



# HỆ THỨC LƯỢNG

## *trong tam giác*

TÁC GIẢ  
TOÁN TỪ TÂM



## MỤC LỤC

### Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

#### A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc .....	2
2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.....	3
3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau .....	3
4. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt .....	3
7. Các hệ thức lượng giác cơ bản.....	3

#### B. Các dạng bài tập

☞ Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác .....	4
☞ Dạng 2. Tính giá trị biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.....	7
☞ Dạng 3. Chứng minh/rút gọn đẳng thức/biểu thức lượng giác.....	11

#### C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm .....	14
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai .....	16
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn .....	18

### Bài 2. ĐỊNH LÝ SIN - COS, GIẢI TAM GIÁC & THỰC TẾ

#### A. Lý thuyết

1. Định lý hàm cos.....	20
2. Định lý hàm sin .....	20
3. Đường trung tuyến.....	21
4. Diện tích tam giác.....	21
5. Giải tam giác.....	21

#### B. Các dạng bài tập

☞ Dạng 1. Giải tam giác.....	22
☞ Dạng 2. Chứng minh hệ thức trong tam giác.....	25
☞ Dạng 3. Ứng dụng thực tế.....	29

#### C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm .....	32
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai .....	36
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn .....	37



Chương 04

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$  ĐẾN  $180^\circ$

A

Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc



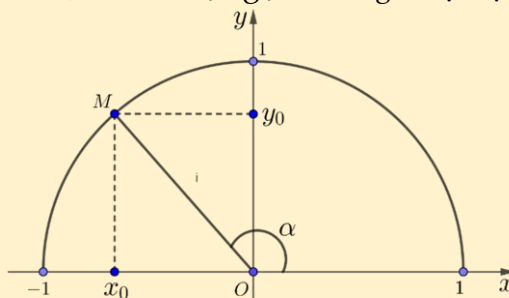
Định nghĩa

- » Trong mặt phẳng  $Oxy$ , nửa đường tròn tâm  $O$  nằm phía trên trục hoành bán kính  $R = 1$  được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*.
- » Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định một điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$  và giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $M(x_0; y_0)$ .

Khi đó:

①  $\sin \alpha = y_0$ .    ②  $\cos \alpha = x_0$ .    ③  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ).    ④  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ).

- » Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là *các giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .



Chú ý

Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

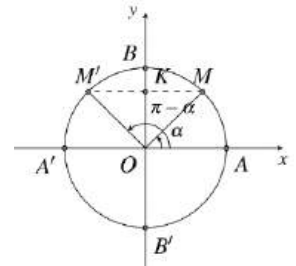
Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-



**2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau**

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

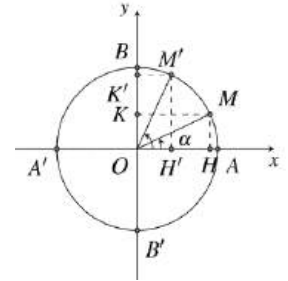
Sin – bù



**3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau**

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

Phụ – chéo



**4. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

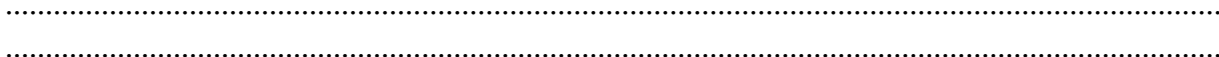
**7. Các hệ thức lượng giác cơ bản**

- (1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$       (2)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$       (3)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$   
 (4)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$       (5)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$       (6)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

TOÁN TỪ TÂM







TOÁN TỪ TÂM









.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 2.3.**

Cho biểu thức  $P = \frac{3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ .

- (1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $P$  không xác định.
- (2) Tìm giá trị của  $P$  biết  $\tan \alpha = -2$ .

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 2.4.**

Cho biểu thức  $Q = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ .

- (1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $Q$  không xác định.
- (2) Tìm giá trị của  $Q$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....











Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ .  
 B.  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ .  
 C.  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ .  
 D.  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

» Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ .  
 B.  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ .  
 C.  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ .  
 D.  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .

» Câu 3. Cho biết  $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Giá trị của  $\tan\alpha$  bằng

- A.  $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ .  
 B.  $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ .  
 C.  $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ .  
 D.  $\tan\alpha = \frac{5}{4}$ .

» Câu 4. Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin\alpha$  và  $\cot\alpha$  cùng dấu.  
 B. Tích  $\sin\alpha \cdot \cot\alpha$  mang dấu âm.  
 C. Tích  $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$  mang dấu dương.  
 D.  $\sin\alpha$  và  $\tan\alpha$  cùng dấu.

» Câu 5. Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A.  $\tan\alpha < 0$ .  
 B.  $\cot\alpha > 0$ .  
 C.  $\sin\alpha < 0$ .  
 D.  $\cos\alpha > 0$ .

» Câu 6. Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ .  
 B.  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ .  
 C.  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ .  
 D.  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ .

» Câu 7. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

- A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$ .  
 B.  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ .  
 C.  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan\alpha$ .  
 D.  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ .

» Câu 8. Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?

- A.  $\sin\alpha = \sin\beta$ .  
 B.  $\cos\alpha = -\cos\beta$ .  
 C.  $\tan\alpha = -\tan\beta$ .  
 D.  $\cot\alpha = \cot\beta$ .

» Câu 9. Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\cos\alpha < \cos\beta$ .  
 B.  $\sin\alpha < \sin\beta$ .  
 C.  $\tan\alpha + \tan\beta > 0$ .  
 D.  $\cot\alpha > \cot\beta$ .

» Câu 10. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
 B.  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 C.  $\cos C = \frac{1}{2}$ .  
 D.  $\sin B = \frac{1}{2}$ .

» Câu 11. Biết  $\cos\alpha = \frac{2}{3}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó  $\tan\alpha$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .  
 B.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .  
 C.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .  
 D.  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

» Câu 12. Cho  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$  thì

- A.  $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ .  
 B.  $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ .  
 C.  $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .  
 D.  $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .



» **Câu 13.** Cho  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  và thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  bằng.

- A.  $-\frac{4}{5}$ .                      B.  $\frac{4}{5}$ .                      C.  $\frac{2}{5}$ .                      D.  $\frac{1}{5}$ .

» **Câu 14.** Cho  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ; ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

- A.  $-2 - \sqrt{3}$ .                      B.  $-2 + \sqrt{3}$ .                      C.  $2 + \sqrt{3}$ .                      D.  $2 - \sqrt{3}$ .

» **Câu 15.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{1}{13}$ .                      B.  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ .                      C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ .

» **Câu 16.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .                      B.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» **Câu 17.** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

» **Câu 18.** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = 2$ .                      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .                      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .                      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

» **Câu 19.**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

- A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      D.  $-\frac{1}{3}$ .

» **Câu 20.** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

» **Câu 21.** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

- A.  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      B.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      D.  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

» **Câu 22.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

- A.  $\frac{13}{4}$ .                      B.  $\frac{7}{4}$ .                      C.  $\frac{11}{4}$ .                      D.  $\frac{15}{4}$ .

» **Câu 23.** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$

- A.  $M = \frac{25}{27}$                       B.  $M = \frac{175}{27}$ .                      C.  $M = \frac{35}{27}$ .                      D.  $M = -\frac{25}{27}$ .

» **Câu 24.** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?





A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .

» **Câu 25.** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

» **Câu 26.** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$  là

A.  $-\frac{2}{5}$ .                      B.  $\frac{4}{5}$ .                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D.  $-\frac{3}{2}$ .

» **Câu 27.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ .

A.  $\frac{13}{4}$ .                      B.  $\frac{7}{4}$ .                      C.  $\frac{11}{4}$ .                      D.  $\frac{15}{4}$ .

» **Câu 28.** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2 \cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a}$

A.  $\sin a + \cos a$ .                      B.  $\sin a - \cos a$ .                      C.  $\cos a - \sin a$ .                      D.  $\tan a + \cos a$ .

» **Câu 29.** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^6 x + \cos^6 x$  bằng  $a + b \cdot \cos 4x$ . Giá trị của  $a + 2b$  là

A.  $\frac{9}{8}$ .                      B.  $\frac{11}{8}$ .                      C.  $\frac{13}{8}$ .                      D.  $\frac{15}{8}$ .

» **Câu 30.** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

A.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .                      B.  $\cot^2 a + \tan^2 a$ .                      C.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .                      D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

» **Câu 31.** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

A. 0.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 1.

» **Câu 32.** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

A. 21.                      B. 23.                      C. 22.                      D. 24.

$$= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22.$$

» **Câu 33.** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. 1.                      B. 2.                      C. -2.                      D. -1.

» **Câu 34.** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 1.

» **Câu 35.** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  với  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

A.  $P = 0$ .                      B.  $P = 1$ .                      C.  $P = -1$ .                      D.  $P = 2$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 36.** Cho  $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$		
(b)	$\cos \alpha = \frac{12}{13}$		



(c)	$\cot \alpha = \frac{12}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = \frac{5}{13}$		

» **Câu 37.** Cho biết  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha > 0$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$		
(c)	$\cot \alpha = -\frac{4}{3}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$		

» **Câu 38.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$		
(b)	$\sin \alpha < 0$		
(c)	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$		

» **Câu 39.** Cho  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{12}{5}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{5}{12}$		

» **Câu 40.** Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$		
(d)	$\frac{\sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{7}{4 + \sqrt{5}}$		



» **Câu 41.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$		
(b)	$A = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = \frac{35}{9}$		
(c)	$B = 5 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\frac{1}{3}$		
(d)	$C = \sqrt{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha} = 2$		

» **Câu 42.** Cho  $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ , ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha > 0$		
(b)	$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$		
(d)	$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$		

**C. Câu hỏi – Trả lời ngắn**

» **Câu 43.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ ?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ ?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$ ?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Cho  $\tan \alpha = 1$ . Tính  $B = \frac{\sin^2 \alpha + 1}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 47.** Cho  $\cot \alpha = 4$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 48.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .



Điền đáp số:

» **Câu 50.** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Tính giá trị của  $\sin \alpha \cos \alpha$  ta thu được kết quả  $\frac{a^2 - m}{n}$  với  $m; n$  là các số tự nhiên. Tính  $m - n$

Điền đáp số:

» **Câu 51.** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ . Tính  $P = |\sin x - \cos x|$ .

Điền đáp số:

» **Câu 52.** Giá trị của biểu thức:  $A = \sin 60^\circ + 2 \cos 30^\circ - 3 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}}{2}$  với  $a; b$  là các số nguyên dương. Khi đó giá trị  $S = a + b^2$  bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 53.** Cho các góc  $\alpha, \beta$  thoả mãn  $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$  và  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$ .

Điền đáp số:

» **Câu 54.** Tính giá trị biểu thức sau:  $D = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ .

Điền đáp số:

» **Câu 55.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  ?

Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 2.

ĐỊNH LÝ SIN - COS, GIẢI TAM GIÁC & THỰC TẾ

A

Lý thuyết

1. Định lý hàm cos



» Trong  $\triangle ABC$  với  $BC = a, CA = b, AB = c$ , ta có:

$$\square a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\square b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

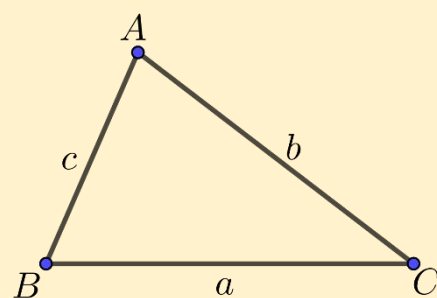
$$\square c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$$

» Hệ quả

$$\square \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\square \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\square \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$



2. Định lý hàm sin



» Trong  $\triangle ABC$  ta có:

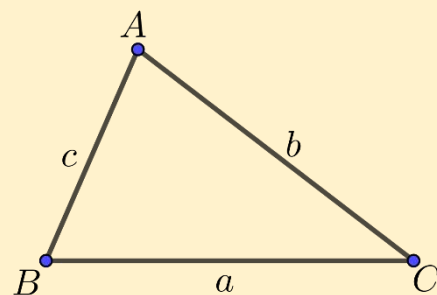
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

» Hệ quả

$$\square a = 2R \sin A \longrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\square b = 2R \sin B \longrightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\square c = 2R \sin C \longrightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$$





### 3. Đường trung tuyến

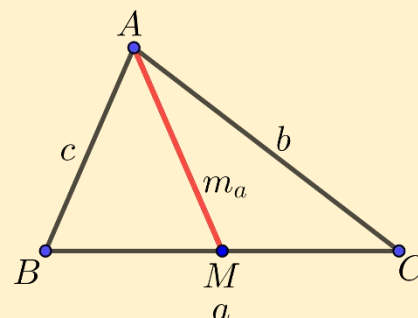


- » Cho  $\Delta ABC$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  
 $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2$ .
- » Gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ  $A, B, C$

$$\square m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\square m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$\square m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$



### 4. Diện tích tam giác



- (1)  $S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$ .
- (2)  $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$
- (3)  $S = \frac{abc}{4R}$  ( $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ ).
- (4)  $S = p.r$  ( $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ ).
- (5)  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  với  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , với  $p$  là nửa chu vi.

### 5. Giải tam giác



- » Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.
- » Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.



**B**

**Các dạng bài tập**

**Dạng 1. Giải tam giác**



**Phương pháp**

» **Định lý cos:**

(1)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

(2)  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

(3)  $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$

» **Định lý sin:**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

» **Đường trung tuyến:**  $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

Gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ  $A, B, C$

(1)  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

(2)  $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$

(3)  $m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

» **Hệ quả**

(4)  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(5)  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

(6)  $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ac}$

» **Hệ quả**

(1)  $a = 2R \sin A \rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$

(2)  $b = 2R \sin B \rightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$

(3)  $c = 2R \sin C \rightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$



**Ví dụ 1.1.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7; b = 8; c = 5$ . Tính  $\hat{A}, S, h_a, R$ .

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

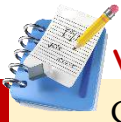
.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 1.2.**

Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2, BC = 5, CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 1.3.**

Tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 2\sqrt{3}, b = 2, C = 30^\circ$ .

- (1) Tính cạnh  $c$ , góc  $A$  và diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$ .
- (2) Tính chiều cao  $h$  và độ dài  $m$  của đường trung tuyến kẻ từ  $A$  của  $\Delta ABC$ .

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 1.4.**

Tính góc lớn nhất của tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 3, b = 4, c = 6$ .  
Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....









**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 2.3.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $b+c=2a$ . Chứng minh rằng

(1)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$

(2)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 2.4.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $bc = a^2$ . Chứng minh rằng

(1)  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$

(2)  $h_b \cdot h_c = h_a^2$ .

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





**Ví dụ 2.6.**

Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 \\ b + c - a \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  là tam giác đều.

