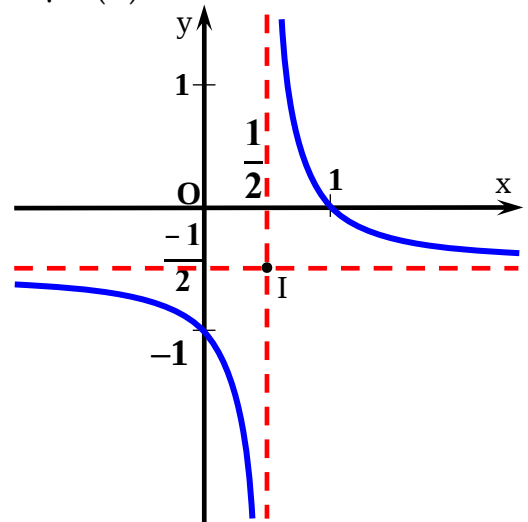
B. $y' \geq 0, \forall x \in D$

C. $y' < 0, \forall x \in D$

D. $y' \leq 0, \forall x \in D$

d/ Giao điểm của đồ thị với

Oy là..... và Ox là.....

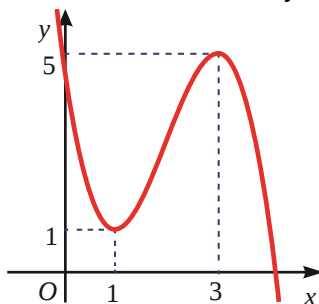


Bài 04: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Tìm điểm I thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

b) Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 05: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như Hình vẽ. Viết công thức của hàm số.



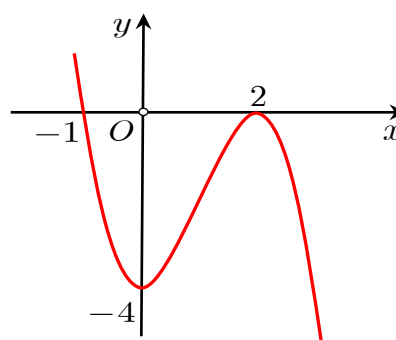
Bài 06: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

c) Tìm giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y = 4$

Bài 07: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như Hình vẽ.
Tìm giao điểm của đồ thị hàm số với các trục tọa độ ?



Bài 07: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình vẽ). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m , hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?





Bài 08: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (**học sinh tự vẽ**)
- b) Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy , I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tìm điểm B đối xứng với A qua I . Chứng minh rằng điểm B cũng thuộc đồ thị hàm số này.

Bài 09: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2; 4]$.

Bài 10: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0 \leq x < 100$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Bài 11: Xét tình huống: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v

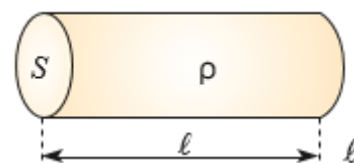
(km/h) theo công thức: $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v, (0 < v < 120)$

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ trên $(0; 120]$.
- Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Bài 12: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

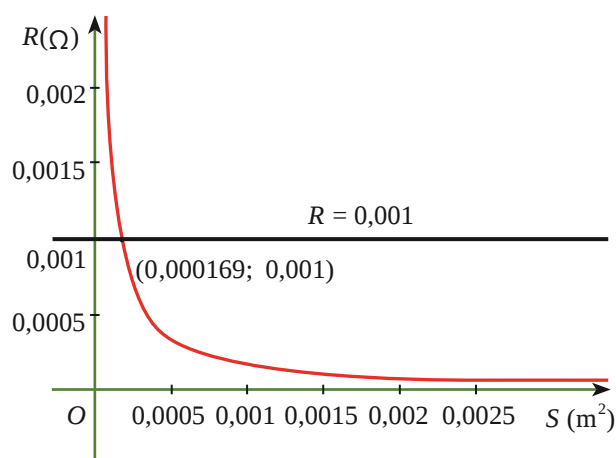
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .
- Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 13: Điện trở R (Ω) của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất ρ (Ωm), chiều dài l (m) và tiết diện S (m^2) được cho bởi công thức $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$



(Vật lí 11 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ 20°C) của một sợi dây điện dài 10 m làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình vẽ bên dưới.



