SỞ GD & ĐT ĐIỆN BIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 3
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn: TOÁN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=8$. Khi đó tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(3;-1;-2), R=4$ **B.** $I(3;-1;-2), R=2\sqrt{2}$

C. $I(-3;1;2), R=2\sqrt{2}$ **D.** $I(-3;1;2), R=4$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải:

Mặt cầu $(S):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ có tâm $I(x_0;y_0;z_0)$, bán kính R

giải:

Ta có $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=8$ có tâm $I(3;-1;-2)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	5	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-6=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải:

Dựa vào bảng biến thiên, xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$

giải:

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(x)=6>5$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(3;4;-2), C(0;1;-1)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

A. $\vec{n}(-1;-1;1)$ **B.** $\vec{n}(1;1;-1)$ **C.** $\vec{n}(-1;1;0)$ **D.** $\vec{n}(-1;1;-1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải:

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng chính là tọa độ vectơ tích có hướng

giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;-1;0)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-1;1;0)$

Câu 4: Ba số $1, 2, -a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi $ac=b^2$

giải:

Vì ba số $1,\ 2, -a$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Rightarrow 1.a=(-2)^2 \Leftrightarrow a=4$

Câu 5: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$

A. $\log\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln 6$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải:Nguyên hàm cơ bản của hàm phân thức hoặc bấm máy tính

giải: Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

Câu 6: Số cách chọn ra 3 học sinh từ 10 học sinh là

A. A_{10}^3 **B.** A_{10}^7 **C.** P_3 **D.** C_{10}^3

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Chọn ngẫu nhiên k phần tử trong n phần tử là tổ hợp chập k của n

giải:

Chọn 3 học sinh từ 10 học sinh là một tổ hợp chập 3 của 10 phần tử $\Rightarrow$ có C_{10}^3 cách.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Dựa vào định nghĩa điểm cực trị của hàm số và bảng biến thiên

giải:

Vì y' đổi dấu từ $+ \longrightarrow -$ khi đi qua $x = 2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

B. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C$

C. $\int \sin 2x dx = \frac{\cos 2x}{2} + C$

D. $\int \sin 2x dx = 2\cos 2x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Dựa vào bảng nguyên hàm cơ bản của hàm số lượng giác

giải: Ta có $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính môđun của số phức z

A. $|z| = 34$ **B.** $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$ **C.** $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z| = \sqrt{34}$

Hướng dẫn giải

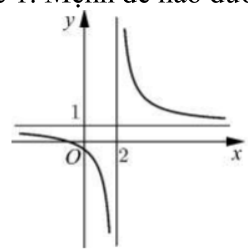
Chọn D

Phương pháp giải:

Tìm số phức z bằng phép chia số phức, sau đó tính môđun hoặc bấm máy tính

giải: Ta có $z(2-i)=1-13i \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=3+5i \Rightarrow |z|=\sqrt{34}$

Câu 10: Cho a, b, c là ba số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng



A. $\log_a\left(\dfrac{b}{a^3}\right)=\log_a b-3$ **B.** $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b$

C. $a^{\log_b c}=b$ **D.** $\log_a b=\log_b c.\log_c a$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức cơ bản của biểu thức chứa lôgarit

giải:

Ta có: $\log_a\left(\dfrac{b}{a^3}\right)=\log_a b-\log_a a^3=\log_a b-3$ và $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

Câu 11: Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $y'>0,\forall x\neq 1$ **B.** $y'>0,\forall x\neq 2$ **C.** $y'<0,\forall x\neq 1$ **D.** $y'<0,\forall x\neq 2$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Dựa vào hình dáng, đường tiệm cận đồ thị hàm số

giải: Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và đi xuống

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)\Rightarrow y'<0,\forall x\neq 2$

Câu 12: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đó và các đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$. Diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$ **B.** $S=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$

C. $S=\left|\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$ **D.** $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

giải:

Diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức là $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

Câu 13: Tìm số các nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-2x}\geq\dfrac{1}{125}$

A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn B
Phương pháp giải: Áp dụng phương pháp giải bất phương trình mũ cơ bản
Giải:

Ta có $2\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

Suy ra số nghiệm nguyên dương của bất phương trình là $\{1;2;3\}$

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng

A. Hàm số đồng biến trong các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trong các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C
Phương pháp giải:
Dựa vào bảng biến thiên, xác định khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số
Giải:
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-3)$. Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $A'(-2;1;3)$ **B.** $A'(2;-1;-3)$ **C.** $A'(2;1;-3)$ **D.** $A'(-2;1;-3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D
Phương pháp giải:
Xác định tọa độ hình chiếu trên mặt phẳng và lấy trung điểm ra tọa độ điểm đối xứng
Giải:
Hình chiếu của $A(2;1;-3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;1;-3)$

