SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI BÌNH
THPT LÊ QUÝ ĐÔN
--------&&&-------

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn thi : Toán - *Thời gian làm bài 180 phút*
(*Đề thi gồm 01 trang*)

Bài 1.(*5 điểm*)

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là (H). M là điểm trên (H) sao cho $x_M > 1$, tiếp tuyến của (H) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B. Xác định toạ độ điểm M sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc toạ độ, I là giao của hai tiệm cận)

Bài 2.(*6 điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ \sqrt{2}-x^2+2x=\sqrt{2y-2x+4} \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$.

3) Cho ba số thực dương *a, b, c.* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{24}{13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài 3.(*6 điểm*).

1) **.** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC; M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH. Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho MNCK là hình bình hành. Biết $M\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$, K(9; 2) và các đỉnh B,C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0$, $d_2: x-y-5=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ điểm C lớn hơn 4.

2) Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại C, BC = 3a, AC = 4a, cạnh BB' = $\dfrac{2\sqrt{22}}{3}a$. Hình chiếu vuông góc của B' trên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

3) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng 1, góc $\widehat{BAD}=60^0$, SA = = SB = SD = 1. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB và AD sao cho mp(SMN) vuông góc với (ABCD). Đặt AM = x, AN = y, tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện SAMN nhỏ nhất.

Bài 4.(*2 điểm*)

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $2\sin A+3\sin B+4\sin C=5\cos\dfrac{A}{2}+3\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$.

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 5.(*1 điểm*) Trong mặt phẳng có n điểm, trong đó có k điểm thẳng hàng, số còn lại không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng từ n điểm đó tạo được 36 đường thẳng phân biệt và tạo được 110 tam giác khác nhau. Hãy tìm n, k.

---------Hết--------

Lưu ý: Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: ……………………………………...Số báo danh:………………..…………..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI BÌNH
--------&&&-------
THPT Lê Quý Đôn

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn thi : Toán
(*Gồm 6 trang*)

Bài		
(5 đ)	Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là (H). M là điểm trên (H) sao cho $x_M > 1$, tiếp tuyến của (H) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B. Xác định toạ độ điểm M sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc toạ độ, I là giao của hai tiệm cận)	
	$M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}\right), x_0>1$ thuộc (H), Tiếp tuyến của (H) tại M có phương trình $(d): y-\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}=\dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)$	1.0
	(d) cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$, (d) cắt tiệm cận ngang tại B($2x_0-1$; 1)	1.0
	IA = $\dfrac{1}{x_0-1}$, IB = $2(x_0-1)$	1.0
	$S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA} \Leftrightarrow 2(x_0-1)=\dfrac{8}{x_0-1} \Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1(ktm)\\ x_0=3(tm)\end{array}\right.$	1.0
	Vậy $M\left(3;\dfrac{5}{4}\right)$	1.0

Bài 2		
1 ($2^đ$)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ \sqrt{2}-x^2+2x=\sqrt{2y-2x+4}\end{cases}$	
	Đk: y —x + 2 ≥ 0 (*) Đặt $t=x^2-2y$ Pt(1) trở thành : $4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \dfrac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\dfrac{4+3^{2t}}{7^{2t}}$	0.5
	$f(t+2)=f(2t) \Leftrightarrow t+2=2t \Leftrightarrow t=2$ (Với $f(x)=\dfrac{4+3^x}{7^x}$ nghịch biến trên R) Từ đó $2y=x^2-2$	0.5
	Thay $2y=x^2-2$ vào pt(2) ta được $\sqrt{2}-x^2+2x=\sqrt{x^2-2x+2}$ (3) Đặt $\sqrt{x^2-2x+2}=a\ge 1$ phương trình (3) trở thành $a^2+a-(2+\sqrt{2})=0$ (4)	0.5
	Giải pt (4) được $a=\sqrt{2}$ tìm được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0\\ y=-1\end{cases} \text{(tm *)} \\ \begin{cases} x=2\\ y=1\end{cases} \text{(tm *)}\end{array}\right.$	0.5