Kim loại	Điện trở suất ở 20°C (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$

- Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?
- Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.
- Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Trắc nghiệm

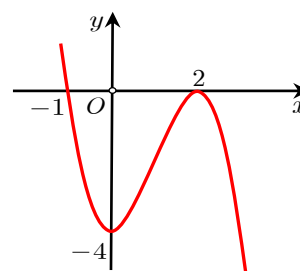
Câu 01: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 - 4$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

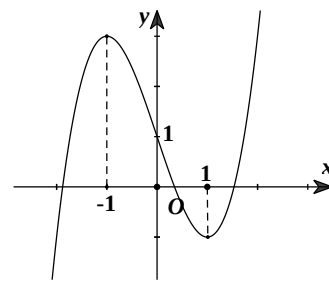
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



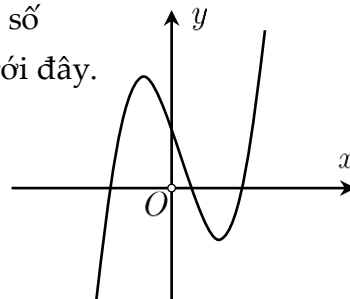
Câu 02: Đồ thị sau là của một trong bốn hàm số đã cho, đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
- D. $y = x^3 - 3x + 1$.



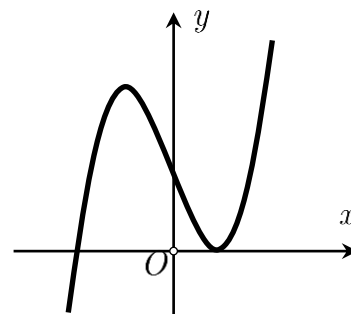
Câu 03: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = -x^2 + x - 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 3x + 1$.



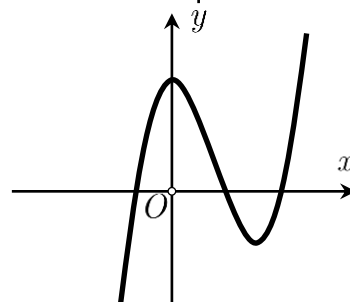
Câu 04: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$.
- B. $y = x^3 + x^2 + x$.
- C. $y = x^3 + x^2 - 1$.
- D. $y = -x^3 + 3x + 2$.



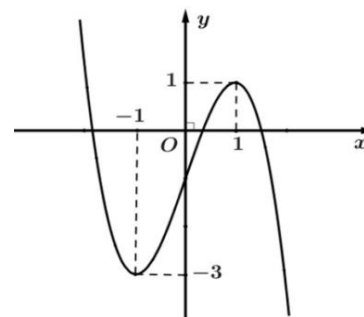
Câu 05: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 - 3$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.



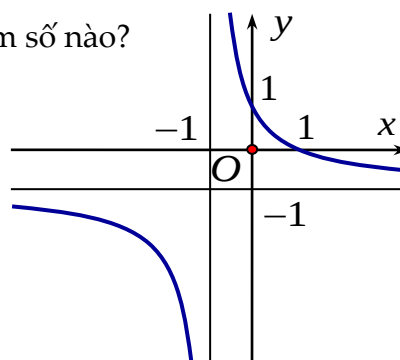
Câu 06: (Sở Kon Tum 2023) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

- A. $y = x^3 + 2x$.
- B. $y = -x^3 + 3x - 1$.
- C. $y = x^3 + 3x - 1$.
- D. $y = -x^3 + 3x + 2$.



Câu 07: (Chuyên Bắc Ninh 2019) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.
- B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.
- C. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.
- D. $y = \frac{-x}{x+1}$.



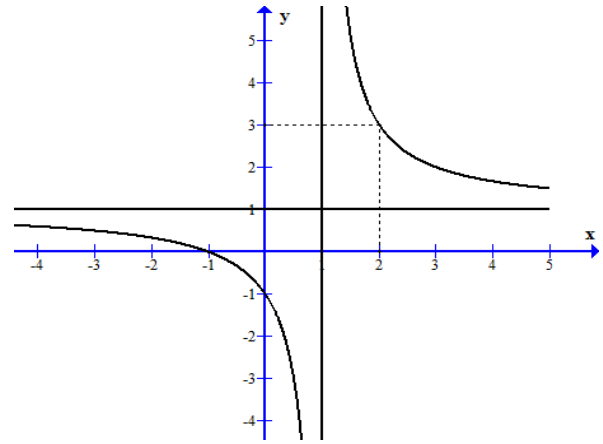
Câu 08: (THPT Thuận Thành 2023) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như hình vẽ ?

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 09: (THPT Thuận Thành 2023) Tìm tọa độ điểm I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số

$y = \frac{3x+2}{2x-1}$.

