

CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$   
ĐẾN  $180^\circ$ .

I LÝ THUYẾT.

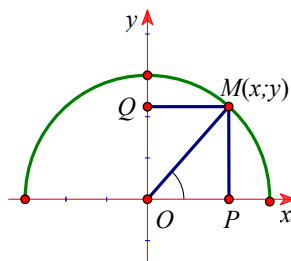
I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$  ĐẾN  $180^\circ$ .

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Với góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ), ta xác định được duy nhất điểm  $M$  trên trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm  $O$ , sao cho  $\alpha = \widehat{xOM}$ , biết  $M(x; y)$ .

Khi đó:  $\sin \alpha = y$ ;  $\cos \alpha = x$ ;  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ );  $\cot \alpha = \frac{x}{y}$  ( $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$ )

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là *giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .



Hình 2.1

**Chú ý:**  $\square$  Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

2. Dấu của giá trị lượng giác.

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

**3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

**4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau (bổ sung)**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

**5. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**6. Các hệ thức lượng giác cơ bản (bổ sung – kết quả của bài tập)**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$



**BÀI TẬP.**

**Câu 1.** Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$ ;

b)  $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$ ;

c)  $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ .

**Câu 2.** Đơn giản biểu thức sau:

a)  $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$ .

b)  $2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Câu 3.** Chứng minh các hệ thức sau:

a)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;

b)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ );

c)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ );

**Câu 4.** Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) thỏa mãn  $\tan \alpha = 3$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$ .

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: TÍNH CÁC GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$   
 b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$   
 c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

**Câu 2.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$   
 b)  $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$   
 c)  $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

#### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D. 1.

**Câu 2:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$                       B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$                       D. 2

**Câu 3:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$                       B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$   
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$                       D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

**Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

**Câu 5:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .

**Câu 6:** Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 0.

**Câu 7:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .                      B.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .  
 C.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .                      D.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

**Câu 8:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ .

B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .

C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .

D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

**Câu 9:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\sin \alpha < 0$ .

B.  $\cos \alpha > 0$ .

C.  $\tan \alpha < 0$ .

D.  $\cot \alpha > 0$ .

**Câu 10:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C. 1.

D. -1.

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

**Câu 12:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Câu 13:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

**Câu 14:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

**Câu 15:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

A.  $\sqrt{2}$ .

B. 2.

C. -2.

D. 1.

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, KHI BIẾT TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.**



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ



**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

**Câu 2.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

**Câu 3.** Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 4.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

**Câu 5.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Câu 6.** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ .

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .



**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$
- A.  $\frac{13}{4}$ .                      B.  $\frac{7}{4}$ .                      C.  $\frac{11}{4}$ .                      D.  $\frac{15}{4}$ .
- Câu 2:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:
- A.  $\frac{1}{3}$ .                      B.  $\frac{10}{9}$ .                      C.  $\frac{11}{9}$ .                      D.  $\frac{4}{3}$ .
- Câu 3:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .
- A.  $\cot \alpha = 2$ .                      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .                      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .                      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .
- Câu 4:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?
- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- Câu 5:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là
- A. 3.                      B.  $-\frac{9}{13}$ .                      C. -3.                      D.  $\frac{9}{13}$ .
- Câu 6:** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Giá trị của  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$ .                      B.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$ .  
 C.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$ .                      D.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-1}{2}$ .
- Câu 7:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?
- A.  $-\frac{19}{13}$ .                      B.  $\frac{19}{13}$ .                      C.  $\frac{25}{13}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .
- Câu 8:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?
- A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .
- Câu 9:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:
- A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B. -13.                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      D. 13.
- Câu 10:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?
- A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .
- Câu 11:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C. -1.                      D. 0.
- Câu 12:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

- A.  $m = 9$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = -3$ .                      D.  $m = \pm 3$ .

**Câu 13:** Cho biết  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

- A.  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$                       B.  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$                       C.  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$                       D.  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

**Câu 14:** Cho biết  $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$                       B.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$                       C.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$                       D.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Câu 15:** Cho biết  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $P = \frac{5}{4}$ .                      B.  $P = \frac{7}{4}$ .                      C.  $P = \frac{9}{4}$ .                      D.  $P = \frac{11}{4}$ .

**Câu 16:** Cho biết  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$                       B.  $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$                       C.  $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$                       D.  $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$

**DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC, RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$   
 b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$   
 c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

**Câu 3.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a)  $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$   
 b)  $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

**Câu 4.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$

B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$

C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$

D.  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1.$

**Câu 2:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$  B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$  C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$  D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

**Câu 3:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A.  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1.$  B.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$  C.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$  D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

**Câu 4:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

A.  $A = 4.$  B.  $A = 1.$  C.  $A = 2.$  D.  $A = 3$

**Câu 5:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x.$

A.  $\sin^2 x.$  B.  $\cos^2 x.$  C.  $\frac{1}{\cos x}.$  D.  $\cos x.$

**Câu 6:** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$  B.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha \neq 0).$

C.  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1 (\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0).$  D.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos \alpha \neq 0).$

**Câu 7:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

A.  $P = \frac{1}{2} \tan x.$  B.  $P = \frac{1}{2} \cot x.$  C.  $P = 2 \cot x.$  D.  $P = 2 \tan x.$

**Câu 8:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$  B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$

C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$  D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

**Câu 9:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$

B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$

**Câu 10:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A.  $-1.$  B.  $0.$  C.  $2.$  D.  $1.$

**Câu 11:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

A.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$  B.  $\cot^2 a + \tan^2 a \cdot 2.$  C.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$  D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2.$

**Câu 12:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

A.  $\sin x.$  B.  $\frac{1}{\cos x}.$  C.  $\frac{1}{\sin x}.$  D.  $\cos x.$



**Câu 13:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$ .

- A.  $A = 1$ .                      B.  $A = 2$ .                      C.  $A = 3$ .                      D.  $A = 4$ .

**Câu 14:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

- A. 1.                                B. 2.                                C. -3.                                D. 0.

**Câu 15:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A. 1.                                B. 2.                                C. -2.                                D. -1.

**Câu 16:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $(\sin x \cos x)^2 = 12 \sin x \cos x$ .                      B.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 12 \sin^2 x \cos^2 x$ .  
C.  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ .                      D.  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \sin^2 x \cos^2 x$ .

CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$   
ĐẾN  $180^\circ$ .

I LÝ THUYẾT.

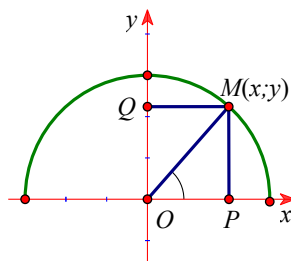
I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$  ĐẾN  $180^\circ$ .

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Với góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ), ta xác định được duy nhất điểm  $M$  trên trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm  $O$ , sao cho  $\alpha = \widehat{xOM}$ , biết  $M(x; y)$ .

Khi đó:  $\sin \alpha = y$ ;  $\cos \alpha = x$ ;  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ );  $\cot \alpha = \frac{x}{y}$  ( $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$ )

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ .



Hình 2.1

**Chú ý:**  $\square$  Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

2. Dấu của giá trị lượng giác.

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

**3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

**4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau (bổ sung)**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

**5. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**6. Các hệ thức lượng giác cơ bản (bổ sung – kết quả của bài tập)**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

 **BÀI TẬP.**

**Câu 1.** Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$ ;

b)  $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$ ;

c)  $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ .

**Chú ý:**  $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$ ;  $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ ;  $\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$ ;  $\cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$ .

**Lời giải.**

a)  $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$   
 $= (2 \sin 30^\circ + \cos(180^\circ - 45^\circ) - 3 \tan(180^\circ - 30^\circ))(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

$= (2 \sin 30^\circ - \cos 45^\circ + 3 \tan 30^\circ)(-1 - \cot 60^\circ)$

$= \left( 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

$= -\frac{(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$ .

b)  $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$   
 $= (\sin 90^\circ)^2 + (\cos 120^\circ)^2 + (\cos 0^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2 + (\cot 135^\circ)^2$

$= 1 + (\cos(180^\circ - 60^\circ))^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot(180^\circ - 45^\circ))^2$

$= 1 + (\cos 60^\circ)^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot 45^\circ)^2 = \frac{1}{4}$ .

c)  $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (\cos 30^\circ)^2 = 1$ .

**Câu 2.** Đơn giản biểu thức sau:

a)  $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$ .

b)  $2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Lời giải.**

a)  $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$   
 $= \sin(180^\circ - 80^\circ) + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos(180^\circ - 16^\circ)$   
 $= \sin 80^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ - \cos 16^\circ = 2 \sin 80^\circ$ .

b)  $2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$

$$= 2 \sin \alpha \cdot \cot \alpha + \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha = 3 \cos \alpha.$$

**Câu 3.** Chứng minh các hệ thức sau:

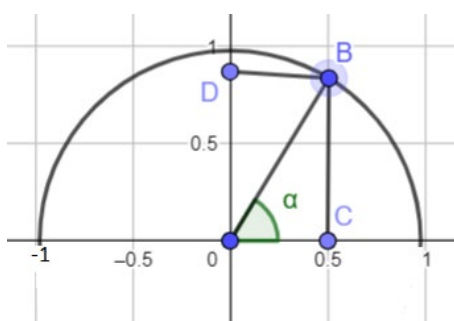
a)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;

b)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ );

c)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ );

**Lời giải.**

a) Xét nửa đường tròn tâm  $O$  bán kính 1. Ta có  $\sin \alpha = DO$ ,  $\cos \alpha = OC$ . Xét tam giác vuông  $OBC$  ta có  $OD^2 + OC^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .



b)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ )

Xét  $VT = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = VP$ .

c)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )

Xét  $VT = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = VP$ .

**Câu 4.** Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) thỏa mãn  $\tan \alpha = 3$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\tan \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$  nên chia cả tử và mẫu của biểu thức  $P$  cho  $\cos \alpha$  ta được

$$P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha - 3}{3 \tan \alpha + 2} = \frac{3}{11}.$$

DẠNG 1: TÍNH CÁC GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản



**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

**Lời giải**

a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$

b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$

**Câu 2.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b)  $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c)  $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

**Lời giải:**

a)  $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$$

b)  $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$$

c)  $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$

$$= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$$

**3** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       **D. 1.**

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

**Câu 2:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$**                       B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$                       D. 2

Lời giải

**Chọn A**

$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

**Câu 3:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$       B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$   
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$                       **D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ.$       **B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ.$**       C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ.$       D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$

Lời giải

**Chọn B**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 5:** Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$                       B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1.$   
 C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0.$                       **D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0.$**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 6:** Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                      **B.  $\sqrt{2}.$**                       C.  $\sqrt{3}.$                       D. 0.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .

**Câu 7:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

**B.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

**C.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .

**D.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

Lời giải

**Chọn C**

**Câu 8:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

**A.**  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ .

**B.**  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .

**C.**  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .

**D.**  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .

**Câu 9:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.**  $\sin \alpha < 0$ .

**B.**  $\cos \alpha > 0$ .

**C.**  $\tan \alpha < 0$ .

**D.**  $\cot \alpha > 0$ .

Lời giải

**Chọn C**

Góc tù có điểm biểu diễn thuộc góc phần tư thứ II, có giá trị  $\sin \alpha > 0$ , còn  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$  đều nhỏ hơn 0.

**Câu 10:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

**A.**  $\frac{1}{2}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.** 1.

**D.** -1.

Lời giải

**Chọn A**

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

**A.** 3.

**B.** 4.

**C.** 1.

**D.** 2.

Lời giải

**Chọn D**

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$



**Câu 12:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A. 0.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      **D. 1.**

Lời giải

**Chọn D**

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 13:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A. 21.                                      B. 23.                                      **C. 22.**                                      D. 24.

Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

**Câu 14:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

- A. 2.                                      **B. 1.**                                      C. 0.                                      D. -1.

Lời giải

**Chọn B**

$$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 15:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

- A.  $\sqrt{2}$ .                                      **B. 2.**                                      C. -2.                                      D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$$

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, KHI BIẾT TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

**Câu 2.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

**Câu 3.** Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải:**

**Câu 1.** Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$  mặt khác  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Câu 2.** Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  và  $\sin \alpha > 0$ , nên  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

**Câu 3.** Vì  $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$  mặt khác  $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\text{Nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Câu 4.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

**Câu 5.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Lời giải:**

$$\text{Câu 4. Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

**Câu 5.**  $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

Suy ra  $B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$ .

**Câu 6.** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ .

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có  $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$  (\*)

Mặt khác  $\sin x + \cos x = m$  nên  $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$  hay  $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt  $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$ . Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có  $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Kết hợp với (\*) suy ra  $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

**A.**  $\frac{13}{4}$ .

**B.**  $\frac{7}{4}$ .

**C.**  $\frac{11}{4}$ .

**D.**  $\frac{15}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ .

**Câu 2:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:

**A.**  $\frac{1}{3}$ .

**B.**  $\frac{10}{9}$ .

**C.**  $\frac{11}{9}$ .

**D.**  $\frac{4}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha = 1 + 2\cos^2 \alpha = \frac{11}{9}.$$

**Câu 3:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.**  $\cot \alpha = 2$ .      **B.**  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .      **C.**  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .      **D.**  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$$

**Câu 4:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.**  $\frac{5}{4}$ .      **B.**  $-\frac{5}{2}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      **D.**  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha < 0. \text{ Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 5:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

- A.** 3.      **B.**  $-\frac{9}{13}$ .      **C.** -3.      **D.**  $\frac{9}{13}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{Do } \alpha \text{ là góc tù nên } \cos \alpha < 0, \text{ từ đó } \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Nhu vậy } 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left( -\frac{12}{13} \right) = -\frac{9}{13}.$$

**Câu 6:** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Giá trị của  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$ .      **B.**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$ .  
**C.**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$ .      **D.**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

**Câu 7:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?

- A.**  $-\frac{19}{13}$ .      **B.**  $\frac{19}{13}$ .      **C.**  $\frac{25}{13}$ .      **D.**  $-\frac{25}{13}$ .

Lời giải

Chọn B

$$E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3(\tan^2 \alpha + 1) - 2}{1 + (\tan^2 \alpha)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

Câu 8: Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?

- A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      **D.  $\frac{101}{26}$ .**

Lời giải

Chọn D

$$E = \sin^2 \alpha \left( 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}.$$

Câu 9: Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

- A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B.  $-13$ .                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      **D.  $13$ .**

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cot \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13.$$

Câu 10: Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      **C.  $-\frac{11}{3}$ .**                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

Lời giải

Chọn C

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

Câu 11: Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{3}{2}$ .                      **B.  $\frac{1}{2}$ .**                      C.  $-1$ .                      D.  $0$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 12: Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

- A.  $m = 9$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = -3$ .                      **D.  $m = \pm 3$ .**

Lời giải

Chọn D

$$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

**Câu 13:** Cho biết  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

**A.**  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

**B.**  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

**C.**  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$

**D.**  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = \sin \alpha + 1 \rightarrow 9 \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2$

$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1$

$\Leftrightarrow 10 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$  . •  $\sin \alpha = -1$ : không thỏa mãn vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

•  $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$ .

**Câu 14:** Cho biết  $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\cot \alpha$ .

**A.**  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$

**B.**  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

**C.**  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

**D.**  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = 2 - 2 \cos \alpha \rightarrow 2 \sin^2 \alpha = (2 - 2 \cos \alpha)^2$

$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha = 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \alpha) = 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 6 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$

•  $\cos \alpha = 1$ : không thỏa mãn vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

•  $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 15:** Cho biết  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $P = \frac{5}{4}$ .

**B.**  $P = \frac{7}{4}$ .

**C.**  $P = \frac{9}{4}$ .

**D.**  $P = \frac{11}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}$ .

Ta có  $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sqrt{(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \frac{7}{4}.$$

**Câu 16:** Cho biết  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$

**B.**  $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$

C.  $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$

D.  $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC, RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ .



**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

*Lời giải*

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x (\tan^2 x + 1)$

$$= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

*Lời giải:*

Vì  $A + B + C = 180^\circ$  nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B$$



$$= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B = \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + 1 = 2 = VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

b)  $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

**Lời giải:**

a)  $A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$

b)  $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2}$   
 $= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2}$   
 $= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x$

**Câu 4.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

**Lời giải**

$$P = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

$$= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} = \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2}$$

$$= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 = 3$$

Vậy P không phụ thuộc vào  $x$ .

### **3** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . **B.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .

**C.**  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.**  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 2:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ . C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 3:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$ . B.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . C.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 4:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

- A.  $A = 4$ .** B.  $A = 1$ . C.  $A = 2$ . D.  $A = 3$

Lời giải

**Chọn A**

$$A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4.$$

**Câu 5:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

- A.  $\sin^2 x$ .** B.  $\cos^2 x$ . C.  $\frac{1}{\cos x}$ . D.  $\cos x$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$G = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

**Câu 6:** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . B.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ).  
**C.  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$  ( $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$ ).** D.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ).

Lời giải

**Chọn C**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

**Câu 7:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

- A.  $P = \frac{1}{2} \tan x$ . **B.  $P = \frac{1}{2} \cot x$ .** C.  $P = 2 \cot x$ . D.  $P = 2 \tan x$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x.$$

**Câu 8:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$ . B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$   
 C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$ . **D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$**

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

**Câu 9:** Đẳng thức nào sau đây là sai?

A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$

B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 \quad (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

**D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$**

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1.$$

**Câu 10:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1.

**B. 0.**

C. 2.

D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

**Câu 11:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

A.  $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}.$

B.  $\cot^2 a + \tan^2 a.$

**C.  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$**

D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2.$

Lời giải

**Chọn C**

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$$

**Câu 12:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

A.  $\sin x.$

B.  $\frac{1}{\cos x}.$

**C.  $\frac{1}{\sin x}.$**

D.  $\cos x.$

Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

**Câu 13:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}.$

**A.  $A = 1.$**

B.  $A = 2.$

C.  $A = 3.$

D.  $A = 4.$

Lời giải

**Chọn A**

$$A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 14:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

A. 1.

B. 2.

C. -3.

D. 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$

$$f(x) = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = 1.$$

**Câu 15:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. -2.

D. -1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 16:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A.  $(\sin x \cos x)^2 = 2\sin x \cos x.$

B.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin^2 x \cos^2 x.$

C.  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x.$

D.  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x.$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x. \end{aligned}$$

CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$   
ĐẾN  $180^\circ$ .

