

Kỳ thi tốt nghiệp THPT môn Toán đợt 2

PHÂN TÍCH MỘT SỐ CÂU TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 2 NĂM 2021

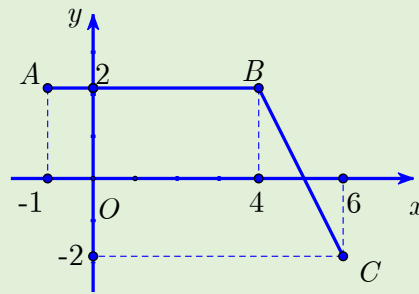
Ths NGUYỄN MINH NHIÊN

Phó trưởng phòng GDTrH – GDTX, Sở GD&ĐT Bắc Ninh

Buổi thi môn Toán kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 diễn ra vào chiều ngày 06/8/2021. Bài thi môn Toán gồm 24 mã đề. Nội dung đề thi nằm trong chương trình THPT, chủ yếu chương trình lớp 12, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 50 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT. So với đề thi đợt 1, đề thi đợt 2 có nhiều câu quen thuộc, một số câu, dạng bài đã xuất hiện trong đề thi đợt 1. Để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong năm học 2021-2022, chúng tôi xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết “**Phân tích một số câu trong đề thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021**”.

Hy vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



A. 19.

B. 17.

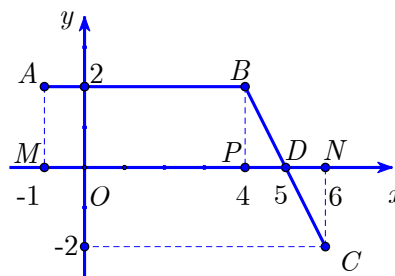
C. 22.

D. 18.

Lời giải

Chọn B

Cách 1



$$\begin{aligned} \text{Ta có } F(6) + F(5) - 2F(-1) &= \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_{-1}^6 f(x) dx \\ &= S_{ABDM} + S_{ABDM} - S_{CDN} = 2S_{ABPM} + S_{BDP} = 21 \\ \Rightarrow F(6) + F(5) &= 17. \end{aligned}$$

Cách 2

$$\text{Từ đồ thị ta có hàm số } y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x \in [-1; 4] \\ -2x + 10 & \text{nếu } x \in [4; 6] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx = \int_{-1}^4 2 dx + \int_4^5 (10 - 2x) dx = 11$$

$$\int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx = \int_{-1}^4 2 dx + \int_4^6 (10 - 2x) dx = 10$$

$$\text{Do đó } 21 = \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_{-1}^6 f(x) dx = F(6) + F(5) - 2F(-1).$$

$$\Rightarrow F(6) + F(5) = 17$$

NHẬN XÉT:

Đây là bài toán ở mức vận dụng, học sinh nắm vững định nghĩa tích phân và việc ứng dụng nó trong việc xác định diện tích hình phẳng. Cụ thể

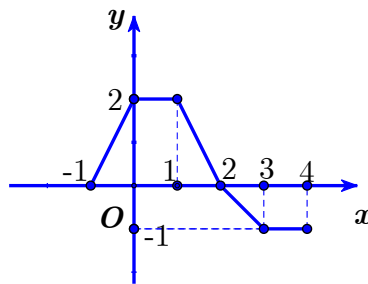
+ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

+ Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$; Trục hoành; Hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Việc xuất hiện các yếu tố $F(-1), F(5), F(6)$ ta nghĩ đến $\int_{-1}^5 f(x) dx; \int_{-1}^6 f(x) dx$ và $\int_5^6 f(x) dx$ đi đến $\int_{-1}^5 f(x) dx + \int_{-1}^6 f(x) dx = F(6) + F(5) - 2F(-1)$
Hoặc $\int_5^6 f(x) dx + 2 \int_{-1}^5 f(x) dx = F(6) + F(5) - 2F(-1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ bên. Tích phân $\int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng



A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{11}{2}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

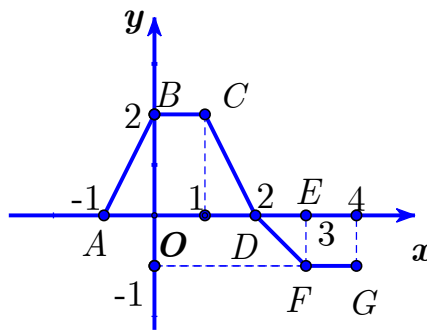
Chọn A

Cách 1: Xác định hàm số $f(x)$ trên từng đoạn, rồi tính tích phân ta có:

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x + 2) dx + \int_0^1 2 dx + \int_1^2 (-2x + 4) dx + \int_2^3 (-x + 2) dx + \int_3^4 (-1) dx$$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{5}{2}.$$

Cách 2: Ứng dụng diện tích hình phẳng



Gọi các điểm $A(-1;0), B(0;2), C(1;2), D(2;0), E(3;0), F(3;-1), G(4;0)$.

$$\text{Vậy } \int_{-1}^4 f(x)dx = S_{OAB} + S_{OBCD} - S_{DEFG} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{(1+2)2}{2} - \frac{(2+1)1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $f(4) - f(2)$ là

A. -2 .

B. 2 .

C. $\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = -(x-1)^2 + 4$.

$$\text{Vậy } f(4) - f(2) = \int_2^4 f'(x)dx = \int_2^4 \left(-(x-1)^2 + 4 \right) dx = -\frac{2}{3}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập số thực. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện

tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)f'(2x)dx = \frac{b}{2}$ và

$f(3) = c$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $a - b + c$.

B. $a + b - c$.

C. $-a + b - c$.

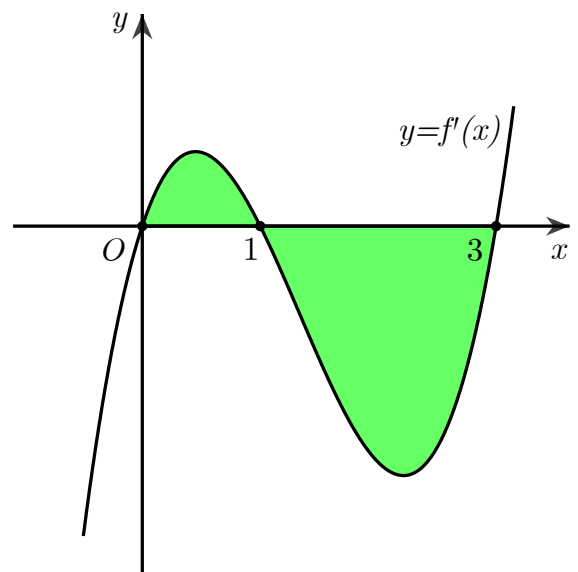
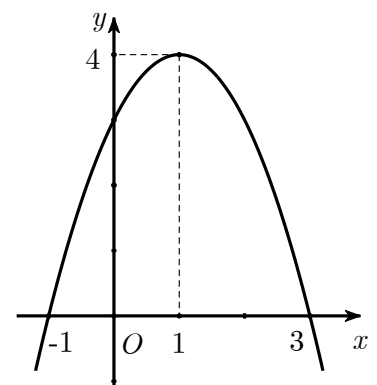
D. $-a - b + c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)f'(2x)dx = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (t+1)f'(t)dt$$



$$\Leftrightarrow \int_0^1 (t+1)f'(t)dt = b \Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - b$$

Ta lại có

$$a = \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow a = f(1) - f(0) + f(1) - f(3) \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - b = a - b + c.$$

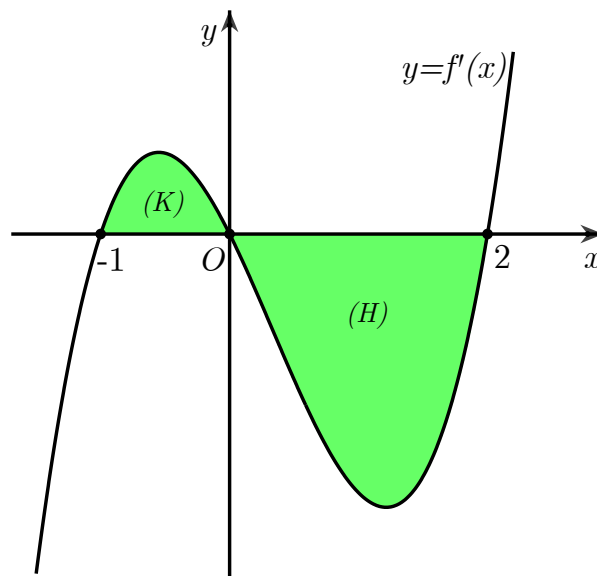
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{8}{3}$ và $f(-1) = \frac{19}{12}; f(2) = -\frac{2}{3}$. Tính $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f'(2x)dx$.

A. $I = \frac{5}{24}$.

B. $I = \frac{8}{13}$.

C. $I = \frac{4}{13}$.

D. $I = \frac{4}{26}$.



Lời giải

Chọn A

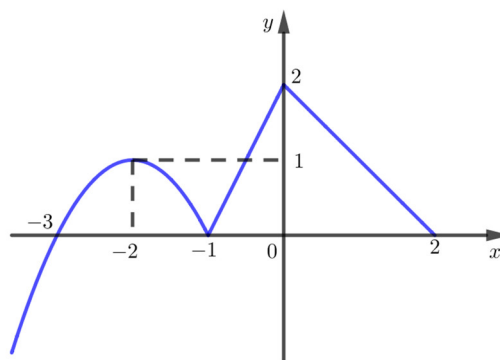
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f'(2x)dx \xrightarrow[t=2dx]{t=2x} I = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(x)dx$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f'(x)dx = \int_{-1}^0 f'(x)dx + \int_0^2 f'(x)dx \Leftrightarrow f(2) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x)dx - \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} - \frac{19}{12} = \int_{-1}^0 f'(x) dx - \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{5}{12}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{5}{24}.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ.



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$.