A. $I\left(\frac{3}{2}; -2\right)$.

B. $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

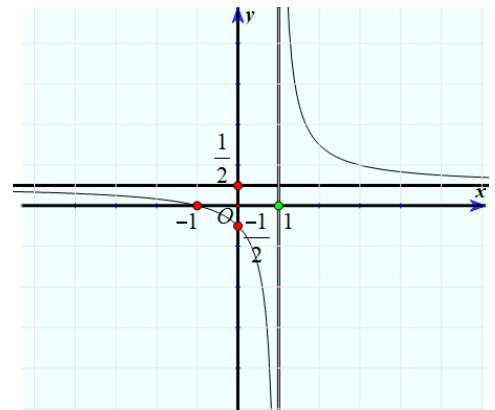
Câu 10: (Quốc Học Quy Nhơn 2023) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?

A. $y = \frac{2x-4}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+2}{2x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{2x-2}$.

D. $y = \frac{2x}{3x-3}$.



Câu 11: (Quốc Học Quy Nhơn 2023) Cho hàm số

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Tọa độ

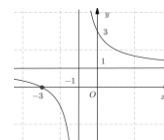
giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là

A. $(3;0)$.

B. $(0;3)$.

C. $(-3;0)$.

D. $(0;-3)$.



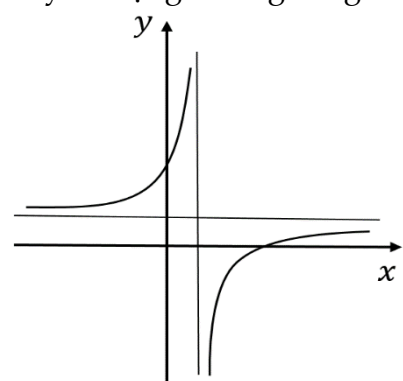
Câu 12: (Minh Họa THPTQG 2023) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên

A. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

B. $y = \frac{x-3}{x-1}$.

C. $y = x^2 - 4x + 1$.

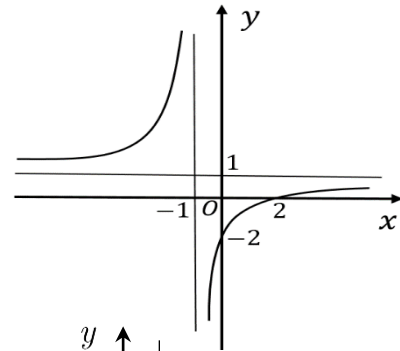
D. $y = x^3 - 3x - 5$.



Câu 13: (MH THPTQG 2023) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ

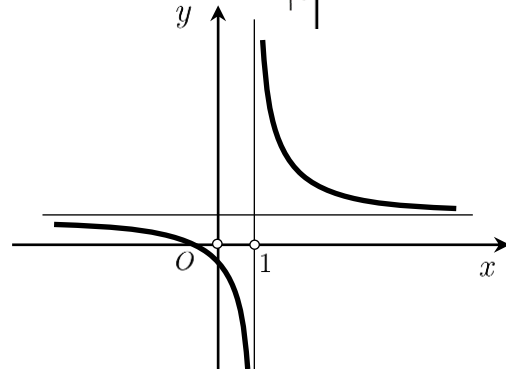
thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

- A. $(0; -2)$. B. $(2; 0)$.
C. $(-2; 0)$. D. $(0; 2)$.



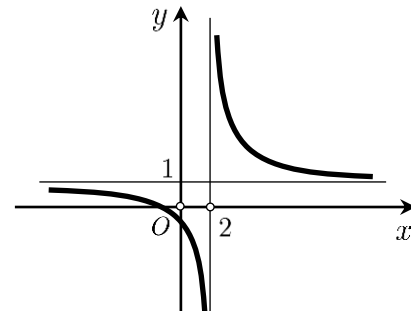
Câu 14: (THPTQG 2017) Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



Câu 15: (THPTQG 2017) Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 2$.
B. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
C. $y' > 0, \forall x \neq 2$.
D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

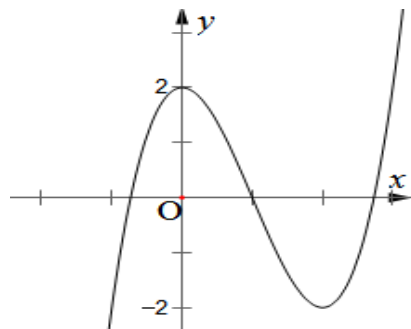


Câu 16: Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

- A. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+3}{x-1}$. C. $y = \frac{-2x-3}{x-1}$. D. $y = \frac{-x+1}{x-2}$.