**III** HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**DẠNG 1. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC**

- Câu 1:** Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$  cùng dấu. **B.** Tích  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$  mang dấu âm.  
**C.** Tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  mang dấu dương. **D.**  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu.
- Câu 2:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?  
**A.**  $\tan \alpha < 0$ . **B.**  $\cot \alpha > 0$ . **C.**  $\sin \alpha < 0$ . **D.**  $\cos \alpha > 0$ .
- Câu 3:** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ . **B.**  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .  
**C.**  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ . **D.**  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ .
- Câu 4:** Đẳng thức nào sau đây **đúng**?  
**A.**  $\tan(180^\circ + a) = -\tan a$ . **B.**  $\cos(180^\circ + a) = -\cos a$ .  
**C.**  $\sin(180^\circ + a) = \sin a$ . **D.**  $\cot(180^\circ + a) = -\cot a$ .
- Câu 5:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?  
**A.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ . **B.**  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$   
**C.**  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ . **D.**  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$
- Câu 6:** Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?  
**A.**  $\sin \alpha = \sin \beta$ . **B.**  $\cos \alpha = -\cos \beta$ . **C.**  $\tan \alpha = -\tan \beta$ . **D.**  $\cot \alpha = \cot \beta$ .
- Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?  
**A.**  $\sin \alpha < 0$ . **B.**  $\cos \alpha > 0$ . **C.**  $\tan \alpha > 0$ . **D.**  $\cot \alpha < 0$ .
- Câu 8:** Hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?  
**A.**  $\sin \alpha = \cos \beta$ . **B.**  $\tan \alpha = \cot \beta$ . **C.**  $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$ . **D.**  $\cos \alpha = -\sin \beta$ .
- Câu 9:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?  
**A.**  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **B.**  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **C.**  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . **D.**  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$
- Câu 10:** Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?  
**A.**  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ . **B.**  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ . **C.**  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ . **D.**  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

- Câu 11:** Giá trị của  $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$  bằng bao nhiêu?  
 A. 2.                      B. 0.                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 1.
- Câu 12:** Giá trị của  $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$  bằng bao nhiêu?  
 A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 1.
- Câu 13:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?  
 A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                      D. 1.
- Câu 14:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?  
 A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .                      D. 2.
- Câu 15:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?  
 A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .                      B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .                      D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .
- Câu 16:** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .  
 A.  $P = 1$ .                      B.  $P = 0$ .                      C.  $P = \sqrt{3}$ .                      D.  $P = -\sqrt{3}$ .
- Câu 17:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?  
 A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .                      B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .                      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .                      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .
- Câu 18:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?  
 A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .
- Câu 19:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là **sai**?  
 A.  $\cos \alpha < \cos \beta$ .                      B.  $\sin \alpha < \sin \beta$ .                      C.  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ .                      D.  $\cot \alpha > \cot \beta$ .
- Câu 20:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?  
 A.  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $\cos C = \frac{1}{2}$ .                      D.  $\sin B = \frac{1}{2}$ .
- Câu 21:** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:  
 A.  $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$ .                      B.  $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$ .                      C.  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ .                      D.  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ .

**DẠNG 2. CHO BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CÒN LẠI**

- Câu 22:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .  
 A.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .                      B.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .
- Câu 23:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?  
 A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- Câu 24:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

A.  $\cot \alpha = 2$ .                      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .                      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .                      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

**Câu 25:**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      D.  $-\frac{1}{3}$ .

**Câu 26:** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

A.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 27:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

A.  $\frac{9}{13}$ .                      B. 3.                      C.  $-\frac{9}{13}$ .                      D. -3.

**Câu 28:** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

A.  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      B.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .                      D.  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**Câu 29:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

A.  $\frac{13}{4}$ .                      B.  $\frac{7}{4}$ .                      C.  $\frac{11}{4}$ .                      D.  $\frac{15}{4}$ .

**Câu 30:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha$  bằng

A.  $-\frac{7}{5}$ .                      B.  $\frac{7}{5}$ .                      C. 1.                      D.  $\frac{11}{5}$ .

**Câu 31:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$

A.  $M = \frac{25}{27}$                       B.  $M = \frac{175}{27}$ .                      C.  $M = \frac{35}{27}$ .                      D.  $M = -\frac{25}{27}$ .

**Câu 32:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?

A.  $-\frac{19}{13}$ .                      B.  $\frac{19}{13}$ .                      C.  $\frac{25}{13}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$

**Câu 33:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?

A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .

**Câu 34:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B. -13.                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      D. 13.

**Câu 35:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

**Câu 36:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:

- A.  $\frac{11}{9}$ .                      B.  $\frac{4}{3}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{10}{9}$ .

**DẠNG 3. CHỨNG MINH, RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 37:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$ .                      B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$   
 C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$ .                      D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

**Câu 38:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ)$ .  
 B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$   
 C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$   
 D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$ .

**Câu 39:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ .                      B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .  
 C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ .                      D.  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ .

**Câu 40:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ .                      B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .                      C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ .                      D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**Câu 41:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

- A.  $A = 4$ .                      B.  $A = 2$ .                      C.  $A = 1$ .                      D.  $A = 3$ .

**Câu 42:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

- A.  $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$ .                      B.  $\cot^2 a + \tan^2 a$ .                      C.  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$ .                      D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

**Câu 43:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

- A.  $A = 4$ .                      B.  $A = 1$ .                      C.  $A = 2$ .                      D.  $A = 3$

**Câu 44:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

- A.  $\sin^2 x$ .                      B.  $\cos^2 x$ .                      C.  $\frac{1}{\cos x}$ .                      D.  $\cos x$ .

**Câu 45:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

- A.  $\sin x$ .                      B.  $\frac{1}{\cos x}$ .                      C.  $\frac{1}{\sin x}$ .                      D.  $\cos x$ .

**Câu 46:** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .                      B.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha \neq 0)$ .



C.  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$  ( $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$ ).      D.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ).

**Câu 47:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

A.  $P = \frac{1}{2} \tan x$ .      B.  $P = \frac{1}{2} \cot x$ .      C.  $P = 2 \cot x$ .      D.  $P = 2 \tan x$ .

**DẠNG 4. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 48:** Biểu thức  $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$  có giá trị bằng

A. 1.      B. -1.      C. 2.      D. -2.

**Câu 49:** Cho  $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ .

A.  $A = 12$ .      B.  $A = 11$ .      C.  $A = 13$ .      D.  $A = 5$ .

**Câu 50:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

A. 0.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

**Câu 51:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

A. 21.      B. 23.      C. 22.      D. 24.

**Câu 52:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{3}{2}$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C. -1.      D. 0.

**Câu 53:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

A. 1.      B. 2.      C. -3.      D. 0.

**Câu 54:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. 1.      B. 2.      C. -2.      D. -1.

**Câu 55:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1.      B. 0.      C. 2.      D. 1.

**Câu 56:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

A. 2.      B. 1.      C. 0.      D. -1.

**Câu 57:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

A.  $\sqrt{2}$ .      B. 2.      C. -2.      D. 1.

**Câu 58:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

A.  $m = 9$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = -3$ .      D.  $m = \pm 3$ .

**Câu 59:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C. 1.      D. -1.

**Câu 60:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

A. 3.      B. 4.      C. 1.      D. 2.

**Câu 61:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính theo  $m$  giá trị của  $M = \sin x \cdot \cos x$ .

A.  $m^2 - 1$ .      B.  $\frac{m^2 - 1}{2}$ .      C.  $\frac{m^2 + 1}{2}$ .      D.  $m^2 + 1$ .



# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$ .

### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

**Câu 1:** Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$  cùng dấu. **B. Tích  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$  mang dấu âm.**  
C. Tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  mang dấu dương. D.  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu.

Lời giải

**Chọn B**

Với  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ , ta có  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$  suy ra:  $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Vậy  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$

**Câu 2:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A.  $\tan \alpha < 0.$**  B.  $\cot \alpha > 0.$  C.  $\sin \alpha < 0.$  D.  $\cos \alpha > 0.$

Lời giải

**Chọn C**

$\tan \alpha < 0.$

**Câu 3:** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$  **B.  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$**   
C.  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$  D.  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$

Lời giải

**Chọn B**

Vì  $\alpha$  và  $(90^\circ - \alpha)$  là hai cung phụ nhau nên theo tính chất giá trị lượng giác của hai cung phụ nhau ta có đáp án B đúng.

**Câu 4:** Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\tan(180^\circ + a) = -\tan a.$  **B.  $\cos(180^\circ + a) = -\cos a.$**   
C.  $\sin(180^\circ + a) = \sin a.$  D.  $\cot(180^\circ + a) = -\cot a.$

Lời giải

**Chọn B**

Lý thuyết “cung hơn kém  $180^\circ$ ”

**Câu 5:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

**B.**  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

**C.**  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ .

**D.**  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Lời giải

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

**Câu 6:** Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

**A.**  $\sin \alpha = \sin \beta$ .

**B.**  $\cos \alpha = -\cos \beta$ .

**C.**  $\tan \alpha = -\tan \beta$ .

**D.**  $\cot \alpha = \cot \beta$ .

Lời giải

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

**Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.**  $\sin \alpha < 0$ .

**B.**  $\cos \alpha > 0$ .

**C.**  $\tan \alpha > 0$ .

**D.**  $\cot \alpha < 0$ .

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 8:** Hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?

**A.**  $\sin \alpha = \cos \beta$ .

**B.**  $\tan \alpha = \cot \beta$ .

**C.**  $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$ .

**D.**  $\cos \alpha = -\sin \beta$ .

Lời giải

**Chọn D**

$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$ .

**Câu 9:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.**  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**D.**  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

**Chọn C**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 10:** Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

**A.**  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ .

**B.**  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ .

**C.**  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ .

**D.**  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 11:** Giá trị của  $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$  bằng bao nhiêu?

**A.** 2.

**B.** 0.

**C.**  $\sqrt{3}$ .

**D.** 1.

Lời giải

**Chọn B**

$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$

**Câu 12:** Giá trị của  $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.**  $\sqrt{3}$ .

**D.** 1.

Lời giải

**Chọn C**

$$\cos 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

**Câu 13:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                      **D. 1**

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

**Câu 14:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .**                      B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .                      D. 2.

Lời giải

**Chọn A**

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 15:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .      B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .                      **D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 16:** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .

- A.  $P = 1$ .**                      B.  $P = 0$ .                      C.  $P = \sqrt{3}$ .                      D.  $P = -\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

**Câu 17:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      **B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .**      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 18:** Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      **D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 19:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\cos \alpha < \cos \beta$ .      **B.  $\sin \alpha < \sin \beta$ .**      C.  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ .      D.  $\cot \alpha > \cot \beta$ .

Lời giải

**Chọn B**

Biểu diễn lên đường tròn.

**Câu 20:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .      **B.**  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      **C.**  $\cos C = \frac{1}{2}$ .      **D.**  $\sin B = \frac{1}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 21:** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.**  $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$ .      **B.**  $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$ .      **C.**  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ .      **D.**  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Lý thuyết.

**DẠNG 2. CHO BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CÒN LẠI**

**Câu 22:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.**  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .      **B.**  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      **C.**  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **D.**  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Mặt khác } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 23:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.**  $\frac{5}{4}$ .      **B.**  $-\frac{5}{2}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      **D.**  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Do  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 24:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.**  $\cot \alpha = 2$ .      **B.**  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .      **C.**  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .      **D.**  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2.$$

**Câu 25:**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

**A.**  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $-\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2$ .

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}.$$

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 26:** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.**  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$ .

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 27:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

**A.**  $\frac{9}{13}$ .

**B.** 3.

**C.**  $-\frac{9}{13}$ .

**D.** -3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$

Do  $\alpha$  là góc tù nên  $\cos \alpha < 0$ , từ đó  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

Như vậy  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left( -\frac{12}{13} \right) = -\frac{9}{13}$ .

**Câu 28:** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

**A.**  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**B.**  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**C.**  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**D.**  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Do  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$  nên  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  suy ra  $\cos \alpha < 0$ .

$$\text{Mặt khác, } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{a}.$$

$$\text{Mà ta lại có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = -\frac{|a|}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ và do } a > 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

**Câu 29:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

**A.**  $\frac{13}{4}$ .                      **B.**  $\frac{7}{4}$ .                      **C.**  $\frac{11}{4}$ .                      **D.**  $\frac{15}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có } P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

**Câu 30:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = 2\sin \alpha - \cos \alpha$  bằng

**A.**  $-\frac{7}{5}$ .                      **B.**  $\frac{7}{5}$ .                      **C.** 1.                      **D.**  $\frac{11}{5}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

$$\text{Do } \alpha \text{ là góc tù nên } \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}.$$

$$A = 2\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2 \cdot 4}{5} - \frac{-3}{5} = \frac{11}{5}.$$

**Câu 31:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$

**A.**  $M = \frac{25}{27}$                       **B.**  $M = \frac{175}{27}$ .                      **C.**  $M = \frac{35}{27}$ .                      **D.**  $M = -\frac{25}{27}$ .

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$



$$\text{Mà } 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha \leq 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}.$$

$$\text{Từ đó } M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{-25}{27}.$$

**Câu 32:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$  ?

- A.  $-\frac{19}{13}$ .                      B.  $\frac{19}{13}$ .                      C.  $\frac{25}{13}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3(\tan^2 \alpha + 1) - 2}{1 + (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

**Câu 33:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$  ?

- A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$E = \sin^2 \alpha \left( 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}.$$

**Câu 34:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

- A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B.  $-13$ .                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      D.  $13$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cot \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13.$$

**Câu 35:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

**Câu 36:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:

- A.  $\frac{11}{9}$ .                      B.  $\frac{4}{3}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{10}{9}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha = 1 + 2\cos^2 \alpha = \frac{11}{9}.$$

**DẠNG 3. CHỨNG MINH, RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 37:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$       B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$   
 C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$       D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

**Câu 38:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$   
 B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$   
 C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$   
 D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1.$$

**Câu 39:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$       B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$   
 C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$       D.  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 40:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$       B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$       C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$       D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 41:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

- A.  $A = 4.$       B.  $A = 2.$       C.  $A = 1.$       D.  $A = 3.$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 42:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

**A.**  $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$ .      **B.**  $\cot^2 a + \tan^2 a$ .      **C.**  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$ .      **D.**  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \cdot \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$$

**Câu 43:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

**A.**  $A = 4$ .      **B.**  $A = 1$ .      **C.**  $A = 2$ .      **D.**  $A = 3$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4.$$

**Câu 44:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

**A.**  $\sin^2 x$ .      **B.**  $\cos^2 x$ .      **C.**  $\frac{1}{\cos x}$ .      **D.**  $\cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$G = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

**Câu 45:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

**A.**  $\sin x$ .      **B.**  $\frac{1}{\cos x}$ .      **C.**  $\frac{1}{\sin x}$ .      **D.**  $\cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

**Câu 46:** Khẳng định nào sau đây là sai?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .      **B.**  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ).

**C.**  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$  ( $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$ ).      **D.**  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ).

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

**Câu 47:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

- A.  $P = \frac{1}{2} \tan x$ .      B.  $P = \frac{1}{2} \cot x$ .      C.  $P = 2 \cot x$ .      D.  $P = 2 \tan x$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x.$$

#### DẠNG 4. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

**Câu 48:** Biểu thức  $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$  có giá trị bằng

- A. 1.      B. -1.      C. 2.      D. -2.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) nên suy ra  $\cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } A &= (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) \\ &+ (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = \cos 180^\circ = -1. \end{aligned}$$

**Câu 49:** Cho  $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ .

- A.  $A = 12$ .      B.  $A = 11$ .      C.  $A = 13$ .      D.  $A = 5$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \tan \alpha - \cot \alpha = 3 &\Leftrightarrow (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 9 \\ &\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 11. \end{aligned}$$

**Câu 50:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A. 0.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

Lời giải

**Chọn D**

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 51:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A. 21.      B. 23.      C. 22.      D. 24.

Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

**Câu 52:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $-1$ .                      D.  $0$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$ .

$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

**Câu 53:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

- A.  $1$ .                      B.  $2$ .                      C.  $-3$ .                      D.  $0$ .

Lời giải

**Chọn A**

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ .

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ .

$f(x) = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = 1$ .

**Câu 54:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.  $1$ .                      B.  $2$ .                      C.  $-2$ .                      D.  $-1$ .

Lời giải

**Chọn A**

$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

**Câu 55:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.  $-1$ .                      B.  $0$ .                      C.  $2$ .                      D.  $1$ .

Lời giải

**Chọn B**

$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$ .

**Câu 56:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

- A.  $2$ .                      B.  $1$ .                      C.  $0$ .                      D.  $-1$ .

Lời giải

**Chọn B**

$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$ .

**Câu 57:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

- A.  $\sqrt{2}$ .                      B.  $2$ .                      C.  $-2$ .                      D.  $1$ .

Lời giải

**Chọn B**

$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$ .

**Câu 58:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

- A.  $m = 9$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = -3$ .                      D.  $m = \pm 3$ .

Lời giải

**Chọn D**

$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$ .