Mà H là trung điểm của AA' suy ra tọa độ điểm $A'(-2;1;-3)$

Câu 16: Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{2}$ và độ dài đường sinh $l=3$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

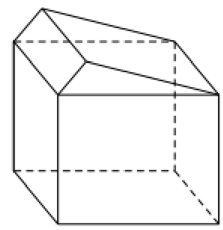
A. $S_{xq}=2\pi$ **B.** $S_{xq}=3\pi\sqrt{2}$ **C.** $S_{xq}=6\pi$ **D.** $S_{xq}=6\pi\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B
Phương pháp giải: Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl$

Giải: Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl=3\pi\sqrt{2}$

Câu 17: Khối đa diện sau có bao nhiêu mặt?



A. 9 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 10

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Đếm các mặt của khối đa diện

Giải: Khối đa diện trên hình vẽ có tất cả 9 mặt

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = 2m$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (0; +\infty)$ **B.** $m \in (0; +\infty) \cup \{-1\}$

C. $m \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$ **D.** $m \in (0; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Phương trình có nhiều nhất n nghiệm thì xảy ra các trường hợp có n nghiệm, có n – 1 nghiệm, … , vô nghiệm, dựa vào bảng biến thiên để biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số

Giải:

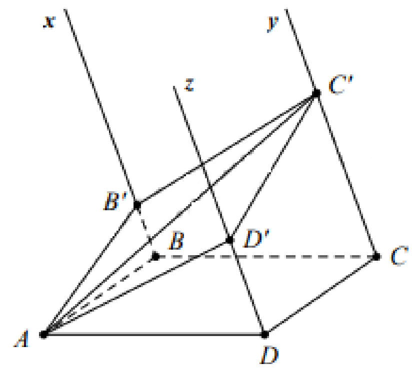
TH1. Phương trình $f(x) = 2m$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m > 0 \\ 2m = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

TH2. Phương trình $f(x) = 2m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \in \varnothing$

TH3. Phương trình $f(x) = 2m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow 2m < -1 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình $f(x) = 2m$ có nhiều nhất 2 nghiệm khi và chỉ khi $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (0; +\infty)$

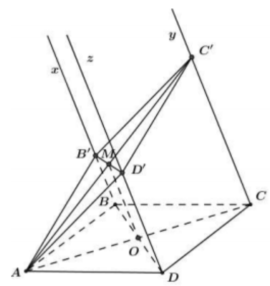
Câu 19: Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A, cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D'. Biết $BB' = 2, DD' = 4$. Tính CC'.



A. 2 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn C



Phương pháp giải: Gọi điểm, dựa vào các yếu tố song song, đưa về bài toán trong hình thang và tam giác

Giải:

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

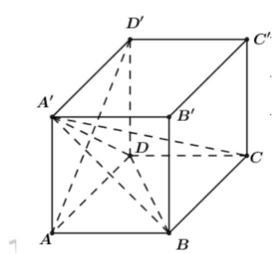
Và M là trung điểm của B’D’.

Hình thang $BB'D'D$ có đường trung bình là OM

$$\Rightarrow OM = \frac{BB' + DD'}{2} = 3$$

Tam giác ACC′ có OM là đường trung bình $\Rightarrow \frac{OM}{CC'} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CC' = 6$

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?



A. $(A'BD)$ **B.** $(A'CD')$ **C.** $(A'DC')$ **D.** $(A'B'CD)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Dựng hình, xét các mặt phẳng vuông góc

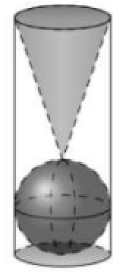
Giải:

Ta có $\begin{cases} A'D \perp AD' \\ A'D \perp C'D' \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$

Và $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.

Suy ra $AC' \perp (A'BD)$

Câu 21: Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy. Một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta thả từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh) .



A. $\frac{5}{9}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Tính tổng thể tích khối nón và khối cầu chính là thể tích nước tràn ra ngoài

Giải:

Gọi R, h, lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ $\Rightarrow h = 3.2.R = 6R$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi R^2.6R = 6\pi R^3$

Thể tích của viên bi trong hình trụ là $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích của khối nón trong hình trụ là $V_N = \frac{1}{3}\pi R^2 h_N = \frac{\pi R^2}{3}(h - 2R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Khi đó, thể tích nước bị tràn ra ngoài là $V_1 = V_c + V_N = 2.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$

Vậy tỉ số cần tính là $T = \frac{V - V_1}{V} = \left(6\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3\right) : 6\pi R^3 = \frac{5}{9}$

Câu 22: Trong khai triển $(1+3x)^{20}$ với số mũ tăng dần, hệ số của số hạng đứng chính giữa là

A. $3^{11}C_{20}^{11}$ **B.** $3^{12}C_{20}^{12}$ **C.** $3^{10}C_{20}^{10}$ **D.** $3^{9}C_{20}^{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Khai triển với số mũ n là số chẵn thì số hạng chính giữa là $\frac{1+n}{2}$

Giải: Xét khai triển $(1+3x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k}.1^{20-k}.(3x)^k = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k}.3^k.x^k$

Số hạng đứng chính giữa của khai triển ứng với $k = \frac{1+21}{2} = 11$

Vậy hệ số của số hạng cần tìm là $3^{11}C_{20}^{11}$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và vuông góc với mặt phẳng (α).