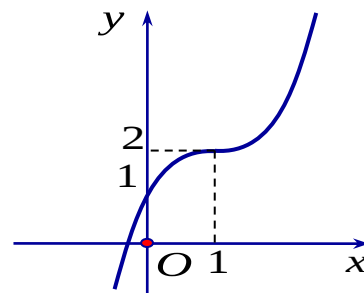
Câu 24: Đường cong trong hình bên cạnh là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



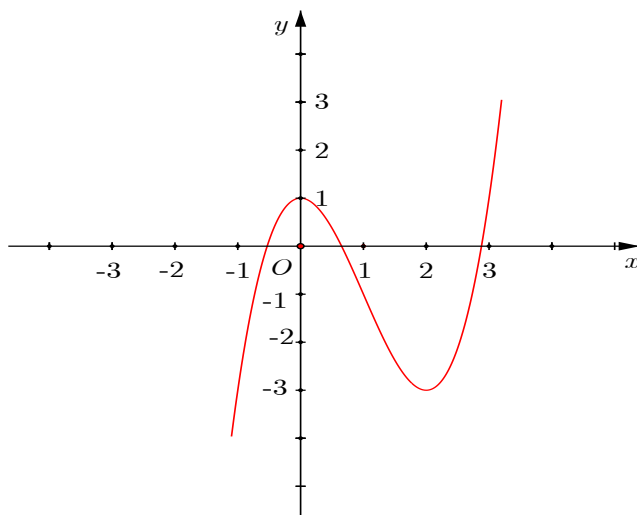
- A. $y = x^3 + 3x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Câu 25: (THPT Lương Tài 2019) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây

- A.** $y = 2x^3 + 1$. **B.** $y = x^3 + x + 1$.
C. $y = x^3 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 2x + 1$.

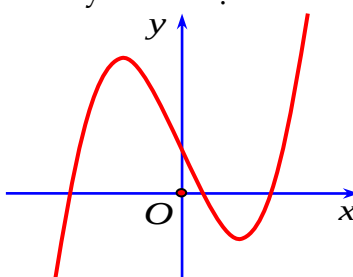


Câu 26: Đồ thị như hình vẽ là của hàm số



- A.** $y = x^4 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$. **D.** $y = 3x^2 + 2x + 1$.

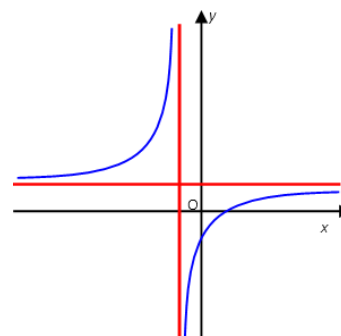
Câu 27: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào ?



- A.** $y = x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 28: Hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A.** $y = \frac{x-1}{x+1}$.
B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.
D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



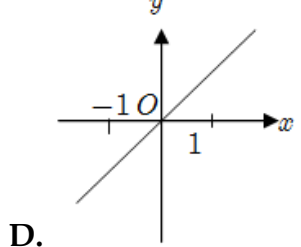
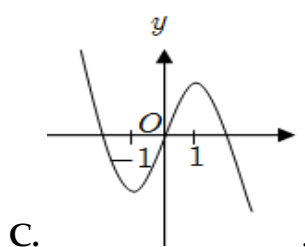
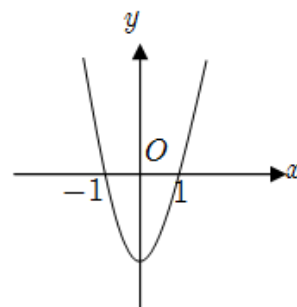
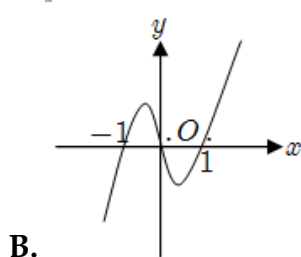
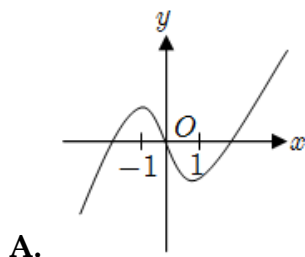
Câu 29: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

- A.** $y = \frac{x-3}{x-2}$. **B.** $y = \frac{2x-1}{x-2}$. **C.** $y = \frac{x+3}{2x+1}$. **D.** $y = \frac{x+3}{x-2}$.

Câu 30: Hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.

Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là hình nào sau đây?