B. $\frac{31}{6}$.

C. $\frac{35}{3}$.

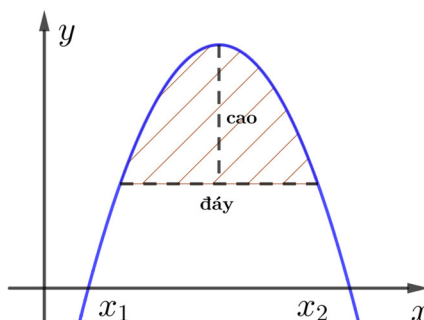
D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

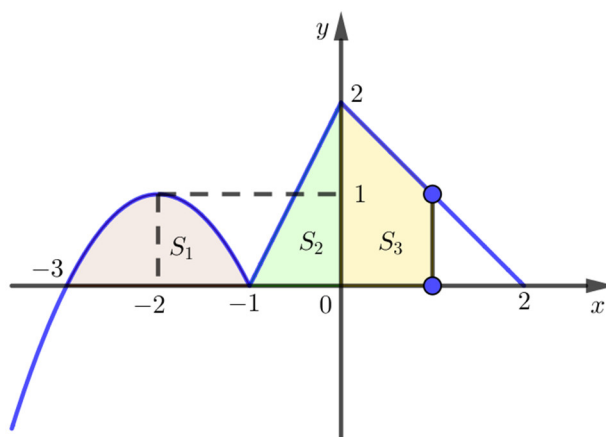
Chọn B

Cách 1:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S = \frac{2}{3} \text{day} \cdot \text{cao}$



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:



Nhánh parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua 3 điểm $(-3, 0)$, $(-2, 1)$ và $(-1, 0)$ nên ta tính ra được hệ số $a = 1$.

Ta có $f(-1) + f(1) = [f(-1) - f(-3)] + [f(1) - f(-3)] = S_1 + (S_1 + S_2 + S_3)$.

Với $S_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, $S_3 = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

Suy ra $f(-1) + f(1) = \frac{31}{6}$.

Cách 2:

Ta xác định biểu thức của hàm số $y = f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3, 2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

⊙ Nhánh parabol $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ xác định trên $[-3, -1]$ đi qua 3 điểm $(-3, 0)$, $(-2, 1)$ và $(-1, 0)$.

⊙ Nhánh đường thẳng $y = a_2x + b_2$ xác định trên $[-1, 0]$ đi qua 2 điểm $(-1, 0)$ và $(0, 2)$.

⊙ Nhánh đường thẳng $y = a_3x + b_3$ xác định trên $[0, 2]$ đi qua 2 điểm $(0, 2)$ và $(2, 0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x + C_3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vì $f(-3) = 0$ nên ta có: $-\frac{(-3)^3}{3} - 2(-3)^2 - 3(-3) + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$.

Do f liên tục tại $x = -1$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 3(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{7}{3}$$

Tương tự, f liên tục tại $x = 0$ nên ta có:

$$0^2 + 2 \cdot 0 + \frac{7}{3} = -\frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C_3 \Leftrightarrow C_3 = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(1) = \left[(-1)^2 + 2(-1) + \frac{7}{3} \right] + \left[-\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{7}{3} \right] = \frac{31}{6}$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên

đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị của biểu thức

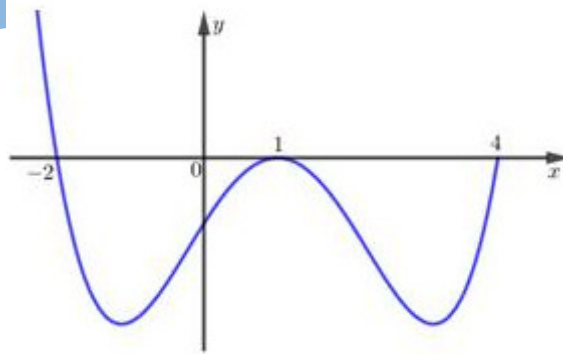
$f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21.

B. 9.

C. 3.

D. 3.



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ trên mỗi đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$

$$S_1 = \int_{-2}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-2}^1 f'(x) dx = f(-2) - f(1) = 12 \Rightarrow f(-2) = 9 + f(1) = 12.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[1; 4]$ là

$$S_2 = \int_1^4 |f'(x)| dx = -\int_1^4 f'(x) dx = f(1) - f(4) = -9 \Rightarrow f(4) = f(1) - 12 = -9.$$

$$\text{Vậy } f(-2) + f(4) = 12 - 9 = 3.$$

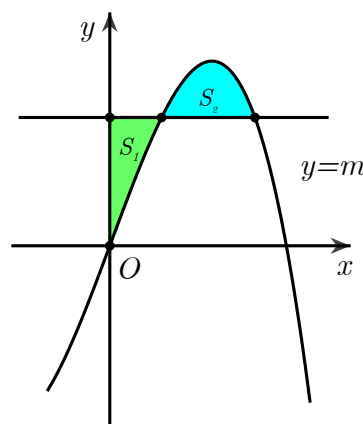
Câu 7: Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng có diện tích S_1, S_2 bằng nhau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < \frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $1 < m < \frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2} < m < 2$.



Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $8x - 27x^3 = m$. Giả sử như hình vẽ, hoành độ các giao điểm là $0 < a < b$. Ta có hệ $\begin{cases} 8a - 27a^3 = m \\ 8b - 27b^3 = m \end{cases} (1)$.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8x - 27x^3 - m$.

Khi đó các diện tích

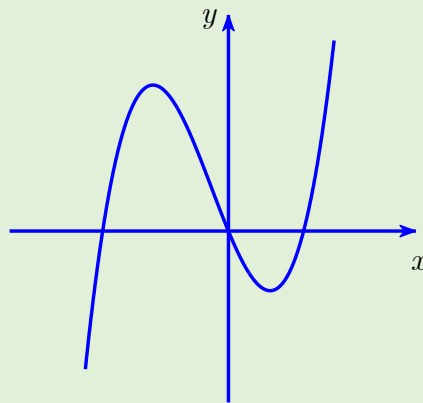
$$S_1 = \int_0^a |f(x)| dx = - \int_0^a f(x) dx = F(0) - F(a);$$

$$S_2 = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Theo giả thiết thì $S_1 = S_2 \Leftrightarrow F(b) - F(0) \Leftrightarrow 4b^2 - \frac{27b^4}{4} - mb = 0$.

Suy ra $b = \frac{4}{9} \Rightarrow m = \frac{32}{27}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là



A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Gọi hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành là $m, 0, n$ với $m < 0 < n$. Khi đó ta có BBT

x	$-\infty$	m	0	n	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\swarrow$ $f(m)$		$\searrow$ $f(n)$	
		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

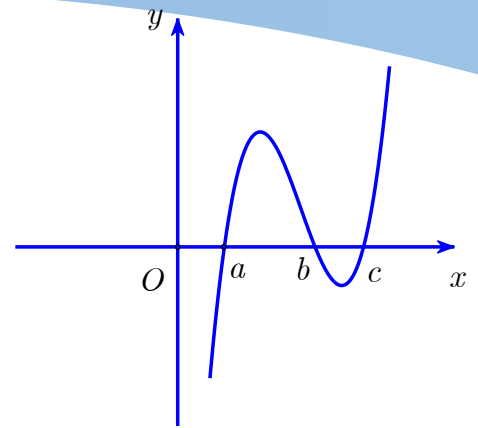
Do đó, phương trình $2f(x) - 3 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Nhân xét

Đây là bài toán sử dụng sự biến thiên của hàm số để giải bài toán về tương giao giữa hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(m)$ (m là tham số). Với dạng toán này ta cần xác định được tính chất và sự biến thiên của $f(x)$ thì có thể giải quyết bài toán. Điểm quan trọng nhất chính là tìm các điểm cực trị.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0 > f(c)$?



- A. 3.
C. 2.

- B. 1.
D. 0.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có BBT

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(a)$ $f(c)$						

Mà $f(a) > 0 > f(c)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có các điểm cực trị $x = 1; x = 3$. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. $(f(1); f(3))$.

B. $(0; 4)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(0; 4) \setminus \{1; 3\}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f'(x) = 3a(x-1)(x-3) = a(3x^2 - 12x + 9)$

$$\Rightarrow f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x) + d = ag(x) + d \text{ với } g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

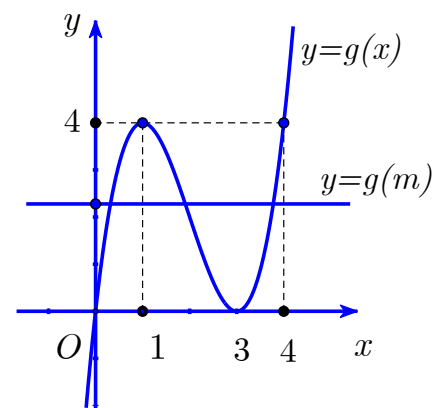
Hàm số $y = g(x)$ có các điểm cực trị là $x = 1; x = 3$ nên đồ

thị có điểm uốn $I(2; 0)$ và $g(0) = g(3), g(1) = g(4)$

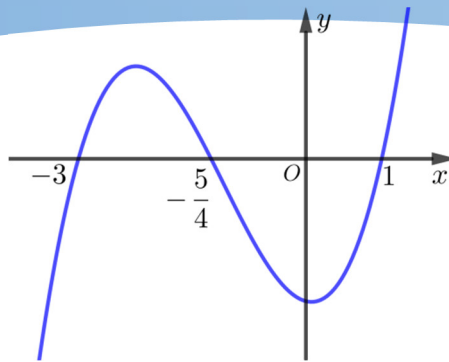
$$\text{Ta có } f(x) = f(m) \Leftrightarrow g(x) = g(m).$$

Nên phương trình $f(x) = f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$g(0) = g(3) < g(m) < g(1) = g(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 1; 3 \end{cases}$$



Câu 3: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 48ax + m$ có số phần tử là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x-1)(4x+5)(x+3) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$ (2)
và $a \neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b = \frac{13}{3}a$, $c = -a$ và $d = -15a$.