**Câu 59:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

**A.**  $\frac{1}{2}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.** 1.

**D.** -1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

**Câu 60:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

**A.** 3.

**B.** 4.

**C.** 1.

**D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$

**Câu 61:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính theo  $m$  giá trị của  $M = \sin x \cdot \cos x$ .

**A.**  $m^2 - 1$ .

**B.**  $\frac{m^2 - 1}{2}$ .

**C.**  $\frac{m^2 + 1}{2}$ .

**D.**  $m^2 + 1$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Vậy  $M = \frac{m^2 - 1}{2}$ .

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 1,2. ĐỊNH LÝ COSIN – SIN. GIẢI TAM GIÁC

### I LÝ THUYẾT.

Cho tam giác  $ABC$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $S$  là diện tích tam giác. Giả sử  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ ;  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ .  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có kết quả sau đây:

### II. ĐỊNH LÝ COSIN. ĐỊNH LÝ SIN

#### 1. Định lí côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

#### \*Hệ quả của định lí côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

#### 2. Định lí sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

#### \*Hệ quả của định lí sin

$$a = 2R \cdot \sin A$$

$$b = 2R \cdot \sin B$$

$$c = 2R \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

#### 3. Công thức diện tích:

$$a) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

$$b) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$c) S = \frac{abc}{4R}$$

d)  $S = pr$  với  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

e) Công thức Hê- Rông  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**4. Công thức trung tuyến (bổ sung)**

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

**III. GIẢI TAM GIÁC**

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

Vận dụng giải tam giác giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

 **BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**Câu 1:** Cho tam giác ABC có  $AB = 3,5; AC = 7,5; \hat{A} = 135^\circ$ . Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Câu 2:** Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 75^\circ, \hat{C} = 45^\circ$  và  $BC = 50$ . Tính độ dài cạnh AB.

**Câu 3:** Cho tam giác ABC có  $AB = 6, AC = 7, BC = 8$ . Tính  $\cos A, \sin A$  và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Câu 4:** Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

a)  $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

b)  $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

c)  $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$

d)  $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$

e)  $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$

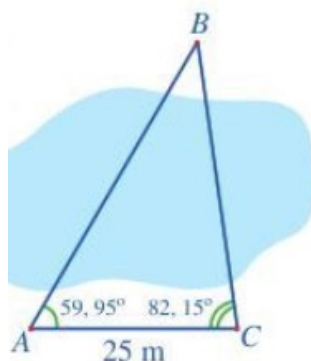
**Câu 5:** Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a)  $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$

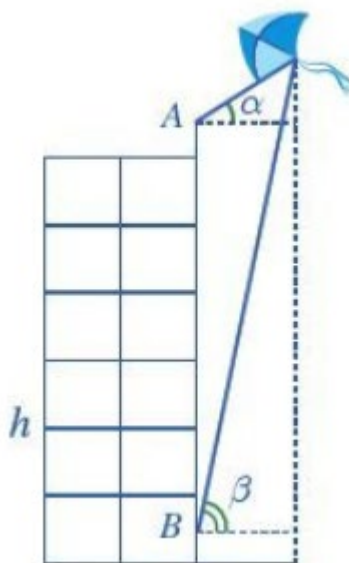
b)  $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$

**Câu 6:** Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc  $BAC, BCA$ . Biết  $AC = 25m, \widehat{BAC} = 59,95^\circ; \widehat{BCA} = 82,15^\circ$ . Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?





- Câu 7:** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến  $A$  và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc  $75^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Câu 8:** Bạn  $A$  đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn  $A$  tới chiếc điều và phương nằm ngang) là  $\alpha = 35^\circ$ ; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn  $A$  là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn  $B$  cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là  $\beta = 75^\circ$ ; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn  $B$  cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là  $h = 20\text{ m}$  (Hình). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

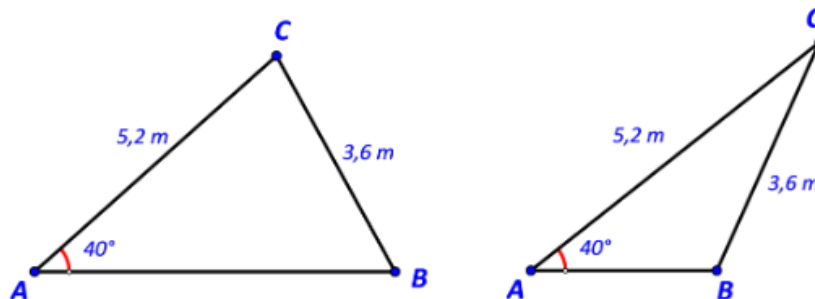


- Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 12, CA = 15, \hat{C} = 120^\circ$ . Tính:
- Độ dài cạnh  $AB$ .
  - Số đo các góc  $A, B$ .
  - Diện tích tam giác  $ABC$ .
- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, BC = 7, \hat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .
- Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ . Tính:
- Độ dài các cạnh  $AC, BC$
  - Diện tích tam giác  $ABC$ .

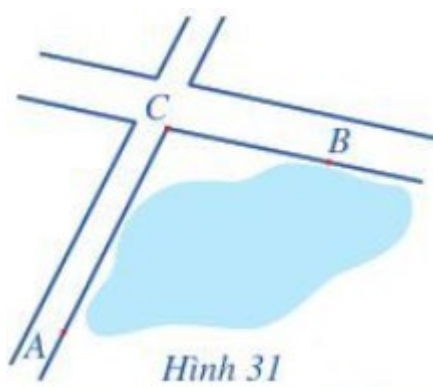
**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 12, AC = 15, BC = 20$ . Tính:

- a) Số đo các góc  $A, B, C$ .
- b) Diện tích tam giác  $ABC$ .

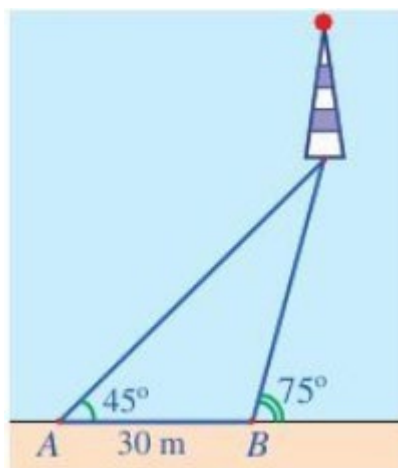
**Câu 13:** Tính độ dài cạnh  $AB$  trong mỗi trường hợp sau:



**Câu 14:** Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm  $A$  và  $B$  mà ta không thể đi trực tiếp từ  $A$  đến  $B$  (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy,..), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm  $C$  sao cho ta đo được các khoảng cách  $AC, CB$  và góc  $ACB$ . Sau khi đo, ta nhận được:  $AC = 1\text{ km}, CB = 800\text{ m}$  và  $\widehat{ACB} = 105^\circ$  (Hình 31). Tính khoảng cách  $AB$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười đơn vị mét).



**Câu 15:** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí  $A, B$  tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là  $45^\circ$  và  $75^\circ$ . Biết khoảng cách giữa hai vị trí  $A, B$  là  $30\text{ m}$  (Hình). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**BÀI TẬP.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 5, c = 8$ . Tính  $\cos A, S, r$ .

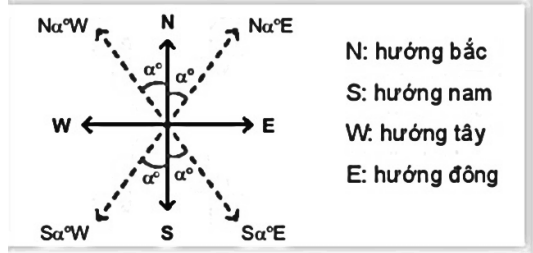
**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 70^\circ$ . Tính  $R, b, c$ .

**Câu 3.** Giải tam giác  $ABC$  và tính diện tích của tam giác đó, biết  $\hat{A} = 15^\circ, \hat{B} = 130^\circ, c = 6$ .

**Câu 4.** Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng  $A$ , đi theo hướng  $S70^\circ E$  với vận tốc  $70 \text{ km/h}$ . Đi được  $90$  phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc  $8 \text{ km/h}$ . Sau  $2$  giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

- a) Tính khoảng cách từ cảng  $A$  tới đảo nơi tàu neo đậu.
- b) Xác định hướng từ cảng  $A$  tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng  $S\alpha^\circ E$  là hướng tạo với hướng nam góc  $\alpha^\circ$  và tạo với hướng đông góc  $90^\circ - \alpha^\circ$ . Các hướng  $S\alpha^\circ W, N\alpha^\circ E, N\alpha^\circ W$  cũng được định nghĩa một cách tương tự.



**Câu 5.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

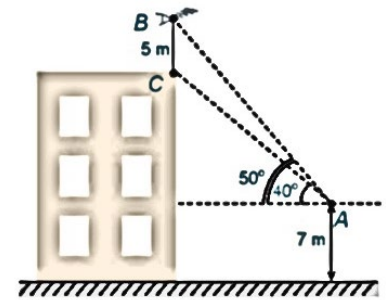
cao  $5 \text{ m}$ . Từ một vị trí quan sát  $A$  cao  $7 \text{ m}$  so

với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang

(H.3.18).

- a) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .
- b) Tính chiều cao của tòa nhà.

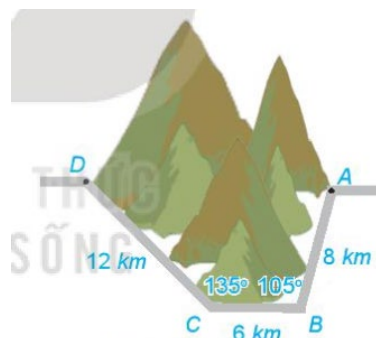


Hình 3.18

**Câu 6.** Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). *Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình*



**Câu 7.** Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.



Hình 3.19

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ  $A$  tới  $D$ . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6, \hat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7; b = 8; c = 5$ . Tính  $\hat{A}, S, h_a, R$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2, BC = 5, CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Câu 4.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $ABC$ .

#### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là

- A.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $R = \frac{a}{2}$ .      C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $R = a$ .

**Câu 2:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A. 49.      B.  $\sqrt{97}$ .      C. 7.      D.  $\sqrt{61}$ .

**Câu 3:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4, c = 5, \hat{B} = 150^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $S = 10$ .      B.  $S = 10\sqrt{3}$ .      C.  $S = 5$ .      D.  $S = 5\sqrt{3}$ .

**Câu 4:** Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A.  $\frac{65}{4}$ .      B. 40.      C. 32,5.      D. 65,8.

- Câu 5:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $60^\circ$ . Biết  $CA = 200(\text{m})$ ,  $CB = 180(\text{m})$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?
- A.  $228(\text{m})$ .                      B.  $20\sqrt{91}(\text{m})$ .                      C.  $112(\text{m})$ .                      D.  $168(\text{m})$ .
- Câu 6:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn,  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ , diện tích bằng  $12$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $2\sqrt{3}$ .                      B.  $4$ .                      C.  $5$ .                      D.  $3\sqrt{2}$ .
- Câu 7:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  và trung tuyến  $BM = 3$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $\sqrt{17}$ .                      B.  $2\sqrt{5}$ .                      C.  $4$ .                      D.  $8$ .
- Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $2\sqrt{6}$ .                      B.  $5$ .                      C.  $\sqrt{22}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .
- Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .
- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .
- Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .
- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $1,2$ .
- Câu 12:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = c$  và  $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$ .                      C.  $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$ .                      D.  $\frac{3c}{2}$ .
- Câu 13:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 105^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- Câu 14:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Tính  $\cos(B+C)$ .
- A.  $\frac{1}{8}$ .                      B.  $-\frac{1}{4}$ .                      C.  $-0,125$ .                      D.  $0,75$ .
- Câu 15:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $2, 3, 4$ . Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ .
- Câu 16:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $3, 8, 9$ . Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$ .                      D.  $-\frac{4}{25}$ .
- Câu 17:** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $F$  là trung điểm cạnh  $AE$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $DF$ .
- A.  $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a}{4}$ .

- Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ ,  $AB = 6$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 4$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$
- A.  $2\sqrt{5}$ .                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{20}$ .                      D.  $\sqrt{19}$ .
- Câu 19:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{BC}{3}$ . Độ dài  $AM$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ .                      C.  $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\frac{2a}{3}$ .
- Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính cạnh  $AB$
- A.  $\sqrt{46}$ .                      B. 11.                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D. 6.
- Câu 21:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  và  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$ . Tính  $BC$
- A.  $2\sqrt{15}$ .                      B.  $4\sqrt{22}$ .                      C.  $4\sqrt{15}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .
- Câu 22:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = 2$ . Tính cạnh  $AB$
- A. 6.                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{9}{5}$ .                      D.  $2\sqrt{10}$ .
- Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và  $\tan A = -2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$
- A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $4\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{33}$ .                      D. 7.
- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng:
- A.  $60^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 25:** Cho tam giác  $MPQ$  vuông tại  $P$ . Trên cạnh  $MQ$  lấy hai điểm  $E, F$  sao cho các góc  $\widehat{MPE}$ ,  $\widehat{EPF}$ ,  $\widehat{FPQ}$  bằng nhau. Đặt  $MP = q$ ,  $PQ = m$ ,  $PE = x$ ,  $PF = y$ . Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?
- A.  $ME = EF = FQ$ .                      B.  $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$ .  
 C.  $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ .                      D.  $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$ .
- Câu 26:** Tính góc  $C$  của tam giác  $ABC$  biết  $a \neq b$  và  $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$ .
- A.  $C = 150^\circ$ .                      B.  $C = 120^\circ$ .                      C.  $C = 60^\circ$ .                      D.  $C = 30^\circ$ .
- Câu 27:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 12$  và  $\cot(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $2\sqrt{10}$ .                      B.  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ .                      C.  $5\sqrt{10}$ .                      D.  $3\sqrt{2}$ .
- Câu 28:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 10$  và  $\tan(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $\frac{5\sqrt{10}}{9}$ .                      B.  $\frac{10}{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .                      D.  $5\sqrt{10}$ .
- Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{8}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ . Tính cạnh  $BC$ .
- A. 7.                      B. 5.                      C.  $3\sqrt{3}$ .                      D. 2.

**Câu 30:** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$  và  $AB = AC = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2BC}{5}$ . Tính độ dài  $AM$

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      B.  $\frac{11a}{5}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{7}}{5}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

**DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

**Câu 2.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 \\ b + c - a \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 5.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .                      B.  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
 C.  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .                      D.  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .

**Câu 2:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây **đúng**?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$ .                      B.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .  
 C.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$ .                      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$ .

**Câu 3:** Nếu tam giác  $ABC$  có  $a^2 < b^2 + c^2$  thì:

- A.  $\widehat{A}$  là góc tù.                      B.  $\widehat{A}$  là góc vuông.                      C.  $\widehat{A}$  là góc nhọn.                      D.  $\widehat{A}$  là góc nhỏ nhất.

**Câu 4:** Tam giác  $ABC$  có ba cạnh thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Khi đó số đo của  $\widehat{C}$  là

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .                      B.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**C.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .      **D.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

- Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $c = a \cdot \cos B$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
- A.** Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.      **B.** Tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn.  
**C.** Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.      **D.** Tam giác  $ABC$  là tam giác tù.

**Câu 7:** Diện tích  $S$  của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

**I.**  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

**II.**  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ .

- A.** Chỉ I.      **B.** Chỉ II.      **C.** Cả I và II.      **D.** Không có.

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$  thỏa mãn hệ thức  $3h_a = 2h_b + h_c$ . Tìm hệ thức giữa  $a, b, c$ .

**A.**  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ .      **B.**  $3a = 2b + c$ .      **C.**  $3a = 2b - c$ .      **D.**  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

**Câu 9:** Trong tam giác  $ABC$ , hệ thức nào sau đây sai?

**A.**  $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .      **B.**  $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .      **C.**  $a = 2R \cdot \sin A$ .      **D.**  $b = R \cdot \tan B$ .

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.**  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .      **B.**  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

**C.**  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .      **D.**  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $A = 120^\circ$  thì câu nào sau đây đúng?

**A.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$ .      **B.**  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .      **C.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$ .      **D.**  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .

**Câu 12:** Trong tam giác  $ABC$ , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau là:

**A.**  $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$ .      **B.**  $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$ .      **C.**  $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$ .      **D.**  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .

**Câu 13:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $a^2 = b \cdot c$  thì:

**A.**  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .      **B.**  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .      **C.**  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .      **D.**  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$ .

**Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $2h_a = h_b + h_c$  thì:

**A.**  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .      **B.**  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .

**C.**  $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$ .      **D.**  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ .

**Câu 15:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây **đúng**?

**A.**  $m_a = \frac{b+c}{2}$ .      **B.**  $m_a > \frac{b+c}{2}$ .      **C.**  $m_a < \frac{b+c}{2}$ .      **D.**  $m_a = b+c$ .

**Câu 16:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Tính số đo của góc  $C$ .

**A.**  $45^\circ$ .      **B.**  $60^\circ$ .      **C.**  $120^\circ$ .      **D.**  $30^\circ$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , xét các bất đẳng thức sau:

**I.**  $|a-b| < c$ .

**II.**  $a < b+c$ .

**III.**  $m_a + m_b + m_c < a+b+c$ .



Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Chỉ I, II.                      B. Chỉ II, III.                      C. Chỉ I, III.                      D. Cả I, II, III.

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Tính số đo của góc  $A$ .

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $120^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 19:** Tam giác  $ABC$   $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông.                      B. Tam giác đều.                      C. Tam giác vuông cân D. Tam giác cân.

**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AC = b, AB = c$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho góc  $\widehat{BAM} = 30^\circ$  Tính tỉ số  $\frac{MB}{MC}$ .

- A.  $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}c}{b}$ .                      D.  $\frac{b-c}{b+c}$ .

**Câu 21:** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu  $a^2 > b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc tù.  
 B. Nếu tam giác  $ABC$  có một góc tù thì  $a^2 > b^2 + c^2$ .  
 C. Nếu  $a^2 < b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc nhọn.  
 D. Nếu  $a^2 = b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc vuông.