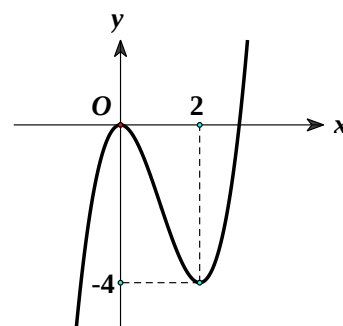
Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Giá trị của biểu thức $T = f(0) + f(1) - f(2)$.

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = 4$.

D. $T = 9$.



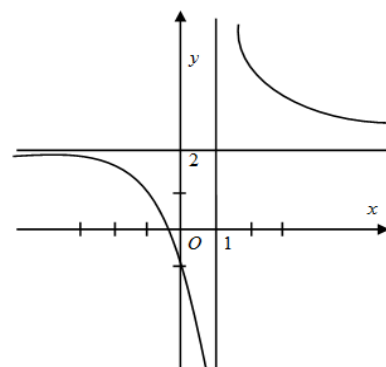
Câu 32: Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.



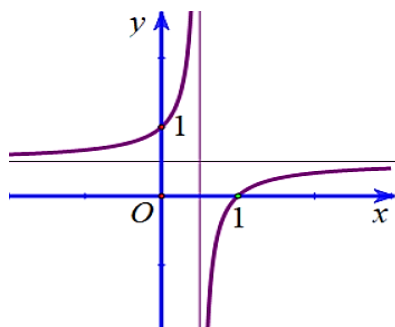
Câu 33: (THPT Quốc Võ 2022) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

A. $y = \frac{2x+1}{2x-1}$.

B. $y = \frac{x+1}{2x+1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{x-1}{2x-1}$.



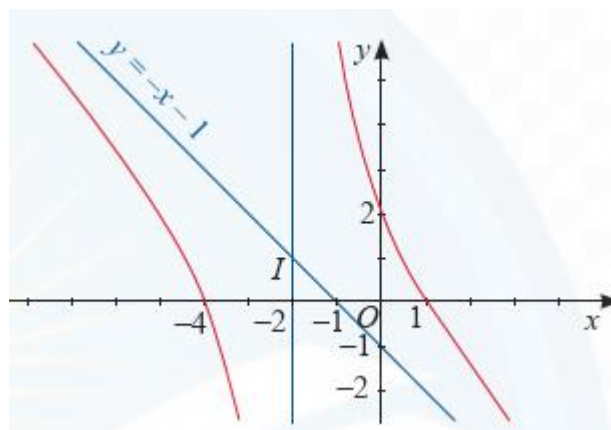
Câu 34: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

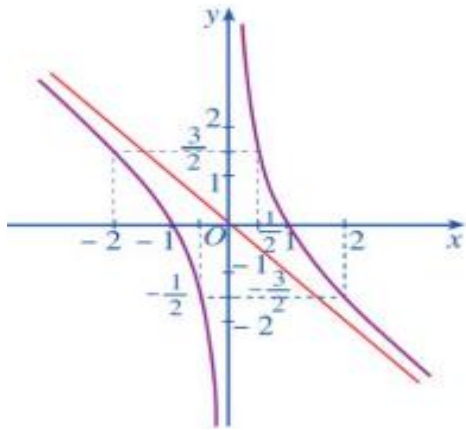
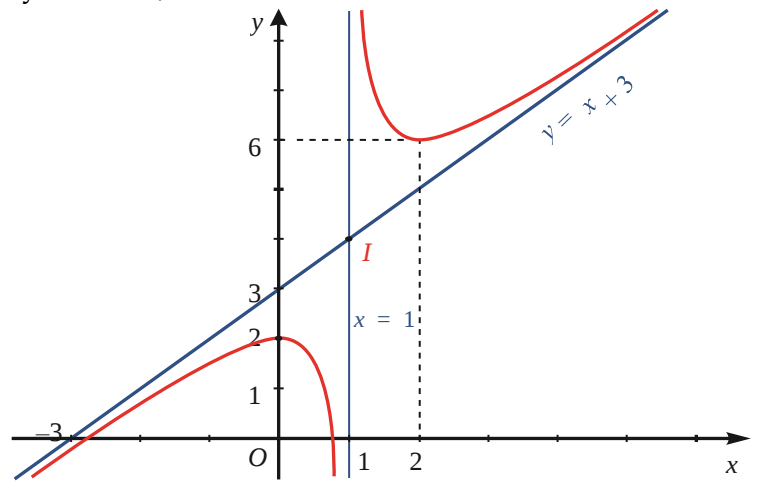
C. $y = \frac{x+3}{x+2}$.

D. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$.