A. $x+y-z+2=0$ **B.** $2x-3y-z+7=0$

C. $x+y+2z-4=0$ **D.** $2x-3y-z-7=0$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải:

Ứng dụng của tích có hướng để tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Phương trình mặt phẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b;c): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Giải: Có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;-1); \overrightarrow{n_d}=(2;1;1)$

Vì $\begin{cases} d\subset(P) \\ (\alpha)\perp(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(P)} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_d;\vec{n}_{(\alpha)}\right]=(2;-3;-1)$

Mà d đi qua $M(-1;1;2)$ suy ra $M\in(P)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 2x-3y-z+7=0$

Câu 24: Số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-2|=|z|$ và $(z+1)(\bar{z}-i)$ là số thực. Giá trị của biểu thức $S=a+2b$ bằng bao nhiêu?

A. $S=-1$ **B.** $S=1$

C. $S=0$ **D.** $(Q): x+2y+z-4=0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải:

Đặt $z=a+bi,$ thực hiện yêu cầu bài toán, chú ý số phức là số thực khi phần ảo bằng 0

Giải:

Ta có $|z-2|=|z| \Leftrightarrow |a+bi-2|=|a+bi| \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow a=1$

Khi đó $z=1+bi \Rightarrow \bar{z}=1-bi \Rightarrow (z+1)(\bar{z}-i)=(2+bi)\left[1-(b+1)i\right]=b^2+b+2-(b+2)i$ là số thực.

Khi và chỉ khi $b+2=0 \Leftrightarrow b=-2$

Vậy $S=a+2b=-3$

Câu 25: Biết $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T=a+b$

A. $T=7$ **B.** $T=10$ **C.** $T=6$ **D.** $T=8$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải:

Nhân liên hợp, bỏ mẫu số đưa về tìm nguyên hàm của hàm chứa căn thức cơ bản

Giải: Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right]\Big|_0^1=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

mặt khác $\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right)=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-2\right)\Rightarrow\begin{cases} a=8 \\ b=2 \end{cases}$

Vậy $T=a+b=8+2=10$

Câu 26: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt tại $x=x_0$. Giá trị x_0 bằng bao nhiêu?

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải: Khảo sát hàm số trên đoạn để tìm giá trị nhỏ nhất – giá trị lớn nhất

Giải:

Xét hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$ trên $[-1;2]$ có $f'(x)=6x^2+6x-12$

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$

Tính $f(-1)=15; f(1)=15; f(2)=6$

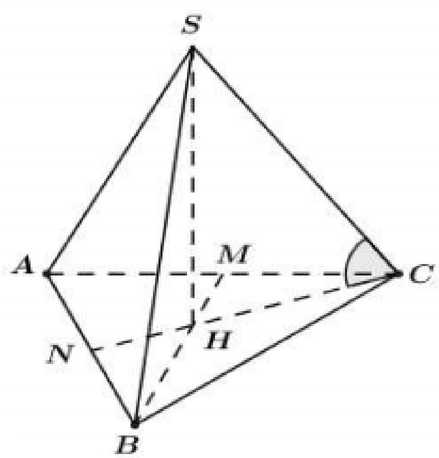
Do đó, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là -5. Xảy ra khi $x=1$

Câu 27: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $75°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương pháp giải: Dựng hình, xác định góc giữa cạnh bên và mặt đáy, đưa vào tam giác vuông tính góc

Giải: Vì S.ABC là hình chóp tam giác đều

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Suy ra CH là hình chiếu của SC trên (ABC)

$\Rightarrow (SC;(ABC))=(SC;CH)=SHC.$

Tam giác SCH vuông tại H ta có:

$\tan SCH=\dfrac{SH}{CH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}:\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=1 \Rightarrow SCH=45°$

Vậy góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x+y+z-5=0$ và $(Q): x+2y+z-4=0$. Khi đó, giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình là

A. $d:\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=6+t \end{cases}$ **B.** $d:\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=6-5t \end{cases}$ **C.** $d:\begin{cases} x=3t \\ y=-1+t \\ z=6+t \end{cases}$ **D.** $d:\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=6-5t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải:

Ứng dụng tích có hướng để tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng giao tuyến và giải hệ phương trình để tìm tọa độ giao điểm của hai mặt phẳng

Giải: Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;1), \overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;-2;1)$

Gọi d là giao tuyến của (P) và (Q).