Khi đó:

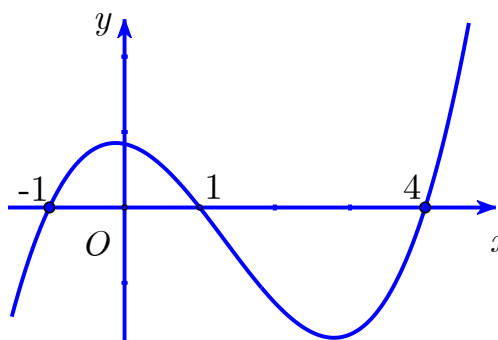
$$f(x) = 48ax + m \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 48ax$$

$$\Leftrightarrow a \left(x^4 + \frac{13}{3}x^3 - x^2 - 63x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 13x^3 - 3x^2 - 189x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = 48ax + m$ là $S = \{0; 3\}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ là



- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m > 0$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4m(x+1)(x-1)(x-4) \\ &= 4mx^3 - 16mx^2 - 4mx + 16m. \end{aligned}$$

* Mà $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Suy ra
$$\begin{cases} n = -\frac{16}{3}m \\ p = -2m \\ q = 16m \end{cases}$$

* Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$

$$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{16}{3}mx^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m - \frac{128}{3}m - 8m + 32m + r$$

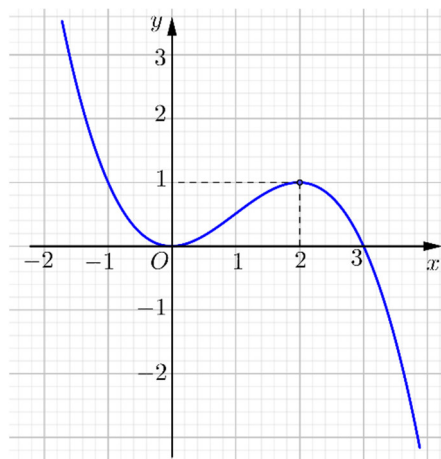
$$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \end{cases}.$$

Phương trình $x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có 4 nghiệm.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ với $(a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)$ không thể có bậc nhỏ hơn bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'(x) = \alpha x^2(x-3)$, đồ thị của nó đi qua $A(2;1)$ nên

$$1 = a \cdot 2^2 \cdot (2-3) = - \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra $f'(x) = -\frac{x^2}{4}(x-3)$, do đó $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k$.

Ta có $f(x) = k \Leftrightarrow -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Suy ra $f(-x^2 + 2x + m) = k \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{cases}$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_1 = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 4$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_2 = 1 + m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

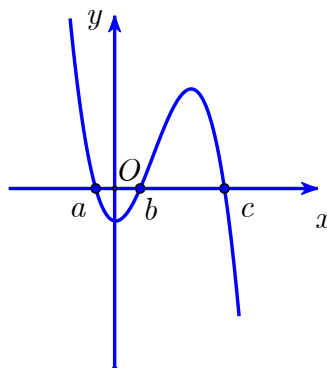
Hai phương trình nếu như có nghiệm chung x_0 thì $\begin{cases} -x_0^2 + 2x_0 + m = 0 \\ -x_0^2 + 2x_0 + m = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 0$.

Do vậy để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có 4 nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m > -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Do m nguyên và $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{4; 5\}$. Vậy có 2 giá trị của m .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x - a) = f(c)$ là



A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

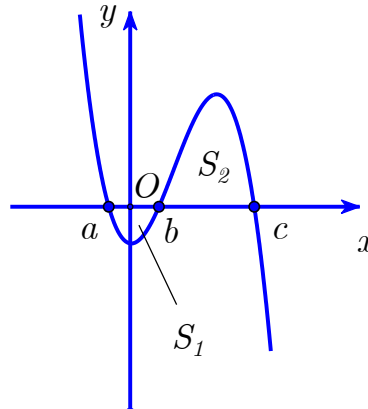
Lời giải

Chọn D

+) Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$

x	$-\infty$	$(\quad)$			$(\quad)$			$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-
		$f(a)$			$f(c)$			
y								

+) Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

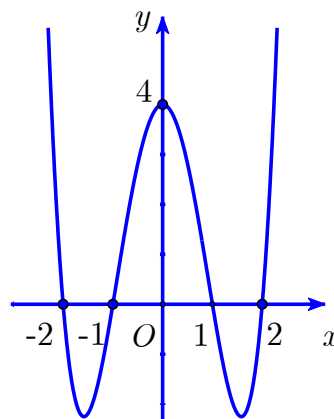


$$S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_a^b -f'(x)dx < \int_b^c f'(x)dx \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

+) Số nghiệm của phương trình $f(x-a) = f(c)$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x-a)$ và đường thẳng $y = f(c)$ trong đó đường thẳng $y = f(c)$ là đường song song hoặc trùng với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $f(c)$, còn đồ thị hàm số $y = f(x-a)$ có được là do tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái theo phương của trục hoành $(-a)$ đơn vị.

Từ ba điều trên suy ra phương trình $f(x-a) = f(c)$ có đúng một nghiệm.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + r$ ($a, b, c, d, e, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x) = r$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc 4.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt Ox tại bốn điểm $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$ suy ra $f'(x) = k(x^2 - 1)(x^2 - 4)$, $k > 0$.

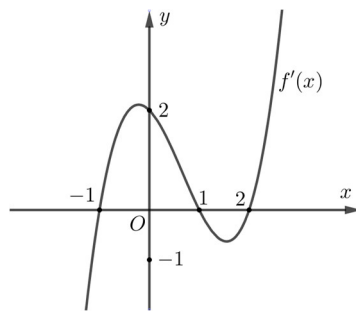
Lại có điểm $E(0;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow k = 1$.

Vậy $f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Mặt khác $\int f'(x) dx = \int (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + r$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + r$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

A. 5.

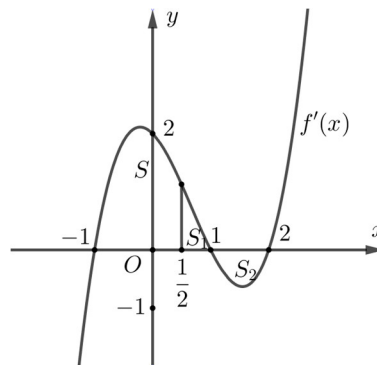
B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = -1$; $x = 1$.

S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = 1$; $x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có:

$$S > S_2 \Rightarrow \int_{-1}^1 f'(x) dx > \int_1^2 (-f'(x)) dx \Rightarrow f(1) - f(-1) > f(1) - f(2) \\ \Rightarrow f(-1) < f(2).$$

$$S_1 < S_2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x) dx < \int_1^2 (-f'(x)) dx \Rightarrow f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) - f(2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(2)$$

Trên khoảng $(-1; 1)$, hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f(-1) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$.

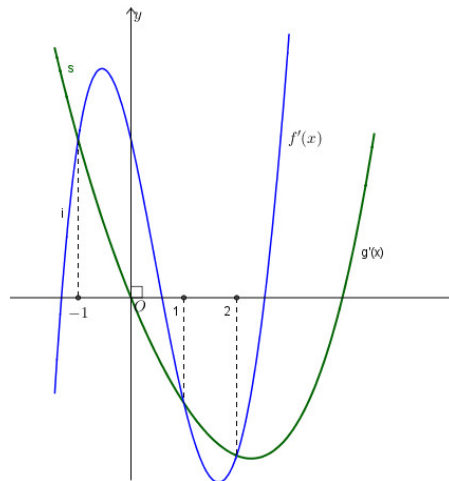
Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$+\infty$

$f(-1)$ $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $f(1)$ $f(2)$

Vậy phương trình $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ có tất cả 4 nghiệm thực.

Câu 9: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$; $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $S \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. C. $S \in (0; 1)$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $m \neq 0$ và xét $f(0) = g(0) \Rightarrow r = d = 0$.

Từ đồ thị có

$$f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 4mx^3 - 8mx^2 - 4mx + 8m \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } f'(x) - g'(x) = mx^3 + 3(n-a)x^2 + 2(p-b)x + q - c \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) cho ta } \begin{cases} 3(n-a) = -8m \\ 2(p-b) = -4m \\ q - c = 8m \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$\Leftrightarrow x \left[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + q - c \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left[mx^3 - \frac{8m}{3}x^2 - 2mx + 8m \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow mx \left(x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0 \text{ có đúng 1 nghiệm thực là } x_0 \in \left(-2; -\frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Vậy phương trình } f(x) = g(x) \text{ có tổng các nghiệm } S = 0 + x_0 \Rightarrow S \in \left(-2; -\frac{3}{2} \right).$$

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 5)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?

A. 14.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3) \Leftrightarrow (4x-4-y)e^x - y(xy-2x^2-3) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = (4x-y-4)e^x - y(xy-2x^2-3)$ ta có

$$f'(x) = 4e^x + (4x-y-4)e^x - y(y-4x) = e^x(4x-y) + y(y-4x) = (e^x+y)(4x-y).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} \text{ (do } e^x + y > 0, \forall x \in (1; 5), y \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

$$f(1) = -y(y+e-5); f(5) = -5y^2 - y(e^5 - 53) + 16e^5.$$

$$+ \text{ TH1: } \frac{y}{4} \geq 5 > x \Leftrightarrow y \geq 20 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (1; 5)$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ nghịch biến trên } (1; 5) \text{ hay } f(x) < f(1) = -y(y+e-5) < 0, \forall x \in (1; 5).$$

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$$+ \text{ TH2: } 0 < \frac{y}{4} \leq 1 < x \Leftrightarrow 0 < y \leq 4 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ đồng biến trên } (1; 5) \text{ hay } f(1) < f(x) < f(5).$$

$$\text{Ta lại có } f(5) = e^5(16-y) + y(53-y) > 0, \forall y \leq 4.$$

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow -y(e+y-5) < 0 \Leftrightarrow e+y-5 > 0 \Leftrightarrow y > 5-e.$$

Do $y \in \mathbb{N}^*$ và $y \leq 4$ nên $y \in \{3; 4\}$.

$$+ \text{ TH3: } \frac{y}{4} \in (1; 5) \Leftrightarrow 4 < y < 20, \text{ ta có bảng biến thiên}$$

x	1	$\frac{y}{4}$	5
y'	-	0	+
y	$f(1)$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$f(5)$

Ta thấy $f(1) = -y(e + y - 5) < 0, \forall y \in (4; 20)$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(5) > 0 \Leftrightarrow -5y^2 - y(e^5 - 53) + 16e^5 > 0$$

$$\Leftrightarrow (-33, 3 \approx) \frac{53 - e^5 - \sqrt{(e^5 - 53)^2 + 320e^5}}{10} < y < \frac{53 - e^5 + \sqrt{(e^5 - 53)^2 + 320e^5}}{10} (\approx 14, 2).$$

Do $y \in \mathbb{N}^*$ và $4 < y < 20$ nên $y \in \{5; 6; \dots; 14\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của y thỏa mãn bài toán.