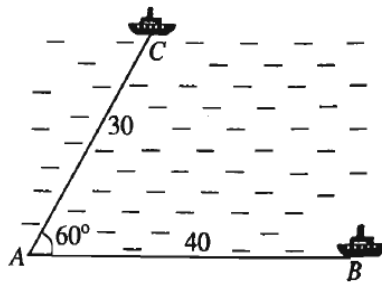
**DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Câu 2:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.**

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Tính góc  $A$ , suy ra  $S, h_a, R, r, m_a$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $BC$ , và độ dài đường cao kẻ từ  $A$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10, AC = 4$  và  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính  $\tan C$

**Câu 6:** Giải tam giác  $ABC$  biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 40^\circ$  và  $c = 14$ .

**Câu 7:** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

$$b = 4,5; \quad \widehat{A} = 30^\circ; \quad \widehat{C} = 75^\circ$$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  biết  $a = \sqrt{3}$ ;  $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$ . Tính  $R, r$ , cạnh  $c, b$ , suy ra  $S$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $A$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$ . Chứng minh rằng

a)  $a^2 = bc$

b)  $\cos A \geq \frac{1}{2}$

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và trung tuyến  $AM = AB = c$  chứng minh rằng:

a)  $a^2 = 2(b^2 - c^2)$

b)  $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ  $B$  và  $C$  vuông góc với nhau là  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

**Câu 13:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có;

a)  $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

**Câu 14:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \sin B \sin C$

**Câu 15:** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác  $ABC$  biết:  $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết: 
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$

**Câu 16:**

**Câu 17:** Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết:  $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân nếu  $h_a = c \cdot \sin A$

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 1,2. ĐỊNH LÝ COSIN – SIN. GIẢI TAM GIÁC

### I LÝ THUYẾT.

Cho tam giác  $ABC$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $S$  là diện tích tam giác. Giả sử  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ ;  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ .  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có kết quả sau đây:

### II. ĐỊNH LÝ COSIN. ĐỊNH LÝ SIN

#### 1. Định lý côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

#### \*Hệ quả của định lý côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

#### 2. Định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

#### \*Hệ quả của định lý sin

$$a = 2R \cdot \sin A$$

$$b = 2R \cdot \sin B$$

$$c = 2R \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

#### 3. Công thức diện tích:

$$a) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

$$b) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$c) S = \frac{abc}{4R}$$

d)  $S = pr$  với  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

e) Công thức Hê- Rông  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**4. Công thức trung tuyến (bổ sung)**

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

**III. GIẢI TAM GIÁC**

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

Vận dụng giải tam giác giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

 **BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**Câu 1:** Cho tam giác ABC có  $AB = 3,5; AC = 7,5; \hat{A} = 135^\circ$ . Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 7,5^2 + 3,5^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 3,5 \cdot \cos 135^\circ \Leftrightarrow BC^2 \approx 105,6$$

$$\Leftrightarrow BC \approx 10,3$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

$$\Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{10,3}{2 \cdot \sin 135^\circ} \approx 7,3$$

**Câu 2:** Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 75^\circ, \hat{C} = 45^\circ$  và  $BC = 50$ . Tính độ dài cạnh AB.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \hat{B} = 75^\circ, \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{BC}{\sin A} = \sin 45^\circ \cdot \frac{50}{\sin 60^\circ} \approx 40,8$$

Vậy độ dài cạnh AB là 40,8.

**Câu 3:** Cho tam giác ABC có  $AB = 6, AC = 7, BC = 8$ . Tính  $\cos A, \sin A$  và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{7^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{4}$$

Lại có:  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$  (do  $0^\circ < A \leq 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ .

Vậy  $\cos A = \frac{1}{4}; \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}; R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ .

**Câu 4:** Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

a)  $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

b)  $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

c)  $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$

d)  $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$

e)  $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$

**Lời giải**

a)  $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:  $\cos 0^\circ = 1; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Lại có:  $\cos 140^\circ = -\cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ \Rightarrow A = 1 + \cos 40^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos 40^\circ \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$ .

b)  $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \sin 180^\circ = 0$

Lại có:  $\sin 175^\circ = \sin(180^\circ - 5^\circ) = \sin 5^\circ \Rightarrow B = \sin 5^\circ + \frac{1}{2} - \sin 5^\circ + 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$ .

c)  $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$

Ta có:  $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$ ;  $\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$

$\Rightarrow C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \cos 15^\circ - \cos 35^\circ \Leftrightarrow C = 0.$

d)  $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$

Ta có:  $\tan 115^\circ = -\tan(180^\circ - 115^\circ) = -\tan 65^\circ$

Mà:  $\tan 65^\circ = \cot(90^\circ - 65^\circ) = \cot 25^\circ \Rightarrow D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cot 25^\circ \Leftrightarrow D = \tan 45^\circ = 1$

e)  $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$

Ta có:  $\cot 100^\circ = -\cot(180^\circ - 100^\circ) = -\cot 80^\circ$

Mà:  $\cot 80^\circ = \tan(90^\circ - 80^\circ) = \tan 10^\circ \Rightarrow E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 10^\circ \Leftrightarrow E = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

a)  $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$

b)  $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$

**Lời giải**

Xét tam giác  $ABC$ , ta có:

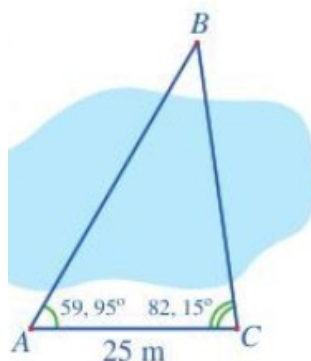
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ$$

Do đó  $\frac{\hat{A}}{2}$  và  $\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$  là hai góc phụ nhau.

a) Ta có:  $\sin \frac{A}{2} = \cos \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{B+C}{2}$

b) Ta có:  $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \left( 90^\circ - \frac{B+C}{2} \right) = \cot \frac{A}{2}$

**Câu 6:** Để đo khoảng cách từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  và tiến hành đo các góc  $BAC, BCA$ . Biết  $AC = 25m, \widehat{BAC} = 59,95^\circ; \widehat{BCA} = 82,15^\circ$ . Hỏi khoảng cách từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**Lời giải**

Xét tam giác  $ABC$ , ta có:  $\widehat{BAC} = 59,95^\circ$ ;  $\widehat{BCA} = 82,15^\circ$ .

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - (59,95 + 82,15^\circ) = 37,9^\circ$$

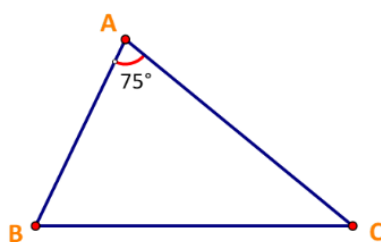
Áp dụng định lí sin trong tam giác BAC ta có:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

$$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{AC}{\sin B} = \sin 82,15^\circ \cdot \frac{25}{\sin 59,95^\circ} \approx 28,6$$

Vậy khoảng cách từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  là  $28,6m$ .

**Câu 7:** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bên  $A$  và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc  $75^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Lời giải**



Gọi B, C lần lượt là vị trí của tàu thứ nhất và tàu thứ hai sau 2,5 giờ.

Sau 2,5 giờ:

Quãng đường tàu thứ nhất đi được là:  $AB = 8 \cdot 2,5 = 20$  (hải lí)

Quãng đường tàu thứ hai đi được là:  $AC = 12 \cdot 2,5 = 30$  (hải lí)

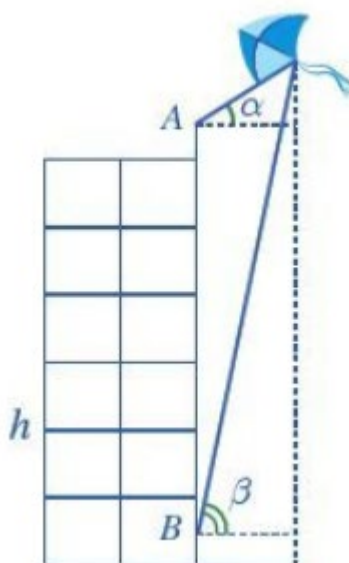
Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 75^\circ \Rightarrow BC^2 \approx 989,4 \Rightarrow BC \approx 31,5$$

Vậy hai tàu cách nhau 31,5 hải lí.

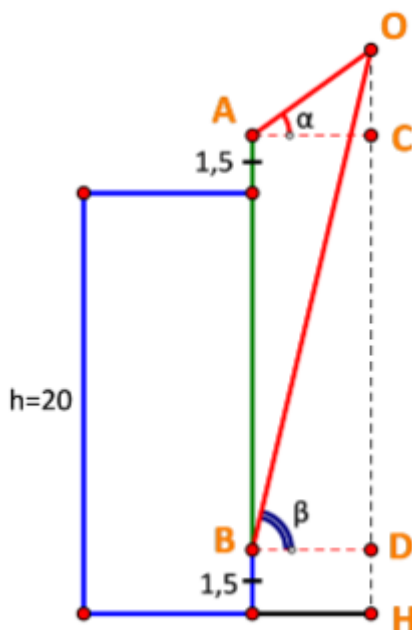
**Câu 8:** Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn  $A$  tới chiếc điều và phương nằm ngang) là  $\alpha = 35^\circ$ ; khoảng cách từ đỉnh

tòa nhà tới mắt bạn  $A$  là  $1,5$  m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn  $B$  cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là  $\beta = 75^\circ$ ; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn  $B$  cũng là  $1,5$  m. Biết chiều cao của tòa nhà là  $h = 20$  m (Hình). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**Lời giải**

Gọi các điểm:



O là vị trí của chiếc diều.

H là hình chiếu vuông góc của chiếc diều trên mặt đất.

C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên OH.

Đặt  $OC = x$ , suy ra  $OH = x + 20 + 1,5 = x + 21,5$ .



Xét tam giác  $OAC$ , ta có:  $\tan \alpha = \frac{OC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{OC}{\tan \alpha} = \frac{x}{\tan 35^\circ}$  Xét tam giác  $OBD$ , ta có:

$$\tan \beta = \frac{OD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{OD}{\tan \beta} = \frac{x+20}{\tan 75^\circ} \text{ Mà: } AC = BD \Rightarrow \frac{x}{\tan 35^\circ} = \frac{x+20}{\tan 75^\circ}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \tan 75^\circ = (x+20) \cdot \tan 35^\circ \Leftrightarrow x = \frac{20 \cdot \tan 35^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 35^\circ} \approx 4,6$$

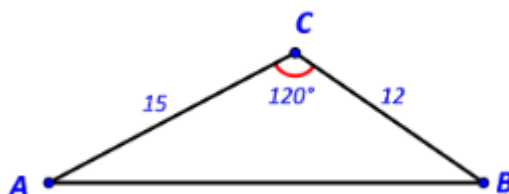
Suy ra  $OH = 26,1$ .

Vậy chiếc điều bay cao 26,1 m so với mặt đất.

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 12, CA = 15, \hat{C} = 120^\circ$ . Tính:

- Độ dài cạnh **AB**.
- Số đo các góc A, **B**.
- Diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**



a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C \Leftrightarrow AB^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AB^2 = 549 \Leftrightarrow AB \approx 23,4$$

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB} \cdot \sin C = \frac{12}{23,43} \cdot \sin 120^\circ \approx 0,44 \Rightarrow A \approx 26^\circ \text{ hoặc } A \approx 154^\circ \text{ (Loại)}$$

$$\text{Khi đó: } \hat{B} = 180^\circ - (26^\circ + 120^\circ) = 34^\circ$$

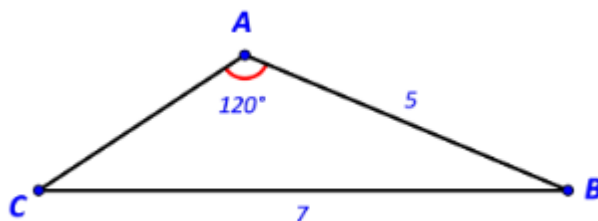
c)

Diện tích tam giác  $ABC$  là:

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot \sin 120^\circ = 45\sqrt{3}$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, BC = 7, \hat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .

**Lời giải**



Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \sin A \cdot \frac{AB}{BC} = \sin 120^\circ \cdot \frac{5}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\Rightarrow C \approx 38,2^\circ \text{ hoặc } C \approx 141,8^\circ \text{ (Loại)}$$

$$\text{Ta có: } A = 120^\circ, C = 38,2^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - (120^\circ + 38,2^\circ) = 21,8^\circ$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \Leftrightarrow AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 21,8^\circ \Rightarrow AC^2 \approx 9 \Rightarrow AC = 3$$

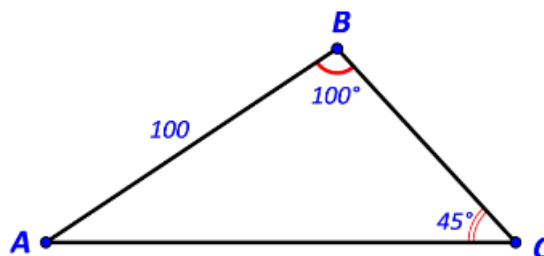
Vậy độ dài cạnh  $AC$  là 3.

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ . Tính:

a) Độ dài các cạnh  $AC, BC$

b) Diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**



a)

$$\text{Ta có: } A = 180^\circ - (B + C) \Rightarrow A = 180^\circ - (100^\circ + 45^\circ) = 35^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin C} \\ BC = \sin A \cdot \frac{AB}{\sin C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = \sin 100^\circ \cdot \frac{100}{\sin 45^\circ} \approx 139,3 \\ BC = \sin 35^\circ \cdot \frac{100}{\sin 45^\circ} \approx 81,1 \end{cases}$$

b)

Diện tích tam giác  $ABC$  là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 81,1 \cdot 39,3 \cdot \sin 45^\circ \approx 3994,2.$$

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 12, AC = 15, BC = 20$ . Tính:

a) Số đo các góc  $A, B, C$ .

b) Diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Thay  $a = BC = 20; b = AC = 15; c = AB = 12$ .

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{31}{360}; \cos B = \frac{319}{480}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 94,9^\circ; \hat{B} = 48,3^\circ$$

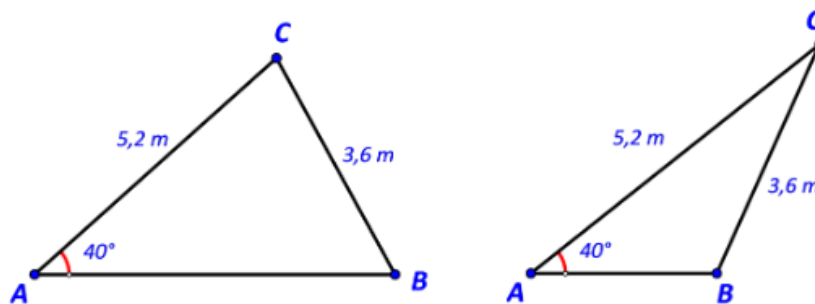
$$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (94,9^\circ + 48,3^\circ) = 36,8^\circ$$

b)

Diện tích tam giác  $ABC$  là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot \sin 94,9^\circ \approx 89,7$$

**Câu 13:** Tính độ dài cạnh  $AB$  trong mỗi trường hợp sau:



**Lời giải**

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{5,2 \cdot \sin 40^\circ}{3,6} \approx 0,93 \Rightarrow \begin{cases} B \approx 68,2^\circ \\ B \approx 111,8^\circ \end{cases}$$

Trường hợp 1:  $\hat{B} \approx 68,2^\circ$

$$\text{Ta có: } \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (40^\circ + 68,2^\circ) = 71,8^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{BC}{\sin A} = \sin 71,8^\circ \cdot \frac{3,6}{\sin 40^\circ} \approx 5,32$$

Trường hợp 2:  $\hat{B} \approx 111,8^\circ$

Ta có:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (40^\circ + 111,8^\circ) = 28,2^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABC$ , ta có:

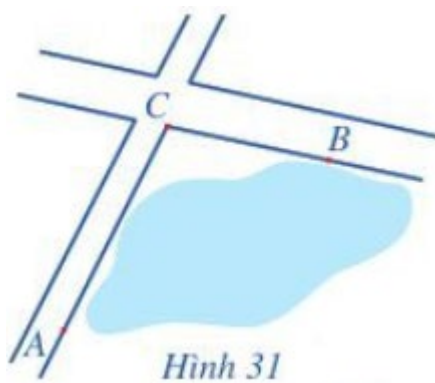
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{BC}{\sin A} = \sin 28,2^\circ \cdot \frac{3,6}{\sin 40^\circ} \approx 2,65$$

Vậy  $AB = 5,32$  hoặc  $AB = 2,65$ .

**Câu 14:** Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm  $A$  và  $B$  mà ta không thể đi trực tiếp từ  $A$  đến  $B$  (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy,...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm  $C$  sao cho ta đo được các khoảng cách  $AC, CB$  và góc  $ACB$ . Sau khi đo, ta nhận được:

$AC = 1\text{km}, CB = 800\text{m}$  và  $\widehat{ACB} = 105^\circ$  (Hình 31). Tính khoảng cách  $AB$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười đơn vị mét).



**Lời giải**

Đổi:  $1\text{ km} = 1000\text{ m}$ . Do đó  $AC = 1000\text{ m}$ .

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $ABC$  ta có:

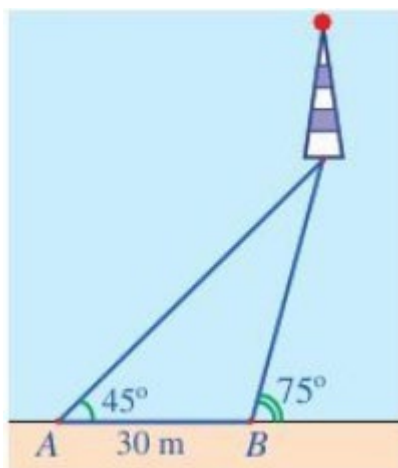
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C \Rightarrow AB^2 = 1000^2 + 800^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 800 \cdot \cos 105^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 \approx 2054110,5 \Rightarrow AB \approx 1433,2$$

Vậy khoảng cách  $AB$  là  $1433,2\text{ m}$ .