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \\ \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (-1;-2;5)$

Xét hệ $\begin{cases} 3x+y+z-5=0 \\ x+2y+z-4=0 \end{cases}$, chọn $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y+z-5=0 \\ 2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow M(0;-1;6) \in d$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=6-5t \end{cases}$

Câu 29: Lớp 11B có 20 học sinh gồm 12 nữ và 8 nam. Cần chọn ra 2 học sinh của lớp đi lao động. Tính xác suất để chọn được 2 học sinh trong đó có cả nam và nữ.

A. $\frac{14}{95}$ **B.** $\frac{48}{95}$ **C.** $\frac{33}{95}$ **D.** $\frac{47}{95}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải: Áp dụng các quy tắc đếm cơ bản

Giải:

Chọn 2 học sinh trong 20 học sinh có $C_{20}^2 = 190 \Rightarrow n(\Omega) = 190$.

Gọi X là biến cố 2 học sinh được chọn trong đó có cả nam và nữ

Chọn 1 học sinh nam trong 8 nam có 8 cách, chọn 1 học sinh nữ trong 12 nữ có 12 cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố X là $n(X) = 8.12 = 96$.

Vậy $P = \frac{n(X)}{N(\Omega)} = \frac{48}{95}$

Câu 30: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1$

A. -6 **B.** 5 **C.** 12 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Mũ hóa, đặt ẩn phụ đưa về giải phương trình bậc hai để tìm nghiệm

Giải: Điều kiện: $3.2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\log_2 3$

Ta có $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 4^{x-1}$

$$\Leftrightarrow 12.2^x - 4 = 4^x \Leftrightarrow (2^x)^2 - 12.2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 6+4\sqrt{2} \\ 2^x = 6-4\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2(6+4\sqrt{2}) \\ x = \log_2(6-4\sqrt{2}) \end{array}\right.$$

Khi đó ta có: $x_1 + x_2 = \log_2(6+4\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = \log_2\left[(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})\right]$

$$= \log_2\left[6^2 - (4\sqrt{2})^2\right] = \log_2 4 = 2$$

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;-2)$. Lập phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz.

A. $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=25$ **B.** $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=4$

C. $(S):(x+3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=20$ **D.** $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=5$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Khoảng cách từ tâm đến trục Oz chính bằng bán kính R

Phương trình mặt cầu tâm $I(a,b,c)$ và bán kính $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Giải:

Phương trình trục Oz: $\begin{cases} x:0 \\ y=0, \overrightarrow{u_{Oz}}=(0;1;1) \\ z=t \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{OI}=(3;4;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OI};\overrightarrow{u_{Oz}}\right]=(4;-3;0)$

Khoảng cách từ tâm $I \longrightarrow Oz$ là $d(I;Oz)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OI};\overrightarrow{u_{Oz}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{Oz}}\right|}=\sqrt{3^2+4^2}=5=R$

Vì (S) tiếp xúc với trục Oz $\Rightarrow$ Phương trình cần tìm là $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=25$

Câu 32: Cho hàm số $y=x^4-4x^2+3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên trục tung từ đó có thể vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải: Lập phương trình tiếp tuyến với hệ số góc k và đi qua điểm thuộc Oy, sử dụng điều kiện để hai đồ thị tiếp xúc tìm tham số m

Giải:

Gọi $M(0;m) \in Oy \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của (C) có dạng $(d): y=kx+m$

Vì (C) tiếp xúc với $(d) \Rightarrow \begin{cases} x^4-4x^2+3=k \\ x^4-4x^2+3=kx+m \end{cases} \Leftrightarrow x^4-4x^2+3=(4x^3-8x)x+m$

$\Leftrightarrow m=\underbrace{-3x^4+4x^2+3}_{f(x)}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=f(x)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=-3x^4+4x^2+3$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=-12x^3+8x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y			$\frac{13}{3}$				$\frac{13}{3}$		$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	3	↗		↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để $m=f(x)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m=3$

Vậy có duy nhất 1 điểm $M \in Oy$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ -2ax+1 & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x=2$

A. $a=\dfrac{1}{2}$ **B.** $a=-1$ **C.** $a=1$ **D.** $a=2$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải: Áp dụng điều kiện để hàm số liên tục tại điểm

Giải:

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}(x+3) = 5; \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(1-2ax) = 1-4a$

Và $f(2) = (1-2ax)\big|_{x=2} = 1-4a$

Do đó, để hàm số liên tục tại điểm $x=2$ khi: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 5 = 1-4a \Leftrightarrow a = -1$