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 2.7.**

Chứng minh rằng trong tam giác diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh bên liên tiếp với sin của góc xen giữa chúng.

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Dạng 3. Ứng dụng thực tế**



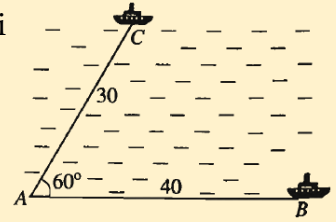
**Phương pháp**

- » Áp dụng Định lý cos – sin, công thức đường trung tuyến, hệ thức lượng trong tam giác...
- » Thường gặp: vận tốc – thời gian, tính độ dài đường đi, tính khoảng cách giữa các vật...



**Ví dụ 3.1.**

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 3.2.**

Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{ m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





# TOÁN TỬ TÂM





## Luyện tập

## A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Cho  $\Delta ABC$  có  $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:
- A. 7.                                  B. 129.                                  C. 49.                                  D.  $\sqrt{129}$ .
- » **Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 1$  và  $A = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $BC = \sqrt{2}$ .                                  B.  $BC = 1$ .                                  C.  $BC = \sqrt{3}$ .                                  D.  $BC = 2$ .
- » **Câu 3.** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của tam giác  $ABC$ . Biết  $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$ . Tính độ dài của  $a$ .
- A.  $3\sqrt{2}$ .                                  B.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .                                  C.  $\frac{23}{8}$ .                                  D. 6.
- » **Câu 4.** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?
- A.  $a^2 < ab + ac$ .                                  B.  $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ .  
 C.  $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$ .                                  D.  $ab + bc > b^2$ .
- » **Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:
- A.  $A = 30^\circ$ .                                  B.  $A = 45^\circ$ .                                  C.  $A = 60^\circ$ .                                  D.  $A = 75^\circ$ .
- » **Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?
- A.  $59^\circ 49'$ .                                  B.  $53^\circ 7'$ .                                  C.  $59^\circ 29'$ .                                  D.  $62^\circ 22'$ .
- » **Câu 7.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Khi đó góc  $BAC$  bằng bao nhiêu độ.
- A.  $30^\circ$ .                                  B.  $60^\circ$ .                                  C.  $90^\circ$ .                                  D.  $45^\circ$ .
- » **Câu 8.** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .                                  B.  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
 C.  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .                                  D.  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .
- » **Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, BC = 5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .
- A.  $\sqrt{11}$ .                                  B. 4.                                  C.  $\frac{9}{2}$ .                                  D.  $\sqrt{10}$ .
- » **Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ , có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $S$  là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .                                  B.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .  
 C.  $S = \frac{abc}{4R}$ .                                  D.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .
- » **Câu 11.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?



- A.  $\sqrt{9}$ .                      B. 9.                      C. 3.                      D.  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .

» **Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:

- A.  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .                      B.  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .                      C.  $b \sin B = 2R$ .                      D.  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .

» **Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $BAC = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A.  $R = 4$ .                      B.  $R = 1$ .                      C.  $R = 2$ .                      D.  $R = 3$ .

» **Câu 14.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5$ ;  $A = 40^\circ$ ;  $B = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?

- A. 3,7.                      B. 3,3.                      C. 3,5.                      D. 3,1.

» **Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .                      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .  
C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .                      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

» **Câu 16.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 16,8$ ;  $B = 56^\circ 13'$ ;  $C = 71^\circ$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?

- A. 29,9.                      B. 14,1.                      C. 17,5.                      D. 19,9.

» **Câu 17.** Tam giác  $ABC$  có  $A = 68^\circ 12'$ ,  $B = 34^\circ 44'$ ,  $AB = 117$ . Tính  $AC$ ?

- A. 68.                      B. 168.                      C. 118.                      D. 200.

» **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ;  $CA = b$ ;  $AB = c$  biết  $a = 8, b = 10$ , góc  $C$  bằng  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $c$  là?

- A.  $c = 3\sqrt{21}$ .                      B.  $c = 7\sqrt{2}$ .                      C.  $c = 2\sqrt{11}$ .                      D.  $c = 2\sqrt{21}$ .

» **Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7$ ;  $c = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính  $a$ .

- A.  $4\sqrt{2}$ .                      B. 2.                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D. 3.

» **Câu 20.** Trong  $\triangle ABC$  có  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .                      B.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .  
C.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cos A$ .                      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A$ .

» **Câu 21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6$  và  $A = 120^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là

- A.  $\sqrt{19}$ .                      B.  $2\sqrt{7}$ .                      C.  $3\sqrt{19}$ .                      D.  $2\sqrt{19}$ .

» **Câu 22.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:

- A. 7.                      B. 129.                      C. 49.                      D.  $\sqrt{129}$ .

» **Câu 23.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$ , có  $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}$ . Số đo của góc  $A$  là:

- A.  $150^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $135^\circ$ .

» **Câu 24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 60^\circ, AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}$ . Tính cạnh  $BC$ .

- A.  $BC = \sqrt{10}$ .                      B.  $BC = \sqrt{13}$ .                      C.  $BC = \sqrt{12}$ .                      D.  $BC = \sqrt{11}$ .

» **Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}, \angle C = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $3 + \sqrt{37}$ .                      B. 10.                      C.  $3 - \sqrt{37}$ .                      D. 9.

» **Câu 26.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5\text{ cm}, BC = 5\text{ cm}, AC = 3\text{ cm}$ . Giá trị  $\cos A$  là

- A.  $-\frac{2}{3}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{3}{10}$ .                      D.  $-\frac{3}{10}$ .



- » **Câu 27.** Tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$ ,  $BAC = 30^\circ$ ,  $ACB = 75^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .  
**A.**  $S_{\Delta ABC} = 8$       **B.**  $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$       **C.**  $S_{\Delta ABC} = 4$       **D.**  $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$
- » **Câu 28.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:  
**A.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .      **B.**  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .      **C.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .      **D.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .
- » **Câu 29.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Góc  $BAD = 30^\circ$ . Diện tích hình thoi  $ABCD$  là  
**A.**  $\frac{a^2}{4}$ .      **B.**  $\frac{a^2}{2}$ .      **C.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      **D.**  $a^2$ .
- » **Câu 30.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 6, b = 8, c = 10$ . Diện tích  $S$  của tam giác trên là:  
**A.** 48.      **B.** 24.      **C.** 12.      **D.** 30.
- » **Câu 31.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$ . Diện tích của tam giác là:  
**A.**  $5\sqrt{3}$ .      **B.** 5.      **C.** 10.      **D.**  $10\sqrt{3}$ .
- » **Câu 32.** Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?  
**A.** 84.      **B.**  $\sqrt{84}$ .      **C.** 42.      **D.**  $\sqrt{168}$ .
- » **Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4, b = 6, c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:  
**A.**  $9\sqrt{15}$ .      **B.**  $3\sqrt{15}$ .      **C.** 105.      **D.**  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .
- » **Câu 34.** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$ . Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  bằng  
**A.** 72.      **B.** 144.      **C.** 54.      **D.** 108.
- » **Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ;  $AC = 4a$  và  $BAC = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ?  
**A.**  $S = 8a^2$ .      **B.**  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .      **C.**  $S = a^2\sqrt{3}$ .      **D.**  $S = 4a^2$ .
- » **Câu 36.** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng  
**A.** 12.      **B.** 3.      **C.** 6.      **D.** 24.
- » **Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng  
**A.** 1.      **B.**  $\frac{8}{9}$ .      **C.**  $\frac{4}{5}$ .      **D.**  $\frac{3}{4}$ .
- » **Câu 38.** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:  
**A.** 8, 125.      **B.** 130.      **C.** 8.      **D.** 8, 5.
- » **Câu 39.** Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?  
**A.** 6.      **B.** 8.      **C.**  $\frac{13}{2}$ .      **D.**  $\frac{11}{2}$ .
- » **Câu 40.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $BC = 8$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Biết  $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$  và  $AM > 3$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .  
**A.**  $AC = \sqrt{13}$ .      **B.**  $AC = \sqrt{7}$ .      **C.**  $AC = 13$ .      **D.**  $AC = 7$ .
- » **Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 7$  và  $BC = 9$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  cắt  $AM$  tại  $I$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AI$ .



- A.  $\frac{33}{2}$ .                      B.  $\frac{27}{2}$ .                      C. 3.                      D.  $\frac{32}{3}$ .

» **Câu 42.** Tam giác ABC có  $\hat{A} = 68^\circ 12'$ ,  $\hat{B} = 34^\circ 44'$ ,  $AB = 117$ . Tính AC ?

- A. 68.                      B. 168.                      C. 118.                      D. 200.

» **Câu 43.** Tam giác ABC có độ dài cạnh  $AB = 3\text{cm}$ ;  $AC = 6\text{cm}$  và  $A = 60^\circ$ . Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A.  $R = \sqrt{3}$ .                      B.  $R = 3\sqrt{3}$ .                      C.  $R = 3$ .                      D.  $R = 6$ .

» **Câu 44.** Cho tam giác ABC có  $B = 60^\circ$ ,  $C = 75^\circ$  và  $AC = 10$ . Khi đó, độ dài cạnh BC bằng

- A.  $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ .                      B.  $5\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ .                      D. 10.

» **Câu 45.** Tính diện tích hình bình hành ABCD biết  $AB = a$ ;  $BC = a\sqrt{3}$ ;  $\hat{A} = 60^\circ$ .

- A.  $a^2$ .                      B.  $\frac{3a^2}{2}$ .                      C.  $\frac{a^2}{2}$ .                      D.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

» **Câu 46.** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250\text{m}$ ,  $CB = 120\text{m}$ . Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 266m.                      B. 255m.                      C. 166m.                      D. 298m.

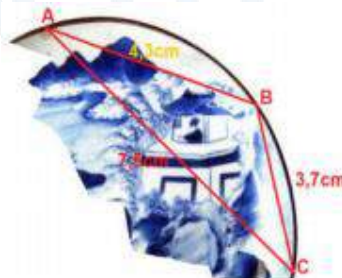
» **Câu 47.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

- A. 13.                      B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.

» **Câu 48.** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200\text{m}$ ,  $CB = 180\text{m}$ . Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 180m.                      B. 224m.                      C. 112m.                      D. 168m.

» **Câu 49.** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{cm}$ ;  $BC = 3,7\text{cm}$ ;  $CA = 7,5\text{cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



- A. 5,73 cm.                      B. 6,01 cm.                      C. 5,85 cm.                      D. 4,57 cm.

» **Câu 50.** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{m}$ ,  $\hat{CAD} = 63^\circ$ ;  $\hat{CBD} = 48^\circ$ . Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 61,4 m.                      B. 18,5 m.                      C. 60 m.                      D. 18 m.





**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 6m, b = 8m, c = 10m$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 16(cm)$		
(b)	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$		
(c)	$S = 24(cm^2)$		
(d)	$r = 4(cm)$		

» **Câu 52.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $a = 3cm, b = 4cm, \hat{C} = 30^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$		
(b)	$c \approx 3,05(cm)$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(c)	$\cos A \approx 0,68$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(d)	$c \approx 3,05(cm)$ kết quả làm tròn đến hàng phần chục		

» **Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 3cm, b = 4cm, c = 5cm$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 12(cm)$		
(b)	$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$		
(c)	$S_{ABC} = 6(cm^2)$ .		
(d)	$R = 3,5(cm)$		

» **Câu 54.** Cho tam giác  $ABC$  biết các cạnh  $a = 52,1cm, b = 85cm, c = 54cm$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$		
(b)	$A \approx 32^\circ$		
(c)	$\hat{B} \approx 126^\circ$		
(d)	$\hat{C} \approx 38^\circ$ .		

» **Câu 55.** Cho tam giác  $ABC$  với  $a = 49,4cm; b = 26,4cm$  và  $\hat{C} = 47^\circ 20'$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$		
(b)	$c \approx 47cm$		
(c)	$A \approx 137^\circ$		
(d)	$B \approx 31^\circ 40'$		

» **Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$  biết cạnh  $a = 137,5cm, \hat{B} = 83^\circ, \hat{C} = 57^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\hat{A} = 40^\circ$		
(b)	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$		
(c)	$R \approx 106,96cm$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(d)	$b \approx 179,4cm$ kết quả làm tròn đến hàng phần chục		

» **Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có số đo các cạnh lần lượt là 7,9 và 12. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 14$		
(b)	$S = 13\sqrt{5}$		
(c)	$R = \frac{7\sqrt{5}}{10}$		
(d)	$r = \sqrt{3}$		

» **Câu 58.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 135^\circ, \hat{C} = 15^\circ$  và  $b = 12$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\hat{B} = 30^\circ$		
(b)	$a = 12\sqrt{2}$ ;		
(c)	$c \approx 8,21$ ;		
(d)	$R = 15$		

» **Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin A = \frac{4}{5}$		
(b)	$S = 14$		
(c)	$a = 3\sqrt{2}$		
(d)	$r = 4 - \sqrt{2}$		

» **Câu 60.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = \sqrt{6}, CA = 2, AB = 1 + \sqrt{3}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = 30^\circ$		
(b)	$\hat{B} = 35^\circ$		
(c)	$S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$		
(d)	$R = \sqrt{2}$ .		

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \hat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$  và  $a = 10$ . Tính chu vi tam giác đó.

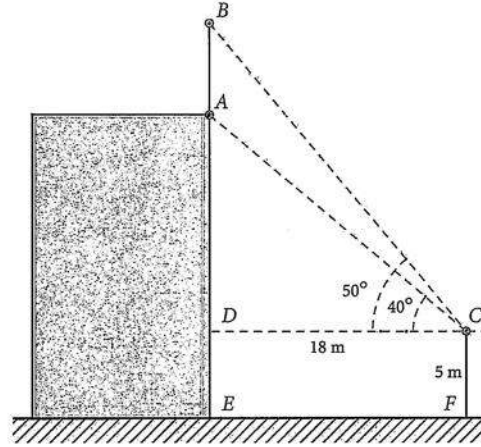
✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 63.** Để kéo dây điện từ cột điện vào nhà phải qua một cái ao, anh Nam không thể đo độ dài dây điện cần mua trực tiếp được nên đã làm như sau: Lấy một điểm  $B$  như trong hình, người ta đo được độ dài từ  $B$  đến  $A$  (nhà) là  $15m$ , từ  $B$  đến  $C$  (cột điện) là  $18m$  và  $\angle ABC = 120^\circ$ . Độ dài dây điện nối từ nhà ra đến cột điện là bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

✎ **Điền đáp số:**



- » **Câu 64.** Để đo chiều cao của một cột cờ trên đỉnh một toà nhà anh Bắc đã làm như sau: Anh đứng trên một đài quan sát có tầm quan sát cao  $5m$  so với mặt đất, khi quan sát anh đo được góc quan sát chân cột là  $40^\circ$  và góc quan sát đỉnh cột là  $50^\circ$ , khoảng cách từ chân toà nhà đến vị trí quan sát là  $18m$ . Chiều cao cột cờ và chiều cao của toà nhà bao nhiêu mét? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*



» **Điền đáp số:**

- » **Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác. *Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*

» **Điền đáp số:**

- » **Câu 66.** Để đo khoảng cách từ vị trí  $A$  trên bờ sông đến vị trí  $B$  của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  cách  $A$  một khoảng bằng  $50m$  và đo các góc  $BAC = 70^\circ, BCA = 50^\circ$ . (Hình). Tính khoảng cách  $AB$  theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

» **Điền đáp số:**

- » **Câu 67.** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến  $A$  và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc  $120^\circ$  (Hình). Tàu thứ nhất đi với tốc độ  $8$  hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ  $10$  hải lí một giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là  $60$  hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị giờ)?