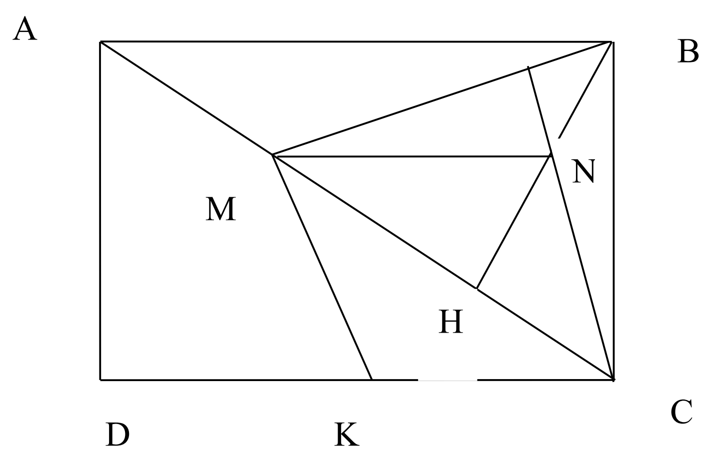
Bài 2		

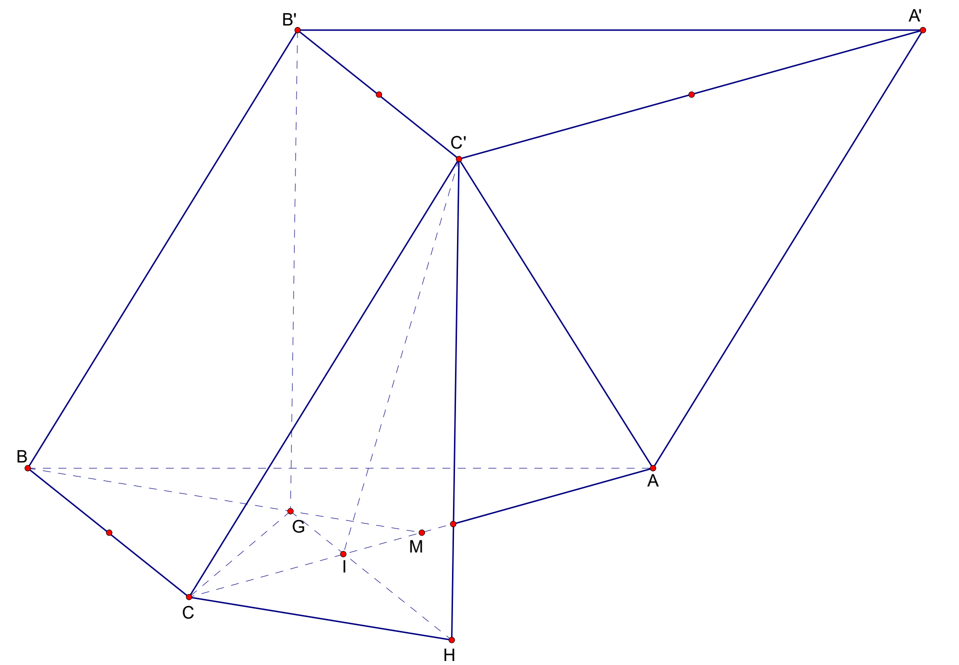
2 ($2^đ$)	Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)\quad (x\in R)$.	
	HD: ĐK: $x(x^2+2x-4)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{5}\le x\le 0 \\ x\ge -1+\sqrt{5}\end{array}\right.$	0.5
	Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>x^2+5x-4$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>(x^2+2x-4)+3x$ (**)	0.5
	TH 1: $x\ge -1+\sqrt{5}$, Chia hai vế cho x > 0, ta có: (**) $\Rightarrow 4\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}>\frac{x^2+2x-4}{x}+3$ Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}$, $t\ge 0$, ta có bpt: $t^2-4t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3$ $1<\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}<3\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-4<0 \\ x^2+x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{65}}{2}$	0.5
	TH 2: $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$, $x^2+5x-4<0$, (**) luôn thỏa Vậy tập nghiệm bpt (*) là $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$	0.5