Câu 34: Tìm các giá trị của tham số *m* để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $[3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;3]$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Tính đạo hàm, áp dụng điều kiện để hàm số đồng biến trên khoảng

Giải: Ta có $y = -x^3 + mx^2 - m \Rightarrow y' = -3x^2 + 2mx, \forall x \in \mathbb{R}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 2mx \ge 0, \forall x \in (1;2)$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 2mx \ge 0 \Leftrightarrow 2m \ge 3x, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow 2m \ge 3.2 \Leftrightarrow m \ge 3$

Câu 35: Cho số phức *w* và hai số thực *a*, *b*. Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tìm giá trị $T = |z_1| + |z_2|$

A. $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ **B.** $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$ **C.** $T = 2\sqrt{13}$ **D.** $T = 4\sqrt{13}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Đặt số phức w, biến đổi về z và sử dụng hệ thức Viet cho phương trình bậc hai

Giải:

Đặt $w = m + ni\,(m,n \in \mathbb{R})$ suy ra $\begin{cases} z_1 = w + 2i = m + (n+2)i \\ z_2 = 2w - 3 = 2m - 3 + 2ni \end{cases}$

Ta có $z_1 + z_2 = 3m - 3 + (3n+2)i = -a$ là số thực $\Rightarrow \begin{cases} 3n + 2 = 0 \\ 3m - 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = m + \frac{4}{3}i \\ z_2 = 2m - 3 + \frac{4}{3}i \end{cases}$$

Lại có $z_1.z_2 = \left(m + \frac{4}{3}i\right)\left(2m - 3 + \frac{4}{3}i\right) = 2m^2 - 3m + \frac{16}{3} + \left(\frac{4}{3}m - 4\right) = b$ là số thực

$\Rightarrow \frac{4}{3}m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Vậy $\begin{cases} z_1 = 3 + \frac{4}{3}i \\ z_2 = 3 - \frac{4}{3}i \end{cases} \longrightarrow T = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{97}}{3}$

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

A. $m \in \left(0;\frac{1}{4}\right]$ **B.** $m \in \left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ **C.** $m \in \left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ **D.** $m \in (-\infty;0]$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải: Đặt ẩn phụ, cô lập tham số m, đưa về bài toán tương giao

Giải:

Ta có

$$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2-\log_{2^{-1}}x+m=0\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0$$

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\in(0;1)\Rightarrow t<0$

Khi đó $t^2+t+m=0\Leftrightarrow -m=t^2+t=f(t)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $(-\infty;0)$, có $f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

Tính $f(0)=0;f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4};\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=+\infty\longrightarrow$ Bảng biến thiên.

x	0		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, để $-m=f(t)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;0)\Leftrightarrow -m\ge-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$

Câu 37: Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% / tháng. Sau 6 tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9% / tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6% / tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép) . Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác Mạnh không rút tiền ra) .

A. 5436566,169 đồng **B.** 5436521,164 đồng

C. 5452733,453 đồng **D.** 5452771,729 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải: Áp dụng công thức lãi kép $T=A(1+m\%)^n$ cho từng giai đoạn

Giải:

Số tiền bác Mạnh có được sau 6 tháng gửi ngân hàng là $T_1=5(1+0,7\%)^6$ triệu đồng.

Số tiền bác Mạnh có được sau 3 tháng tiếp theo là $T_2=T_1\times(1+0,9\%)^3$ triệu đồng.

Số tiền bác Mạnh có được sau 3 tháng tiếp theo là $T_3=T_2\times(1+0,6\%)^3$ triệu đồng.

Vậy sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là $T_3=5452733,453$ đồng

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(5)$

A. $\frac{1}{2}\ln 2-1$ **B.** $\ln 2+1$ **C.** $\frac{1}{2}\ln 2+1$ **D.** $\ln 2-1$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải:

Tìm hàm số thông qua nguyên hàm, chia nhỏ trường hợp để xét các giá trị

Giải:

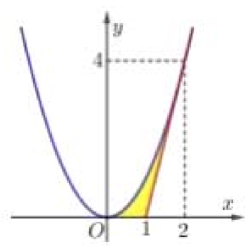
Ta có $f(x)=\int f'(x)=\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1 & \text{khi } x>1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+C_2 & \text{khi } -1<x<1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_3 & \text{khi } x<-1\end{cases}$

Suy ra $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$

Và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=0\Leftrightarrow C_2=1$

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(5)=\frac{1}{2}\ln 3+C_3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2+C_1=\frac{1}{2}\ln 2+1$

Câu 39: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một parabol và một đường thẳng tiếp xúc parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng (H) khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{32\pi}{5}$ **B.** $\frac{16\pi}{15}$ **C.** $\frac{22\pi}{5}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Chia làm các khối tròn xoay và lấy hiệu

Giải:

Vì (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(2;4)\Rightarrow$ Phương trình parabol là $(P): y=x^2$