» **Điền đáp số:**

- » **Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ ? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

» **Điền đáp số:**

- » **Câu 69.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, BC = 5, BD = 7$ . Tính  $AC$ . *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

» **Điền đáp số:**

- » **Câu 70.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 9, BC = 10, AC = \sqrt{73}$ . Kéo dài  $BC$  một đoạn  $CI = 5$ . Tính độ dài  $AI$

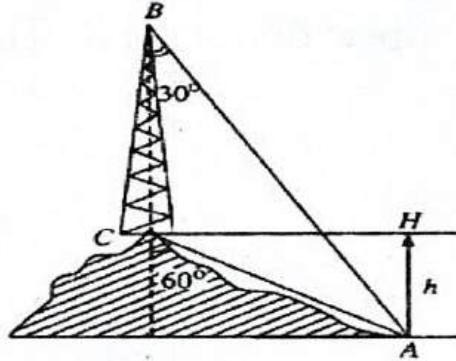
» **Điền đáp số:**

- » **Câu 71.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $1$ . Góc  $BAD = 30^\circ$ . Tính diện tích hình thoi  $ABCD$ .



Điền đáp số:

- » **Câu 72.** Trên ngọn đồi có một cái tháp cao  $100m$  (hình vẽ). Đỉnh tháp  $B$  và chân tháp  $C$  lần lượt nhìn điểm  $A$  ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng  $30^\circ$  và  $60^\circ$  so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao  $AH$  của ngọn đồi.

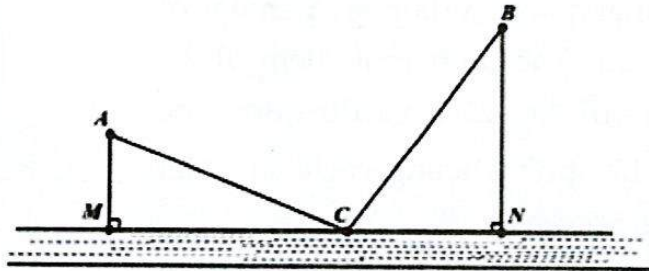


Điền đáp số:

- » **Câu 73.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $20km/h$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $30km/h$ . Hỏi sau 3 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

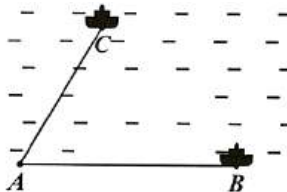
Điền đáp số:

- » **Câu 74.** Thành phố Hải Đông dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư  $A$  và  $B$ . Trạm nước sạch đặt tại vị trí  $C$  trên bờ sông. Biết  $AB = 3\sqrt{17} km$ , khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến bờ sông lần lượt là  $AM = 3km, BN = 6km$  (hình vẽ). Gọi  $T$  là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến  $A$  và  $B$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $T$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp số:

- » **Câu 75.** Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Tàu  $B$  chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu  $C$  chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



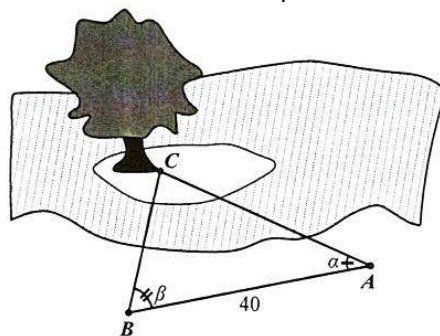
Điền đáp số:

- » **Câu 76.** Để đo khoảng cách từ một điểm  $A$  trên bờ sông đến gốc cây  $C$  trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm  $B$  cùng ở trên bờ với  $A$  sao cho từ  $A$  và  $B$  có thể nhìn thấy điểm



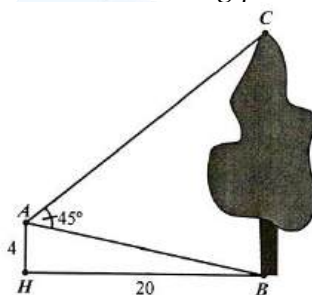


C. Ta đo được khoảng cách  $AB = 40m$ ,  $CAB = 45^\circ$ ,  $CBA = 70^\circ$ . Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách  $AC$  bằng bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



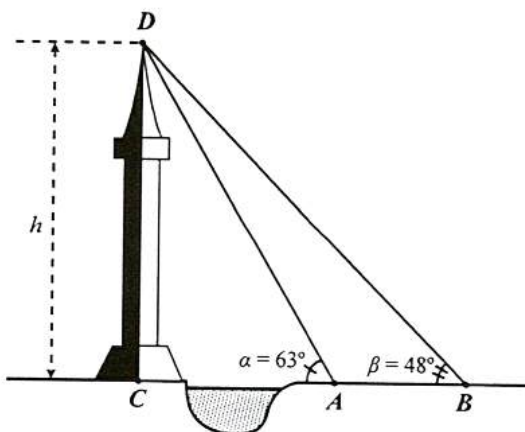
Điền đáp số:

» **Câu 77.** Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết  $AH = 4m$ ,  $HB = 20m$ ,  $BAC = 45^\circ$ . Tính chiều cao của cây? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



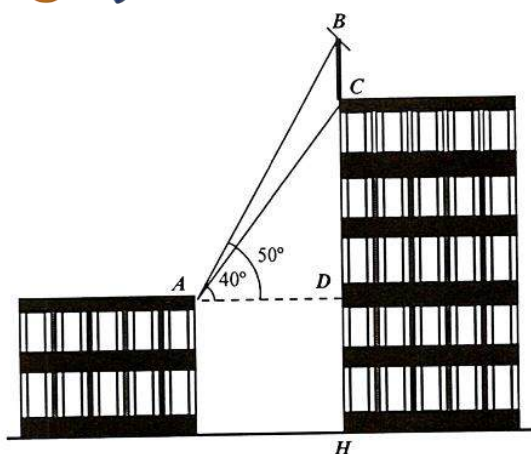
Điền đáp số:

» **Câu 78.** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24m$ ,  $CAD = 63^\circ$ ,  $CBD = 48^\circ$ . Tính chiều cao  $h$  của tháp? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



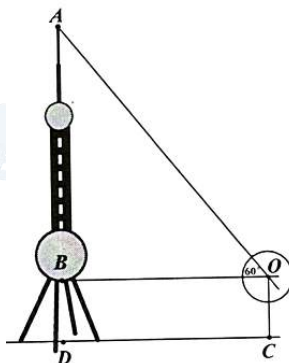
Điền đáp số:

» **Câu 79.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao  $5m$ . Từ vị trí quan sát A cao  $7m$  so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp số:

- » **Câu 80.** Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng  $CD = 60m$ , biết chiều cao của giác kế là  $OC = 1m$ . Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh  $A$  của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc  $AOB = 60^\circ$ . Tính chiều cao của ngọn tháp? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$  ĐẾN  $180^\circ$



Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc



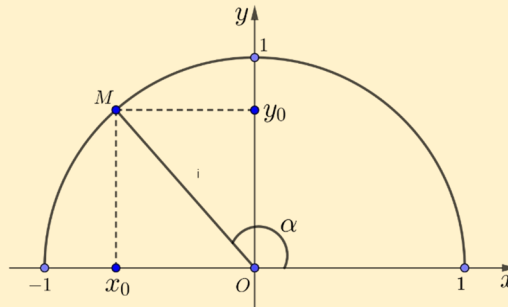
Định nghĩa

- » Trong mặt phẳng  $Oxy$ , nửa đường tròn tâm  $O$  nằm phía trên trục hoành bán kính  $R = 1$  được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*.
- » Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định một điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$  và giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $M(x_0; y_0)$ .

Khi đó:

①  $\sin \alpha = y_0$ .    ②  $\cos \alpha = x_0$ .    ③  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ).    ④  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ).

- » Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là *các giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .



Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

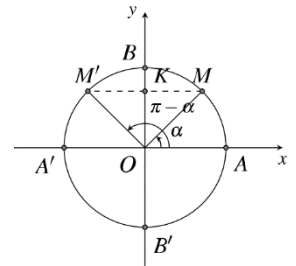
Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-



**2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau**

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

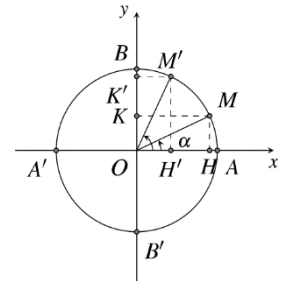
Sin – bù



**3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau**

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

Phụ – chéo



**4. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**7. Các hệ thức lượng giác cơ bản**

$$\begin{aligned}(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & (2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 & (3) \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ (4) \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & (5) 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & (6) 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}\end{aligned}$$



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác



#### Phương pháp

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$(3) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$(4) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$(5) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$(6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

Có thể sử dụng thêm: Sin - bù; Phụ - chéo



#### Ví dụ 1.1.

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$(1) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$(2) B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$(3) C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

#### Lời giải

$$(1) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$$

$$(2) B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3(1)^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$(3) C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

$$C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$



#### Ví dụ 1.2.

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$(1) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$(2) B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$(3) C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$$

#### Lời giải

$$(1) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$



$$A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ) \\ = (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$$

$$(2) B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\ = (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$$

$$(3) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ) \\ = (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$$



### Ví dụ 1.3.

Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Cho } \tan x = 2. \text{ Tính } A = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(2) \text{ Cho } \cot a = -3. \text{ Tính } A = \frac{\sin a - 2 \cos a}{3 \cos a + 2 \sin a}$$

*✎ Lời giải*

$$(1) \text{ Cho } \tan x = 2. \text{ Tính } A = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{3 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3 \tan x + 1}{\tan x - 1} = 7.$$

$$(2) \text{ Cho } \cot a = -3. \text{ Tính } A = \frac{\sin a - 2 \cos a}{3 \cos a + 2 \sin a}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{\frac{\sin a}{\sin a} - 2 \frac{\cos a}{\sin a}}{3 \frac{\cos a}{\sin a} + 2 \frac{\sin a}{\sin a}} = \frac{1 - 2 \cot a}{3 \cot a + 2} = -1.$$



➤ **Dạng 2. Tính giá trị biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác**



**Phương pháp**

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$

(3)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$

(4)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

(5)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

(6)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

Cần đánh giá được dấu của  $\sin \alpha$  và/hoặc  $\cos \alpha$ .



**Ví dụ 2.1.**

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

(2) Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

(3) Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

➤ **Lời giải**

(1) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$  mặt khác  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(2) Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  và  $\sin \alpha > 0$ , nên  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(3) Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

Vì  $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$  mặt khác  $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\text{Nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$



$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$



### Ví dụ 2.2.

Biết

(1)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Tính giá trị của  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

(2)  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$

(3)  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

(4)  $\tan \alpha = 2$ , tính giá trị của biểu thức  $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

### Lời giải

(1)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Tính giá trị của  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

Do  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$  nên  $\cos \alpha < 0$ .

Mặt khác  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nên  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Khi đó  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Từ đó suy ra  $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

(2)  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$

Ta có  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$ .

Từ đó suy ra  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ .

Do  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0$ , do đó  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

(3)  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

Ta có  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$ .

Do  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0$ , do đó  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ .





Từ đó ta có  $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ .

(4)  $\tan \alpha = 2$ , tính giá trị của biểu thức  $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

Ta có  $M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ .

Chia cả tử và mẫu cho  $\cos^2 \alpha$  ta được  $M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$ .



**Ví dụ 2.3.**

Cho biểu thức  $P = \frac{3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ .

- (1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $P$  không xác định.
- (2) Tìm giá trị của  $P$  biết  $\tan \alpha = -2$ .

*» Lời giải*

(1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $P$  không xác định.

Biểu thức  $P$  không xác định  $\Leftrightarrow \cos \alpha + \sin \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ) = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha + 45^\circ) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 45^\circ = k180^\circ \Leftrightarrow \alpha = -45^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

(2) Tìm giá trị của  $P$  biết  $\tan \alpha = -2$ .

Ta có:  $P = \frac{3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3 + 4 \cdot \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot (-2)}{1 + (-2)} = 5$ .



**Ví dụ 2.4.**

Cho biểu thức  $Q = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ .

- (1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $Q$  không xác định.
- (2) Tìm giá trị của  $Q$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

*» Lời giải*

(1) Với góc  $\alpha$  bằng bao nhiêu thì  $Q$  không xác định.

Để  $Q$  không xác định

$$\Leftrightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Leftrightarrow 90^\circ - \alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy  $\alpha = 45^\circ$  thì  $Q$  không xác định.

(2) Tìm giá trị của  $Q$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

Ta có  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ .



Do  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0 \Rightarrow$  nhận  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



**Ví dụ 2.5.**

Biết  $\sin x + \cos x = m$

- (1) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$
- (2) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .

*🔗 Lời giải*

- (1) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

Ta có  $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$  (\*)

Mặt khác  $\sin x + \cos x = m$  nên  $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$  hay  $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt  $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$ . Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

- (2) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .

Ta có  $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Kết hợp với (\*) suy ra  $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$



➤ **Dạng 3. Chứng minh/rút gọn đẳng thức/biểu thức lượng giác**



**Phương pháp**

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$

(3)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$

(4)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

(5)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$

(6)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

Sử dụng thêm tính chất.



**Ví dụ 3.1.**

Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

(1)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

(2)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

(3)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

✎ **Lời giải**

(1)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

(2)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

$$\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

(3)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x (\tan^2 x + 1) \\ &= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 \end{aligned}$$



**Ví dụ 3.2.**

Rút gọn biểu thức

$$(1) M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$$

$$(2) Q = \tan^2 x - \sin^2 x$$

$$(3) E = \cot^2 x - \cos^2 x$$

$$(4) G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$$

$$(5) V = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$$

$$(6) Z = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$$

*Lời giải*

$$(1) M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra  $M = 2$ .

$$(2) Q = \tan^2 x - \sin^2 x$$

$$\text{Ta có } Q = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

$$(3) E = \cot^2 x - \cos^2 x$$

$$\text{Ta có } E = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

$$(4) G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$$

$$\text{Ta có } G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

$$(5) V = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V &= \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3. \end{aligned}$$

$$(6) Z = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } Z &= (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2) \\ &= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left( \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2)(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$



**Ví dụ 3.3.**

Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$(1) A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$$

$$(2) B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2} \text{ với } \sin x > 0$$

*Lời giải*

$$(1) A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$$

$$A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$$

$$(2) B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

$$B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x$$



**Ví dụ 3.4.**

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

*Lời giải*

$$P = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

$$= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1}$$

$$= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2}$$

$$= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 = 3$$

Vậy  $P$  không phụ thuộc vào  $x$ .