Câu 35: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

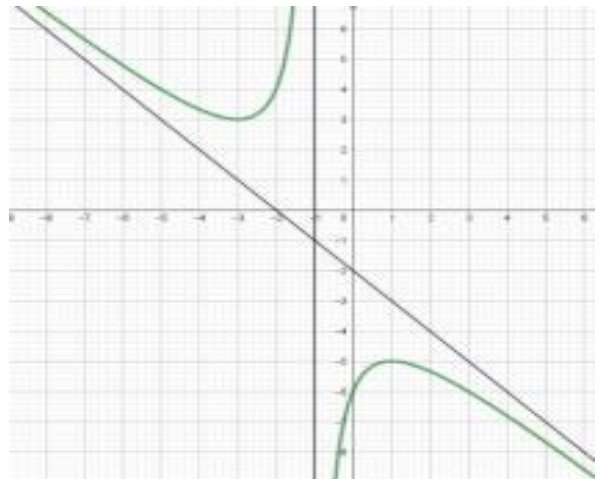
- A.** $y = \frac{x+3}{x-2}$.
B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
C. $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$.
D. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.



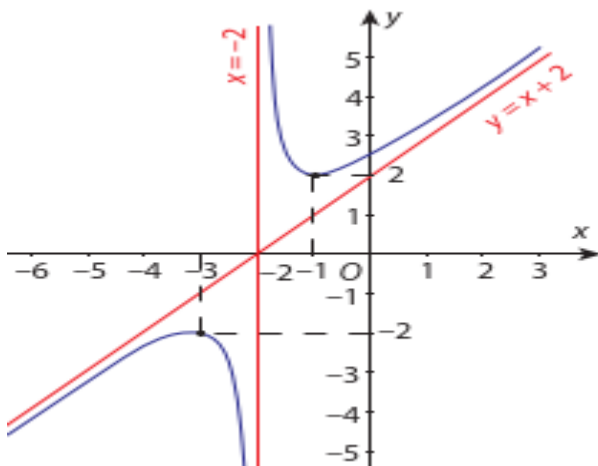
- A.** $y = \frac{1}{x}$.
B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.
C. $y = \frac{-x^2+1}{x-2}$.
D. $y = \frac{-x^2+1}{x}$.

Câu 37: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

- A.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$.
B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
D. $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x+1}$.

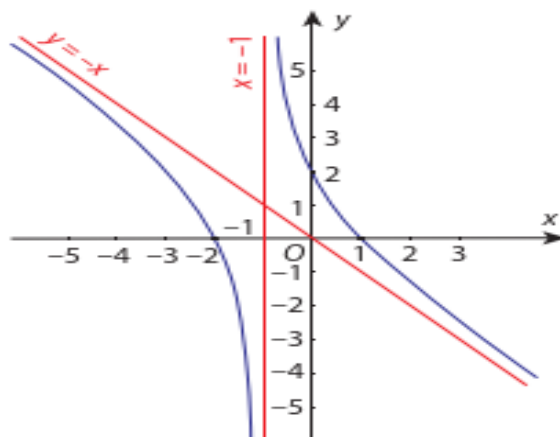


Câu 38: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



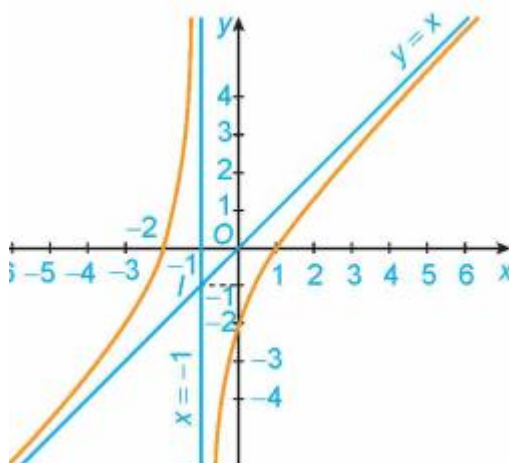
- A.** $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.
B. $y = \frac{4x + 5}{x + 2}$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
D. $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$.

Câu 39: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = \frac{-x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{-x^2-x+2}{x+1}$. C. $y = -x^3+3x^2-1$. D. $y = \frac{x^2-x+2}{x+1}$.

Câu 40: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = x^3+3x^2-1$. B. $y = \frac{-x^2+x-2}{x+1}$. C. $y = \frac{x-2}{x+1}$. D. $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$.

Câu 41: Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

- A. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x^2-2x+5}{x+1}$. C. $y = \frac{-x^2+2x-5}{x-1}$. D. $y = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$.

Câu 42: Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	8	$+\infty$

- A. $y = \frac{-x^2+2x-5}{x-2}$. B. $y = \frac{x^2-2x+9}{x-2}$. C. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$. D. $y = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$.