Tiếp tuyến của (P) tại điểm $A(2;4)$ có phương trình là $d: y=4x-4$

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình: $x^2=4x-4\Leftrightarrow x=2$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H_1) giới hạn bởi $(P), y=0, x=0, x=2$ là

$$V_1=\pi\int_0^2 f^2(x)dx=\pi\int_0^2 x^4dx=\left.\frac{\pi x^5}{5}\right|_0^2=\frac{32\pi}{5}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H2) giới hạn bởi $(d), y=0, x=1, x=2$ là

$$V_2=\pi\int_0^2 g^2(x)dx=\pi\int_0^2 16(x-1)^2dx=\left.\frac{16\pi(x-1)^3}{3}\right|_1^2=\frac{16\pi}{3}$$

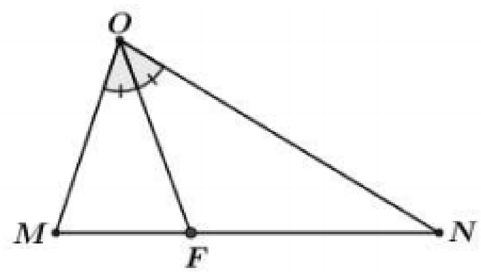
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=V_1-V_2=\frac{32\pi}{5}-\frac{16\pi}{3}=\frac{16\pi}{15}$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;2;1), N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right), E(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OMN và vuông góc với mặt phẳng (OMN). Khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng Δ là

A. $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ **B.** $\frac{3\sqrt{17}}{5}$ **C.** $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ **D.** $\frac{5\sqrt{17}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương pháp giải:
Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN bằng tính chất đường phân giác

Giải:

Ta có $\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right]=k\left(1;-2;2\right)\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của $\overrightarrow{OM}=\left(2;2;1\right)\Rightarrow OM=3$

$\overrightarrow{ON}=\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)\Rightarrow ON=4$

Kẻ phân giác OF $\left(F\in MN\right)$ ta có:

$\frac{OM}{ON}=\frac{MF}{NF}=\frac{3}{4}\Rightarrow\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FN}\Rightarrow F\left(0;\frac{12}{7};\frac{12}{7}\right)$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta OMN\Rightarrow I\in\left(OF\right)\Rightarrow\overrightarrow{OI}=k\overrightarrow{OF}$, với $k>0$

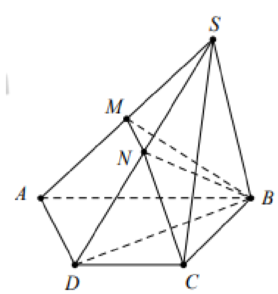
Tam giác OMN vuông tại O, có bán kính đường tròn nội tiếp $r=1\Rightarrow IO=\sqrt{2}$.

Mà $ME=\frac{15}{7};OM=3;\cos OMN=\frac{3}{5}\longrightarrow OF=\frac{12\sqrt{2}}{7}$ suy ra $\overrightarrow{OF}=\frac{12}{7}\overrightarrow{OI}\Rightarrow I\left(0;1;1\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ là $\left(\Delta\right):\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$, có $\vec{u}=\left(1;-2;2\right)$, đi qua $I\left(0;1;1\right)$

Khoảng cách từ E đến đường thẳng Δ là $d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{EI};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB//CD$, $AB=2CD$. Gọi M, N, tương ứng là trung điểm của SA và SD. Tính tỉ số $\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.BCDA}}$



A. $\frac{5}{12}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải: Sử dụng định lí Simson xét tỉ lệ thể tích các khối đa diện

Giải:

Chuẩn hóa $CD=1\Rightarrow AB=2$ và $h=d\left(D;\left(AB\right)\right)\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{h}{2}\left(AB+CD\right)=\frac{3}{2}h$

Diện tích tam giác DAB là $S_{ABD}=\frac{1}{2}d\left(D;\left(AB\right)\right).AB=h\Rightarrow S_{ACD}=\frac{h}{2}$

Ta có $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.BMN}=\frac{1}{4}V_{S.BAD}=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}V_{S.ABCD}=\frac{V_{S.ABCD}}{6}\left(1\right)$

Lại có $\frac{V_{S.BCN}}{V_{S.BCD}}=\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{S.BCN}=\frac{1}{2}V_{S.BCD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{V_{S.ABCD}}{6}\left(2\right)$

Lấy $\left(1\right)+\left(2\right)$, ta được $V_{S.BMN}+V_{S.BCN}=2.\frac{1}{6}V_{S.ABCD}\Leftrightarrow\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{3}$

Câu 42: Biết $M\left(-2;5\right),N\left(0;13\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax+b+\frac{c}{x+1}$. Tính giá trị của hàm số tại $x=2$