**Câu 15:** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí  $A, B$  tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là  $45^\circ$

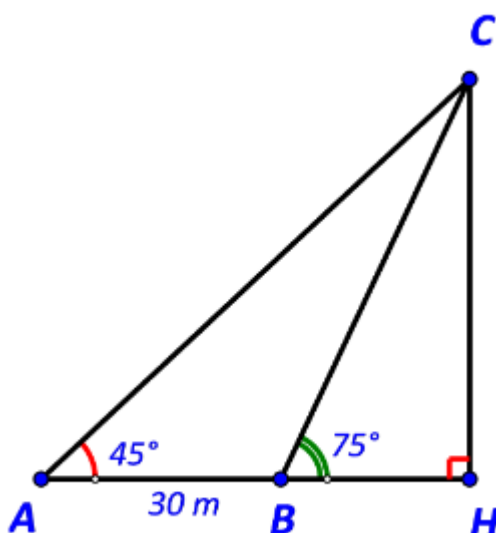
và  $75^\circ$ . Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m (Hình). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**Lời giải**

Gọi C là vị trí ngọn hải đăng và H là hình chiếu của C trên AB.

Khi đó CH là khoảng cách từ ngọn hải đăng tới bờ biển.



Ta có:  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CBH} = 180^\circ - 75^\circ = 115^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{ABC}) = 180^\circ - (45^\circ + 115^\circ) = 20^\circ$  Áp dụng định lí sin trong tam giác

$$ABC \text{ ta có: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin C} = \sin 115^\circ \cdot \frac{30}{\sin 20^\circ} \approx 79,5$$

Tam giác ACH vuông tại H nên ta có:

$$CH = \sin A \cdot AC = \sin 45^\circ \cdot 79,5 \approx 56$$

Vậy ngọn hải đăng cách bờ biển 56 m.

**BÀI TẬP.**

**Câu 1.** Cho tam giác ABC có  $a = 6, b = 5, c = 8$ . Tính  $\cos A, S, r$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{53}{80}$

Nửa chu vi là  $P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+8}{2} = \frac{19}{2}$ . Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{19}{2} \left(\frac{19}{2} - 6\right) \left(\frac{19}{2} - 5\right) \left(\frac{19}{2} - 8\right)} = \frac{3\sqrt{399}}{4}$$

Do  $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{399}}{38}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 70^\circ$ . Tính  $R, b, c$ .

**Lời giải**

Áp dụng định lý sin ta có  $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{10}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}$ .

Ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,289$

Vì  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 65^\circ \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82$

**Câu 3.** Giải tam giác  $ABC$  và tính diện tích của tam giác đó, biết  $\hat{A} = 15^\circ, \hat{B} = 130^\circ, c = 6$ .

**Lời giải**

Ta có  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 35^\circ$

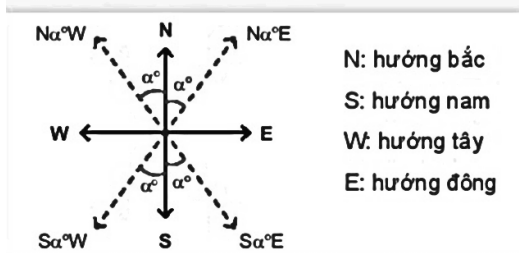
Áp dụng định lý sin ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{6 \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,71 \\ b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{6 \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8,01 \end{cases}$

Diện tích của tam giác là:  $S = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} \cdot 2,71 \cdot 6 \cdot \sin 130^\circ \approx 6,228$

**Câu 4.** Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng  $A$ , đi theo hướng  $S70^\circ E$  với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

- a) Tính khoảng cách từ cảng  $A$  tới đảo nơi tàu neo đậu.
- b) Xác định hướng từ cảng  $A$  tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng  $S\alpha^\circ E$  là hướng tạo với hướng nam góc  $\alpha^\circ$  và tạo với hướng đông góc  $90^\circ - \alpha^\circ$ . Các hướng  $S\alpha^\circ W, N\alpha^\circ E, N\alpha^\circ W$  cũng được định nghĩa một cách tương tự.



**Lời giải**

a) Theo giả thiết ta có:  $AB = 105\text{ km}, BC = 16\text{ km},$

Góc  $\widehat{BAD} = 70^\circ, \widehat{ABD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 160^\circ$

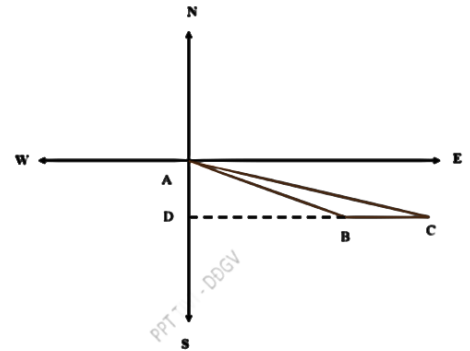
Khoảng cách từ  $A$  tới đảo tàu neo đậu bằng đoạn  $AC.$

Áp dụng định lý côsin ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$$

$$= \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 160^\circ} = 120,16\text{ km}$$

b) Ta có  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,999 \Rightarrow \hat{A} \approx 2^\circ 37' \Rightarrow \widehat{NAC} = 107^\circ 23'.$  Vậy hướng từ cảng  $A$  tới đảo nơi tàu neo đậu là hướng Đông.



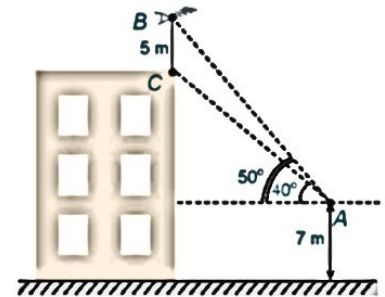
**Câu 5.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát  $A$  cao 7 m so

với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang

(H.3.18).



Hình 3.18

a) Tính các góc của tam giác  $ABC.$

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

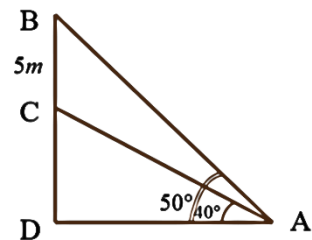
**Lời giải**

a) Ta có  $\widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ,$

$\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{BAD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 130^\circ$

b) Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$



Xét tam giác  $ACD$  vuông tại  $D$  có  $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là:  $11,9 + 7 = 18,9\text{ m}.$

**Câu 6.** Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

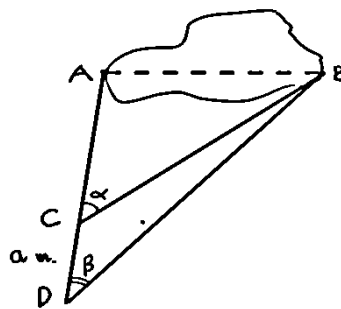


**Lời giải**

Gọi  $A, B$  là hai vị trí ngoài cùng mà ta quan sát khi nhìn từ bãi biển

Từ một điểm  $C$  trên bãi biển dùng giác kế ta xác định được góc  $\widehat{ACB} = \alpha$ .

Lấy điểm  $D$  trên bãi biển sao cho  $A, C, D$  thẳng hàng và có độ dài đoạn  $CD = a$  mét. Ta xác định được  $\widehat{ADB} = \beta$ .



Từ đó áp dụng định lí sin cho hai tam giác  $BCD$  và  $ABC$  ta xác định được bề rộng  $AB$  của hòn đảo.

**Câu 7.** Để tránh núi, đường giao thông hiện tại

phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ  $A$  tới  $D$ . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



**Lời giải**

Dựng  $CE, BF$  vuông góc với  $AD$ .

Xét tam giác  $CDE$  vuông tại  $E$  có  $\widehat{D} = \widehat{C} = 45^\circ$

$$\Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ km.}$$

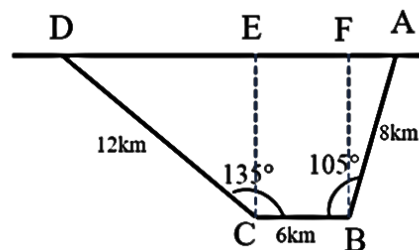
Xét tam giác  $ABF$  vuông tại  $F$  có  $\widehat{B} = 15^\circ$

$$\Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \text{ km.}$$

Mặt khác  $EF = BC = 6 \text{ km}$

$$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56 \text{ km.}$$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm  $9,44 \text{ km}$  so với đường cũ.



**II HỆ THỐNG BÀI TẬP.**

**DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC**

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

**1 PHƯƠNG PHÁP.**



+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6, \hat{A} = 120^0$ . Tính độ dài cạnh  $BC$

**Lời giải**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\cos 120^0$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7; b = 8; c = 5$ . Tính  $\hat{A}, S, h_a, R$ .

**Lời giải**

$$+ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.8.5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^0 .$$

$$+ S = \frac{1}{2} b.c.\sin A = \frac{1}{2}.8.5.\sin 60^0 = 10\sqrt{3} .$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{1}{2} a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7} .$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{a.b.c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{7.8.5}{4.10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} .$$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2, BC = 5, CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2} .$$

**Câu 4.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm nên

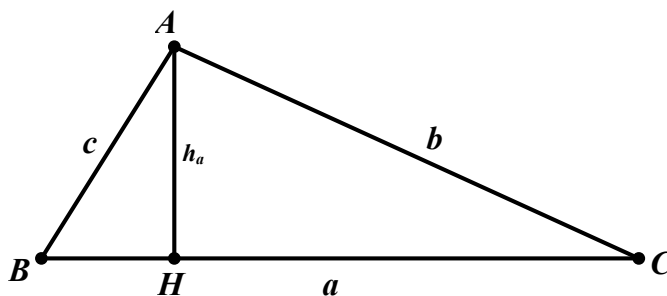
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 .$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = 24 .$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } ABC \text{ là } r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2.24}{6 + 8 + 10} = 2 .$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $ABC$ .

Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ .

Ta lại có:  $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ .

Diện tích tam giác ABC là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$ .

Vì  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$  nên  $h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy  $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

**3** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là

- A.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $R = \frac{a}{2}$ .      C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      **D.  $R = a$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Theo định lý sin trong tam giác ta có  $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 2:** Tam giác ABC có  $a = 8$ ,  $c = 3$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A. 49.      B.  $\sqrt{97}$ .      **C. 7.**      D.  $\sqrt{61}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$ .

**Câu 3:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4$ ,  $c = 5$ ,  $\widehat{B} = 150^\circ$ . Tính diện tích tam giác ABC.

- A.  $S = 10$ .      B.  $S = 10\sqrt{3}$ .      **C.  $S = 5$ .**      D.  $S = 5\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}.4.5 \sin 150^\circ = 5$ .

**Câu 4:** Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A.  $\frac{65}{4}$ .                      B. 40.                      **C. 32,5.**                      D. 65,8.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $p = \frac{52+56+60}{2} = 84$ .

Áp dụng hệ thức Hê – rông ta có:  $S = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344$ .

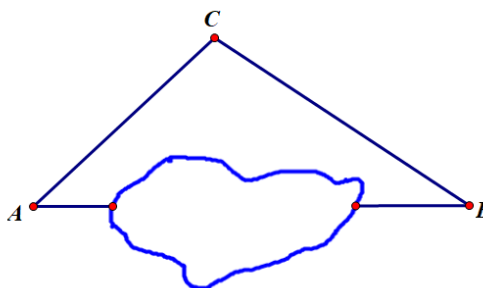
Mặt khác  $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = 32,5$ .

**Câu 5:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $60^\circ$ . Biết  $CA = 200(\text{m})$ ,  $CB = 180(\text{m})$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 228(m).                      **B.  $20\sqrt{91}$ (m).**                      C. 112(m).                      D. 168(m).

**Lời giải**

**Chọn B**



$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m}).$$

**Câu 6:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn,  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ , diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $2\sqrt{3}$ .                      B. 4.                      **C. 5.**                      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB.AC} = \frac{2.12}{5.8} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ 52' 12''$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 36^\circ 52' 12'' \approx 25 \Rightarrow BC \approx 5.$$

**Câu 7:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  và trung tuyến  $BM = 3$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

A.  $\sqrt{17}$ .

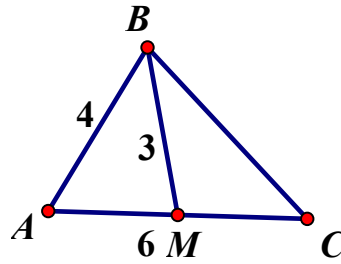
**B.  $2\sqrt{5}$ .**

C. 4.

D. 8.

Lời giải

**Chọn B**



$$\text{Ta có: } BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2\left(BM^2 + \frac{AC^2}{4}\right) - AB^2$$

$$= 2\left(3^2 + \frac{6^2}{4}\right) - 4^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

A.  $2\sqrt{6}$ .

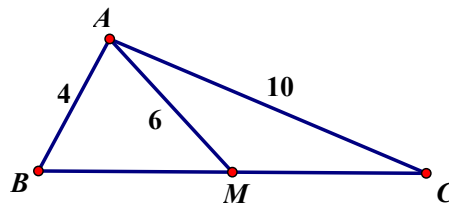
B. 5.

C.  $\sqrt{22}$ .

**D.  $2\sqrt{22}$ .**

Lời giải

**Chọn D**



$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4\left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - AM^2\right) = 4\left(\frac{10^2 + 4^2}{2} - 6^2\right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22}.$$

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B.  $\sqrt{6}$ .**

C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AB = c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{6}.$$

**Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AC = b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D. 1,2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 12:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = c$  và  $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$ .                      C.  $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$ .                      D.  $\frac{3c}{2}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos C = -\cos(A+B) = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \sin C = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{3\sqrt{2}c}{8}.$$

**Câu 13:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 105^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải.

Chọn A

Ta có:  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 105^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 14:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Tính  $\cos(B + C)$ .

- A.  $\frac{1}{8}$ .                      B.  $-\frac{1}{4}$ .                      C.  $-0,125$ .                      D.  $0,75$ .

Lời giải.

**Chọn C**

Ta có  $c = AB = 4$ ,  $b = AC = 5$ ,  $a = BC = 6$ .

Tính  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{1}{8}$ .

Đề ý  $\cos(B + C) = -\cos A = -\frac{1}{8} = -0,125$ .

**Câu 15:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ .

Lời giải.

**Chọn A**

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

Giả sử  $a = 2, b = 3, c = 4$ . Ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{7}{8}$ .

Do đó  $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ .

**Câu 16:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$ .                      D.  $-\frac{4}{25}$ .

Lời giải

**Chọn B**

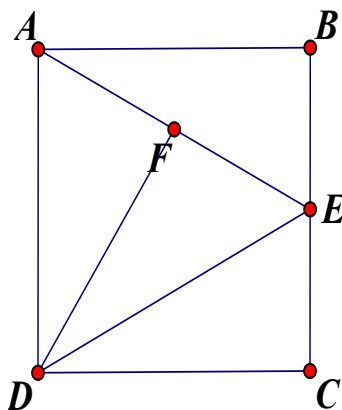
Góc lớn nhất tương ứng với cạnh lớn nhất:  $\cos \alpha = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2.3.8} = -\frac{1}{6}$ .

**Câu 17:** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $F$  là trung điểm cạnh  $AE$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $DF$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có:  $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Dùng công thức độ dài trung tuyến:

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ ,  $AB = 6$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 4$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$

- A.  $2\sqrt{5}$ .                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{20}$ .                      **D.  $\sqrt{19}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{19}$$

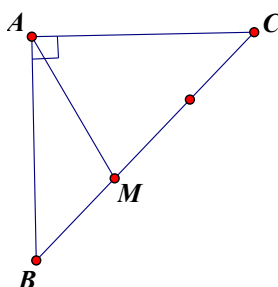
**Câu 19:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{BC}{3}$ .

Độ dài  $AM$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ .**                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ .                      C.  $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\frac{2a}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính cạnh  $AB$

- A.  $\sqrt{46}$ .                      B. 11.                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      **D. 6.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì trong tam giác  $ABC$  ta có  $A+B$  bù với góc  $C$  nên  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6.$$

**Câu 21:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  và  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$ . Tính  $BC$

- A.  $2\sqrt{15}$ .**                      B.  $4\sqrt{22}$ .                      C.  $4\sqrt{15}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì trong tam giác  $ABC$  ta có  $B+C$  bù với góc  $A$  nên  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 2\sqrt{15}.$$

**Câu 22:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = 2$ . Tính cạnh  $AB$

- A. 6.                      **B.  $\sqrt{2}$ .**                      C.  $\frac{9}{5}$ .                      D.  $2\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết  $\cot C = 2$ , ta suy ra  $C$  là góc nhọn

$$\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}.$$



**Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB=3$ ,  $AC=4$  và  $\tan A = -2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$

- A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $4\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{33}$ .                      D. 7.

Lời giải

**Chọn C**

Từ giả thiết  $\tan A = -2\sqrt{2}$ , ta suy ra  $A$  là góc tù

$$\tan A = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{33}.$$

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng:

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

Diện tích của tam giác  $ABC$  là:  $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$

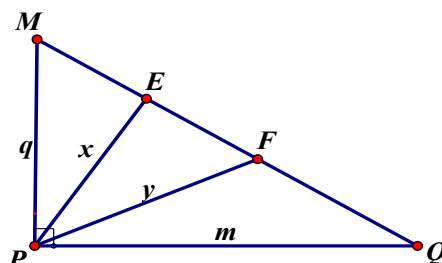
$S$  lớn nhất khi  $\sin C$  lớn nhất, hay  $\sin C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$ .

**Câu 25:** Cho tam giác  $MPQ$  vuông tại  $P$ . Trên cạnh  $MQ$  lấy hai điểm  $E, F$  sao cho các góc  $\widehat{MPE}$ ,  $\widehat{EPF}$ ,  $\widehat{FPQ}$  bằng nhau. Đặt  $MP = q$ ,  $PQ = m$ ,  $PE = x$ ,  $PF = y$ . Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A.  $ME = EF = FQ$ .      B.  $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$ .  
 C.  $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ .      D.  $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$ .