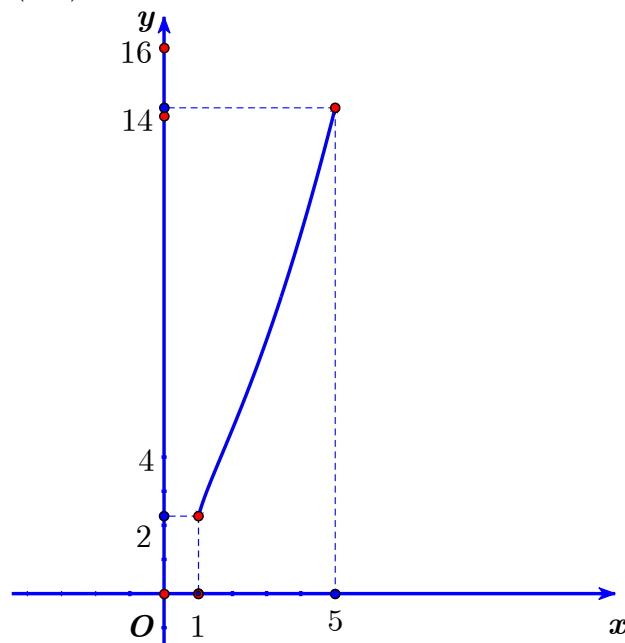
Nhận xét:

Đây là dạng toán đã được đề cập tới trong đề thi Tốt nghiệp THPT năm 2021 đợt 1. Ý tưởng vẫn là hướng đến khảo sát hàm số $f(x)$ trên $(1; 5)$. Nhưng việc giải nó phải mất rất nhiều công tính toán (phải dùng đến máy tính cầm tay) vì các biểu thức cồng kềnh. Một điểm không hay nữa trong bài này chính là việc ta có thể biến đổi giả thiết về phương trình bậc hai ẩn y là $xy^2 + y(e^x - 2x^2 - 3) - 4(x-1)e^x = 0$.

Phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu nên tìm được

$$y = \frac{-e^x + 2x^2 + 3 + \sqrt{(e^x - 2x^2 - 3)^2 + 16(x^2 - x)e^x}}{4x} = g(x)$$

Hàm này đơn điệu trên $(1; 5)$



Nên $g(1) < y < g(5)$ từ đó tìm được $y \in \{3; 4; \dots; 14\}$.

Như vậy, nếu ban đầu chỉ cần thử

$$x = 1 \Rightarrow y = 5 - e \approx 2, 2; x = 5 \Rightarrow y = \frac{53 - e^5 + \sqrt{(e^5 - 53)^2 + 320e^5}}{10} (\approx 14, 2)$$

Vô tình ta đã có $3 \leq y \leq 14$.

Câu 44: Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $|z - w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1 + i| + |w - 3 + 4i|$ bằng

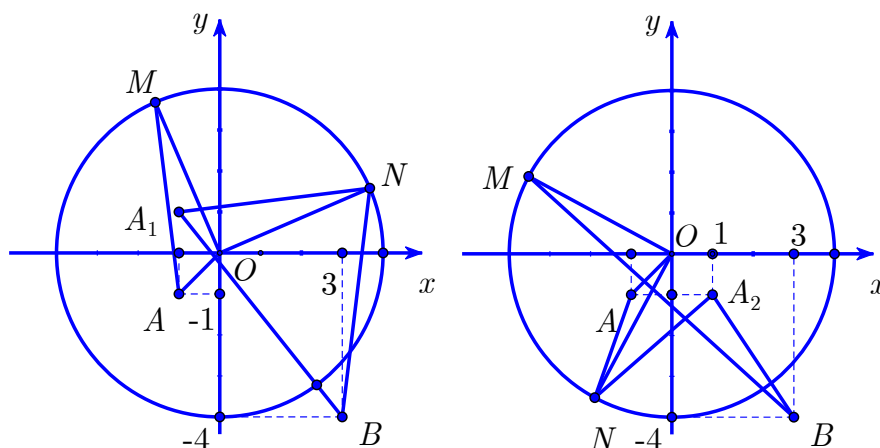
- A. $5 - 2\sqrt{2}$. B. $5 - \sqrt{2}$. C. $\sqrt{41}$. D. $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi $M, N, A(-1; -1), B(3; -4)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z, w, -1 - i, 3 - 4i$. Từ giả thiết ta có $M, N \in (O; 4), MN = 4\sqrt{2}, P = MA + NB$.



Ta có $Q_{(O, -90^\circ)}(A) = A_1(-1; 1), Q_{(O, 90^\circ)}(A) = A_2(-1; 1)$

+ TH1: $Q_{(O, -90^\circ)}(M) = N$

Khi đó, $P = MA + NB = NA_1 + NB \geq A_1B = \sqrt{41}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N = (O, 4) \cap A_1B$.

+ TH2: $Q_{(O, 90^\circ)}(M) = N$

Khi đó, $P = MA + NB = NA_2 + NB \geq A_2B = \sqrt{13}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N = (O, 4) \cap A_2B$.

Như vậy, $P_{\min} = \sqrt{13}$.

Cách 2.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, w .

Từ giả thiết ta có $OM = ON = 4, MN = 4\sqrt{2} \Rightarrow \triangle OMN$ vuông cân.

Do đó $Q_{(O, -90^\circ)}(M) = N$ hoặc $Q_{(O, 90^\circ)}(M) = N$ hay $w = iz$ hoặc $w = -iz$

+ TH1: $w = iz$

$$P = |z + 1 + i| + |iz - 3 + 4i| = |z + 1 + i| + |z + 4 + 3i| = |z + 1 + i| + |-z - 4 - 3i| \geq |1 + i - 4 - 3i| = \sqrt{13}.$$

+ TH2: $w = -iz$

$$P = |z + 1 + i| + |-iz - 3 + 4i| = |z + 1 + i| + |-z + 4 + 3i| \geq |1 + i + 4 + 3i| = \sqrt{41}.$$

Như vậy, $P_{\min} = \sqrt{13}$.

Cách 3.

Đặt $w = uz$ ($u \neq 0$) ta có $|uz| = 4 \Leftrightarrow |u| = 1; |z - uz| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |u - 1| = \sqrt{2}$.

Khi đó

$$P = |z + 1 + i| + |uz - 3 + 4i| = |z + 1 + i| + |u| \left| z - \frac{3 - 4i}{u} \right| = |z + 1 + i| + \left| -z + \frac{3 - 4i}{u} \right|$$

$$\geq \left| 1 + i + \frac{3 - 4i}{u} \right|.$$

Đặt $u = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta được $\begin{cases} |u| = 1 \\ |u - 1| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases}$

Với $u = i$ thì $\left| 1 + i + \frac{3 - 4i}{i} \right| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$.

Với $u = -i$ thì $\left| 1 + i + \frac{3 - 4i}{-i} \right| = |5 + i| = \sqrt{41}$.

Như vậy $P_{\min} = \sqrt{13}$.

NHẬN XÉT:

Từ giả thiết ta có thể chỉ ra $M, N \in (O; 4)$, $MN = 4\sqrt{2}$, $P = MA + NB$ nhưng việc sử dụng phép quay để đưa về $NA_1 + NB$ và $NA_2 + NB$ sẽ gây khó khăn với nhiều thí sinh, đồng thời có thể mắc lỗi khi chọn phương án giá trị nhỏ nhất là $A_1B = \sqrt{41}$. Một tính chất khác đã được sử dụng là

Nếu $Q_{(O, \alpha)}(M) = M'$ với M, M' lần lượt biểu diễn các số phức z, z' thì $z' = z(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Với bài toán này, $\alpha = 90^\circ \vee \alpha = -90^\circ$ nên dẫn đến $w = iz$ hoặc $w = -iz$.

Khi đó, bài toán trở về dạng quen thuộc: "Tìm điểm M thay đổi trên đường l sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất, với A, B cho trước, AB cắt l tại một điểm thuộc đoạn AB ".

Với cách làm như vậy ta đi tới lời giải thứ 3 và bài toán tổng quát như sau:

Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = m; |w| = n; |nz - mw| = mn\sqrt{k}, k \in (0; 4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |nz - a - bi| + |mw - c - di|$, với $a^2 + b^2 < m^2 n^2 < c^2 + d^2$.

Lời giải

Đặt $z = mu, w = nv$ ($uv \neq 0$) bài toán trở thành $|u| = 1, |v| = 1, |u - v| = \sqrt{k}, k \in (0; 4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |mnu - a - bi| + |mnv - c - di| = mn \left(\left| u - \frac{a + bi}{mn} \right| + \left| v - \frac{c + di}{mn} \right| \right)$.