Câu 43: Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 5 $\nearrow$	$+\infty$

- A. $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 2}$. B. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. C. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$. D. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Câu 44: Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.	x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$					
B. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.	y'	+	0	-	-	0	+				
C. $y = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$.	y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

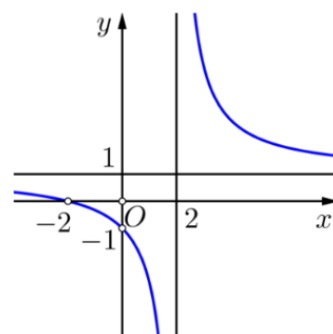
C. $y = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$.

D. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{x - a}{bx + c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

- A. $P = -3$.
 B. $P = 1$.
 C. $P = 5$.
 D. $P = 2$.



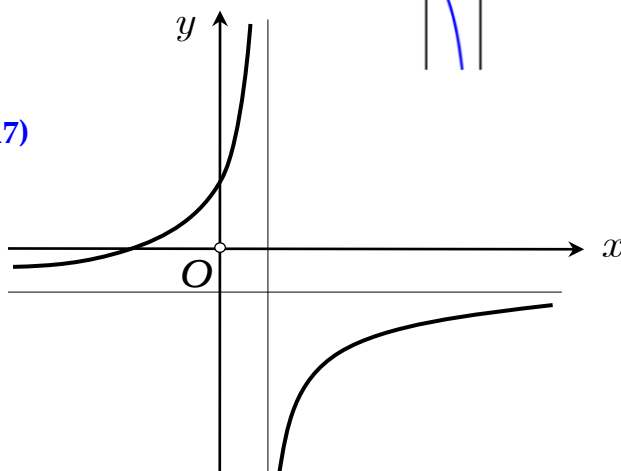
Câu 46: (Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ 2017)

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

có đồ thị như hình vẽ dưới.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

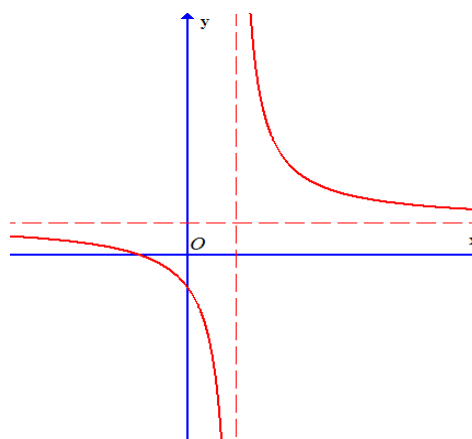


Câu 47: (THPT Phan Bội Châu – 2020)

Cho hàm số $y = \frac{x + b}{x + d}$ ($b, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ

bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $b > 0, d < 0$.
 B. $b > 0, d > 0$.
 C. $b < 0, d > 0$.
 D. $b < 0, d < 0$.



Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ (m là tham số thực và $m > 0$) thỏa mãn $\max_{[1;4]} y = -1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

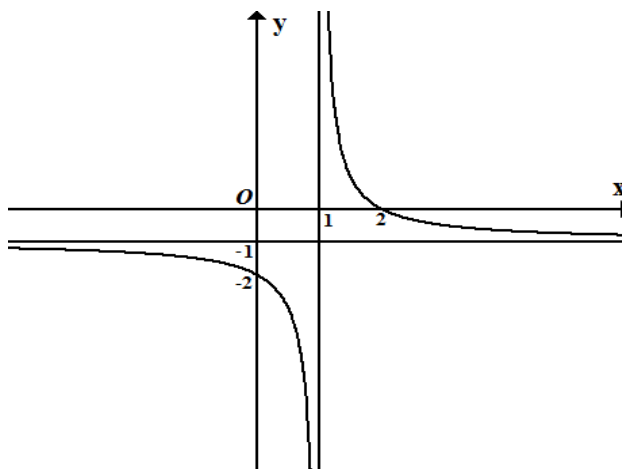
- A. $m > 9$
- B. $6 < m \leq 9$
- C. $0 < m \leq 3$
- D. $3 < m \leq 6$

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (với

$a, b, c \in \mathbb{Z}$) có đồ thị như hình vẽ sau

Tính giá trị của biểu thức $T = a + 3b + c$?