A. $-\frac{13}{3}$ **B.** $\frac{16}{9}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{47}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải: Sử dụng điều kiện để một điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số

Giải:

Ta có $y=ax+b+\frac{c}{x+1}\longrightarrow y'=ax-\frac{c}{\left(x+1\right)^2};\forall x\ne-1$

Vì $M\left(-2;5\right),N\left(0;13\right)$ là các điểm cực trị $\Rightarrow\begin{cases}y'\left(-2\right)=0\\y'\left(0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=0\\a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=c$

Và $\begin{cases}y\left(-2\right)=5\\y\left(0\right)=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b-c=5\\b+c=13\end{cases}$ mà $a=c\Rightarrow\begin{cases}a=c=2\\b=11\end{cases}\Rightarrow y\left(x\right)=2x+11+\frac{2}{x+1}$

Vậy $y\left(2\right)=2.2+11+\frac{2}{3}=\frac{47}{3}$

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=x^3-mx+1$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$

A. $m\ge0$ **B.** $m\le3$ **C.** $m\ge3$ **D.** $m\le0$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm, áp dụng điều kiện để hàm số đồng biến trên khoảng

Giải:

Ta có $y=x^3-mx+1\Rightarrow y'=3x^2-m;\forall x\in\mathbb{R}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\ge0;\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow3x^2-m\ge0\Leftrightarrow m\ge3x^2;\forall x\in\left[1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left\{3x^2\right\}$ mà $3x^2\le3;\forall x\ge1$ nên suy ra $m\le3$ là giá trị cần tìm.

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 7 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm của hàm trị tuyệt đối, giải phương trình đạo hàm bằng 0 để biện luận số điểm cực trị

Giải:

Ta có $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right| \Rightarrow y'=\frac{\left(4x^3+3x^2-x\right)\left(x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right)}{\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|};\forall x\in D$

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^3+3x^2-x=0\\ x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left\{-1;0;\frac{1}{4}\right\}\\ -m=f\left(x\right)=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2\end{array}\right.$

Để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow -m=f\left(x\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $\left\{-1;0;\frac{1}{4}\right\}(*)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2$, có $f'\left(x\right)=4x^3+3x^2-x;f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\left\{-1;0;\frac{1}{4}\right\}$

Tính $f\left(-1\right)=-\frac{1}{2};f\left(0\right)=0;f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{256}$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-m\geq 0\\ -m\in\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{256}\right]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ m\in\left[\frac{3}{256};\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-5;5]$ ta được $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$

A. $\max T=2\sqrt{5}$ **B.** $\max T=3\sqrt{5}$ **C.** $\max T=2\sqrt{10}$ **D.** $\max T=3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Gọi số phức, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để tìm giá trị lớn nhất

Giải:

Cách 1. Gọi $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow M\left(x;y\right)$

Và $A(-1;0)$, $B\left(1;0\right)$.

Ta có $|z|=1\Rightarrow|x+yi|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính AB

$MA^2+MB^2=AB^2=4$.

Khi đó, theo Bunhiacopxki, ta có

$T=MA+2MB=\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left(MA^2+MB^2\right)AB^2}=\sqrt{5.4}=2\sqrt{5}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max\ T=2\sqrt{5}$

Cách 2. Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow|z+1|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}$ và $|z-1|=\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}$

Mặt khác $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$, khi đó $T=\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow T\leq\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left[\left(x-1\right)^2+y^2+\left(x-1\right)^2+y^2\right]}=\sqrt{10\left(x^2+y^2+1\right)}=2\sqrt{5}\Rightarrow\ \max\ T=2\sqrt{5}$

Câu 46: Tứ diện *ABCD* có $AB=CD=4, AC=BD=5, AD=BC=6$. Tính khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (BCD).

A. $\frac{\sqrt{42}}{7}$ **B.** $\frac{3\sqrt{42}}{14}$ **C.** $\frac{3\sqrt{42}}{7}$ **D.** $\frac{\sqrt{42}}{14}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải:
Áp dụng công thức tính nhanh thể tích của tứ diện gần đều, đưa bài toán tính khoảng cách về bài toán tìm thể tích chia cho diện tích đáy (tính theo công thức Hê – rông)
Giải:

Tam giác BCD có $CD=4; BD=5; BC=6 \Rightarrow S_{BCD}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

Công thức tính nhanh: Tứ diện gần đều ABCD có $AB=CD=a,\ BC=AD=b,\ AC=BD=c$

Suy ra thể tích tứ diện ABCD là $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

Áp dụng với $AB=CD=4, AC=BD=5,\ AD=BC=6 \longrightarrow V_{ABCD}=\frac{15\sqrt{6}}{4}$