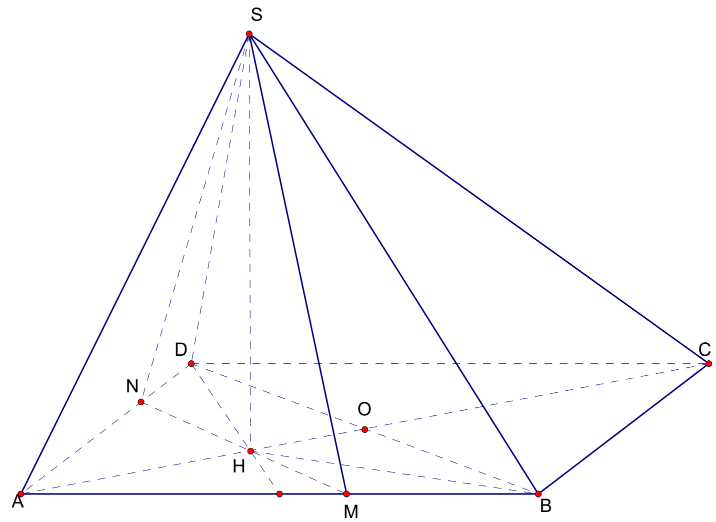
Bài 2		
3 ($2^đ$)	Cho ba số thực dương a,b,c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{24}{13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.	
	Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}=13a+6\sqrt{a.4b}+8\sqrt{b.4c}\le 13a+6.\frac{a+4b}{2}+8.\frac{b+4c}{2}=16(a+b+c)$ $\Rightarrow 13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}\le 16(a+b+c)$. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow a=4b=16c$.	0.5
	Suy ra $P\ge \frac{3}{2(a+b+c)}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$. Đặt $t=a+b+c,\ t>0$. Khi đó ta có: $P\ge \frac{3}{2t}-\frac{3}{\sqrt{t}}$	0.5
	Xét hàm số $f(t)=\frac{3}{2t}-\frac{3}{\sqrt{t}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{3}{2t\sqrt{t}}-\frac{3}{2t^2}$. $f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}}-\frac{3}{2t^2}=0\Leftrightarrow t=1;\ \lim_{x\to 0^+} f(t)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(t)=0$ BBT.	0.5

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$+\infty$ ↘	$-\frac{3}{2}$	↗ 0	

	Vậy ta có $P \geq -\frac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{16}{21}; b=\frac{4}{21}; c=\frac{1}{21}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(\frac{16}{21},\frac{4}{21},\frac{1}{21}\right)$.	0.5

Bài 3		
1 ($2^đ$)	Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC; M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH. Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho MNCK là hình bình hành. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$, K(9; 2) và các đỉnh B,C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0$, $d_2: x-y-5=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ điểm C lớn hơn 4.  	
	MN là đường trung bình của tam giác HAB $\Rightarrow MN // AB, MN=\frac{1}{2}AB$. Do MNCK là hình bình hành $\Rightarrow MN // CK, MN=CK=\frac{1}{2}AB$ suy ra K là trung điểm của CD Ta có $MN \perp BC, BH \perp MC$ nên N là trực tâm tam giác BCM $\Rightarrow CN \perp BM$, mà MK // CN $\Rightarrow BM \perp MK$	0.5
	Viết phương trình BM qua M và và vuông góc với MK, suy ra toạ độ $B = BM \cap d_1 \Rightarrow B(1;4)$	0.5
	$C \in d_2 \Rightarrow C(a;a-5)$. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CK}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9 \\ a=4 \end{array}\right.$. Do $x_C > 4$ nên C(9; 4).	0.5
	K là trung điểm CD suy ra D(9;0). $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow A(1;0)$ Vậy A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)	0.5

2 (2 đ)	Cho lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, BC = 3a, AC = 4a, cạnh BB’ = $\frac{2\sqrt{22}}{3}a$. Hình chiếu vuông góc của B’ trên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BB’ và AC’.	
		
	BB’// (ACC’) suy ra d(BB’, AC’) = d(BB’, (ACC’)) = d(B, (ACC’)	0.5
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của C’ trên (ABC). Gọi I là giao điểm của GH và AC. Chứng minh được $C'I \perp AC$ và $C'I = \sqrt{C'H^2 + HI^2} = 2\sqrt{2}a$	0.5
	$S_{\Delta C'AC} = \frac{1}{2}C'I.AC = 4\sqrt{2}a^2$ $V_{C'.ABC} = 4a^3$ $V_{C'.ABC} = V_{B.ACC'} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACC'}.d(B,(ACC'))$	0.5
	$\Rightarrow d(B,(ACC')) = \frac{3V_{C'.ABC}}{S_{\Delta ACC'}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Kết luận d(BB’, AC’) = $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$ (đvd)	0.5
3 (2 đ)	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng 1, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, SA = SB = SD = 1. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB và AD sao cho mp(SMN) vuông góc với (ABCD). Đặt AM = x, AN = y, tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện SAMN nhỏ nhất.	