Lời giải

**Chọn C**



Từ giả thiết, suy ra  $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ$

Tam giác  $MPF$  có  $\widehat{MPF} = \widehat{MPE} + \widehat{EPF} = 60^\circ$ ;

$$MF^2 = MP^2 + PF^2 - 2.MP.PF.\cos\widehat{MPF} = q^2 + y^2 - 2.y.q.\frac{1}{2} = q^2 + y^2 - yq.$$

**Câu 26:** Tính góc  $C$  của tam giác  $ABC$  biết  $a \neq b$  và  $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$ .

- A.  $C = 150^\circ$ .      B.  $C = 120^\circ$ .      C.  $C = 60^\circ$ .      D.  $C = 30^\circ$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^3 - b^3 - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}. \text{ Do đó: } C = 120^\circ.$$

**Câu 27:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 12$  và  $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $2\sqrt{10}$ .      B.  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ .      C.  $5\sqrt{10}$ .      D.  $3\sqrt{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \cot(A + B) = \frac{1}{3} \text{ nên } \cot C = -\frac{1}{3}, \text{ suy ra } 3 \cos C = -\sin C.$$

$$\text{Mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = 2\sqrt{10}.$$

**Câu 28:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 10$  và  $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $\frac{5\sqrt{10}}{9}$ .      B.  $\frac{10}{3}$ .      C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .      D.  $5\sqrt{10}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \tan(A + B) = \frac{1}{3} \text{ nên } \tan C = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } 3 \sin C = -\cos C, \text{ mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = 5\sqrt{10}.$$

**Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{8}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ . Tính cạnh  $BC$ .

A. 7.

**B. 5.**

C.  $3\sqrt{3}$ .

D. 2.

Lời giải.

**Chọn B**

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{63}}{8}, \quad \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C = \frac{9}{16}.$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A} = 5.$$

**Câu 30:** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = AC = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2BC}{5}$ . Tính độ dài  $AM$

A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

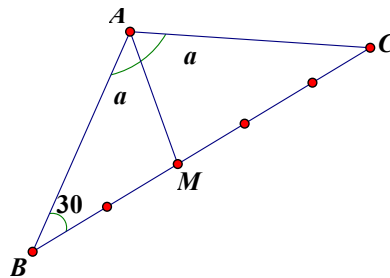
B.  $\frac{11a}{5}$ .

**C.  $\frac{a\sqrt{7}}{5}$ .**

D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

Lời giải

**Chọn C**



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

**DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

Lời giải

Ta có:  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$   
 $\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$   
 Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

**Câu 2.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

**Lời giải**

Áp dụng định lí sin trong tam giác ta có:  $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \sin B = b$

Do đó:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow h_a = b \cdot \sin C$  (đúng)

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $VP = R \cdot r \cdot \left( \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = r \cdot \left( \frac{a+b+c}{2} \right) = r \cdot p = S$  (đpcm).

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 b + a^2 c - a^3 \\ a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -bc + 2bc \cdot \cos A = 0 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ b = c \end{cases}$

Vì tam giác  $ABC$  cân có 1 góc bằng  $60^\circ$  nên tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 5.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

**Lời giải**

$VT = \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4aR} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4aR} = \frac{2a^2}{4aR} = \frac{a}{2R} = \sin A$

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .    **B.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .

**C.**  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .    **D.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo công thức đường trung tuyến ta có  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ .

**Câu 2:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?

**A.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$ .

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

C.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$ .

D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh  $A$  ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

**Câu 3:** Nếu tam giác  $ABC$  có  $a^2 < b^2 + c^2$  thì:

A.  $\widehat{A}$  là góc tù.

B.  $\widehat{A}$  là góc vuông.

C.  $\widehat{A}$  là góc nhọn.

D.  $\widehat{A}$  là góc nhỏ nhất.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  do  $a^2 < b^2 + c^2$  nên  $\cos A > 0$

**Câu 4:** Tam giác  $ABC$  có ba cạnh thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Khi đó số đo của  $\widehat{C}$  là

A.  $120^\circ$ .

B.  $30^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$ .

Theo hệ quả của định lí hàm cosin:  $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

B.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

C.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

D.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Lời giải**

Sử dụng công thức trung tuyến, ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $c = a \cdot \cos B$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

B. Tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn.

C. Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.

D. Tam giác  $ABC$  là tam giác tù

**Lời giải**

Ta có:  $c = a \cdot \cos B \Leftrightarrow c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow c = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2$

Theo định lí pi ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 7:** Diện tích  $S$  của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I.  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

II.  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ .

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. Cả I và II.

D. Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có: I. đúng vì là công thức Hê-rông tính diện tích tam giác.

Khi đó:  $S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$

$\Leftrightarrow 16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ . Do đó II. đúng

Câu 8: Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$  thỏa mãn hệ thức  $3h_a = 2h_b + h_c$ . Tìm hệ thức giữa  $a, b, c$ .

A.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ .

B.  $3a = 2b + c$ .

C.  $3a = 2b - c$ .

D.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

Lời giải

Chọn D

Kí hiệu  $S = S_{\triangle ABC}$ .

Ta có:  $3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2S}{a} = \frac{2 \cdot 2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

Câu 9: Trong tam giác  $ABC$ , hệ thức nào sau đây sai?

A.  $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .

B.  $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .

C.  $a = 2R \cdot \sin A$ .

D.  $b = R \cdot \tan B$ .

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm số sin ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra:

$+\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .

$+\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .

$+\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \cdot \sin A$ .

$+\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{2} = R \sin B \Rightarrow \frac{b}{2 \cos B} = R \tan B$ .

Câu 10: Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .

B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .

D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$

Mà  $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $A = 120^\circ$  thì câu nào sau đây đúng?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$ .    **B.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .**  
 C.  $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$ .    D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh  $A$  ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .  
 $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .

**Câu 12:** Trong tam giác  $ABC$ , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau là:

- A.  $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$ .    B.  $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$ .    C.  $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$ .    **D.  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau nên  $\triangle ABG$  vuông tại  $G$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Khi đó:  $c^2 = GA^2 + GB^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left( \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right)$   
 $\Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left( c^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) \Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$ .

**Câu 13:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $a^2 = b \cdot c$  thì :

- A.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .    **B.  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .**    C.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .    D.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $a^2 = b \cdot c \Leftrightarrow \left( \frac{2S}{h_a} \right)^2 = \left( \frac{2S}{h_b} \right) \cdot \left( \frac{2S}{h_c} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c} \Leftrightarrow h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .

**Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $2h_a = h_b + h_c$  thì :

- A.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .**    B.  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .  
 C.  $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$ .    D.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có :

$2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{2R \cdot \sin A} = \frac{1}{2R \cdot \sin B} + \frac{1}{2R \cdot \sin C}$   
 $\Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .

**Câu 15:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?

- A.  $m_a = \frac{b+c}{2}$ .    B.  $m_a > \frac{b+c}{2}$ .    **C.  $m_a < \frac{b+c}{2}$ .**    D.  $m_a = b+c$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}$

$$\text{Vì } |b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}.$$

**Câu 16:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Tính số đo của góc  $C$ .

A.  $45^\circ$ .

**B.  $60^\circ$ .**

C.  $120^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } (a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , xét các bất đẳng thức sau:

I.  $|a-b| < c$ .

II.  $a < b+c$ .

III.  $m_a + m_b + m_c < a+b+c$ .

Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Chỉ I, II.

B. Chỉ II, III.

C. Chỉ I, III.

**D. Cả I, II, III.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có I. và II. **đúng** vì đây là bất đẳng thức tam giác

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}.$$

$$\text{Vì } |b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } m_b < \frac{a+c}{2}; m_c < \frac{a+c}{2}.$$

$$\text{Do đó: } m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

Vậy III. **Đúng**.

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Tính số đo của góc  $A$ .

A.  $45^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

C.  $120^\circ$ .

**D.  $30^\circ$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow 2bc \cos A = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

**Câu 19:** Tam giác  $ABC$   $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

A. Tam giác vuông.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông cân **D. Tam giác cân.**



Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Leftrightarrow a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân.

**Câu 20:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = b, AB = c. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc  $\widehat{BAM} = 30^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{MB}{MC}$ .

A.  $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$ .

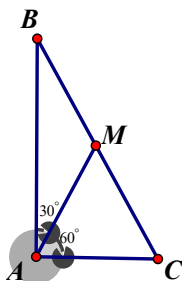
**B.  $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$ .**

C.  $\frac{\sqrt{3}c}{b}$ .

D.  $\frac{b-c}{b+c}$ .

Lời giải

**Chọn B**



$$\text{Ta có } \frac{MB}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\sin B} \Rightarrow MB = \frac{AM \cdot \sin 30^\circ}{\sin B} = \frac{AM}{2 \cdot \sin B}.$$

$$\frac{MC}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin C} \Rightarrow MC = \frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{\sin C} = \frac{AM \sqrt{3}}{2 \cdot \sin C}.$$

$$\text{Do đó } \frac{MB}{MC} = \frac{\sin C}{\sqrt{3} \sin B} = \frac{c}{\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}c}{3b}.$$

**Câu 21:** Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu  $a^2 > b^2 + c^2$  thì A là góc tù.

**B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì  $a^2 > b^2 + c^2$ .**

C. Nếu  $a^2 < b^2 + c^2$  thì A là góc nhọn.

D. Nếu  $a^2 = b^2 + c^2$  thì A là góc vuông.

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Do đó :

\*  $a^2 > b^2 + c^2$  thì  $\cos A < 0$  do đó A là góc tù nên

**A. đúng.**

\*  $a^2 < b^2 + c^2$  thì  $\cos A > 0$  do đó A là góc nhọn nên

**C. đúng.**

\*  $a^2 = b^2 + c^2$  thì  $\cos A = 0$  do đó A là góc vuông nên

**D. đúng.**

\* Nếu tam giác ABC có góc B tù thì  $b^2 > a^2 + c^2$ ; nếu góc C tù thì  $c^2 > a^2 + b^2$  do đó **B. sai.**

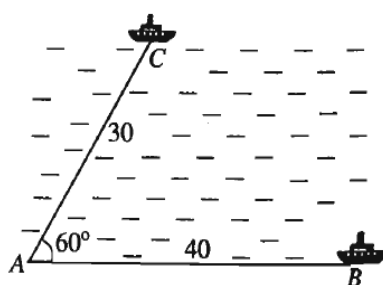
**DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Lời giải**

Ta có: Sau  $2h$  quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30.2 = 60\text{ km}$ .

Sau  $2h$  quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40.2 = 80\text{ km}$ .

Vậy: sau  $2h$  hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .

**Câu 2:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{ m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

Ta có: Trong tam giác vuông  $CDA$ :  $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$ .

Trong tam giác vuông  $CDB$ :  $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$ .

Suy ra: khoảng cách  $AB = 116,7 - 25,7 = 91\text{ m}$ .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.**

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Tính góc  $A$ , suy ra  $S, h_a, R, r, m_a$ .

**Lời giải**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28\sqrt{3}}{13}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7.8.13}{4.14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$S = p.r \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2.14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $BC$ , và độ dài đường cao kẻ từ  $A$ .

**Lời giải**

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 17 \text{ Suy ra } BC = \sqrt{17}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Theo công thức tính diện tích ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Vậy độ dài đường cao kẻ từ } A \text{ là } h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10$ ,  $AC = 4$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ .

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính  $\tan C$

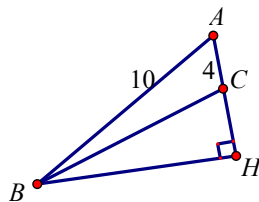
**Lời giải**

a) Theo định lí côsin ta có

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4 \cos 60^\circ = 76 \\ \Rightarrow BC \approx 8,72$$

Suy ra chu vi tam giác là  $2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$

b) (Hình 2.23a)



Hình 2.23a

Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB \cos 60^\circ = 5$$

$$\Rightarrow HC = 5 - 4 = 1$$

$$BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}. \text{ Vậy } \tan C = -\tan \widehat{BCH} = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$$

**Câu 6:** Giải tam giác ABC biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 40^\circ$  và  $c = 14$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

**Câu 7:** Giải tam giác ABC, biết:

$$b = 4,5; \quad \widehat{A} = 30^\circ; \quad \widehat{C} = 75^\circ$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ = \widehat{C}$$

suy ra tam giác ABC cân tại A  $\Rightarrow c = b = 4,5$ .

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow a \approx 2,33.$$

**Câu 8:** Cho tam giác ABC cân tại A biết  $a = \sqrt{3}$ ;  $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$ . Tính R, r, cạnh c, b, suy ra S

**Lời giải**

Áp dụng định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow b = c = 2R \sin 30^\circ = 1$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $A$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$$\text{Theo định lí sin ta có } a = 2R \sin A = 2.3. \sin 30^\circ = 3,$$

$$b = 2R \sin B = 2.3. \sin 45^\circ = 6. \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R \sin C = 2.3. \sin 105^\circ \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} = pr &= \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \\ &\approx \frac{3\sqrt{2}.5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943 \end{aligned}$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin^2 A = \sin B. \sin C$ . Chứng minh rằng

a)  $a^2 = bc$

b)  $\cos A \geq \frac{1}{2}$

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí sin ta có  $\sin A = \frac{a}{2R}$ ,  $\sin B = \frac{b}{2R}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra  $\sin^2 A = \sin B. \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$  đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và trung tuyến  $AM = AB = c$  chứng minh rằng:

- a)  $a^2 = 2(b^2 - c^2)$   
 b)  $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

**Lời giải**

a) Áp dụng công thức đường trung tuyến

$$\text{Ta có } b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2 \Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2) (*)$$

b) Theo định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4R^2 \sin^2 A \\ b^2 = 4R^2 \sin^2 B \\ c^2 = 4R^2 \sin^2 C \end{cases}$$

Thay vào (\*) ta có đpcm

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

**Lời giải**

Gọi G là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác  $GBC$  vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[ \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

**Câu 13:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có;

- a)  $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$   
 b)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$VP = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a = VT$$

$$b) \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

**Câu 14:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \sin B \sin C$

**Lời giải**

$$h_a = 2R \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R \frac{b}{2R} \sin C$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C \text{ (đúng)}$$

**Câu 15:** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác  $ABC$  biết:  $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$2(2R \sin A) \cos A = (2R \sin B) \cos C + 2R \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cdot \cos A = \sin(B + C) = \sin A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin A \neq 0) \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết: 
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$

**Câu 16:**

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin ở (1) và thế vào (2)

$$(1) \Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow b = c$$

$$(2) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

KL: Tam giác  $ABC$  đều.

**Câu 17:** Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết:  $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

**Lời giải**

Áp dụng công thức diện tích ta có  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ah_a$  suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác  $ABC$  đều.

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân nếu  $h_a = c \cdot \sin A$

**Lời giải**

Sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \sin A$  (\*) thay  $h_a = c \cdot \sin A$  vào (\*) được:

$$bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b \text{ suy ra tam giác } ABC \text{ cân tại C}$$



## CHƯƠNG

## IV

 HỆ THỨC LƯỢNG  
 TRONG TAM GIÁC  
 VECTO

## BÀI 1,2. ĐỊNH LÝ COSIN – SIN. GIẢI TAM GIÁC


 HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

## DẠNG 1. ĐỊNH LÝ COSIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ COSIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

**C.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$

**D.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B.$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $S$  là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$

**C.**  $S = \frac{abc}{4R}.$

**D.**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 8, b = 10$ , góc  $C$  bằng  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $c$  là?

**A.**  $c = 3\sqrt{21}.$

**B.**  $c = 7\sqrt{2}.$

**C.**  $c = 2\sqrt{11}.$

**D.**  $c = 2\sqrt{21}.$

**Câu 4:** Cho  $\triangle ABC$  có  $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $a$  là:

**A.**  $2\sqrt{13}.$

**B.**  $3\sqrt{12}.$

**C.**  $2\sqrt{37}.$

**D.**  $\sqrt{20}.$

**Câu 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:

**A.** 7.

**B.** 129.

**C.** 49.

**D.**  $\sqrt{129}.$

**Câu 6:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 9; BC = 8; \hat{B} = 60^\circ$ . Tính độ dài  $AC$ .

**A.**  $\sqrt{73}.$

**B.**  $\sqrt{217}.$

**C.** 8.

**D.**  $\sqrt{113}.$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 1$  và  $A = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

**A.**  $BC = \sqrt{2}.$

**B.**  $BC = 1.$

**C.**  $BC = \sqrt{3}.$

**D.**  $BC = 2.$

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

**A.** 49.

**B.**  $\sqrt{97}$

**C.** 7.

**D.**  $\sqrt{61}.$

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ ?

**A.**  $\sqrt{13}.$

**B.**  $\sqrt{3}.$

**C.** 10.

**D.** 1.

**Câu 10:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của tam giác  $ABC$ . Biết  $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$ . Tính độ dài của  $a$ .

A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\frac{23}{8}$ .                      D. 6.

**Câu 11:** Cho  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A, B$  là 2 điểm di động lần lượt trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của  $OB$  bằng bao nhiêu?

A. 4.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 2.

**Câu 12:** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

A.  $a^2 < ab + ac$ .                      B.  $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ .                      C.  $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$ .                      D.  $ab + bc > b^2$ .

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 9$  cm. Tính  $\cos A$ .

A.  $\cos A = -\frac{2}{3}$ .                      B.  $\cos A = \frac{1}{2}$ .                      C.  $\cos A = \frac{1}{3}$ .                      D.  $\cos A = \frac{2}{3}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ . Khi đó:

A. Góc  $C > 90^\circ$                       B. Góc  $C < 90^\circ$   
C. Góc  $C = 90^\circ$                       D. Không thể kết luận được gì về góc  $C$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:

A.  $A = 30^\circ$ .                      B.  $A = 45^\circ$ .                      C.  $A = 60^\circ$ .                      D.  $A = 75^\circ$ .