Mặt khác $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,(BCD)\right).S_{BCD} \Rightarrow d\left(A,(BCD)\right)=\frac{3V}{S_{BCD}}=\frac{3\sqrt{42}}{7}$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$, $C(-1;-1;1)$. Gọi S_1 là mặt cầu tâm *A*, bán kính bằng 2; S_2 và S_3 là hai mặt cầu có tâm lần lượt là *B*, *C* và bán kính đều bằng 1. Trong các mặt phẳng tiếp xúc với cả 3 mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$ có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (Oyz)?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:
Xét vị trí tương đối của mặt phẳng, gọi phương trình tổng quát của mặt phẳng và tính toán dựa vào điều kiện tiếp xúc
Giải:

Gọi phương trình mặt phẳng cần tìm là $(P): ax+by+cz+d=0$

Vì $d\left(B;(P)\right)=d\left(C;(P)\right)=1$ suy ra mp $(P)//BC$ hoặc đi qua trung điểm của BC.

Mà $BC=(-4;0;0)$ và mp (P) vuông góc với mp $(Oyz) \Rightarrow$ mp $(P)//BC$

Với mp $(P)//BC \Rightarrow a=0 \Rightarrow)$ $(P): by+cz+d=0$ suy ra $d\left(A;(P)\right)=\frac{|2b+c+d|}{\sqrt{b^2+c^2}}=2$

Và $d\left(B;(P)\right)=\frac{|-b+c+d|}{\sqrt{b^2+c^2}}=1 \Rightarrow \begin{cases}|2b+c+d|=2|-b+c+d|\\|-b+c+d|=\sqrt{b^2+c^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}4b=c+d\\c+d=0\end{array}\right.\\|-b+c+d|=\sqrt{b^2+c^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3|b|=\sqrt{b^2+c^2}\\|b|=\sqrt{b^2+c^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8b=c^2 \Rightarrow c=\pm 2\sqrt{2}b\\c=0 \Rightarrow d=0\end{array}\right.$ suy ra có ba mặt phẳng thỏa mãn

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương *m* để phương trình $\cos^2 x+\sqrt{m+\cos x}=m$ có nghiệm thực?

A. 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương pháp giải:
Đưa về phương trình lượng giác cơ bản, biện luận tìm tham số m
Giải:

Ta có

$\cos^2 x+\sqrt{m+\cos x}=m \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-\left(\sqrt{\cos x+m}\right)^2+\sqrt{\cos x+m}=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x+\sqrt{\cos x+m}\right)\left(\cos x-\sqrt{\cos x+m}\right)+\cos x+\sqrt{\cos x+m}=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sqrt{\cos x+m}+1\right)\left(\cos x+\sqrt{\cos x+m}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\cos x+m}=\cos x+1\\ \sqrt{\cos x+m}=-\cos x\end{array}\right.(*)$

Đặt $t=\cos x\in[-1;1]$, khi đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{t+m}=t+1(1)\\ \sqrt{t+m}=-t(2)\end{array}\right.$

Giải (1) ta có $m=t^2+t+1$ có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow \frac{3}{4}\le m\le 3$

Giải (2) ta có $m=t^2-t$ có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le m\le 2$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}^+$, ta được $m=\{1;\ 2;\ 3\}$ là các giá trị cần tìm

Câu 49: Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi sẵn địa chỉ cần gửi. Tính xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

A. $\frac{5}{8}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{7}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải: Áp dụng nguyên lý bù trừ trong bài toán xác suất

Giải:

Ta tính xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Mỗi phong bì có 4 cách bỏ thư vào nên có tất cả 4! cách bỏ thư.

Gọi U là tập hợp các cách bò thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ.

Khi đó, theo công thức về nguyên lý bù trừ, ta có $\overline{N}=4!-N_1+N_2-...+(-1)^4N_4$

Trong đó $N_m\,(1\le m\le 4)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ.

Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ 4 lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có $(4-m)!$ cách bỏ m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được: $N_m=C_4^m.(4-m)!=\frac{4!}{k!}$ và

$\overline{N}=4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+(-1)^n.\frac{1}{4!}\right)$

Suy ra xác suất cần tìm cho việc không lá thư nào đúng địa chỉ là $\overline{P}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+(-1)^4.\frac{1}{4!}$

Vậy xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó là $P=1-\overline{P}=\frac{5}{8}$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{\pi}{4},\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

A. 1 **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương pháp giải:

Sử dụng bất đẳng thức Holder trong tích phân để tìm hàm số $f'(x)$

Cách giải:

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \cos x \end{cases}$, khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = -\cos x.f'(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{2}.f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0.f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

Xét

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + k.\cos x\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx + 2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx + k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k.\frac{\pi}{4} + k^2.\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) - \cos x\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \cos x$

Suy ra $f(x) = \int f'(x) = \int \cos xdx = \sin x + C$ mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Vậy $f(x) = \sin x \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1$