Đến đây có thể sử dụng ý tưởng của cách 3.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

- A. $5\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2} \Leftrightarrow 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

$\Rightarrow z = a - i$. Ta lại có

$$|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i| = |a - 1 + i| + |a + 1 + 2i| = \sqrt{(1 - a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1 + a)^2 + 2^2}.$$

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$$\sqrt{(1 - a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1 + a)^2 + 2^2} \geq \sqrt{(1 - a + 1 + a)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Suy ra $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1 - a) = 1 + a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

Câu 2: Trong các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = |z_2 - 3 - 4i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

- A. -10 . B. $-4 - 3\sqrt{5}$. C. -5 . D. $-6 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Theo đề ta có: $\begin{cases} (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4 & (1) \\ (c - 3)^2 + (d - 4)^2 = 4 & (2) \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 1 & (3) \end{cases}$

Khi đó $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a - c) + 8(b - d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và sử dụng ta có:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 - |z_2|^2 &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a - c) + 8(b - d) \\ &\geq -\sqrt{(6^2 + 8^2)} \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = -10. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ là -10 khi

$$\begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 \\ \frac{a-c}{6} = \frac{b-d}{8} = k < 0 \end{cases}$$

Tồn tại 2 cặp số phức thỏa mãn là:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{27-4\sqrt{15}}{10} + \frac{144+12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33-4\sqrt{15}}{10} + \frac{176+12\sqrt{15}}{40}i \\ z_1 = \frac{27+4\sqrt{15}}{10} + \frac{144-12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33+4\sqrt{15}}{10} + \frac{176-12\sqrt{15}}{40}i \end{cases}$$

Câu 3: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2, |iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng

A. 4.

B. $2(\sqrt{29} - 3)$.

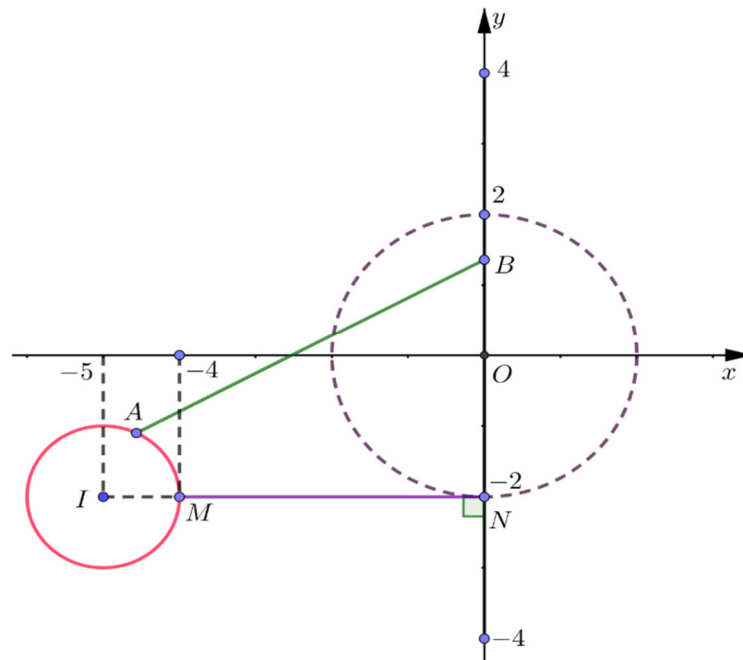
C. 8.

D. $2(\sqrt{29} - 5)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



$$\text{Ta có: } |iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |i| \cdot \left| w + \frac{-2+5i}{i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1.$$

Ta

có:

$$T = |z^2 - wz - 4| = |z^2 - wz - |z|^2| = |z^2 - wz - z \cdot \bar{z}| = |z| \cdot |z - \bar{z} - w| = 2|z - \bar{z} - w|$$

(*)

Đặt $z = a + bi$. Suy ra: $z - \bar{z} = 2bi$. Vì $|z| = 2$ nên $-4 \leq 2b \leq 4$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w và $2bi$. Suy ra:

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-5; -2)$, bán kính $R = 1$.

+ B thuộc trục Oy và $-4 \leq x_B \leq 4$.

Từ (*) suy ra: $T = 2AB \geq 2MN = 2 \cdot 4 = 8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv M(-4; -2) \Rightarrow w = -4 - 2i$ và

$$B \equiv N(0; -2) \Rightarrow 2bi = -2i \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = a - i \Rightarrow a^2 + 1 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{3} - i.$$

Vậy $|z^2 - wz - 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Cách 2:

Đặt $z = a + bi, w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (c+5)^2 + (d+2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \in [-2; 2] \\ c \in [-6; -4], d \in [-3; -1] \end{cases}$$

Ta có:

$$T = |z^2 - wz - 4| = |z^2 - wz - |z|^2| = |z^2 - wz - z \cdot \bar{z}| = |z| \cdot |z - \bar{z} - w| = 2|z - \bar{z} - w|$$

$$\Rightarrow T = 2|2bi - (c + di)| = 2\sqrt{(2b - d)^2 + c^2} \geq 2\sqrt{c^2} = 2|c| \geq 2 \cdot 4 = 8.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} c = -4 \\ 2b - d = 0 \\ (c+5)^2 + (d+2)^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra một nghiệm thỏa mãn là } \begin{cases} c = -4 \\ d = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $|z^2 - wz - 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 4: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$

- A. $\sqrt{313}$. B. $\sqrt{313} + 8$. C. $\sqrt{313} + 16$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

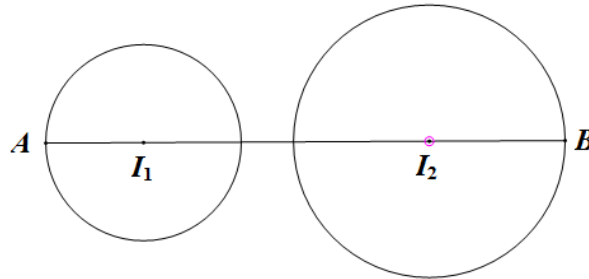
Chọn C

$$\text{Ta có } |z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4(1)$$

$$|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12 \quad (2)$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$, bán kính $R_2 = 12$



$$\text{Ta có } T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$$

$$\text{Vậy } \max T = \sqrt{313} + 16.$$

Câu 5: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $6\sqrt{2}$.

Lời giải

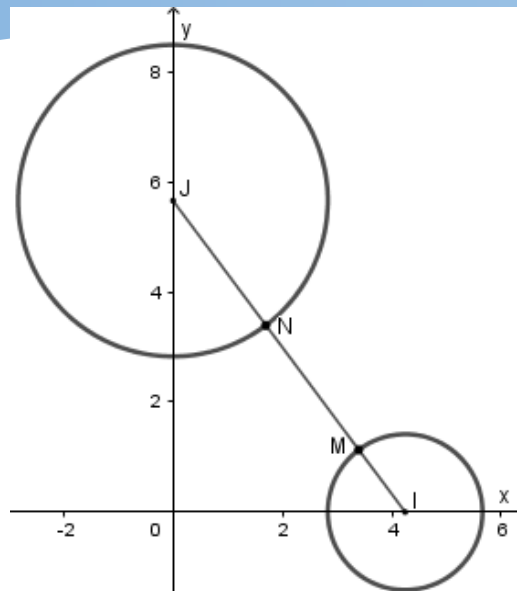
Chọn D

Ta có: $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

$|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min |z - w| = \min MN$.

$$+ IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}.$$



Mặt khác

$$IM + MN + NJ \geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ \Rightarrow MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}.$$

Do đó

$$|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})| = |2\overrightarrow{OI}| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Câu 6: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + i| = 1$ và $z_2 = 2iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$.

A. $P_{\min} = 2 - \sqrt{2}$. B. $P_{\min} = 8 - \sqrt{2}$. C. $P_{\min} = 2 - 2\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

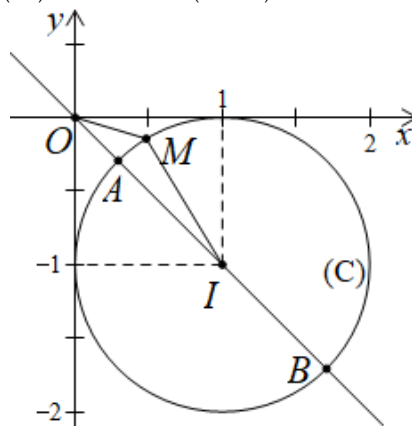
Chọn D

$$\text{Từ } z_2 = 2iz_1 \text{ ta được } P = |2z_1 - z_2| = |2z_1 - 2iz_1| = |(2 - 2i)z_1| = |2 - 2i| \cdot |z_1| = 2\sqrt{2} \cdot |z_1|$$

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z_1 .

$$\text{Từ giả thiết } |z_1 - 1 + i| = 1 \text{ ta được } |(a - 1) + (b + 1)i| = 1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 1.$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 1$.



Ta có $P = 2\sqrt{2}|z_1| = 2\sqrt{2}.OM$ nên P đạt giá trị nhỏ nhất khi OM là nhỏ nhất

Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm giữa O và I .

Ta có $OM + MI \geq OI \Leftrightarrow OM + MI \geq OA + AI \Leftrightarrow OM \geq OA$

Nên OM nhỏ nhất bằng OA khi $M \equiv A$ và $OM = OI - R = \sqrt{2} - 1$.

Khi đó $P_{\min} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = |z + 1| + |z - 1| + |z - \sqrt{3}i|$ bằng

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{32}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn của z , $A(-1;0)$,

$B(1;0)$, $C(0;\sqrt{3})$.

Khi đó $M \in (C): x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ có

tâm $I\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ và A, B ,

$C \in (C)$, $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Ta có:

$$P = |z + 1| + |z - 1| + |z - \sqrt{3}i| = MA + MB + MC.$$

Giả sử M thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$. Lấy $E \in MC$ sao cho $ME = MA$.