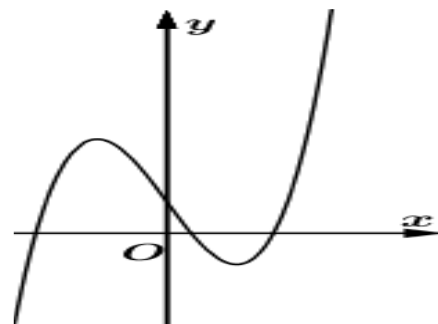
- A. $T = 22$.
- B. $T = 6$.
- C. $T = 13$.
- D. $T = 9$.



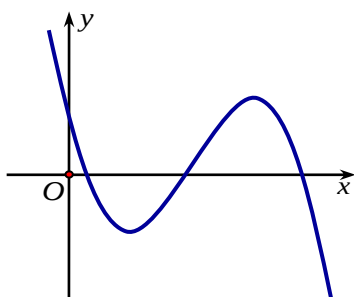
Câu 50: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Khẳng định nào sau đây về dấu của a, b, c, d là đúng nhất?

- A. $a, b, c, d > 0$.
- B. $a, d > 0, c < 0$.
- C. $a, d > 0$.
- D. $a > 0, c > 0 > b$.



Câu 51: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

TÌNH TIẾN ĐỒ THỊ

Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) và x_0, y_0 là hai số dương tùy ý.

- ▶ Tình tiến (C) **lên trên** y_0 đơn vị thì ta được đồ thị $y = f(x) + y_0$
- ▶ Tình tiến (C) **xuống dưới** y_0 đơn vị thì ta được đồ thị $y = f(x) - y_0$
- ▶ Tình tiến (C) **sang trái** x_0 đơn vị thì ta được đồ thị $y = f(x + x_0)$
- ▶ Tình tiến (C) **sang phải** x_0 đơn vị thì ta được đồ thị $y = f(x - x_0)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN TÌNH TIẾN ĐỒ THỊ

Câu 01: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = x^3$. Tịnh tiến (C) lên trên 2 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = x^3 + 1$ B. $y = x^3 + 2$ C. $y = (x + 2)^3$ D. $y = (x + 2)^3 + 2$

Câu 02: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = x^3 + 2$. Tịnh tiến (C) sang trái 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = (x + 3)^3 + 2$ B. $y = (x - 3)^3 + 2$
C. $y = (x - 3)^3$ D. $y + 1 = (x + 3)^3$

Câu 03: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = x^2$. Tịnh tiến (C) lên trên 5 đơn vị, sau đó tịnh tiến đồ thị nhận được sang trái 1 đơn vị thì ta nhận được đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = x^2 + 2x + 6$ B. $y = (x - 1)^2 + 2$
C. $y = (x + 2)^2 + 5$ D. $y = (x - 2)^2 - 4$

Câu 04: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Tịnh tiến (C) sang trái 3 đơn vị sau đó tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị thì ta được đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{2(x+3)+1}{x-2}$ B. $y = \frac{(x+3)+1}{3x-2}$
C. $y = \frac{7}{x}$ D. $y = \frac{7}{2x}$

Câu 05: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) sang trái 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x - 1)$ B. $y = f(x + 1)$
C. $y = f(x) + 1$ D. $y = f(x) - 1$

Câu 06: Cho đường cong (C) có phương trình: $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) sang phải 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x - 3)$
B. $y = f(x + 3)$
C. $y = f(x) + 3$
D. $y = f(x) - 3$

Câu 07: Cho đường cong (C) có phương trình : $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) lên trên 4 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x-3) + 4$ B. $y = f(x+3) + 4$
C. $y = f(x) - 3$ D. $y = f(x) + 4$

Câu 08 : Cho đường cong (C) có phương trình : $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) xuống dưới 4 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x-4)$ B. $y = f(x+3) + 4$
C. $y = f(x) - 4$ D. $y = f(x) + 4$

Câu 09: Cho đường cong (C) có phương trình : $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) xuống dưới 4 đơn vị sau đó tịnh tiến lên trên 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x-4)$
B. $y = f(x+3) + 2$
C. $y = f(x) - 4$
D. $y = f(x) + 2$

Câu 10: Cho đường cong (C) có phương trình : $y = f(x)$. Tịnh tiến (C) xuống dưới 4 đơn vị sau đó tịnh tiến sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số

- A. $y = f(x-4)$ B. $y = f(x+2) - 4$
C. $y = f(x) - 4$ D. $y = f(x+2) + 4$

Câu 11: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $(0; 2)$ thì hàm số $y = f(x-3)$ nghịch biến trên

- A. $(-3; -1)$
B. $(3; 4)$
C. $(-3; 0)$
D. $(3; 5)$



TRANG ÔN TẬP LẠI KIẾN THỨC ĐẠO HÀM LỚP 11