## Chương 04

# Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$



### Luyện tập

#### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ .

B.  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ .

C.  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ .

D.  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

» *Lời giải*

#### Chọn B

Trong khoảng từ  $90^\circ$  đến  $180^\circ$ , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

» **Câu 2.** Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ .

B.  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ .

C.  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ .

D.  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .

» *Lời giải*

#### Chọn C

Trong khoảng từ  $90^\circ$  đến  $180^\circ$ , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

» **Câu 3.** Cho biết  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

A.  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ .

B.  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ .

C.  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ .

D.  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ .

» *Lời giải*

#### Chọn A

Ta có

$$3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = \sin \alpha + 1 \rightarrow 9 \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2 \Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 10 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin \alpha = -1$ : không thỏa mãn vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

» **Câu 4.** Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$  cùng dấu.

B. Tích  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$  mang dấu âm.

C. Tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  mang dấu dương.

D.  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu.

» *Lời giải*



**Chọn B**

Với  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ , ta có  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$  suy ra:  $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Vậy  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$

» **Câu 5.** Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A.**  $\tan \alpha < 0.$                       **B.**  $\cot \alpha > 0.$                       **C.**  $\sin \alpha < 0.$                       **D.**  $\cos \alpha > 0.$

» *Lời giải*

**Chọn C**

$\tan \alpha < 0.$

» **Câu 6.** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$                       **B.**  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$   
**C.**  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$                       **D.**  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Vì  $\alpha$  và  $(90^\circ - \alpha)$  là hai cung phụ nhau nên theo tính chất giá trị lượng giác của hai cung phụ nhau ta có đáp án B đúng.

» **Câu 7.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

- A.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha.$                       **B.**  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$   
**C.**  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$                       **D.**  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

» *Lời giải*

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

» **Câu 8.** Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

- A.**  $\sin \alpha = \sin \beta.$                       **B.**  $\cos \alpha = -\cos \beta.$                       **C.**  $\tan \alpha = -\tan \beta.$                       **D.**  $\cot \alpha = \cot \beta.$

» *Lời giải*

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

» **Câu 9.** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\cos \alpha < \cos \beta.$                       **B.**  $\sin \alpha < \sin \beta.$                       **C.**  $\tan \alpha + \tan \beta > 0.$                       **D.**  $\cot \alpha > \cot \beta.$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Biểu diễn lên đường tròn.

» **Câu 10.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}.$                       **B.**  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$                       **C.**  $\cos C = \frac{1}{2}.$                       **D.**  $\sin B = \frac{1}{2}.$

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



» **Câu 11.** Biết  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó  $\tan \alpha$  bằng

- A.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      **B.**  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      **C.**  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .      **D.**  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4}$ .

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên  $\tan \alpha > 0$ , do đó  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

» **Câu 12.** Cho  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$  thì

- A.**  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .      **B.**  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      **C.**  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **D.**  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Mặt khác  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» **Câu 13.** Cho  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  và thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  bằng.

- A.**  $-\frac{4}{5}$ .      **B.**  $\frac{4}{5}$ .      **C.**  $\frac{2}{5}$ .      **D.**  $\frac{1}{5}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$ .

Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$ , suy ra  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

» **Câu 14.** Cho  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ; ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

- A.**  $-2 - \sqrt{3}$ .      **B.**  $-2 + \sqrt{3}$ .      **C.**  $2 + \sqrt{3}$ .      **D.**  $2 - \sqrt{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,

Vậy  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = -2 - \sqrt{3}$ .





» **Câu 15.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  và  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{1}{13}$ .      B.  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ .      C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{13} \\ \cos \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$$

Vì  $\cos \alpha < 0$  nên  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ .

» **Câu 16.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .      B.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Mặt khác  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» **Câu 17.** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.  $\frac{5}{4}$ .      B.  $-\frac{5}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Do  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

» **Câu 18.** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = 2$ .      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$$

» **Câu 19.**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?



**A.**  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $-\frac{1}{3}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có  $\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2$ .

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}.$$

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

» **Câu 20.** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.**  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$ .

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

» **Câu 21.** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

**A.**  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**B.**  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**C.**  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**D.**  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn D**

Do  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$  nên  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  suy ra  $\cos \alpha < 0$ .

Mặt khác,  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{a}$ .

Mà ta lại có  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{1 + a^2}$ .

Khi đó  $\cos \alpha = -\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$  và do  $a > 0$  nên  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

» **Câu 22.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

**A.**  $\frac{13}{4}$ .

**B.**  $\frac{7}{4}$ .

**C.**  $\frac{11}{4}$ .

**D.**  $\frac{15}{4}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ .

» **Câu 23.** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$



A.  $M = \frac{25}{27}$

B.  $M = \frac{175}{27}$

C.  $M = \frac{35}{27}$

D.  $M = -\frac{25}{27}$

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ .

Mà  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha \leq 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Từ đó  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{-25}{27}$ .

» **Câu 24.** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?

A.  $\frac{10}{26}$

B.  $\frac{100}{26}$

C.  $\frac{50}{26}$

D.  $\frac{101}{26}$

» *Lời giải*

**Chọn D**

$$E = \sin^2 \alpha \left( 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}$$

» **Câu 25.** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $-\frac{25}{3}$

B.  $-\frac{11}{13}$

C.  $-\frac{11}{3}$

D.  $-\frac{25}{13}$

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}$$

» **Câu 26.** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$  là

A.  $-\frac{2}{5}$

B.  $\frac{4}{5}$

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{3}{2}$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha$

$$A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{3 \cdot 2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \cdot 2 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{5 \cos \alpha} = \frac{4}{5}$$

» **Câu 27.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ .

A.  $\frac{13}{4}$

B.  $\frac{7}{4}$

C.  $\frac{11}{4}$

D.  $\frac{15}{4}$

» *Lời giải*

**Chọn A**



Ta có:  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3.1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ .

» **Câu 28.** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2\cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a}$

- A.  $\sin a + \cos a$ .      B.  $\sin a - \cos a$ .      C.  $\cos a - \sin a$ .      D.  $\tan a + \cos a$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có:  $\frac{2\cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a} = \frac{2\cos^2 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)}{\sin a + \cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a + \cos a} = \cos a - \sin a$ .

» **Câu 29.** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^6 x + \cos^6 x$  bằng  $a + b \cdot \cos 4x$ . Giá trị của  $a + 2b$  là

- A.  $\frac{9}{8}$ .      B.  $\frac{11}{8}$ .      C.  $\frac{13}{8}$ .      D.  $\frac{15}{8}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $A = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)$   
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2}$   
 $= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ .

Vậy  $a + 2b = \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$ .

» **Câu 30.** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

- A.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .      B.  $\cot^2 a + \tan^2 a$ .      C.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .      D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn C**

$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2\cot a \cdot \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$ .

» **Câu 31.** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A. 0.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

☞ *Lời giải*

**Chọn D**

$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$ .

» **Câu 32.** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A. 21.      B. 23.      C. 22.      D. 24.

☞ *Lời giải*

**Chọn C**



$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

» **Câu 33.** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.** 1.                      **B.** 2.                      **C.** -2.                      **D.** -1.

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

» **Câu 34.** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.** -1.                      **B.** 0.                      **C.** 2.                      **D.** 1.

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

» **Câu 35.** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  với  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

- A.**  $P = 0$ .                      **B.**  $P = 1$ .                      **C.**  $P = -1$ .                      **D.**  $P = 2$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau nên  $\sin \alpha = \cos \beta$ ;  $\cos \alpha = \sin \beta$ .

Do đó,  $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 36.** Cho  $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$		
(b)	$\cos \alpha = \frac{12}{13}$		
(c)	$\cot \alpha = \frac{12}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = \frac{5}{13}$		

» *Lời giải*

(a)  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$

Vì  $\tan \alpha = -\frac{5}{12} < 0 \Rightarrow \alpha \in (90^\circ; 180^\circ) \Rightarrow \cos \alpha < 0$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

Mặt khác:  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{12}{13}$ .



» **Chọn SAI.**

$$(c) \cot \alpha = \frac{12}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{12}{5}$$

» **Chọn SAI.**

$$(d) \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\text{Vì } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 37.** Cho biết  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha > 0$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$		
(c)	$\cot \alpha = -\frac{4}{3}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$		

» **Lời giải**

$$(a) \cos \alpha > 0$$

Theo giả thiết:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$ .

» **Chọn SAI.**

$$(b) \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Vì } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 38.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----



(a)	$\sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$		
(b)	$\sin \alpha < 0$		
(c)	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$		

» *Lời giải*

(a)  $\sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$

Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\sin \alpha < 0$

Mà  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

Do đó  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

» **Chọn SAI.**

(d)  $\cot \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 39.** Cho  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{12}{5}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{5}{12}$		

» *Lời giải*

(a)  $\cos \alpha < 0$

Vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha > 0$ .

» **Chọn SAI.**

(b)  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$



$$\text{Do đó } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5}$$

» **Chọn SAI.**

$$(d) \cot \alpha = -\frac{5}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{5}{12}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$		
(d)	$\frac{\sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{7}{4 + \sqrt{5}}$		

✎ **Lời giải**

$$(a) \cos \alpha < 0$$

Do  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha > 0$ .

» **Chọn SAI.**

$$(b) \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\text{Vì } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Mà  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha > 0$ .

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

» **Chọn SAI.**

$$(d) \frac{\sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{7}{4 + \sqrt{5}}$$

$$\text{Nên } A = \frac{\sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{7}{4 + \sqrt{5}}.$$





» Chọn ĐÚNG.

» Câu 41. Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$		
(b)	$A = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = \frac{35}{9}$		
(c)	$B = 5 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\frac{1}{3}$		
(d)	$C = \sqrt{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha} = 2$		

» Lời giải

(a)  $\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$

Ta có:  $\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9}$ .

Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nên  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

» Chọn ĐÚNG.

(b)  $A = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = \frac{35}{9}$ .

$A = \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{25}{9}$ .

» Chọn SAI.

(c)  $B = 5 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\frac{1}{3}$ .

$B = 5 \cdot \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{1}{9}$

» Chọn ĐÚNG.

(d)  $C = \sqrt{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha} = 2$

$C = \sqrt{\frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{8}{9} - 7 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$ .

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 42. Cho  $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ , ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha > 0$		
(b)	$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$		
(d)	$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$		

» Lời giải



(a)  $\sin \alpha > 0$

Do  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Do  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\text{Mà } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Do } \cot \alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{2}}$$

» **Chọn SAI.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 43.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3,25**

$$\text{Ta có: } P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) + 4 \cos^2 x = 3 + \cos^2 x = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

» **Câu 44.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 13**

$$\text{Do } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \neq 0.$$

$$\text{Chia hai vế biểu thức } A \text{ cho } \sin \alpha, \text{ ta có: } A = \frac{3 + 4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{2 - 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$$

» **Câu 45.** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$ ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} &\Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 = \sin^2 a + 2 \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 + 2 \sin a \cos a \\ &\Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Khi đó:  $\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

» **Câu 46.** Cho  $\tan \alpha = 1$ . Tính  $B = \frac{\sin^2 \alpha + 1}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: 3*

Vì  $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$ . Chia cả tử và mẫu cho  $\cos^2 \alpha$  ta được:

$$B = \frac{(\sin^2 \alpha + 1) \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{(2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 1}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha + 1}{2 - \tan^2 \alpha} = 3$$

» **Câu 47.** Cho  $\cot \alpha = 4$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: 5*

$\cot \alpha = 4 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$ . Khi đó ta có  $P = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \cot \alpha = 1 + 4 = 5$ .

» **Câu 48.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ .

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: 3,25*

$$P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) + 4 \cos^2 x = 3 + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

» **Câu 49.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: 0,5*

$$A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 4 \cos^2 \alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

» **Câu 50.** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Tính giá trị của  $\sin \alpha \cos \alpha$  ta thu được kết quả  $\frac{a^2 - m}{n}$  với  $m; n$  là các số tự nhiên. Tính  $m - n$

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: -1*

$$\sin \alpha + \cos \alpha = a \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m - n = -1$$

» **Câu 51.** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ . Tính  $P = |\sin x - \cos x|$ .