**Câu 16:** Cho các điểm  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu?

A.  $90^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 24, b = 13, c = 15$ . Tính góc  $A$ ?

A.  $33^\circ 34'$ .                      B.  $117^\circ 49'$ .                      C.  $28^\circ 37'$ .                      D.  $58^\circ 24'$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?

A.  $59^\circ 49'$ .                      B.  $53^\circ 7'$ .                      C.  $59^\circ 29'$ .                      D.  $62^\circ 22'$ .

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  biết độ dài ba cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $a, b, c$  và thỏa mãn hệ thức  $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$  với  $b \neq c$ . Khi đó, góc  $\widehat{BAC}$  bằng

A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Khi đó góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu độ.

A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .

**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $MA:MB:MC = 1:2:3$  khi đó góc  $AMB$  bằng bao nhiêu?

A.  $135^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .                      B.  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
C.  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .                      D.  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .

**Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $BC = 15$  cm,  $AC = 12$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là

A. 10 cm.                      B. 9 cm.                      C. 7,5 cm.                      D. 8 cm.

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, BC = 5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .

- A.  $\sqrt{11}$ .                      B. 4.                      C.  $\frac{9}{2}$ .                      D.  $\sqrt{10}$ .

**Câu 25:** Cho  $\Delta ABC$  vuông ở  $A$ , biết  $\widehat{C} = 30^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính độ dài trung tuyến  $AM$ ?

- A. 3                      B. 4                      C.  $\frac{5}{2}$                       D.  $\frac{7}{2}$

**Câu 26:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\sqrt{9}$ .                      B. 9.                      C. 3.                      D.  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .

**Câu 27:** Gọi  $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$  là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A.  $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    B.  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .    C.  $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    D.  $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Câu 28:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2$ ;  $AC = 3$ ;  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $\frac{12}{5}$ .                      B.  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .                      C.  $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ .                      D.  $\frac{6}{5}$ .

## DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:

- A.  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .                      B.  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .                      C.  $b \sin B = 2R$ .                      D.  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .

**Câu 30:** Cho  $\Delta ABC$  với các cạnh  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Gọi  $R, r, S$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác  $ABC$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A.  $S = \frac{abc}{4R}$ .                      B.  $R = \frac{a}{\sin A}$ .  
C.  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .                      D.  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ .

**Câu 31:** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A.  $R = 4$ .                      B.  $R = 1$ .                      C.  $R = 2$ .                      D.  $R = 3$ .

**Câu 32:** Trong mặt phẳng, cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$  cm, góc  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là

- A.  $2\sqrt{6}$ .                      B.  $2 + 2\sqrt{3}$ .                      C.  $2\sqrt{3} - 2$ .                      D.  $\sqrt{6}$ .

**Câu 33:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 5$ ;  $\widehat{A} = 40^\circ$ ;  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?

- A. 3,7.                      B. 3,3.                      C. 3,5.                      D. 3,1.

**Câu 34:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .                      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .  
C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .                      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

**Câu 35:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 16,8$ ;  $\widehat{B} = 56^\circ 13'$ ;  $\widehat{C} = 71^\circ$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?

- A. 29,9.                      B. 14,1.                      C. 17,5.                      D. 19,9.

**Câu 36:** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 68^\circ 12'$ ,  $\widehat{B} = 34^\circ 44'$ ,  $AB = 117$ . Tính  $AC$ ?

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

**DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN**

**Câu 37:** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A.  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .      B.  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .      C.  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .      D.  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .

**Câu 38:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ . Diện tích hình thoi  $ABCD$  là

A.  $\frac{a^2}{4}$ .      B.  $\frac{a^2}{2}$ .      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $a^2$ .

**Câu 39:** Tính diện tích tam giác  $ABC$  biết  $AB = 3, BC = 5, CA = 6$ .

A.  $\sqrt{56}$ .      B.  $\sqrt{48}$ .      C. 6.      D. 8.

**Câu 40:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 6, b = 8, c = 10$ . Diện tích  $S$  của tam giác trên là:

A. 48.      B. 24.      C. 12.      D. 30.

**Câu 41:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$ . Diện tích của tam giác là:

A.  $5\sqrt{3}$ .      B. 5.      C. 10.      D.  $10\sqrt{3}$ .

**Câu 42:** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84.      B.  $\sqrt{84}$ .      C. 42.      D.  $\sqrt{168}$ .

**Câu 43:** Cho các điểm  $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{13}{2}$ .      B. 13.      C. 26.      D.  $\frac{13}{4}$ .

**Câu 44:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  là

A. 12.      B. 6.      C.  $6\sqrt{2}$ .      D. 9.

**Câu 45:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4, b = 6, c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:

A.  $9\sqrt{15}$ .      B.  $3\sqrt{15}$ .      C. 105.      D.  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .

**Câu 46:** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 2; BC = 3$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính chu vi và diện tích tam giác  $ABC$ .

A.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3}{2}$ .      B.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $5\sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $5 + \sqrt{19}$  và  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 47:** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$ . Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  bằng

A. 72.      B. 144.      C. 54.      D. 108.

**Câu 48:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  có  $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{3}{5}$ . Độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $\Delta ABC$  là.

A.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .      B. 8.      C.  $8\sqrt{3}$       D.  $80\sqrt{3}$

**Câu 49:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a; AC = 4a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ?

A.  $S = 8a^2$ .      B.  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .      C.  $S = a^2\sqrt{3}$ .      D.  $S = 4a^2$ .

**Câu 50:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng

A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

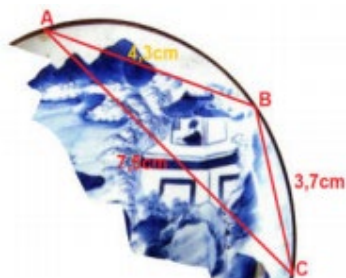
**Câu 51:** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng

- A. 12.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 24.
- Câu 52:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- A.  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ .                      C.  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$ .                      D.  $\frac{6a}{\sqrt{3}}$ .
- Câu 53:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{6}$ ,  $AC = 2$  và  $AB = \sqrt{3} + 1$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng:
- A.  $\sqrt{5}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D. 2.
- Câu 54:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng
- A. 1.                      B.  $\frac{8}{9}$ .                      C.  $\frac{4}{5}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .
- Câu 55:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:
- A. 8,125.                      B. 130.                      C. 8.                      D. 8,5.
- Câu 56:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 10\sqrt{3}$ , nửa chu vi  $p = 10$ . Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp  $r$  của tam giác trên là:
- A. 3.                      B. 2.                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D.  $\sqrt{3}$ .
- Câu 57:** Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:
- A. 16.                      B. 8.                      C. 4.                      D.  $4\sqrt{2}$ .
- Câu 58:** Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:
- A.  $\frac{65}{8}$ .                      B. 40.                      C. 32,5.                      D.  $\frac{65}{4}$ .
- Câu 59:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?
- A. 6.                      B. 8.                      C.  $\frac{13}{2}$ .                      D.  $\frac{11}{2}$ .
- Câu 60:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
- A. 2.                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C.  $2\sqrt{3}$ .                      D. 3.
- Câu 61:** Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?
- A. 5.                      B.  $4\sqrt{2}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D. 6.
- Câu 62:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = 4, BC = 6$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $ND = 3NC$ . Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  bằng
- A.  $3\sqrt{5}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 63:** Cho tam giác đều  $ABC$ ; gọi  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ . Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ADC$ . Tính tỉ số  $\frac{R}{r}$ .
- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$ .                      C.  $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$ .                      D.  $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$ .

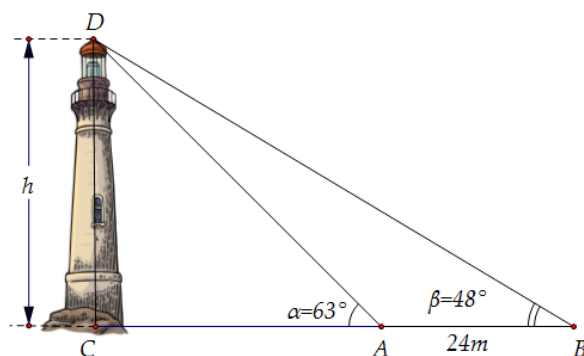
#### **DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ**

- Câu 64:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^{\circ}24'$ . Biết  $CA = 250m, CB = 120m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?
- A. 266m.                      B. 255m.                      C. 166m.                      D. 298m.

- Câu 65:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?
- A. 13.                      B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.
- Câu 66:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{ m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$ . Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$ ?
- A. 71m.                      B. 91m.                      C. 79m.                      D. 40m.
- Câu 67:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200\text{ m}$ ,  $CB = 180\text{ m}$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?
- A. 180m.                      B. 224m.                      C. 112m.                      D. 168m.
- Câu 68:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{ cm}$ ;  $BC = 3,7\text{ cm}$ ;  $CA = 7,5\text{ cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



- A. 5,73 cm.                      B. 6,01cm.                      C. 5,85cm.                      D. 4,57cm.
- Câu 69:** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{ m}$ ,  $\widehat{CAD} = 63^\circ$ ;  $\widehat{CBD} = 48^\circ$ . Chiều cao  $h$  của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?



- A. 61,4 m.                      B. 18,5 m.                      C. 60 m.                      D. 18 m.

## CHƯƠNG

## IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VEC TƠ

## BÀI 1,2. ĐỊNH LÝ COSIN – SIN. GIẢI TAM GIÁC

## III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

## DẠNG 1. ĐỊNH LÝ COSIN, ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ COSIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .      B.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .  
C.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$ .      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$ .

Lời giải

**Chọn B**

Theo định lý cosin trong tam giác  $ABC$ , ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $S$  là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .      B.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .  
C.  $S = \frac{abc}{4R}$ .      D.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

Lời giải

**Chọn B**

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a=8, b=10$ , góc  $C$  bằng  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $c$  là?

- A.  $c = 3\sqrt{21}$ .      B.  $c = 7\sqrt{2}$ .      C.  $c = 2\sqrt{11}$ .      D.  $c = 2\sqrt{21}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$ .

**Câu 4:** Cho  $\triangle ABC$  có  $b=6, c=8, \hat{A}=60^\circ$ . Độ dài cạnh  $a$  là:

- A.  $2\sqrt{13}$ .      B.  $3\sqrt{12}$ .      C.  $2\sqrt{37}$ .      D.  $\sqrt{20}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$ .

**Câu 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $B=60^\circ, a=8, c=5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:

- A. 7.      B. 129.      C. 49.      D.  $\sqrt{129}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7.$

**Câu 6:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 9; BC = 8; \hat{B} = 60^0$ . Tính độ dài  $AC$ .

- A.**  $\sqrt{73}$ .                      **B.**  $\sqrt{217}$ .                      **C.** 8.                      **D.**  $\sqrt{113}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo định lý cosin có:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos \widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}.$$

Vậy  $AC = \sqrt{73}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 1$  và  $A = 60^0$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.**  $BC = \sqrt{2}$ .                      **B.**  $BC = 1$ .                      **C.**  $BC = \sqrt{3}$ .                      **D.**  $BC = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo định lý cosin ta có:  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0}$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2.2.1.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^0$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A.** 49.                      **B.**  $\sqrt{97}$                       **C.** 7.                      **D.**  $\sqrt{61}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7.$

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{C} = 150^0, BC = \sqrt{3}, AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ ?

- A.**  $\sqrt{13}$ .                      **B.**  $\sqrt{3}$ .                      **C.** 10.                      **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo định lý cosin trong  $\Delta ABC$  ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos \hat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}. \text{ **Chọn A**}$$

**Câu 10:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của tam giác  $ABC$ . Biết  $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$ . Tính độ dài của  $a$ .

- A.**  $3\sqrt{2}$ .                      **B.**  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .                      **C.**  $\frac{23}{8}$ .                      **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18.$$

Suy ra:  $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

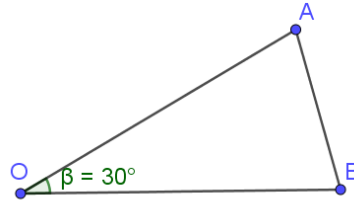
**Câu 11:** Cho  $\widehat{xOy} = 30^0$ . Gọi  $A, B$  là 2 điểm di động lần lượt trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của  $OB$  bằng bao nhiêu?

- A.** 4.                      **B.** 3.                      **C.** 6.                      **D.** 2.



Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí cosin:  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0.$$

Coi phương trình là một phương trình bậc hai ẩn  $OA$ . Để tồn tại giá trị lớn nhất của  $OB$  thì  $\Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4$ .

Vậy  $\max OB = 4$ .

**Câu 12:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A.  $a^2 < ab + ac$ .      B.  $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ .      C.  $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$ .      D.  $ab + bc > b^2$ .

Lời giải

Chọn C

Do  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos \hat{A} \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$  nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có  $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$ ; đáp án A đúng.

Tương tự  $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$ ; mệnh đề D đúng.

Ta có:  $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ ; mệnh đề B đúng.

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 9$  cm. Tính  $\cos A$ .

- A.  $\cos A = -\frac{2}{3}$ .      B.  $\cos A = \frac{1}{2}$ .      C.  $\cos A = \frac{1}{3}$ .      D.  $\cos A = \frac{2}{3}$ .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ . Khi đó:

- A. Góc  $C > 90^\circ$       B. Góc  $C < 90^\circ$   
C. Góc  $C = 90^\circ$       D. Không thể kết luận được gì về góc  $C$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Mà:  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$  suy ra:  $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:

- A.  $A = 30^\circ$ .      B.  $A = 45^\circ$ .      C.  $A = 60^\circ$ .      D.  $A = 75^\circ$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

**Câu 16:** Cho các điểm  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $90^0$ .                      **B.**  $60^0$ .                      **C.**  $45^0$ .                      **D.**  $30^0$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1;3), \overrightarrow{AC} = (9;-3)$ .

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{BAC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0.$$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 24, b = 13, c = 15$ . Tính góc  $A$ ?

- A.**  $33^034'$ .                      **B.**  $117^049'$ .                      **C.**  $28^037'$ .                      **D.**  $58^024'$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^049'.$$

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?

- A.**  $59^049'$ .                      **B.**  $53^07'$ .                      **C.**  $59^029'$ .                      **D.**  $62^022'$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^029'.$$

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  biết độ dài ba cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $a, b, c$  và thỏa mãn hệ thức

$$b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \text{ với } b \neq c. \text{ Khi đó, góc } \widehat{BAC} \text{ bằng}$$

- A.**  $45^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc.$$

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức

$$b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2). \text{ Khi đó góc } \widehat{BAC} \text{ bằng bao nhiêu độ.}$$

- A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Theo bài ra, ta có: } b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $MA:MB:MC = 1:2:3$  khi đó góc  $AMB$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $135^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$ .                      **C.**  $150^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAM} = \frac{1+4x^2-x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2+1}{4x}$$

$$\cos \widehat{MAC} = \frac{1+4x^2-9x^2}{4x} = \frac{1-5x^2}{4x}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x^2+1}{4x}\right)^2 + \left(\frac{1-5x^2}{4x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16.$$

$$\Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} (l) \\ x^2 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x} = \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1\right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AMB} = 135^\circ.$$

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .      **B.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .

**C.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .      **D.**  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

**Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $BC = 15$  cm,  $AC = 12$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là

**A.** 10 cm.      **B.** 9 cm.      **C.** 7,5 cm.      **D.** 8 cm.

Lời giải

**Chọn C**

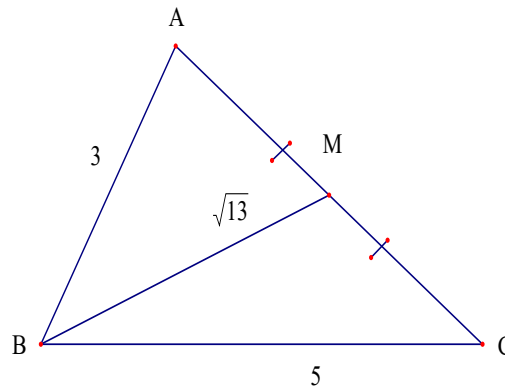
$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $BC = 5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .

**A.**  $\sqrt{11}$ .      **B.** 4.      **C.**  $\frac{9}{2}$ .      **D.**  $\sqrt{10}$ .

Lời giải

**Chọn B**



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến; ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

**Câu 25:** Cho  $\Delta ABC$  vuông ở  $A$ , biết  $\widehat{C} = 30^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính độ dài trung tuyến  $AM$ ?

- A.** 3                                      **B.** 4                                      **C.**  $\frac{5}{2}$                                       **D.**  $\frac{7}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$AM$  là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên  $AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ .

Xét  $\Delta BAC$  có  $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $ABM$  có  $BM = AM$  và  $\widehat{B} = 60^\circ$  suy ra  $\Delta ABM$  là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AB = 3$ .

**Câu 26:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $\sqrt{9}$ .                                      **B.** 9.                                      **C.** 3.                                      **D.**  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$  có  $a = 6 \Rightarrow BC = 6$  mà  $BM = 3$  suy ra  $M$  là trung điểm  $BC$ .

Suy ra:  $AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$ .

**Câu 27:** Gọi  $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$  là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A.**  $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .      **B.**  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .  
**C.**  $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ .      **D.**  $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Câu 28:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2$ ;  $AC = 3$ ;  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

A.  $\frac{12}{5}$ .

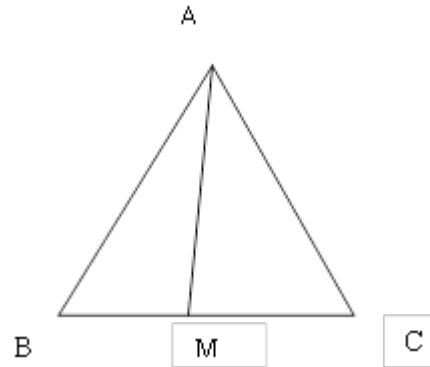
B.  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .

**C.  $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ .**

D.  $\frac{6}{5}$ .

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $M$  là chân đường phân giác góc **A.**

Ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$ .