Vì $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle AME$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow AM = AE \text{ và } \widehat{MAE} = 60^\circ$$

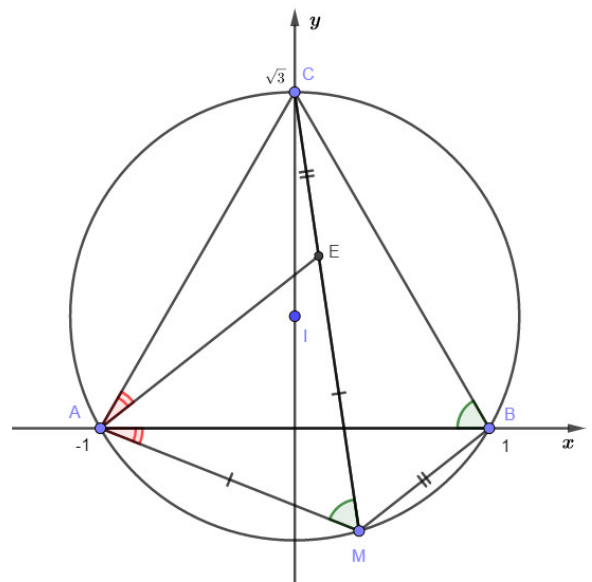
$$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{BAM} \Rightarrow \triangle CAE = \triangle BAM (c.g.c) \Rightarrow EC = MB.$$

$$\text{Do đó: } P = |z + 1| + |z - 1| + |z - \sqrt{3}i| =$$

$$MA + MB + MC = ME + EC + MC = 2MC.$$

$$P_{\max} \Leftrightarrow MC \text{ có độ dài lớn nhất} \Leftrightarrow MC \text{ là đường kính của đường tròn } (C).$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 2MC = 2.2R = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$



Tương tự M thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}, \widehat{AC}$ thì $P_{Max} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow M$ lần lượt là điểm chính

giữa cung nhỏ $\widehat{BC}, \widehat{AC}$.

$$\text{Vậy } P_{Max} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Câu 45: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực (a, b) sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{TH1: } z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \text{ ta có } z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a = \frac{9}{2} \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } z_1, z_2 \notin \mathbb{R}, \text{ đặt } z_1 = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 = x - yi$$

$$\text{Ta có } z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow x + yi + 2i(x - yi) = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy có 3 cặp số (a, b) thỏa mãn.

NHẬN XÉT

Đây là dạng toán tương tự đã được gặp trong đề Tốt nghiệp THPT năm 2020, lỗi phổ biến khi giải bài toán là xét thiếu trường hợp dẫn đến kết quả là 1 và 2 cặp.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức $z_1; z_2$

thỏa mãn $|z_1 - 3 + 3i| = \sqrt{2}$ và $(z_1 + 2i)(z_2 - 2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b + c$ bằng:

A. -1.

B. 12.

C. 4.

D. -12.

Lời giải

Chọn C

$$\text{TH 1: } z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \text{ khi đó } |z_1 - 3 + 3i| = \sqrt{(z_1 - 3)^2 + 9} > \sqrt{2} \text{ mâu thuẫn với giả thiết.}$$

$$\text{TH 2: } z_1, z_2 \notin \mathbb{R}, \text{ đặt } z_1 = x + yi \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = x - yi.$$

$$\text{Ta có } |z_1 - 3 + 3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 2 \quad (1)$$

$$(z_1 + 2i)(z_2 - 2) = [x + (y + 2)i][(x - 2) - yi] = x^2 + y^2 - 2x + 2y + [(x - 2)(y + 2) - xy]i$$

$$\text{là một số thuần ảo khi và chỉ khi } x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2 - 2i; z_2 = 2 + 2i.$$

Vì vậy theo Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -b = 4 \\ z_1 \cdot z_2 = c = 8 \end{cases} \Rightarrow b + c = -4 + 8 = 4.$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = \sqrt{3}$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ (*) có $\Delta = -4a^2 + 8a + 3$.
Xét 2 trường hợp:

$$\text{TH1: } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \quad (1).$$

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo đề bài: } |z_0| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$* z_0 = -\sqrt{3}, \text{ thay vào phương trình (*) ta được } a^2 - 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$$

$$* z_0 = \sqrt{3}, \text{ thay vào phương trình (*) ta được } a^2 - 2a + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (1) suy ra $a = 2$.

$$\text{TH2: } \Delta < 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \\ a > \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \quad (2).$$

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm phức z_0 thì $\bar{z}_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (*).

$$\text{Ta có } z_0 \cdot \bar{z}_0 = a^2 - 2a \Leftrightarrow |z_0|^2 = a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (2) suy ra $a = 3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a = 2; a = 3$.

Câu 3: Trên tập số phức, xét phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thỏa mãn $|z| = 1$ là

A. 20.

B. 12.

C. 14.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$9z^2 + 6z + 1 - m = 0 \quad (*). \quad \Delta' = 9 - 9(1 - m) = 9m$$

$$\text{TH 1: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ Khi đó } |z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

$$* z = 1 \Rightarrow m = 16.$$

* $z = -1 \Rightarrow m = 4$.

TH 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Đặt $z = a + bi$ ($b \neq 0$)

Khi đó, $z, \bar{z}$ là các nghiệm của phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$.

Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-m}{9} = 1 \Leftrightarrow m = -8$.

Vậy tổng cần tìm bằng 12.

Câu 46: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị $-1; 2; 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

- A. $\frac{32}{3}$. B. $\frac{71}{9}$. C. $\frac{64}{9}$. D. $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ có bậc 4 có ba điểm cực trị là $-1; 2; 3$. Do đó $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 4 = 4a(x+1)(x-2)(x-3)$
 $\Rightarrow h'(0) = 24a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \Rightarrow h'(x) = \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

$$S = \int_{-1}^3 [f'(x) - g'(x)] dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^3 (x+1)(x-2)(x-3) dx = \frac{71}{9}.$$

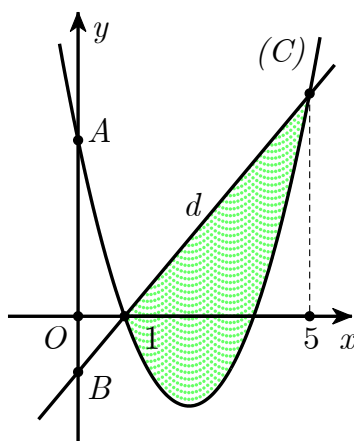
NHẬN XÉT

Đây là dạng toán tương tự đã được gặp trong đề THPT quốc gia năm 2018, điểm mấu chốt của bài toán là phân tích $f'(x) - g'(x) = 4a(x+1)(x-2)(x-3)$ để tìm a qua $h'(0)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = mx + n$ có đồ thị lần lượt là đường cong (C) và đường thẳng d (như hình vẽ). Biết $AB = 5$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C)

và đường thẳng d (phần tô màu) là $S = \frac{p}{q}$ (trong đó $p, q \in \mathbb{N}^*$; $(p; q) = 1$). Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $p - q = 20$. B. $p > 11q$. C. $pq = 69$. D. $p + q = 35$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(0; c) \in (C)$, $B(0; n) \in d$ và $AB = 5 \Leftrightarrow c - n = 5$ ($c > n$)

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c-n = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + 5 = 0 (*)$$

Lại có hoành độ giao điểm của (C) và d là $x=1$ và $x=5$

nên $(*)$ có dạng $a(x-1)(x-5) = 0$

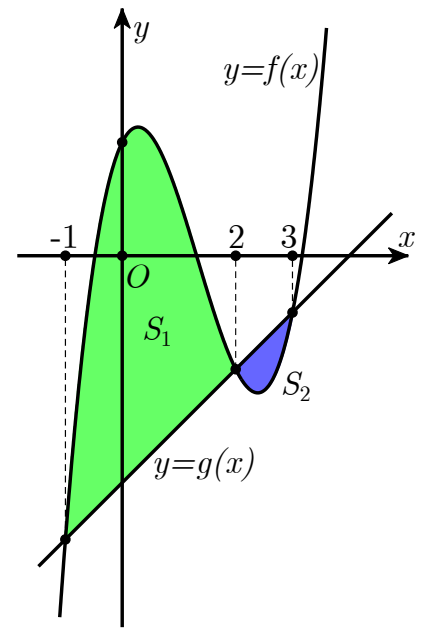
Đồng nhất hệ số ta được $a=1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d là

$$S = \int_1^5 |(x-1)(x-5)| dx = \int_1^5 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{32}{3}$$

Suy ra $p = 32, q = 3 \Rightarrow p + q = 35$.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx + n$ ($a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ $-1; 2; 3$ (tham khảo hình vẽ phía bên dưới); đồng thời diện tích $S_1 = 45$ (phần hình phẳng tô màu xanh). Tính diện tích S_2 (phần hình phẳng tô màu đỏ).