	 Chứng tỏ M,H,N thẳng hàng theo thứ tự đó $S_{AMN}=S_{AMH}+S_{ANH}=\frac{1}{2}AM.AH.\sin 30^0+\frac{1}{2}AN.AH.\sin 30^0=\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y)$ (5)	0.5
	$S_{AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$ (6) Từ (5) và (6) ta có $x+y=3xy$ $(0\le x,y\le 1)$ (7)	0.5
	$MN^2=AM^2+AN^2-2AM.AN.\cos 60^0=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=(3xy)^2-3xy$ $\Leftrightarrow MN=\sqrt{(3xy)^2-3xy}$ Gọi S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện SAMN Ta có $S_{tp}=S_{AMN}+S_{SAN}+S_{SAM}+S_{SMN}$ $=\frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0+\frac{1}{2}AN.AS.\sin 60^0+\frac{1}{2}AM.AS.\sin 60^0+\frac{1}{2}SH.MN$ $=\frac{1}{2}.x.y.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.y.1.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.x.1.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3xy(3xy-1)}$ $=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(xy+x+y\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}.\sqrt{3xy(3xy-1)}=\sqrt{3}xy+\frac{\sqrt{6}}{6}.\sqrt{3xy(3xy-1)}$	0.5
	Từ (7) ta có $3xy=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow \sqrt{xy}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow xy\ge\frac{4}{9}$ $S\ge\frac{\sqrt{3}\left(4+\sqrt{2}\right)}{9}$ $MinS=\frac{\sqrt{3}\left(4+\sqrt{2}\right)}{9}$ khi $x=y=\frac{2}{3}$	0.5

Bài 4 (2 đ)	Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $2\sin A+3\sin B+4\sin C=5\cos\frac{A}{2}+3\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

	Ta có : $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{C}{2}$ $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \le \cos\frac{C}{2}$ dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi chỉ khi A = B (1)	0.5
	Tương tự : $\frac{5}{2}(\sin B + \sin C) \le 5\cos\frac{A}{2}$ (2)	0.5
	$\frac{3}{2}(\sin C + \sin A) \le 3\cos\frac{B}{2}$ (3)	0.5
	Từ (1), (2), (3), suy ra : $2\sin A + 3\sin B + 4\sin C \le 5\cos\frac{A}{2} + 3\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.	0.5

Bài 5 (1 đ)	Trong mặt phẳng có n điểm, trong đó có k điểm thẳng hàng, số còn lại không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng từ n điểm đó tạo được 36 đường thẳng phân biệt và tạo được 110 tam giác khác nhau. Hãy tìm n, k.	
	+ Số đường thẳng phân biệt có được $C_n^2 - C_k^2 + 1$ + Số tam giác phân biệt có được $C_n^3 - C_k^3$	0.25
	Theo bài ra ta có: $\begin{cases} C_n^2 - C_k^2 + 1 = 36 \\ C_n^3 - C_k^3 = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) - k(k-1) = 70 \\ C_n^3 - C_k^3 = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-k)(n+k-1) = 70 \quad (1) \\ C_n^3 - C_k^3 = 110 \quad (2) \end{cases}$ Từ (2) ta có $C_n^3 > 110 \Rightarrow n \ge 10$ mà k≥3 suy ra n+k-1≥12	0.25
	Do đó (1) tương đương với các trường hợp sau 1) $\begin{cases} n+k-1 = 14 \\ n-k = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 10 \\ k = 5 \end{cases}$ thỏa mãn (2) 2) $\begin{cases} n+k-1 = 35 \\ n-k = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 19 \\ k = 17 \end{cases}$ không thỏa mãn (2) 3) $\begin{cases} n+k-1 = 70 \\ n-k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 36 \\ k = 35 \end{cases}$ không thỏa mãn (2)	0.25
	Vậy n=10, k=5.	0.25