» *Lời giải*

✓ *Trả lời: 1,4*



$$P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x, P \geq 0.$$

$$\frac{1}{5} = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{1}{25} = (\sin x - \cos x)^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Do đó: } P^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Rightarrow P = \frac{7}{5} \text{ (Vì } P \geq 0).$$

» **Câu 52.** Giá trị của biểu thức:  $A = \sin 60^\circ + 2 \cos 30^\circ - 3 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}}{2}$  với  $a; b$  là các số nguyên dương. Khi đó giá trị  $S = a + b^2$  bằng bao nhiêu?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 7**

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 3; b = 2 \Rightarrow S = 3 + 2^2 = 7.$$

» **Câu 53.** Cho các góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$  và  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có:  $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$ . Mà  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nên

$$\begin{aligned} T &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1. \end{aligned}$$

» **Câu 54.** Tính giá trị biểu thức sau:  $D = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -1**

$$\begin{aligned} D &= (\cos 1^\circ + \cos 179^\circ) + (\cos 2^\circ + \cos 178^\circ) + \\ &\dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ \\ &= [\cos 1^\circ + \cos(180^\circ - 1^\circ)] + [\cos 2^\circ + \cos(180^\circ - 2^\circ)] + \dots + [\cos 89^\circ + \cos(180^\circ - 89^\circ)] + 0 - 1 \\ &= (\cos 1^\circ - \cos 1^\circ) + (\cos 2^\circ - \cos 2^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ - \cos 89^\circ) - 1 \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

» **Câu 55.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 13**

$$\text{Do } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \neq 0.$$

$$\text{Chia hai vế biểu thức } A \text{ cho } \sin \alpha, \text{ ta có: } A = \frac{3 + 4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{2 - 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$$

----- Hết -----



## Chương 04

### Bài 2.

# ĐỊNH LÝ SIN - COS, GIẢI TAM GIÁC & THỰC TẾ

A

## Lý thuyết

### 1. Định lý hàm cos



» Trong  $\triangle ABC$  với  $BC = a, CA = b, AB = c$ , ta có:

$$\square a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\square b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

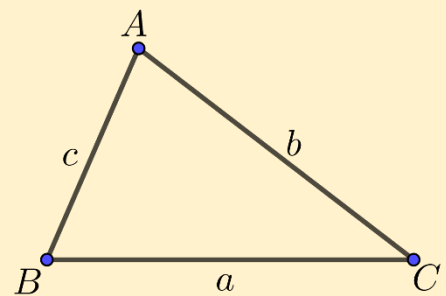
$$\square c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$$

» Hệ quả

$$\square \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\square \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\square \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ac}$$



### 2. Định lý hàm sin



» Trong  $\triangle ABC$  ta có:

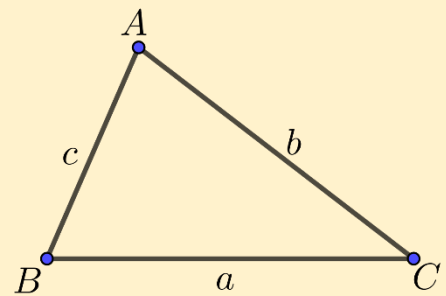
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

» Hệ quả

$$\square a = 2R \sin A \longrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\square b = 2R \sin B \longrightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\square c = 2R \sin C \longrightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$$



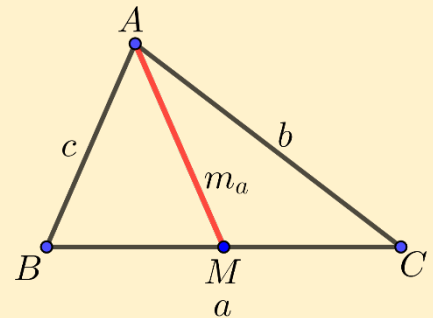


### 3. Đường trung tuyến



- » Cho  $\Delta ABC$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BC^2.$$
- » Gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ  $A, B, C$
- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$
  - $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$
  - $m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$



### 4. Diện tích tam giác



- (1)  $S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c.$
- (2)  $S = \frac{1}{2} bc.\sin A = \frac{1}{2} ac.\sin B = \frac{1}{2} ab.\sin C$
- (3)  $S = \frac{abc}{4R}$  ( $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ ).
- (4)  $S = p.r$  ( $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ ).
- (5)  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  với  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , với  $p$  là nửa chu vi.

### 5. Giải tam giác



- » Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.
- » Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Giải tam giác



#### Phương pháp

##### » Định lý cos:

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$(3) c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$$

##### » Định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

##### » Đường trung tuyến:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

Gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ  $A, B, C$

$$(1) m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$(2) m_b^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$(3) m_c^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

##### » Hệ quả

$$(4) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$(5) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$(6) \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ac}$$

##### » Hệ quả

$$(1) a = 2R \sin A \longrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$(2) b = 2R \sin B \longrightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$(3) c = 2R \sin C \longrightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$$



#### Ví dụ 1.1.

Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7; b = 8; c = 5$ . Tính  $\widehat{A}, S, h_a, R$ .

##### » Lời giải

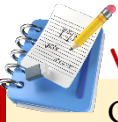
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ.$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$





**Ví dụ 1.2.**

Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2, BC = 5, CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

*Lời giải*

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$



**Ví dụ 1.3.**

Tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 2\sqrt{3}, b = 2, C = 30^\circ$ .

- (1) Tính cạnh  $c$ , góc  $A$  và diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$ .
- (2) Tính chiều cao  $h$  và độ dài  $m$  của đường trung tuyến kẻ từ  $A$  của  $\Delta ABC$ .

*Lời giải*

- (1) Tính cạnh  $c$ , góc  $A$  và diện tích  $S$  của  $\Delta ABC$ .

Ta có  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cos 30^\circ = 4 \Rightarrow c = 2$ .

Xét tam giác  $ABC$  có  $b = c = 2 \Rightarrow$  tam giác  $ABC$  cân tại  $A \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$ .

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}$ .

- (2) Tính chiều cao  $h$  và độ dài  $m$  của đường trung tuyến kẻ từ  $A$  của  $\Delta ABC$ .

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{a} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$ .

Ta có  $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(2^2 + 2^2) - (2\sqrt{3})^2}{4} = 1 \Rightarrow m_a = 1$ .



**Ví dụ 1.4.**

Tính góc lớn nhất của tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 3, b = 4, c = 6$ .

Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

*Lời giải*

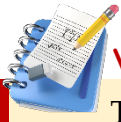
Vì  $c = 6$  là cạnh lớn nhất nên góc lớn nhất là góc  $\hat{C}$ .

Ta có  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-11}{24} \Rightarrow \hat{C} \approx 117^\circ 22' \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{455}}{24}$ .

Vì  $c = 6$  là cạnh lớn nhất nên đường cao ứng với cạnh lớn nhất là  $h_c$ .

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{455}}{24} = \frac{\sqrt{455}}{4}$  mà

$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_c \cdot c \Rightarrow h_c = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{c} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{455}}{4}}{6} = \frac{\sqrt{455}}{12}$ .



**Ví dụ 1.5.**

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$

*Lời giải*

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm nên

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$ .

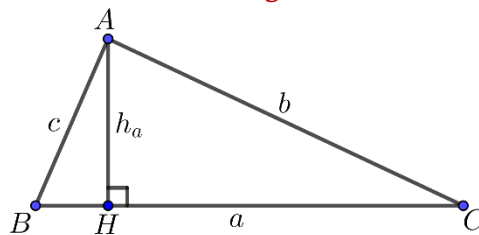
Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2$ .



**Ví dụ 1.6.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7$ ,  $c = 5$ ,  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của  $\Delta ABC$

*Lời giải*



Theo định lí hàm cos ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ .

Ta lại có:  $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$ .

Vì  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$  nên  $h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy  $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ .



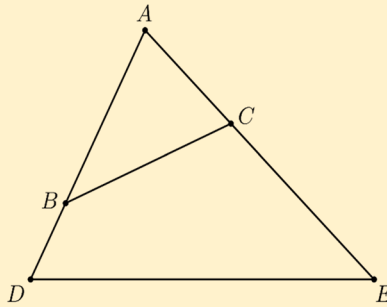
➤ **Dạng 2. Chứng minh hệ thức trong tam giác**



**Phương pháp**

- » Áp dụng Định lý cos – sin, công thức đường trung tuyến.
- » Biến đổi từ vế này sang vế kia hoặc biến đổi tương đương đến một hệ thức đã biết.
- » Dùng một hệ thức đã biết biến đổi thành hệ thức phải chứng minh.

» Vận dụng tỉ số diện tích hai tam giác  $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AE}$ .



**Ví dụ 2.1.**

Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$ , ta có

- (1)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ .
- (2)  $h_a = 2R \sin B \sin C$ .
- (3)  $S = R.r.(\sin A + \sin B + \sin C)$

✎ **Lời giải**

(1)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ .

Ta có  $\sin B \cos C + \sin C \cos B$   

$$= \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{4aR} = \frac{2a^2}{4aR} = \frac{a}{2R} = \sin A.$$

(2)  $h_a = 2R \sin B \sin C$ .

Ta có  $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot \frac{abc}{4R}}{a} = \frac{bc}{2R} = \frac{2R \sin B \cdot 2R \sin C}{2R} = 2R \sin B \sin C$ .

(3)  $S = R.r.(\sin A + \sin B + \sin C)$ .

Ta có  $VP = R.r. \left( \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = r \cdot \left( \frac{a+b+c}{2} \right) = r.p = S$  (đpcm).



**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

✎ **Lời giải**



Ta có:  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos C$

$\Leftrightarrow a = 2b \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$

Vậy tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .



**Ví dụ 2.3.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $b + c = 2a$ . Chứng minh rằng

(1)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$

(2)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

*» Lời giải*

(1)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .

Ta có  $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 2 \cdot 2R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

(2)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

Ta có  $b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} = 2 \cdot \frac{2S}{h_a} \Leftrightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$ .



**Ví dụ 2.4.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $bc = a^2$ . Chứng minh rằng

(1)  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$

(2)  $h_b \cdot h_c = h_a^2$ .

*» Lời giải*

(1)  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$ .

Ta có  $bc = a^2 \Leftrightarrow 2R \sin B \cdot 2R \sin C = (2R \sin A)^2$

$\Leftrightarrow 4R^2 \sin B \sin C = 4R^2 \sin^2 A \Leftrightarrow \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$ .

(2)  $h_b \cdot h_c = h_a^2$ .

Ta có  $bc = a^2 \Leftrightarrow \frac{2S}{h_b} \cdot \frac{2S}{h_c} = \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4S^2}{h_b h_c} = \frac{4S^2}{h_a^2} \Leftrightarrow h_a^2 = h_b h_c$ .



**Ví dụ 2.5.**

Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$ , ta có

(1)  $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$ .

(2)  $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$

(3)  $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

*» Lời giải*

(1)  $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$ .

Áp dụng định lí cosin cho tam giác  $ABC$ . Ta có: 
$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow b^2 - c^2 &= c^2 - b^2 - 2a(c \cdot \cos B - b \cdot \cos C) \\ \Leftrightarrow 2(b^2 - c^2) &= 2a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B) \\ \Leftrightarrow b^2 - c^2 &= a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B) \text{ (Điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

(2)  $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$

Ta có: 
$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (b^2 - c^2) \cos A &= a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B) \\ \Leftrightarrow (b^2 - c^2) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= a \left( c \cdot \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba} - b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) \\ \Leftrightarrow (b^2 - c^2) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} &= c \cdot \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b} - b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{b^4 - c^4 - a^2 b^2 + a^2 c^2}{bc} &= \frac{cb^2 + ca^2 - c^3}{b} - \frac{ba^2 + bc^2 - b^3}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{b^4 - c^4 - a^2 b^2 + a^2 c^2}{bc} &= \frac{c^2 b^2 + c a^2 - c^4}{bc} - \frac{b^2 a^2 + b^2 c^2 - b^4}{bc} \\ \Leftrightarrow b^4 - c^4 - a^2 b^2 + a^2 c^2 &= c^2 b^2 + c a^2 - c^4 - b^2 a^2 - b^2 c^2 + b^4 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (Điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

(3)  $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$\begin{aligned} VP &= \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ &= \frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + c^2 - a^2)}{4Rc} = \frac{2c^2}{4Rc} = \frac{c}{2R} = \sin C = VT \text{ (dpcm).} \end{aligned}$$



**Ví dụ 2.6.**

Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  là tam giác đều.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 b + a^2 c - a^3 \\ a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -bc + 2bc \cdot \cos A = 0 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ b = c \end{cases} \end{aligned}$$



Vì tam giác  $ABC$  cân có 1 góc bằng  $60^\circ$  nên tam giác  $ABC$  là tam giác đều.



**Ví dụ 2.7.**

Chứng minh rằng trong tam giác diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh bên liên tiếp với sin của góc xen giữa chúng.

*✎ Lời giải*

Giả sử với hình bình hành:  $ABCD$ ,

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}$$

Do vai trò các góc các cạnh trong hình bình hành như nhau nên suy ra điều phải chứng minh.



➤ **Dạng 3. Ứng dụng thực tế**



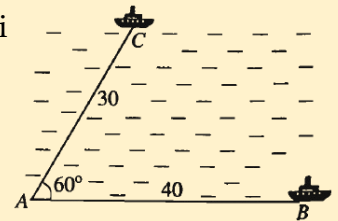
**Phương pháp**

- » Áp dụng Định lý cos – sin, công thức đường trung tuyến, hệ thức lượng trong tam giác...
- » Thường gặp: vận tốc – thời gian, tính độ dài đường đi, tính khoảng cách giữa các vật...



**Ví dụ 3.1.**

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Lời giải**

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30 \cdot 2 = 60\text{ km}$ .

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40 \cdot 2 = 80\text{ km}$ .

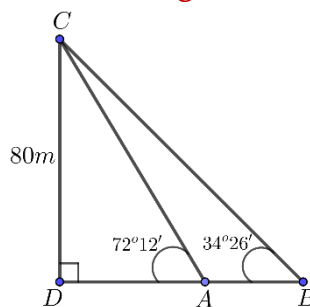
Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .



**Ví dụ 3.2.**

Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{ m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**



$$\text{Trong tam giác vuông } CDA: \tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7.$$

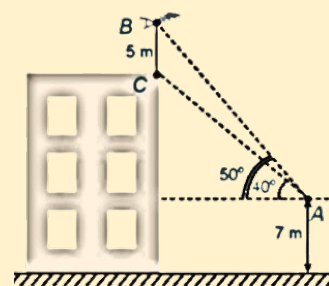
$$\text{Trong tam giác vuông } CDB: \tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7.$$

Suy ra: khoảng cách  $AB = 116,7 - 25,7 = 91\text{ m}$ .



**Ví dụ 3.3.**

Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát  $A$  cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang



- (1) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .
- (2) Tính chiều cao của tòa nhà.

**Lời giải**

- (1) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \widehat{BAC} &= 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ, \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{BAD} = 40^\circ \\ \Rightarrow \widehat{ACB} &= 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 130^\circ \end{aligned}$$

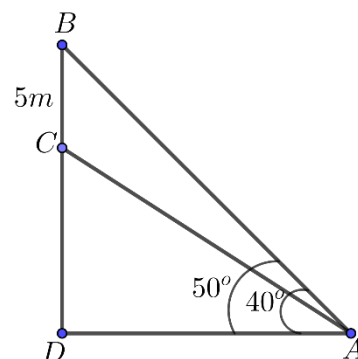
- (2) Tính chiều cao của tòa nhà.

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$

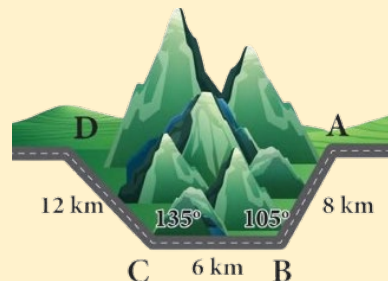
Xét tam giác  $ACD$  vuông tại  $D$  có  $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là:  $11,9 + 7 = 18,9m$ .



**Ví dụ 3.4.**

Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ  $A$  tới  $D$ . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



**Lời giải**

Dựng  $CE, BF$  vuông góc với  $AD$ .

Xét tam giác  $CDE$  vuông tại  $E$  có  $\widehat{D} = \widehat{C} = 45^\circ$

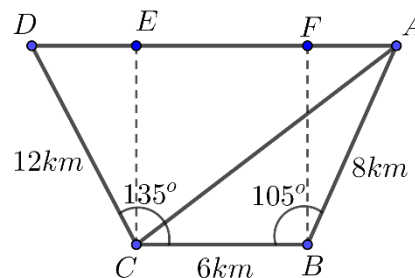
$$\Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ km.}$$

$$\text{Xét } \triangle ABF : \widehat{B} = 15^\circ \Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \text{ km.}$$

Mặt khác  $EF = BC = 6 \text{ km}$

$$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56 \text{ km.}$$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm  $9,44 \text{ km}$  so với đường cũ.