A. $S_2 = \frac{7}{3}$.

B. $S_2 = \frac{7}{12}$.

C. $S_2 = \frac{128}{3}$.

D. $S_2 = \frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a(x+1)(x-2)(x-3) = 0$

$$\text{Có } S_1 = \int_{-1}^2 a(x+1)(x-2)(x-3) dx = 45 \Leftrightarrow \frac{45}{4}a = 45 \Leftrightarrow a = 4.$$

$$\text{Vậy } S_2 = -\int_2^3 4(x+1)(x-2)(x-3) dx = \frac{7}{3}.$$

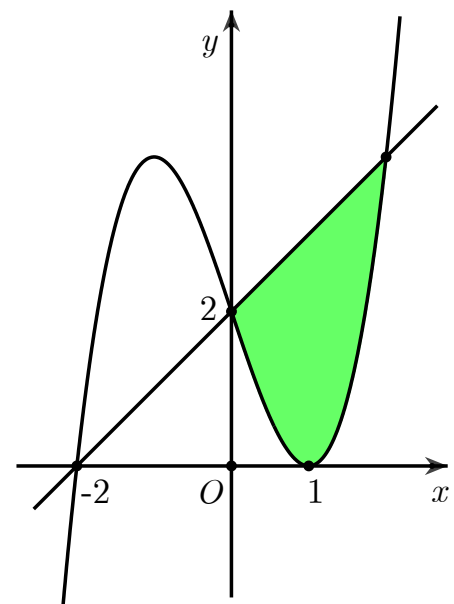
Câu 3: Hình phẳng được tô màu ở trong hình vẽ bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số bậc 3 với một đường thẳng Δ cùng với trục hoành và trục tung. Diện tích hình phẳng đó bằng

A. 4.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 2



Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có:

+ Giao với Oy tại điểm có tung độ bằng

$$2 \Rightarrow d = 2$$

+ Đi qua điểm $(1;0) \Rightarrow a + b + c = -2$

+ Đi qua điểm $(-2;0) \Rightarrow -8a + 4b - 2c = -2 \Rightarrow -4a + 2b - c = -1$

+ Có $x=1$ là điểm cực trị của hàm số nên là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Từ đó $a = 1; b = 0; c = -3$

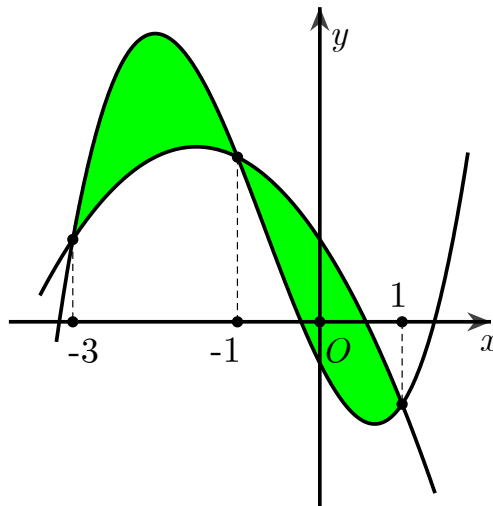
Vậy hàm số bậc ba là: $y = x^3 - 3x + 2$

Ta có đường thẳng đi qua hai điểm $(-2;0); (0;2)$ là $y = x + 2$

Giao điểm của hai đồ thị là $x = -2; x = 0; x = 2$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn với hai đồ thị trên là: $S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = 4$

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5

B. $\frac{9}{2}$

C. 8

D. 4

Lời giải

Chọn D

Từ giao điểm hai đồ thị ta có $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-d)x - \frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do đó $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng $S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = f(dx + e)$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 4,5.

B. 4,25.

C. 3,63.

D. 3,67.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị suy ra $f(x) = a(x - 3)^2 \cdot x$ và $f(1) = 4 \Rightarrow a = 1$
 $\Rightarrow f(x) = (x - 3)^2 x$

$g(x)$ là hàm số bậc ba nên $g(x) = m(x - \frac{3}{2})^2(x - 3)$ và

$g(1) = 4 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow g(x) = -8(x - \frac{3}{2})^2(x - 3)$

Vậy $S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{9}{2} = 4,5$

Câu 6: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ và $g(x) = dx^2 + ex - 1$ với $a; b; c; d; e$ là các số thực. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{27}{12}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f(x) - g(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + 1) - (dx^2 + ex - 1) = ax^3 + (b - d)x^2 + (c - e)x + 2$$

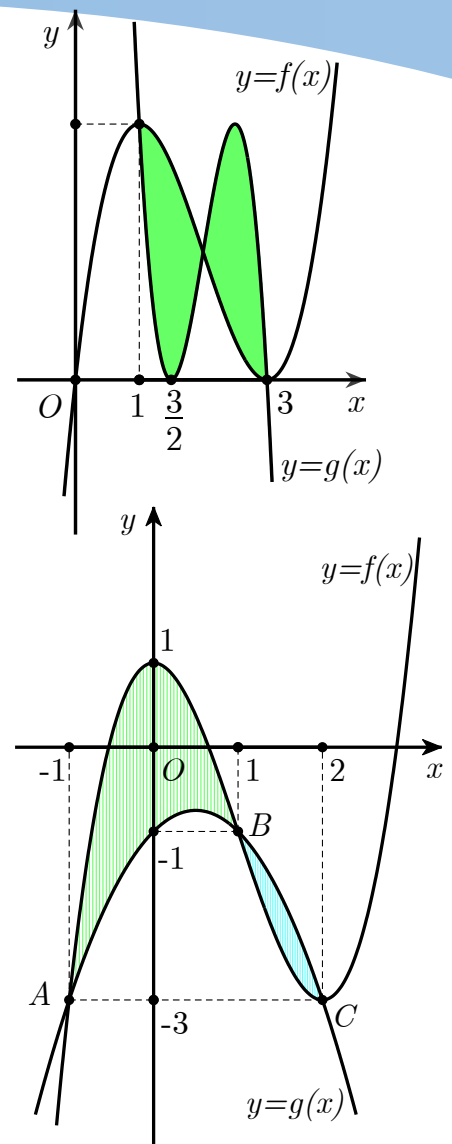
Vì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ có ba nghiệm là $-1; 1; 2$.

Kết hợp với điều kiện giả thiết suy ra $f(x) - g(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

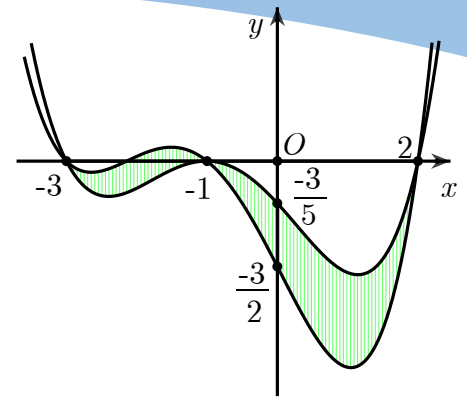
Đồng nhất hệ số tự do hai dạng biểu thức $f(x) - g(x)$ ta được $2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $f(x) - g(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx = \frac{37}{12}$.



Câu 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11.

B. 2,45.

C. 3,21.

D. 2,95

Lời giải

Chọn A

Tại điểm có hoành độ $x = -3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.

$$\text{Có } f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-2).$$

$$\text{Mà } f(0) - g(0) = \frac{-3}{5} - \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{10} \Rightarrow a \cdot 9 \cdot 1 \cdot (-2) = \frac{9}{10} \Rightarrow a = \frac{-1}{20}.$$

$$\text{Vì vậy } S_{(H)} = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| -\frac{1}{20}(x+3)^2(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{3733}{1200} \approx 3,11.$$

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng phần diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số bằng 4. Tính phần diện tích S_2 giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.

A. $S_2 = 4$.

B. $S_2 = 2$.

C. $S_2 = 1$.

D. $S_2 = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hai hàm số ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1, 1, 3$ nên

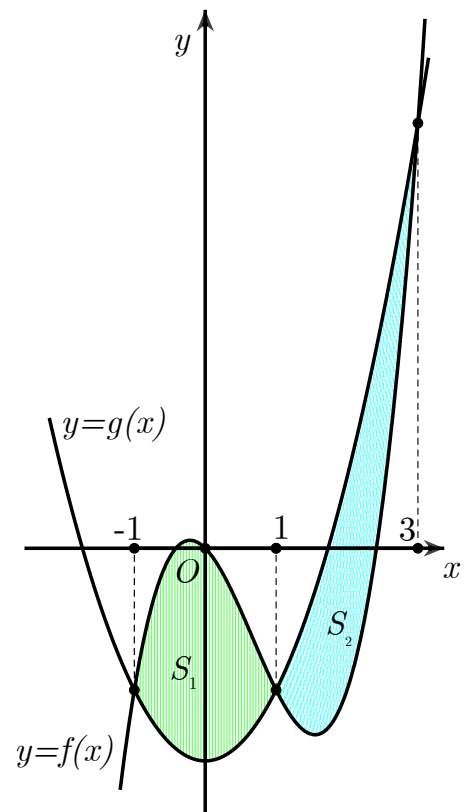
$$f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) \text{ và } a > 0.$$

Mặt khác diện tích

$$S_1 = 4 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 a(x+1)(x-1)(x-3) dx = 4 \Leftrightarrow a = 4$$

Từ đó suy ra

$$S_2 = \int_1^3 (g(x) - f(x)) dx = - \int_1^3 4(x+1)(x-1)(x-3) dx = 4$$



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là

m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x)dx$ bằng

- A.** $m - n + p + \frac{211}{45}$. **B.** $m - n + p + \frac{208}{45}$. **C.** $m - n + p + \frac{24}{5}$. **D.** $m - n + p + \frac{26}{5}$.

Lời giải

Chọn B

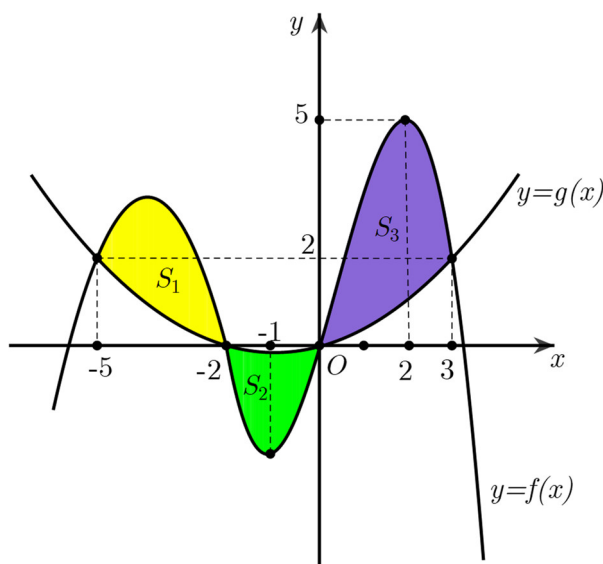
Đồ thị hàm $y = g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(-2;0), B(3;2)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \\ 9a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{15} \\ b = \frac{4}{15} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{4}{15}x.$$

$$m - n + p = \int_{-5}^{-2} [f(x) - g(x)] dx - \int_{-2}^0 [g(x) - f(x)] dx + \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_{-5}^3 f(x) dx - \int_{-5}^3 g(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^3 f(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^3 g(x) dx = m - n + p + \frac{208}{45}$$



Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm

$A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

S có tâm $I(3; 2; -1)$ bán kính $R = 1$.

