

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ (C).

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\log_4(x-1)^2 = 1 + \log_4(x+2)$.

b) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(2+i)z = 10 + (1-i)z$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x-1) \ln 2x dx$.

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$.

b) Đội tuyển học sinh giỏi môn Toán của tỉnh Vĩnh Phúc chuẩn bị đi thi học sinh giỏi Quốc gia gồm có 5 học sinh lớp 12 và 3 học sinh lớp 11. Chọn ngẫu nhiên từ đội tuyển 3 học sinh. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất một em học sinh lớp 11.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d và viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d .

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm I đến (SCD) theo a .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC biết rằng hai điểm $H(5;5)$, $I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là: $x + y - 8 = 0$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2016^{x+y}(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{y^2+2}-y) = 2 \\ 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18y^2}{y^2+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

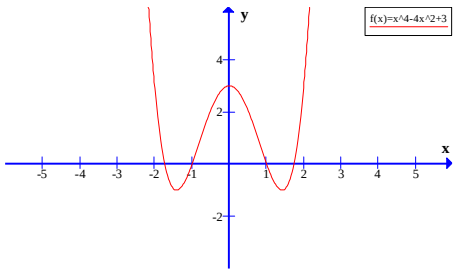
$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(x+z)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq 2.$$

-----Hết-----

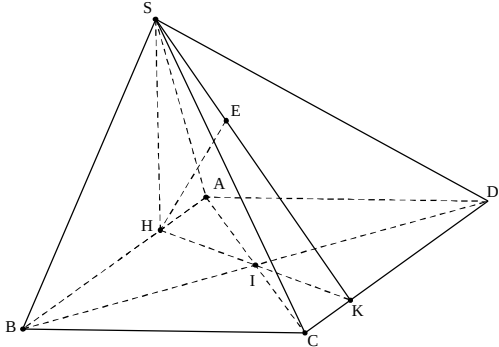
I. LƯU Ý CHUNG:

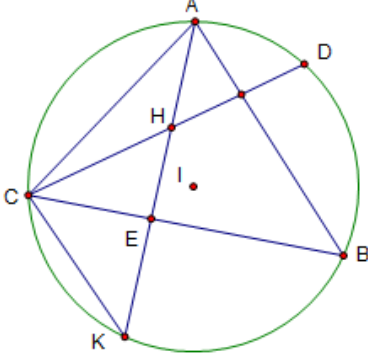
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Với bài hình học không gian nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	ý	Nội dung	Điểm																			
1		Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số...	1.00																			
		•TXĐ $D = \mathbb{R}$. •Sự biến thiên + Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.	0.25																			
		+ Chiều biến thiên: • $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$ Các khoảng đồng biến $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$; các khoảng nghịch biến $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$. • Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 3$; đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -1$.	0.25																			
		Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$+$	y	$+\infty$		3		$+\infty$	0.25
	x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$																
y'		$-$	0	$+$	0	$+$																
y	$+\infty$		3		$+\infty$																	
	Đồ thị (C). • Đồ thị (C) cắt trục Oy tại điểm $(0; -4)$; cắt trục Ox tại hai điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$. 	0.25																				
2		Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất...	1.00																			
		Hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên sẽ liên tục trên đoạn $[0; 4]$. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$	0.25																			
		Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [0; 4] \\ x = 3 \in [0; 4] \end{cases}$	0.25																			
		Ta có $f(0) = 1$; $f(3) = -80$; $f(4) = -63$	0.25																			
		$\underset{[0;4]}{Max} f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $\underset{[0;4]}{Min} f(x) = -80 \Leftrightarrow x = 3$	0.25																			

3	a	Giải phương trình:	0.50
		Điều kiện $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Khi đó phương trình tương đương $(x-1)^2 = 4(x+2)$	0.25
		$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$	0.25
		Kết hợp điều kiện ta được $x = 7, x = -1$	
	b	Tìm phần thực và phần ảo...	0.50
		$(2+i)z = 10 + (1-i)z \Leftrightarrow (1+2i)z = 10 \Leftrightarrow z = \frac{10}{1+2i}$	0.25
4		$\Leftrightarrow z = 2 - 4i$. Vậy phần thực của z là 2, phần ảo của z là -4.	0.25
		Tính tích phân...	1.00
		Đặt $\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = (2x-1)dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = (x^2 - x)dx \end{cases}$	0.25
		Theo công thức tích phân từng phần: $I = (x^2 - x)\ln 2x \Big _1^2 - \int_1^2 (x^2 - x) \frac{1}{x} dx$	0.25
		$I = (x^2 - x)\ln 2x \Big _1^2 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _1^2$	0.25
		$I = 2\ln 4 - \frac{1}{2}$	0.25
5	a	Giải phương trình...	0.50
		$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0.25
		Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$	
	b	Tính xác suất...	0.50
		Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_8^3 = 56$	
		Số kết quả thuận lợi cho biến cố “Có ít nhất 1 học sinh lớp 11” là: $C_8^3 - C_5^3 = 46$	0.25
		Xác suất của biến cố: $\frac{46}{56} = \frac{23}{28}$	0.25