- » **Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:  
**A.**  $A = 30^\circ$ .                      **B.**  $A = 45^\circ$ .                      **C.**  $A = 60^\circ$ .                      **D.**  $A = 75^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

- » **Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?  
**A.**  $59^\circ 49'$ .                      **B.**  $53^\circ 7'$ .                      **C.**  $59^\circ 29'$ .                      **D.**  $62^\circ 22'$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \simeq 59^\circ 29'.$$

- » **Câu 7.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Khi đó góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu độ.  
**A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $45^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Theo bài ra, ta có: } b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0 \\ &\Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ. \end{aligned}$$

- » **Câu 8.** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .                      **B.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
**C.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .                      **D.**  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .

» *Lời giải*

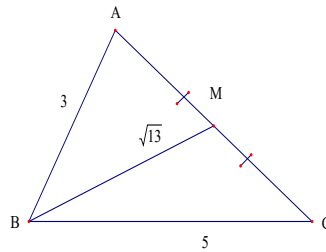
**Chọn D**

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

- » **Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, BC = 5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .  
**A.**  $\sqrt{11}$ .                      **B.**  $4$ .                      **C.**  $\frac{9}{2}$ .                      **D.**  $\sqrt{10}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến; ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

» **Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ , có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $S$  là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .

**C.**  $S = \frac{abc}{4R}$ .

**D.**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

» **Lời giải**

**Chọn B**

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

» **Câu 11.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $\sqrt{9}$ .

**B.** 9.

**C.** 3.

**D.**  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .

» **Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$  có  $a = 6 \Rightarrow BC = 6$  mà  $BM = 3$  suy ra  $M$  là trung điểm  $BC$ .

Suy ra:  $AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$ .

» **Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:

**A.**  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

**B.**  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .

**C.**  $b \sin B = 2R$ .

**D.**  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .

» **Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

» **Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**A.**  $R = 4$ .

**B.**  $R = 1$ .

**C.**  $R = 2$ .

**D.**  $R = 3$ .

» **Lời giải**

**Chọn B**



Ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$

- » **Câu 14.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 5$ ;  $\widehat{A} = 40^\circ$ ;  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?  
**A.** 3,7.                      **B.** 3,3.                      **C.** 3,5.                      **D.** 3,1.

» *Lời giải*

**Chọn B**

$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Áp dụng định lý sin:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3.$

- » **Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?  
**A.**  $\cos B + \cos C = 2 \cos A.$                       **B.**  $\sin B + \sin C = 2 \sin A.$   
**C.**  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A.$                       **D.**  $\sin B + \cos C = 2 \sin A.$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$

- » **Câu 16.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 16,8$ ;  $\widehat{B} = 56^\circ 13'$ ;  $\widehat{C} = 71^\circ$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?  
**A.** 29,9.                      **B.** 14,1.                      **C.** 17,5.                      **D.** 19,9.

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 71^\circ - 56^\circ 13' = 52^\circ 47'.$

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^\circ}{\sin 52^\circ 47'} \simeq 19,9.$

- » **Câu 17.** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 68^\circ 12'$ ,  $\widehat{B} = 34^\circ 44'$ ,  $AB = 117$ . Tính  $AC$ ?  
**A.** 68.                      **B.** 168.                      **C.** 118.                      **D.** 200.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 68^\circ 12' - 34^\circ 44' = 77^\circ 4'.$

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^\circ 44'}{\sin 77^\circ 4'} \simeq 68.$

- » **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ;  $CA = b$ ;  $AB = c$  biết  $a = 8, b = 10$ , góc  $C$  bằng  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $c$  là?  
**A.**  $c = 3\sqrt{21}.$                       **B.**  $c = 7\sqrt{2}.$                       **C.**  $c = 2\sqrt{11}.$                       **D.**  $c = 2\sqrt{21}.$

» *Lời giải*

**Chọn D**



Ta có:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos C = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$ .

» **Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7$ ;  $c = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính  $a$ .

- A.**  $4\sqrt{2}$ .                      **B.** 2.                      **C.**  $\sqrt{2}$ .                      **D.** 3.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Áp dụng định lí hàm số Cosin vào tam giác  $ABC$  có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 25 + 49 - 2.5.7.\frac{3}{5} = 32$$

$$\Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

» **Câu 20.** Trong  $\Delta ABC$  có  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .                      **B.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .  
**C.**  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cos A$ .                      **D.**  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Theo định lí hàm số cos, trong  $\Delta ABC$  ta luôn có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

» **Câu 21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6$  và  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là

- A.**  $\sqrt{19}$ .                      **B.**  $2\sqrt{7}$ .                      **C.**  $3\sqrt{19}$ .                      **D.**  $2\sqrt{19}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Xét  $\Delta ABC$  có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{A}$

$$\text{Hay } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{A}} = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2.4.6.\cos 120^\circ} = 2\sqrt{19}$$

» **Câu 22.** Cho  $\Delta ABC$  có  $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:

- A.** 7.                      **B.** 129.                      **C.** 49.                      **D.**  $\sqrt{129}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$ .

» **Câu 23.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$ , có  $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}$ . Số đo của góc  $A$  là:

- A.**  $150^\circ$ .                      **B.**  $120^\circ$ .                      **C.**  $45^\circ$ .                      **D.**  $135^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc\sqrt{2}}{2bc} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 135^\circ$$

» **Câu 24.** Cho  $\Delta ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}$ . Tính cạnh  $BC$ .

- A.**  $BC = \sqrt{10}$ .                      **B.**  $BC = \sqrt{13}$ .                      **C.**  $BC = \sqrt{12}$ .                      **D.**  $BC = \sqrt{11}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Áp dụng định lí cosin ta có:  $BC^2 = 3^2 + 4^2 - 3.4.\cos 60^\circ \Rightarrow BC = \sqrt{13}$ .

» **Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}, \widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.**  $3 + \sqrt{37}$ .                      **B.** 10.                      **C.**  $3 - \sqrt{37}$ .                      **D.** 9.



» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$

$$\Leftrightarrow 8^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC^2 - 6BC - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 3 + \sqrt{37} \\ BC = 3 - \sqrt{37} (l) \end{cases}$$

» **Câu 26.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$  cm,  $BC = 5$  cm,  $AC = 3$  cm. Giá trị  $\cos A$  là

- A.  $-\frac{2}{3}$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{3}{10}$ .      D.  $-\frac{3}{10}$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

Áp dụng định lí hàm số cosin ta có:  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 3^2 - 5^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$ .

» **Câu 27.** Tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 75^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $S_{\Delta ABC} = 8$       B.  $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$       C.  $S_{\Delta ABC} = 4$       D.  $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$

» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có  $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$ .

Suy ra tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nên  $AB = AC = 4$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$ .

» **Câu 28.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ .      B.  $S = \frac{1}{2} ac \sin A$ .      C.  $S = \frac{1}{2} bc \sin B$ .      D.  $S = \frac{1}{2} bc \sin B$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$ .

» **Câu 29.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ . Diện tích hình thoi  $ABCD$  là

- A.  $\frac{a^2}{4}$ .      B.  $\frac{a^2}{2}$ .      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $a^2$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} a^2$ .

» **Câu 30.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 6, b = 8, c = 10$ . Diện tích  $S$  của tam giác trên là:

- A. 48.      B. 24.      C. 12.      D. 30.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có: Nửa chu vi  $\Delta ABC$ :  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .



Áp dụng công thức Hê-rông:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$ .

» **Câu 31.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$ . Diện tích của tam giác là:

- A.**  $5\sqrt{3}$ .                      **B.** 5.                      **C.** 10.                      **D.**  $10\sqrt{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} .4.5.\sin 150^\circ = 5$ .

» **Câu 32.** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A.** 84.                      **B.**  $\sqrt{84}$ .                      **C.** 42.                      **D.**  $\sqrt{168}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ .

» **Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4, b = 6, c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:

- A.**  $9\sqrt{15}$ .                      **B.**  $3\sqrt{15}$ .                      **C.** 105.                      **D.**  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$ .

» **Câu 34.** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$ . Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  bằng

- A.** 72.                      **B.** 144.                      **C.** 54.                      **D.** 108.

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\text{Theo bài toán ta có } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có  $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$ , áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

**Cách 2:**

Đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,

Theo định lý trung tuyến có:



$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  Suy ra  $S_{ABC} = 72$

- » **Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ;  $AC = 4a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ?
- A.**  $S = 8a^2$ .      **B.**  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .      **C.**  $S = a^2\sqrt{3}$ .      **D.**  $S = 4a^2$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Diện tích của tam giác  $ABC$  là  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.2a.4a.\sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}$ .

- » **Câu 36.** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng
- A.** 12.      **B.** 3.      **C.** 6.      **D.** 24.

» *Lời giải*

**Chọn C**

Theo đề bài tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là  $p = \frac{12}{2}$ ; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có:  $r = 1$ .  
Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = p.r = 6.1 = 6$ .

- » **Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng
- A.** 1.      **B.**  $\frac{8}{9}$ .      **C.**  $\frac{4}{5}$ .      **D.**  $\frac{3}{4}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Vì  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp  $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)} = \frac{3.4}{3+4+5} = 1$ .

- » **Câu 38.** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 84$ ,  $a = 13$ ,  $b = 14$ ,  $c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:
- A.** 8,125.      **B.** 130.      **C.** 8.      **D.** 8,5.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $S_{\Delta ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}$ .

- » **Câu 39.** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?
- A.** 6.      **B.** 8.      **C.**  $\frac{13}{2}$ .      **D.**  $\frac{11}{2}$ .

» *Lời giải*





**Chọn C**

Ta có:  $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}..$

» **Câu 40.** Tam giác  $ABC$  có  $AB=3, BC=8$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Biết  $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

và  $AM > 3$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .

- A.**  $AC = \sqrt{13}$ .      **B.**  $AC = \sqrt{7}$ .      **C.**  $AC = 13$ .      **D.**  $AC = 7$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có:  $M$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 4$ .

Trong tam giác  $ABM$  ta có:  $\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.BM}$

$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM.BM.\cos \widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0$ .

$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (loại)} \end{cases}$

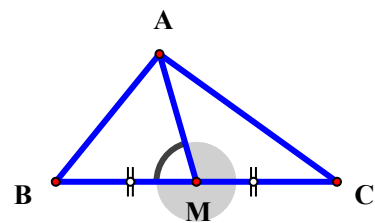
$\Rightarrow AM = \sqrt{13}$ .

Ta có:  $\widehat{AMB}$  và  $\widehat{AMC}$  là hai góc kề bù.

$\Rightarrow \cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$

Trong tam giác  $\Delta AMC$  ta có:

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM.CM.\cos \widehat{AMC}$   
 $= 13 + 16 - 2.\sqrt{13}.4.\left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49 \Rightarrow AC = 7$ .

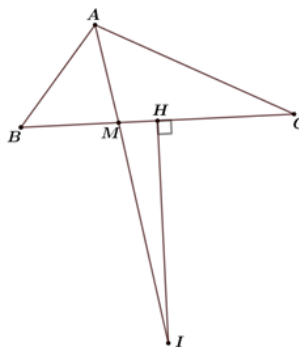


» **Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=4, AC=7$  và  $BC=9$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MC=2MB$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  cắt  $AM$  tại  $I$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AI$ .

- A.**  $\frac{33}{2}$ .      **B.**  $\frac{27}{2}$ .      **C.** 3.      **D.**  $\frac{32}{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**



$BC = 9 \Rightarrow BM = 3$  và  $MC = 6$ .



$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \cos \widehat{ABC} = \frac{2}{3}.$$

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos \widehat{ABM} = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 9 \Rightarrow AM = 3.$$

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \widehat{HMI} = \cos \widehat{AMB} = \frac{1}{9}.$$

$$MH = BH - BM = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow MI = \frac{MH}{\cos \widehat{HMI}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{9} = \frac{27}{2}.$$

$$\text{Vậy } AI = AM + MI = 3 + \frac{27}{2} = \frac{33}{2}.$$

» **Câu 42.** Tam giác ABC có  $\widehat{A} = 68^\circ 12'$ ,  $\widehat{B} = 34^\circ 44'$ ,  $AB = 117$ . Tính AC?

- A.** 68.                      **B.** 168.                      **C.** 118.                      **D.** 200.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có trong tam giác ABC:  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 68^\circ 12' - 34^\circ 44' = 77^\circ 4'$ .

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^\circ 44'}{\sin 77^\circ 4'} \simeq 68$ .

» **Câu 43.** Tam giác ABC có độ dài cạnh  $AB = 3$  cm;  $AC = 6$  cm và  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A.**  $R = \sqrt{3}$ .                      **B.**  $R = 3\sqrt{3}$ .                      **C.**  $R = 3$ .                      **D.**  $R = 6$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

Xét tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27 \Rightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$$

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Vậy bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:  $R = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3$  (cm).

» **Câu 44.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $\widehat{C} = 75^\circ$  và  $AC = 10$ . Khi đó, độ dài cạnh BC bằng

- A.**  $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ .                      **B.**  $5\sqrt{6}$ .                      **C.**  $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ .                      **D.** 10.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có  $\widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$ .

Áp dụng định lí Sin cho tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{10 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

» **Câu 45.** Tính diện tích hình bình hành ABCD biết  $AB = a$ ;  $BC = a\sqrt{3}$ ;  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

- A.**  $a^2$ .                      **B.**  $\frac{3a^2}{2}$ .                      **C.**  $\frac{a^2}{2}$ .                      **D.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**



Ta có  $S_{ABCD} = AB.BC.\sin B = a.a\sqrt{3}\sin 60^\circ = \frac{3a^2}{2}$ .

» **Câu 46.** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250\text{ m}$ ,  $CB = 120\text{ m}$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 266 m.                      B. 255 m.                      C. 166 m.                      D. 298 m.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 250^2 + 120^2 - 2.250.120.\cos 78^\circ 24' \simeq 64835 \Rightarrow AB \simeq 255.$$

» **Câu 47.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?

- A. 13.                              B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30.2 = 60\text{ km}$ .

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40.2 = 80\text{ km}$ .

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .

» **Câu 48.** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200\text{ m}$ ,  $CB = 180\text{ m}$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 180 m.                              B. 224 m.                              C. 112 m.                              D. 168 m.