Vì $IM \perp (MAB) \Rightarrow IM \perp MA, IM \perp MB$ nên

$$MA^2 = IA^2 - IM^2 = (a-3)^2 + 4; MB^2 = IB^2 - IM^2 = (b-2)^2 + 9.$$

Ta lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + 4 + (b-2)^2 + 9 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3a + 2b = 13.$$

Mà $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên có hai cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là $(1; 5), (3; 2)$.

Nhận xét:

Ta có thể dựa theo tính chất (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) để xây dựng các bài toán tương tự và bài toán tổng quát (Nếu (S) cắt (Oxy) hoặc (S) không cắt (Oxy) thì sao nhỉ?).

Bài toán tổng quát:

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z+c)^2 = c^2$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm

$A(m; 0; 0), B(0; n; 0)$ mà m, n là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

Từ cách giải như trên ta đi đến phương trình $am + bn = a^2 + b^2$ (1).

Gọi $d = (a; b), a = a_1d; b = b_1d$ thì $(a_1; b_1) = 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow a(x-a) = b(b-y) \Leftrightarrow a_1d(x-a) = b_1d(b-y) \Leftrightarrow a_1(x-a) = b_1(b-y) \quad (2).$$

Khi đó $(x-a):b_1$. Đặt $x-a = b_1t \Rightarrow x = a + b_1t \Rightarrow t > \frac{-a}{b_1}$

Từ (2) ta lại có $a_1b_1t = b_1(b-y) \Leftrightarrow a_1t = b-y \Rightarrow y = b-a_1t > 0 \Rightarrow t < \frac{b}{a_1}$.

Như vậy chỉ cần xác định số giá trị nguyên của $t \in \left(-\frac{a}{b_1}; \frac{b}{a_1}\right)$ là xong.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (3 - m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 22.

B. 21.

C. 25.

D. 24.

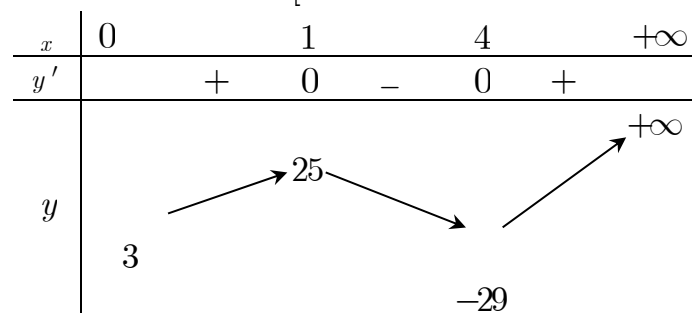
Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt
 $\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 = m$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3$

Ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$. Ta có BBT



Từ BBT suy ra $3 < m < 25 \Rightarrow m \in \{4; 5; \dots; 24\} \Rightarrow$ Có 21 giá trị m thỏa mãn.

NHẬN XÉT:

Đây là dạng toán quen thuộc có xuất hiện trong nhiều đề thi. Ta có thể xét bài toán tổng quát như sau: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) f_1(x)$$

với $f_1(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (hoặc $f_1(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$) và $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Hỏi hàm số $y = g(x) = f(|x + m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có

$$g'(x) = \frac{x + m}{|x + m|} (|x + m| - x_1)(|x + m| - x_2) \dots (|x + m| - x_n) f_1(|x + m|).$$

+) Nếu $x_n < 0$ thì $|x + m| - x_i > 0, \forall x \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$. Do đó, hàm $y = g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị là $x = -m$.

+) Nếu có $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ sao cho $x_k = 0$ thì

$$g'(x) = (x + m)(|x + m| - x_1) \dots (|x + m| - x_{k-1})(|x + m| - x_{k+1}) \dots (|x + m| - x_n) f_1(|x + m|)$$

$$|x + m| - x_i > 0, \forall x \in \mathbb{R}, i < k.$$

$$|x + m| - x_j = 0 \Leftrightarrow x = \pm x_j - m, \text{ với } k + 1 < j \leq n.$$

Khi đó, hàm $g(x)$ có $2(n - k) + 1$ điểm cực trị là $-m; \pm x_{k+1} - m; \dots; \pm x_n - m$.

- +) Nếu có $k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$ sao cho $x_k < 0 < x_{k+1}$ thì làm tương tự trên ta được hàm $g(x)$ có $2(n-k)+1$ điểm cực trị là $-m; \pm x_{k+1} - m; \dots; \pm x_n - m$.
- + Nếu $x_1 > 0$ làm tương tự trên ta được hàm $g(x)$ có $2n+1$ điểm cực trị.

Kết luận: Số cực trị của $g(x)$ phụ thuộc vào số giá trị $x_k (k = \overline{1; n})$ không âm mà không phụ thuộc vào m .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $\frac{5}{4} < m < 2$. B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$. C. $-\frac{5}{4} < m < 2$. D. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$

Ycbt $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4 (x-m)^5 (x+3)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-5; 5]$ để số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là 3?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m > 0$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-5; 5]$ nên m nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?

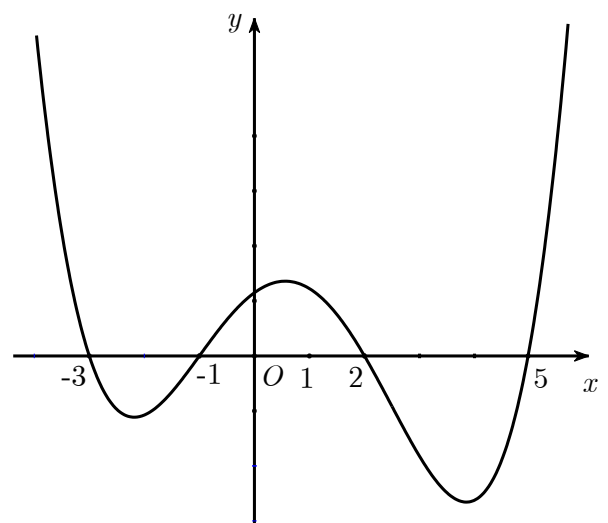
- A. 2. B. 3.
C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = f(|x| + m) = \begin{cases} f(x+m), & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x+m), & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$



Và ta lại có $g(-x) = f(|x| + m) = g(x) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục Oy .

Hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } y = f'(x), \text{ ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta được $g(x) = f(x + m)$

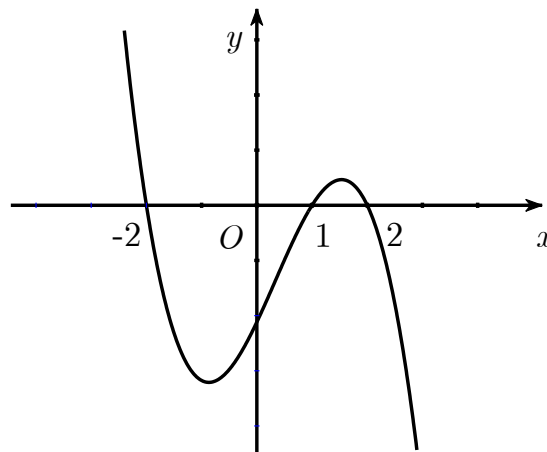
+ Ta có $g'(x) = f'(x + m)$

$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + m = -3 \\ x + m = -1 \\ x + m = 2 \\ x + m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 3 \\ x = -m - 1 \\ x = -m + 2 \\ x = -m + 5 \end{cases}$$

+ Nhận thấy $-m - 3 < -m - 1 < -m + 2 < -m + 5$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 0 \\ -m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \{-3; -2\} \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có 5 điểm cực trị.



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị có hoành độ là $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$ trong đó hai điểm nằm bên phải và một điểm nằm bên trái trục tung, mà hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow y = f(|x|)$ có năm điểm cực trị $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

Đồ thị hàm số $y = f(|x + m|)$ là ảnh của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (-m; 0)$ suy ra số điểm cực trị của chúng bằng nhau với mọi giá trị của tham số m .

Vậy hàm số $y = f(|x + m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi giá trị của tham số m .

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+) $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3 = 0$.

+) Hàm $g(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do đó hàm $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có nghiệm kép dương khác 1 (*) hoặc phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khác 1 (**).

$$\text{Giải (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m-5)^2 - 4(m^2 - 7m + 6) = 0 \\ 0 < \frac{-(4m-5)}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} \notin \mathbb{Z}.$$

$$\text{Giải (**)} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ 1 + (4m-5) + m^2 - 7m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1; 6) \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + (m+3).$$

+) Trường hợp 1: $m = 1$

Khi đó hàm số trở thành $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$. Hàm số có một điểm cực đại là $x = \frac{2}{5}$ khi đó

hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị: $x = -\frac{2}{5}; x = 0; x = \frac{2}{5}$ nên nhận $m = 1$.

+) Trường hợp 2: $m \neq 1$. Hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$ có 2 cực trị thỏa $0 = x_1 < x_2$.

Khi đó $x=0$ là nghiệm của phương trình: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = -3$ khi $m = -3$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị: $x = 0; x = -\frac{5}{6}$.

Khi đó hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị: $x=0$, loại $m=-3$.

+) Trường hợp 3: $m \neq 1$ Hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$ có 2 cực trị thỏa $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $(m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 7: Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(|x^3|)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	-	0	+	

A. 3.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x^3)$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = a \\ x^3 = b \\ x^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{b} \\ x = \sqrt[3]{c} \end{cases}$.

Ta thấy, dấu của hàm số $h'(x)$ chính là dấu của hàm số $f'(x^3)$.

Mặt khác hàm số $y = x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'(x^3)$ trên mỗi khoảng $(m; n)$ chính là dấu của hàm số $f'(x)$ trên mỗi khoảng $(m^3; n^3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$										

Chú ý rằng $g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ h(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được

bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{c}$	$-\sqrt[3]{b}$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$												

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 5.