6	Tìm tọa độ hình chiếu và lập phương trình mặt cầu....	1.00
	Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}(2;1;2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d , suy ra $H(1+2t;t;2+2t)$ và $\overrightarrow{AH}(2t-1;t-5;2t-1)$.	0.25
	Vì $AH \perp d$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + t - 5 + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Suy ra $H(3;1;4)$	0.25
	Mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d nên có bán kính $R = AH = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	0.25
	Phương trình mặt cầu cần lập: $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 18$	0.25
7	Tính thể tích hình chóp và khoảng cách....	1.00
	Ta có $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Rightarrow AB = 2a$. $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 120^\circ = 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a^2 \sqrt{3}.$	0.25
	Kẻ $SH \perp AB$ ($H \in AB$). Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$ Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD}$ $= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 \sqrt{3} = a^3$ 	0.25
	Ta có $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2}$. Kẻ $IP \perp AB$ ($P \in AB$) $\Rightarrow AP = AI \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. Do đó $H \equiv P \Rightarrow HI \perp AB$. Gọi K là giao điểm của HI và CD , ta có $HK = 2IH = a\sqrt{3}$ Nhận xét $\frac{d(I;(SCD))}{d(H;(SCD))} = \frac{IK}{HK} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I;(SCD)) = \frac{1}{2} d(H;(SCD))$. Ta có $\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp HK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow (SHK) \perp (SCD)$.	0.25
	Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$) $\Rightarrow HE \perp (SCD) \Rightarrow d(H;(SCD)) = HE$ $\Rightarrow d(I;(SCD)) = \frac{1}{2} HE$ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HE = a\sqrt{\frac{3}{5}}.$ Vậy $d(I;(SCD)) = \frac{a\sqrt{15}}{10}$.	0.25

8	Giả sử AH lần lượt cắt BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm E và K. $\widehat{HCE} = \widehat{DCB} = \widehat{BAK}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{KB} \Rightarrow \widehat{HCE} = \widehat{ECK}$ $\Rightarrow \Delta HCE = \Delta KCE$ (g.c.g) E là trung điểm của HK.		0.25
	Vì $AH \perp BC \Rightarrow AH : x - y = 0$. $E = BC \cap AH \Rightarrow E(4; 4)$ và E là trung điểm HK nên $K(3; 3)$		0.25
	Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IK = \sqrt{5}$ Vậy đường tròn có phương trình : $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 5$		0.25
	Từ đó tính được $B(3; 5)$, $C(6; 2)$ hoặc $B(6; 2)$, $C(3; 5)$ và $A(6; 6)$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{ 6 + 6 - 8 }{\sqrt{2}} 3\sqrt{2} = 6$ (đvdt)		0.25
9	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2016^{x+y}(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{y^2+2}-y)=2 & (1) \\ 25x^2+9x\sqrt{9x^2-4}=2+\frac{18y^2}{y^2+1} & (2) \end{cases} \dots$		
	Điều kiện : $x \geq \frac{2}{3}$ $(1) \Leftrightarrow 2016^x(\sqrt{x^2+2}-x) = 2016^{-y}(\sqrt{y^2+2}+y)$ $\Leftrightarrow x \ln 2016 + \ln(\sqrt{x^2+2}-x) = -y \ln 2016 + \ln[\sqrt{(-y)^2+2}-(-y)]$ Xét hàm số : $f(t) = t \ln 2016 + \ln(\sqrt{t^2+2}-t), t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = \ln 2016 - \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $x = -y$.		0.25
	Thay vào (2) ta có : $25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18x^2}{x^2+1}$ (3) Nếu $x \geq \frac{2}{3}$ thì $18x^2 > \frac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2 > 2 \Rightarrow VT(3) > VP(3)$ (loại) Nếu $x \leq -\frac{2}{3}$ thì $25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2+1}$		0.25
	Đặt $t = \frac{1}{x^2} (0 < t \leq \frac{9}{4})$ ta được $25 - 9\sqrt{9 - 4t} = 2t + \frac{18t}{t+1} \Leftrightarrow \left(\frac{18t}{t+1} - 12 \right) + 2t - 4 + 9\sqrt{9 - 4t} - 9 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{6}{t+1}(t-2) + 2(t-2) - \frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1} = 0$		0.25

		$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \frac{6}{t+1} + 2 - \frac{36}{\sqrt{9-4t}+1} = 0 \quad (4) \end{cases}$ Vì $0 \leq \sqrt{9-4t} < 3 \Rightarrow 12 < \frac{36}{\sqrt{9-4t}+1} \leq 36 \Rightarrow VT(4) < 0, \forall t \in \left(0; \frac{9}{4}\right]$ $\Rightarrow t = 2$. Từ đó tìm được $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
10		Tìm giá trị nhỏ nhất	1.00
		Ta có $x^2(y+z) \geq x^2 \cdot 2\sqrt{yz} = \frac{2x^2}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}$, tương tự $y^2(x+z) \geq 2y\sqrt{y}; z^2(y+x) \geq 2z\sqrt{z}$	0.25
		$P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$ Đặt $a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}; b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}; c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$ $\Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9}; y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9}; z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9}$	0.25
		Do đó $P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a} \right)$ $= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4 \cdot 3 + 3 - 6) = 2$	0.25
		Do $\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = 3, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.	0.25

.....Hết.....