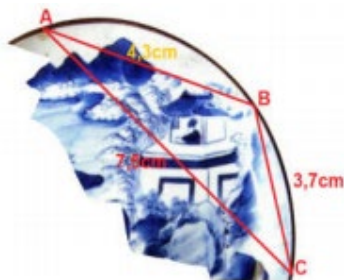
» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^\circ 16' \simeq 32416 \Rightarrow AB \simeq 180.$$

» **Câu 49.** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{ cm}$ ;  $BC = 3,7\text{ cm}$ ;  $CA = 7,5\text{ cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



- A. 5,73 cm.                              B. 6,01 cm.                              C. 5,85 cm.                              D. 4,57 cm.

» *Lời giải*



**Chọn A**

Bán kính  $R$  của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

$$\text{Nửa chu vi của tam giác } ABC \text{ là: } p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{4,3+3,7+7,5}{2} = \frac{31}{4} \text{ cm.}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} \approx 5,2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Mà } S = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} \approx 5,73 \text{ cm.}$$

» **Câu 50.** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{m}$ ,  $\widehat{CAD} = 63^\circ$ ;  $\widehat{CBD} = 48^\circ$ . Chiều cao  $h$  của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

**A.** 61,4 m.

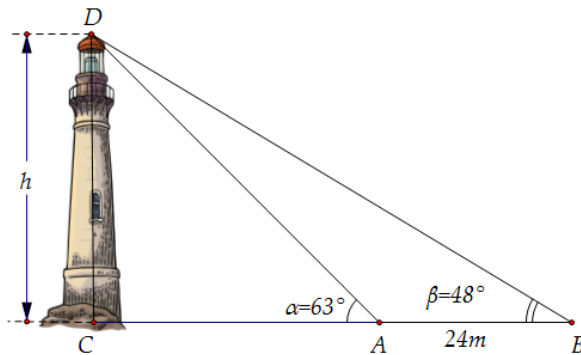
**B.** 18,5 m.

**C.** 60 m.

**D.** 18 m.

» **Lời giải**

**Chọn A**



$$\text{Ta có } \widehat{CAD} = 63^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } ABD \text{ ta có: } \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$$

$$\text{Tam giác } BCD \text{ vuông tại } C \text{ nên có: } \sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD}$$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4 \text{ m}$$

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 6\text{m}, b = 8\text{m}, c = 10\text{m}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 16(\text{cm})$		
(b)	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$		
(c)	$S = 24(\text{cm}^2)$		
(d)	$r = 4(\text{cm})$		

» **Lời giải**

(a)  $p = 16(\text{cm})$

Ta có  $p = (6+8+10) : 2 = 12(\text{cm})$ .

» **Chọn SAI.**

(b)  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



Áp dụng công thức Heron trong tam giác  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $S = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$

Ta có:

$$S = \sqrt{12 \cdot (12-6) \cdot (12-8) \cdot (12-10)} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $r = 4 \text{ (cm)}$

Mà  $S = p \cdot r$  nên  $r = S : p = 24 : 12 = 2 \text{ (cm)}$ .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 52.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, \hat{C} = 30^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$		
(b)	$c \approx 3,05 \text{ (cm)}$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(c)	$\cos A \approx 0,68$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(d)	$c \approx 3,05 \text{ (cm)}$ kết quả làm tròn đến hàng phần chục		

» **Lời giải**

(a)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $c \approx 3,05 \text{ (cm)}$  kết quả làm tròn đến hàng phần trăm

Áp dụng định lí cosin trong tam giác, ta có:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$   
hay  $c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 25 - 12\sqrt{3}$ . Do đó,  $c \approx 2,05 \text{ (cm)}$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $\cos A \approx 0,68$  kết quả làm tròn đến hàng phần trăm

$$\text{Ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + (25 - 12\sqrt{3}) - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}} \approx 0,68.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\hat{A} \approx 77,2^\circ$  kết quả làm tròn đến hàng phần chục

Suy ra  $\hat{A} \approx 46,9^\circ$ .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 12 \text{ (cm)}$		
(b)	$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$		
(c)	$S_{ABC} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$ .		
(d)	$R = 3,5 \text{ (cm)}$		

» **Lời giải**

(a)  $p = 12 \text{ (cm)}$

$$\text{Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$



» **Chọn SAI.**

$$(b) S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Áp dụng công thức Heron ta có:  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) S_{ABC} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) R = 3,5 \text{ (cm)}$$

Áp dụng công thức tính diện tích  $S = \frac{abc}{4R}$ , suy ra  $R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = 2,5 \text{ (cm)}$ .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 54.** Cho tam giác  $ABC$  biết các cạnh  $a = 52,1 \text{ cm}$ ,  $b = 85 \text{ cm}$ ,  $c = 54 \text{ cm}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$		
(b)	$A \approx 32^\circ$		
(c)	$\hat{B} \approx 126^\circ$		
(d)	$\hat{C} \approx 38^\circ$		

» **Lời giải**

$$(a) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Theo hệ quả định lí  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(b) A \approx 32^\circ$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{85^2 + 54^2 - 52,1^2}{2 \cdot 85 \cdot 54} \approx 0,81 \Rightarrow A \approx 36^\circ;$$

» **Chọn SAI.**

$$(c) \hat{B} \approx 126^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{52,1^2 + 54^2 - 85^2}{2 \cdot 52,1 \cdot 54} \approx -0,28 \Rightarrow \hat{B} \approx 106^\circ$$

» **Chọn SAI.**

$$(d) \hat{C} \approx 38^\circ.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 38^\circ.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 55.** Cho tam giác  $ABC$  với  $a = 49,4 \text{ cm}$ ;  $b = 26,4 \text{ cm}$  và  $\hat{C} = 47^\circ 20'$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$		
(b)	$c \approx 47 \text{ cm}$		
(c)	$\hat{A} \approx 137^\circ$		
(d)	$\hat{B} \approx 31^\circ 40'$		



✎ *Lời giải*

(a)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Theo định lí cosin, ta có:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $c \approx 47 \text{ cm}$

$$= (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos(47^\circ 20') \approx 1369,66.$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{1369,66} = 37$$

Suy ra:  $c \approx 37 \text{ cm}$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $\widehat{A} \approx 137^\circ$

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{(26,4)^2 + 1369,66 - (49,4)^2}{2 \cdot 26,4 \cdot 37} \approx -0,191 \Rightarrow \widehat{A} \approx 101^\circ$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $\widehat{B} \approx 31^\circ 40'$

$$\text{Ta có: } \widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 31^\circ 40'$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$  biết cạnh  $a = 137,5 \text{ cm}$ ,  $\widehat{B} = 83^\circ$ ,  $\widehat{C} = 57^\circ$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\widehat{A} = 40^\circ$		
(b)	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$		
(c)	$R \approx 106,96 \text{ cm}$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm		
(d)	$b \approx 179,4 \text{ cm}$ kết quả làm tròn đến hàng phần chục		

✎ *Lời giải*

(a)  $\widehat{A} = 40^\circ$

$$\text{Ta có: } \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$

$$\text{Theo định lí sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

» **Chọn SAI.**

(c)  $R \approx 106,96 \text{ cm}$  kết quả làm tròn đến hàng phần trăm

$$\text{Suy ra: } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{137,5}{2 \sin 40^\circ} \approx 106,96 \text{ cm};$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $b \approx 179,4 \text{ cm}$  kết quả làm tròn đến hàng phần chục

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{137,5 \cdot \sin 83^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 212,3 \text{ cm};$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có số đo các cạnh lần lượt là 7,9 và 12. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$p = 14$		
(b)	$S = 13\sqrt{5}$		
(c)	$R = \frac{7\sqrt{5}}{10}$		
(d)	$r = \sqrt{3}$		

» *Lời giải*

(a)  $p = 14$

Giả sử:  $a = 7, b = 9, c = 12$ .

Đặt  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+9+12}{2} = 14$  (nửa chu vi tam giác).

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $S = 13\sqrt{5}$

Theo công thức Hê-rông, ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5};$$

» **Chọn SAI.**

(c)  $R = \frac{7\sqrt{5}}{10}$

Ta có:  $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 12}{4 \cdot 14\sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{5}}{10};$

» **Chọn SAI.**

(d)  $r = \sqrt{3}$ .

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14\sqrt{5}}{14} = \sqrt{5}.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 58.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 135^\circ, \hat{C} = 15^\circ$  và  $b = 12$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\hat{B} = 30^\circ$ .		
(b)	$a = 12\sqrt{2};$		
(c)	$c \approx 8,21;$		
(d)	$R = 15$		

» *Lời giải*

(a)  $\hat{B} = 30^\circ$ .

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $a = 12\sqrt{2};$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{12}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ} = 2R$$

$$a = \frac{12 \cdot \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 12\sqrt{2};$$

» **Chọn ĐÚNG.**





(c)  $c \approx 8,21$ ;

$$c = \frac{12 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6,21;$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $R = 15$

$$R = \frac{12}{2 \sin 30^\circ} = 12.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin A = \frac{4}{5}$		
(b)	$S = 14$		
(c)	$a = 3\sqrt{2}$		
(d)	$r = 4 - \sqrt{2}$		

» **Lời giải**

(a)  $\sin A = \frac{4}{5}$

Ta có:  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$  (vì  $\sin A > 0$ ).

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $S = 14$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = 14$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $a = 3\sqrt{2}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $r = 4 - \sqrt{2}$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; p = \frac{a+b+c}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{6 + 2\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 60.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = \sqrt{6}, CA = 2, AB = 1 + \sqrt{3}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\widehat{A} = 30^\circ$		
(b)	$\widehat{B} = 35^\circ$		
(c)	$S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$		
(d)	$R = \sqrt{2}$ .		



» *Lời giải*

(a)  $\widehat{A} = 30^\circ$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ;$$

» **Chọn SAI.**

(b)  $\widehat{B} = 35^\circ$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 45^\circ$$

» **Chọn SAI.**

(c)  $S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2};$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $R = \sqrt{2}$ .

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2S}{BC}; S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \sqrt{2}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 0,3**

Giả sử đường phân giác trong góc  $A$  của  $\triangle ABC$  cắt cạnh  $BC$  tại điểm  $D$ . Với  $S$  là kí hiệu diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

$$\Leftrightarrow AD = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

» **Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$  và  $a = 10$ . Tính chu vi tam giác đó.

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 24**

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}.$$

Theo định lý sin trong tam giác ta tính được  $b = 8, c = 6$ .

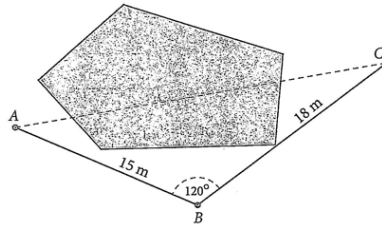
Chu vi tam giác là  $a + b + c = 24$ .

» **Câu 63.** Để kéo dây điện từ cột điện vào nhà phải qua một cái ao, anh Nam không thể đo độ dài dây điện cần mua trực tiếp được nên đã làm như sau: Lấy một điểm  $B$  như trong hình, người ta đo được độ dài từ  $B$  đến  $A$  (nhà) là  $15m$ , từ  $B$  đến  $C$  (cột điện) là  $18m$  và  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Độ dài dây điện nối từ nhà ra đến cột điện là bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

» *Lời giải*



✓ Trả lời: 28,6

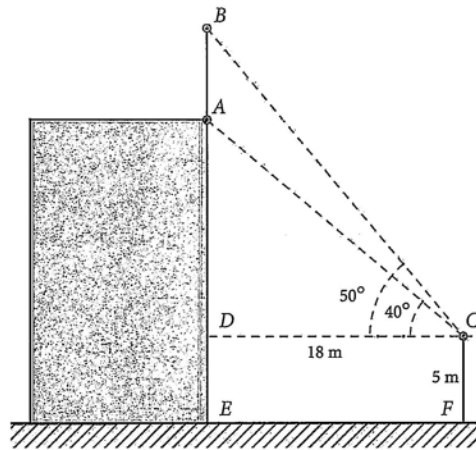


Áp dụng định lí côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ} \approx 28,62(m).$$

Vậy độ dài dây điện nối từ nhà ra cột điện dài 28,62 m.

- » **Câu 64.** Để đo chiều cao của một cột cờ trên đỉnh một toà nhà anh Bắc đã làm như sau: Anh đứng trên một đài quan sát có tầm quan sát cao 5 m so với mặt đất, khi quan sát anh đo được góc quan sát chân cột là  $40^\circ$  và góc quan sát đỉnh cột là  $50^\circ$ , khoảng cách từ chân toà nhà đến vị trí quan sát là 18 m. Chiều cao cột cờ và chiều cao của toà nhà bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



» **Lời giải**

✓ Trả lời: 6,3

Trong tam giác  $DAC$ , ta có:

$$\cos \widehat{ACD} = \frac{DC}{AC}, \text{ suy ra } AC = \frac{DC}{\cos A} = \frac{18}{\cos 40^\circ} \approx 23,5(m).$$

$$\tan \widehat{ACD} = \tan 40^\circ = \frac{AD}{DC}, \text{ suy ra } AD = DC \cdot \tan 40^\circ = 18 \cdot \tan 40^\circ \approx 15,10(m).$$

Vậy chiều cao của toà nhà là:  $AE = AD + DE = AD + CF \approx 15,10 + 5 = 20,1(m)$ .

$$\text{Trong tam giác } DBC \text{ ta có: } \cos \widehat{BCD} = \frac{DC}{BC}, \text{ suy ra } BC = \frac{DC}{\cos B} = \frac{18}{\cos 50^\circ} \approx 28(m).$$

Lại có góc  $\widehat{ACB} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$ , áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$AB = \sqrt{CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos ACB} \approx \sqrt{23,5^2 + 28^2 - 2 \cdot 23,5 \cdot 28 \cdot \cos 10^\circ} \approx 6,34(m).$$

Vậy chiều cao của cột cờ khoảng 6,34 m.

- » **Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm

» **Lời giải**

✓ Trả lời: 4,04

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow BC = 7.$$



$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

- » **Câu 66.** Để đo khoảng cách từ vị trí  $A$  trên bờ sông đến vị trí  $B$  của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  cách  $A$  một khoảng bằng  $50m$  và đo các góc  $\widehat{BAC} = 70^\circ, \widehat{BCA} = 50^\circ$ . (Hình). Tính khoảng cách  $AB$  theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 44**

Xét tam giác  $ABC$ , ta có:  $\widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ .

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{50 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 44(m)$$

- » **Câu 67.** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến  $A$  và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc  $120^\circ$  (Hình). Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 10 hải lí một giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị giờ)?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3,8**

Giả sử sau  $x$  (giờ) ( $x > 0$ ) tàu thứ nhất ở vị trí  $B$ , tàu thứ hai ở vị trí  $C$  và khoảng cách  $BC = 60$  (hải lí).

Ta có:  $AB = 8x$  (hải lí);  $AC = 10x$  (hải lí).

Áp dụng định lí côsin, ta có:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

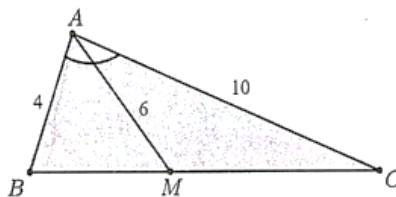
$$\Leftrightarrow 60^2 = (8x)^2 + (10x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 10x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 244x^2 = 3600 \Rightarrow x \approx 3,8.$$

Vậy sau 3,8 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí.

- » **Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ ? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 9,4**



$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

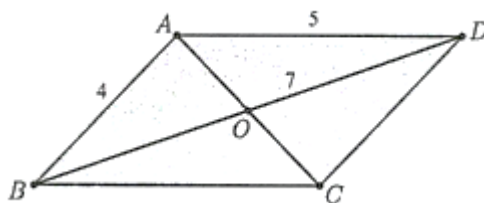
$$\Rightarrow BC^2 = 4 \left( \frac{AB^2 + AC^2}{2} - AM^2 \right) = 4 \left( \frac{4^2 + 10^2}{2} - 6^2 \right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22} \approx 9,4$$

- » **Câu 69.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, BC = 5, BD = 7$ . Tính  $AC$ . Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 5,7**

Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AD = BC = 5$ .



Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo hình bình hành, suy ra  $O$  là trung điểm  $BD$ .

$$\begin{aligned} \text{Xét } \triangle ABD: OA^2 &= \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \\ &= \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{33}{4} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{33}}{2}. \end{aligned}$$

Do đó:  $AC = 2OA = \sqrt{33} \approx 5,7$ .

» **Câu 70.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 9, BC = 10, AC = \sqrt{73}$ . Kéo dài  $BC$  một đoạn  $CI = 5$ . Tính độ dài  $AI$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 12**

- Xét  $\triangle ABC$ , ta có:  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 9^2 - (\sqrt{73})^2}{2 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3}{5}$

- Xét  $\triangle ABI$ , ta có:

$$AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2 \cdot AB \cdot BI \cdot \cos B = 9^2 + (10 + 5)^2 - 2 \cdot 9 \cdot (10 + 5) \cdot \frac{3}{5} = 144$$

$$\Rightarrow AI = 12$$

- Vì  $BI^2 = AB^2 + AI^2$  nên  $\triangle ABI$  vuông tại  $A$  hay  $IA \perp AB$ .

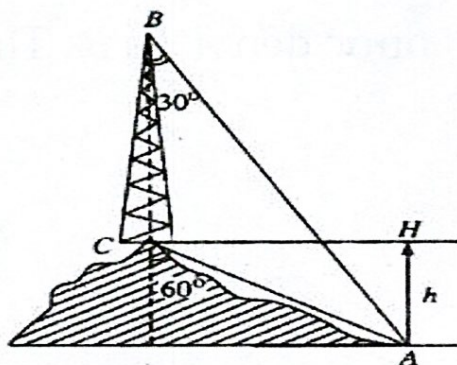
» **Câu 71.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Góc  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ . Tính diện tích hình thoi  $ABCD$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

» **Câu 72.** Trên ngọn đồi có một cái tháp cao  $100m$  (hình vẽ). Đỉnh tháp  $B$  và chân tháp  $C$  lần lượt nhìn điểm  $A$  ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng  $30^\circ$  và  $60^\circ$  so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao  $AH$  của ngọn đồi.



» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 50**

$$\widehat{ACB} = 120^\circ; \widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ. \text{ Nên } \triangle ABC \text{ cân tại } C \Rightarrow AC = BC = 100$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AHC: \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \cdot \sin 30^\circ = 50m.$$



» **Câu 73.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $20\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ . Hỏi sau 3 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 79,3**

Ta có quãng đường tàu thứ nhất đi được là  $s_1 = v_1 t = 20 \cdot 3 = 60(\text{km})$ .

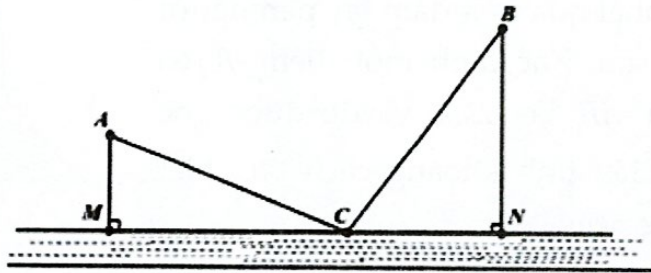
Quãng đường tàu thứ hai đi được là  $s_2 = v_2 t = 30 \cdot 3 = 90(\text{km})$ .

$\triangle ABC$  với  $B$  là vị trí tàu thứ nhất chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là  $AB = s_1 = 60\text{ km}$ ;  $C$  là vị trí tàu thứ hai chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là  $AC = s_2 = 90\text{ km}$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow BC^2 = 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 6300. \text{ Vậy khoảng cách hai tàu sau 3 giờ chạy là } BC = 30\sqrt{7}.$$

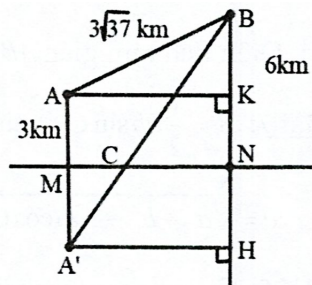
» **Câu 74.** Thành phố Hải Đông dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư  $A$  và  $B$ . Trạm nước sạch đặt tại vị trí  $C$  trên bờ sông. Biết  $AB = 3\sqrt{17}\text{ km}$ , khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến bờ sông lần lượt là  $AM = 3\text{ km}$ ,  $BN = 6\text{ km}$  (hình vẽ). Gọi  $T$  là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến  $A$  và  $B$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $T$ . *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*



🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 20,1**

Kẻ  $AK \perp BN$ ;  $A'H \perp BN$ .



Gọi  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $MN$ ,  $D$  là trung của  $NB$ .

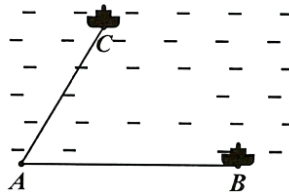
$T = CA + CB = CA' + CB \geq A'B$  (không đổi).

Đẳng thức xảy ra khi  $\{C\} = MN \cap A'B$ .

$$MN = AK = A'H = \sqrt{AB^2 - KB^2} = \sqrt{(3\sqrt{37})^2 - 3^2} = 18\text{ km}.$$

$$\text{Vậy } A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5} \approx 20,12\text{ km}.$$

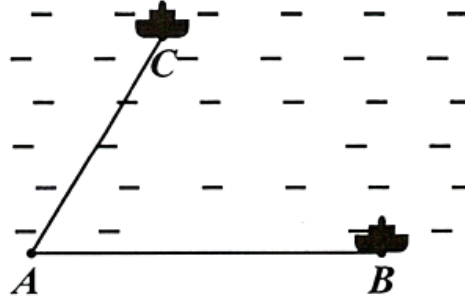
» **Câu 75.** Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Tàu  $B$  chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu  $C$  chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



✎ *Lời giải*

✓ *Trả lời: 36*

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí.



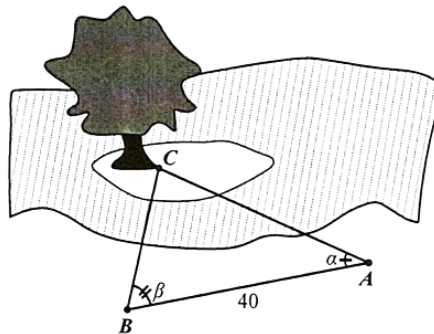
Vậy tam giác ABC có  $AB = 40, AC = 30$  và  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

Áp dụng định lí cô-sin vào tam giác ABC, ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &= 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 1300 \Rightarrow a \approx 36. \end{aligned}$$

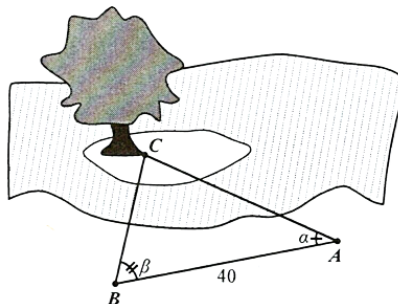
Vậy sau 2 giờ hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

» **Câu 76.** Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách  $AB = 40m, \widehat{CAB} = 45^\circ, \widehat{CBA} = 70^\circ$ . Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC bằng bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



✎ *Lời giải*

✓ *Trả lời: 41,5*



Ta có:  $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 65^\circ$ .

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có

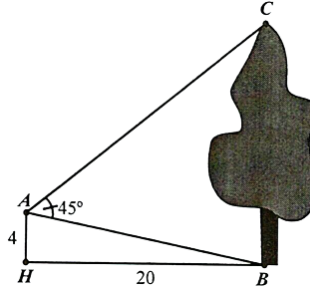




$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 41,47 m.$$

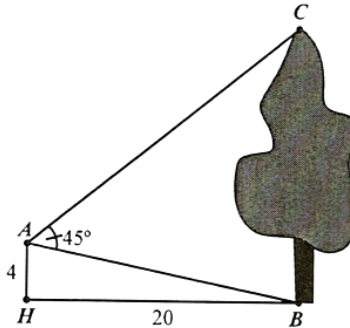
Vậy khoảng cách giữa A và C khoảng 41,47m.

- » **Câu 77.** Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết  $AH = 4m$ ,  $HB = 20m$ ,  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Tính chiều cao của cây? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.



**Lời giải**

✓ **Trả lời: 17,3**



Trong tam giác  $AHB$ , ta có

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'.$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 4\sqrt{26}.$$

Suy ra  $\widehat{ABC} = 90^\circ - 11^\circ 19' = 78^\circ 41'$ .

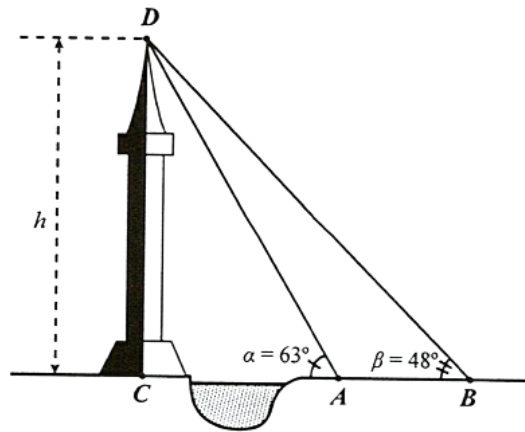
Suy ra  $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$ .

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta được:

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17,33 m$$

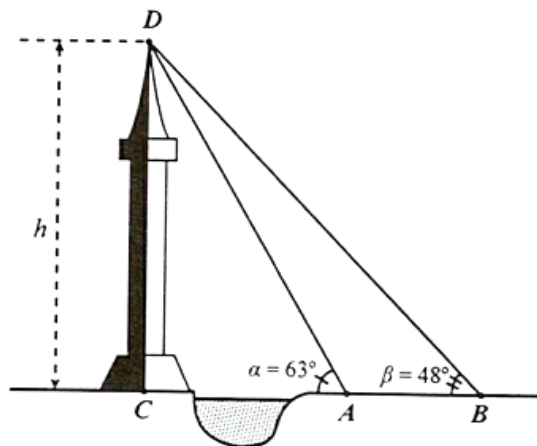
- » **Câu 78.** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24m$ ,  $\widehat{CAD} = 63^\circ$ ,  $\widehat{CBD} = 48^\circ$ . Tính chiều cao  $h$  của tháp? Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.





✎ *Lời giải*

✓ *Trả lời: 68,9*



Ta có  $\alpha = \widehat{D}_1 + \beta \Rightarrow \widehat{D}_1 = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$ .

Áp dụng định lí sin vào tam giác  $ABD$ , ta có

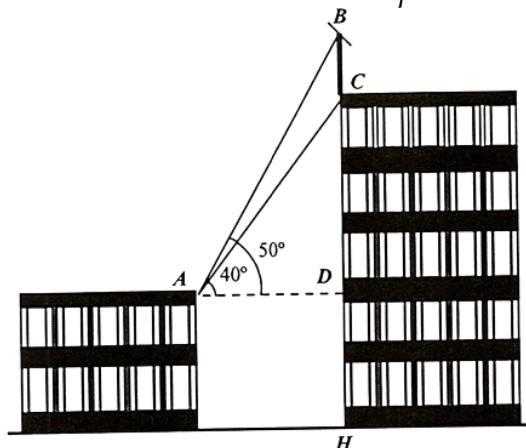
$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \widehat{D}_1} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin \widehat{D}_1} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91m$$

Trong tam giác vuông  $ACD$ , có

$$h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 68,91m.$$

Vậy chiều cao của cái tháp khoảng  $68,91m$ .

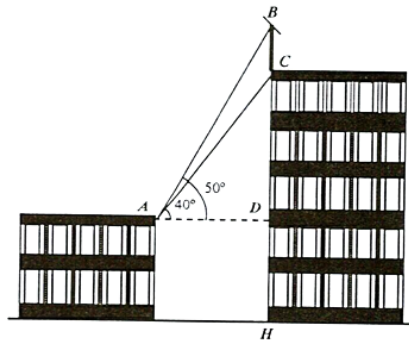
» **Câu 79.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao  $5m$ . Từ vị trí quan sát  $A$  cao  $7m$  so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten dưới góc  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà? *Kết quả làm tròn đến hàng phân chục.*



✎ *Lời giải*



✓ Trả lời: 18,9



Từ hình vẽ, suy ra  $\widehat{BAC} = 10^\circ$

$$\text{và } \widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta có

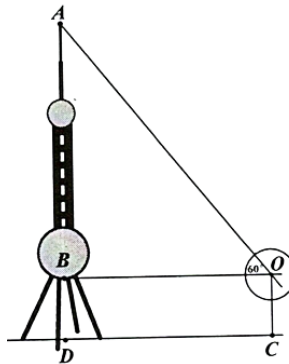
$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5m$$

Trong tam giác vuông  $ADC$ , ta có  $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9m$ .

Suy ra,  $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9m$ .

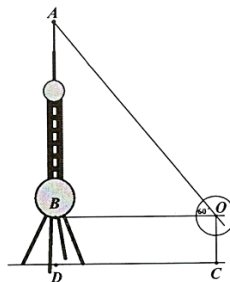
Vậy chiều cao của toà nhà khoảng  $18,9m$ .

- » **Câu 80.** Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng  $CD = 60m$ , biết chiều cao của giác kế là  $OC = 1m$ . Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh  $A$  của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ . Tính chiều cao của ngọn tháp? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



✎ Lời giải

✓ Trả lời: 105



Tam giác  $OAB$  vuông tại  $B$ , có  $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3}m$ .

Vậy chiều cao của ngọn tháp là  $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1) \simeq 105m$ .

----- Hết -----