Lại có  $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ .

Suy ra  $BM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ .

Áp dụng định lý cosin trong tam giác  $ABM$  ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos \widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{108}{25}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

## CÁCH 2

Gọi  $M$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ .

Vì đoạn thẳng  $AM$  chia tam giác  $ABC$  thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin \widehat{BAM} + \frac{1}{2}AC.AM.\sin \widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB + AC).\sin 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Vậy  $AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ .

## DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:

A.  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

B.  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .

**C.  $b \sin B = 2R$ .**

D.  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

**Câu 30:** Cho  $\Delta ABC$  với các cạnh  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Gọi  $R, r, S$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác  $ABC$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A.  $S = \frac{abc}{4R}$ .                      B.  $R = \frac{a}{\sin A}$ .
- C.  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .              D.  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ .

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

**Câu 31:** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A.  $R = 4$ .                      B.  $R = 1$ .                      C.  $R = 2$ .                      D.  $R = 3$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ .

**Câu 32:** Trong mặt phẳng, cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$  cm, góc  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là

- A.  $2\sqrt{6}$ .                      B.  $2 + 2\sqrt{3}$ .                      C.  $2\sqrt{3} - 2$ .                      D.  $\sqrt{6}$ .

Lời giải

Chọn A

Ta có  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$ .

**Câu 33:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 5$ ;  $\hat{A} = 40^\circ$ ;  $\hat{B} = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?

- A. 3,7.                      B. 3,3.                      C. 3,5.                      D. 3,1.

Lời giải

Chọn B

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Áp dụng định lý sin:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3$ .

**Câu 34:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .
- C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .                      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

- Câu 35:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 16,8$ ;  $\widehat{B} = 56^{\circ}13'$ ;  $\widehat{C} = 71^{\circ}$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?  
**A.** 29,9.                                      **B.** 14,1.                                      **C.** 17,5.                                      **D.** 19,9.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \widehat{A} = 180^{\circ} - 71^{\circ} - 56^{\circ}13' = 52^{\circ}47'$ .

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^{\circ}}{\sin 52^{\circ}47'} = 19,9$ .

- Câu 36:** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 68^{\circ}12'$ ,  $\widehat{B} = 34^{\circ}44'$ ,  $AB = 117$ . Tính  $AC$ ?  
**A.** 68.                                      **B.** 168.                                      **C.** 118.                                      **D.** 200.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \widehat{C} = 180^{\circ} - 68^{\circ}12' - 34^{\circ}44' = 77^{\circ}4'$ .

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^{\circ}44'}{\sin 77^{\circ}4'} = 68$ .

### DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

- Câu 37:** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .                      **B.**  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .                      **C.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .                      **D.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ .

- Câu 38:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 30^{\circ}$ . Diện tích hình thoi  $ABCD$  là  
**A.**  $\frac{a^2}{4}$ .                                      **B.**  $\frac{a^2}{2}$ .                                      **C.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                                      **D.**  $a^2$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}a^2$ .

- Câu 39:** Tính diện tích tam giác  $ABC$  biết  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 6$ .

- A.**  $\sqrt{56}$ .                                      **B.**  $\sqrt{48}$ .                                      **C.** 6.                                      **D.** 8.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7$ .

Vậy diện tích tam giác  $ABC$  là:

$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{7(7 - 3)(7 - 6)(7 - 5)} = \sqrt{56}$ .

- Câu 40:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 10$ . Diện tích  $S$  của tam giác trên là:

- A.** 48.                                      **B.** 24.                                      **C.** 12.                                      **D.** 30.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: Nửa chu vi  $\Delta ABC$ :  $p = \frac{a + b + c}{2}$ .

Áp dụng công thức Hê-rông:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$ .

**Câu 41:** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$ . Diện tích của tam giác là:

- A.**  $5\sqrt{3}$ .                      **B.** 5.                      **C.** 10.                      **D.**  $10\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5$ .

**Câu 42:** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A.** 84.                      **B.**  $\sqrt{84}$ .                      **C.** 42.                      **D.**  $\sqrt{168}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ .

**Câu 43:** Cho các điểm  $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$ . Diện tích  $\triangle ABC$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $\frac{13}{2}$ .                      **B.** 13.                      **C.** 26.                      **D.**  $\frac{13}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\overline{AB} = (-3;5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$ ,  $\overline{AC} = (-1;6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$ ,  $\overline{BC} = (2;1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$ .

Mặt khác  $p = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{13}{2}$ .

**Câu 44:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$ . Diện tích  $\triangle ABC$  là

- A.** 12.                      **B.** 6.                      **C.**  $6\sqrt{2}$ .                      **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $\overline{AB} = (2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$ ,  $\overline{AC} = (5;1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$ ,  $\overline{BC} = (3;3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$ .

Mặt khác  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$ .

Suy ra:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 6$ .

**Câu 45:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4, b = 6, c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:

- A.**  $9\sqrt{15}$ .                      **B.**  $3\sqrt{15}$ .                      **C.** 105.                      **D.**  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$ .

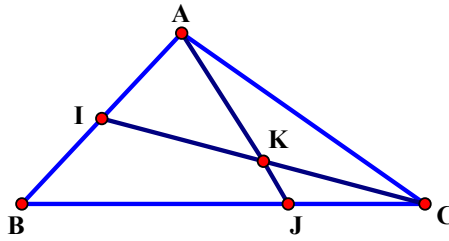
**Câu 46:** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 2$ ;  $BC = 3$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính chu vi và diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.**  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3}{2}$ .                      **B.**  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .



- C.  $5\sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $5 + \sqrt{19}$  và  $\frac{3}{2}$ .

Lời giải



**Chọn B**

Ta có:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$ .

Suy ra  $AC = \sqrt{7}$ .

Chu vi tam giác  $ABC$  là  $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

- Câu 47:** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$ . Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  bằng  
**A.** 72.      **B.** 144.      **C.** 54.      **D.** 108.

Lời giải 1

**Chọn A**

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có  $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$ , áp dụng công thức He-ron ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

**Cách 2:**

Đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  Suy ra  $S_{ABC} = 72$

- Câu 48:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  có  $b=7; c=5; \cos A = \frac{3}{5}$ . Độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $\Delta ABC$  là.

- A.**  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .      **B.** 8.      **C.**  $8\sqrt{3}$       **D.**  $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq \hat{A} \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 49:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ;  $AC = 4a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ?

- A.  $S = 8a^2$ .      B.  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .      C.  $S = a^2\sqrt{3}$ .      D.  $S = 4a^2$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích của tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

**Câu 50:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } ABC. \text{ Bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 51:** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng

- A. 12.      B. 3.      C. 6.      D. 24.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là  $p = \frac{12}{2}$ ; bán kính đường tròn

nội tiếp bằng 1, tức là ta có:  $r = 1$ .

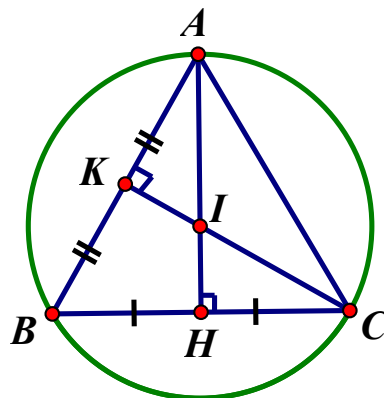
Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = p \cdot r = 6 \cdot 1 = 6$ .

**Câu 52:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A.  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ .      C.  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{6a}{\sqrt{3}}$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh  $AB, BC$ ;

I là giao điểm của  $AH$  và  $CK$ .

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Ta có:  $AH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Do đó:  $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 53:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{6}$ ,  $AC = 2$  và  $AB = \sqrt{3} + 1$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng:

- A.  $\sqrt{5}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      **C.  $\sqrt{2}$ .**                      D. 2.

Lời giải

**Chọn C**

Áp dụng định lý cosin ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$  suy ra  $A = 60^\circ$ .

Áp dụng định lý sin ta có  $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$ .

**Câu 54:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1.**                      B.  $\frac{8}{9}$ .                      C.  $\frac{4}{5}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Vì  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp  $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1$ .

**Câu 55:** Cho  $\triangle ABC$  có  $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:

- A. 8,125.**                      B. 130.                      C. 8.                      D. 8,5.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$ .

**Câu 56:** Cho  $\triangle ABC$  có  $S = 10\sqrt{3}$ , nửa chu vi  $p = 10$ . Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp  $r$  của tam giác trên là:

- A. 3.    B. 2.    C.  $\sqrt{2}$ .    D.  $\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$ .

**Câu 57:** Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16.    B. 8.    C. 4.    D.  $4\sqrt{2}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42$ .

$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8$ .

**Câu 58:** Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A.  $\frac{65}{8}$ .    B. 40.    C. 32,5.    D.  $\frac{65}{4}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344$ .

Mà  $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2}$ .

**Câu 59:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6.    B. 8.    C.  $\frac{13}{2}$ .    D.  $\frac{11}{2}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}$ .

**Câu 60:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2.    B.  $2\sqrt{2}$ .    C.  $2\sqrt{3}$ .    D. 3.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$ . Mà  $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.5.12 = 30$ .

Mặt khác  $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ .

**Câu 61:** Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5.    B.  $4\sqrt{2}$ .    C.  $5\sqrt{2}$ .    D. 6.

Lời giải

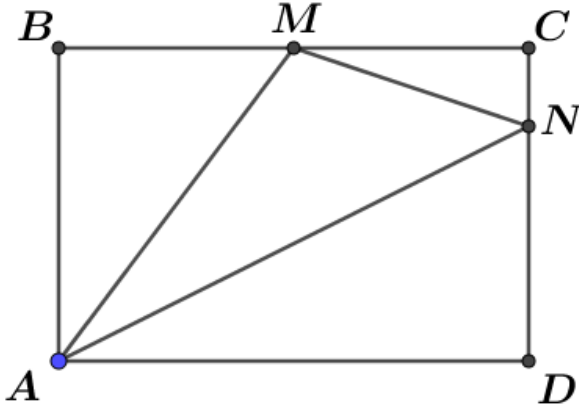
**Chọn A**

Ta có:  $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5$ .

- Câu 62:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = 4, BC = 6$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $ND = 3NC$ . Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  bằng
- A.  $3\sqrt{5}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

$$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác } AMN \text{ là: } R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

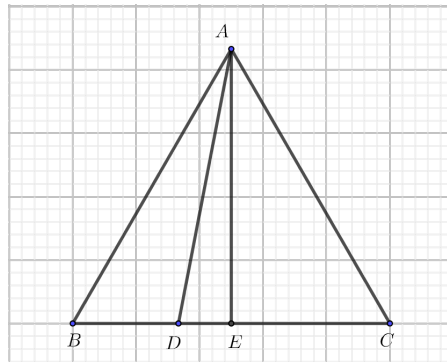
- Câu 63:** Cho tam giác đều  $ABC$ ; gọi  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$ . Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ADC$ . Tính tỉ số  $\frac{R}{r}$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$ .                      C.  $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$ .                      D.  $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$ . Do đó  $DC = 2DB$ .



Gọi  $S$  là diện tích của tam giác  $ADC$  và  $E$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } \begin{cases} S = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} S = \frac{AD+DC+AC}{2} \cdot r = \frac{5+\sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3 \sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5+\sqrt{7})ar \cdot 2a^3 \sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R}$$

$$\text{Hay } \frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})}{9}$$

#### DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

**Câu 64:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250m, CB = 120m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 266m.                      B. 255m.                      C. 166m.                      D. 298m.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$ .

**Câu 65:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30km/h$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40km/h$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $km$ ?

- A. 13.                      B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30 \cdot 2 = 60km$ .

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40 \cdot 2 = 80km$ .

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .

**Câu 66:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80m$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$ . Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$ ?

- A. 71m.                      B. 91m.                      C. 79m.                      D. 40m.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: Trong tam giác vuông  $CDA$ :  $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$ .

Trong tam giác vuông  $CDB$ :  $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$ .

Suy ra: khoảng cách  $AB = 116,7 - 25,7 = 91m$ .

**Câu 67:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200m, CB = 180m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

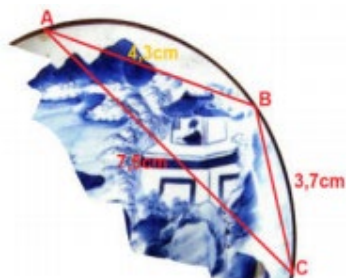
- A. 180m.                      B. 224m.                      C. 112m.                      D. 168m.

Lời giải

Chọn A

Ta có:  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^{\circ}16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$ .

**Câu 68:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{ cm}$ ;  $BC = 3,7\text{ cm}$ ;  $CA = 7,5\text{ cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



A. 5,73 cm.

B. 6,01 cm.

C. 5,85 cm.

D. 4,57 cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính  $R$  của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Nửa chu vi của tam giác  $ABC$  là:  $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{4}\text{ cm}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2\text{ cm}^2$ .

Mà  $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73\text{ cm}$ .

**Câu 69:** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{ m}$ ,  $\widehat{CAD} = 63^{\circ}$ ;  $\widehat{CBD} = 48^{\circ}$ . Chiều cao  $h$  của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 61,4 m.

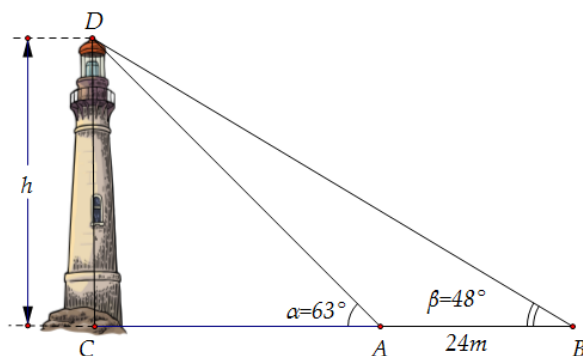
B. 18,5 m.

C. 60 m.

D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có  $\widehat{CAD} = 63^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^{\circ} \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^{\circ} - (117^{\circ} + 48^{\circ}) = 15^{\circ}$

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABD$  ta có:  $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB.\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  nên có:  $\sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD.\sin \widehat{CBD}$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4m$$



CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTO

## BÀI 3. KHÁI NIỆM VECTO



### I. LÝ THUYẾT.

#### I. KHÁI NIỆM VECTO

Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu chọn điểm  $A$  làm *điểm đầu*, điểm  $B$  làm *điểm cuối* thì *đoạn thẳng*  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta nói  $AB$  là một *đoạn thẳng có hướng*.

**1. Định nghĩa:** Vecto là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.



#### 2. Kí hiệu

Vecto có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.

Vecto còn được kí hiệu là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$  khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

**3. Độ dài vectơ:** Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ , như vậy  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

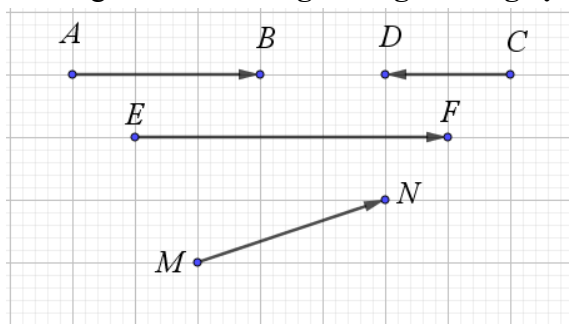
Vecto có độ dài bằng 1 gọi là *vecto đơn vị*.

#### II. HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG

**1. Giá của vectơ:** Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là *giá* của vectơ đó.

**2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:** Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.



#### 3. Nhận xét

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

**III. HAI VECTO BẰNG NHAU:**

Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Chú ý**

+ Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

+ Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}$ .

**IV. VECTO – KHÔNG**

Vecto – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy  $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \dots$  và  $\vec{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$ .



**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**Câu 1:** Cho  $A, B, C$  là ba điểm thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau:

$$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{CB}$$

**Câu 2:** Cho đoạn thẳng  $MN$  có trung điểm là  $I$ .

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm  $M, N, I$ .

b) vectơ nào bằng  $\vec{MI}$ ? Bằng  $\vec{NI}$ ?

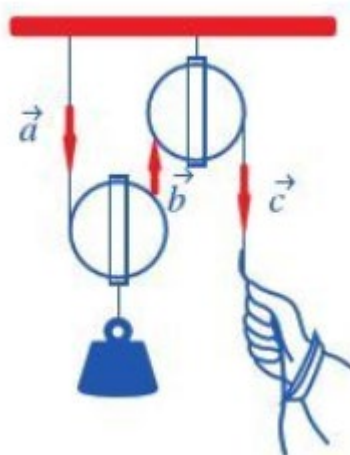
**Câu 3:** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Tìm vectơ:

a) Cùng hướng với  $\vec{AB}$

b) Ngược hướng với  $\vec{AB}$

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh bằng  $3\text{ cm}$ . Tính độ dài của các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$

**Câu 5:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (hình)



a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.

b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**DẠNG 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTO; PHƯƠNG, HƯỚNG CỦA VECTO; ĐỘ DÀI CỦA VECTO**

### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- + Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.
- + Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

- Câu 1:** Với hai điểm phân biệt  $A, B$  có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ hai điểm trên?
- Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ ?
- Câu 3:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?
- Câu 4:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?
- Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ  $\overrightarrow{AR}$
- Câu 6:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?
- Câu 7:** Số vectơ (khác vectơ  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước?
- Câu 8:** Trên mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không, mà có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?
- Câu 9:** Cho  $n$  điểm phân biệt. Hãy xác định số vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối thuộc  $n$  điểm trên?
- Câu 10:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm cuối là các đỉnh của lục giác là bao nhiêu?
- Câu 11:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Tìm các cặp vectơ cùng hướng?
- Câu 12:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vectơ khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .
- Câu 13:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:
- Câu 14:** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  sao cho:
- a)  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .
  - b)  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\vec{a}$ .
- Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

- Câu 16:** Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có  $AB = AC = 4$ . Tính  $|\overrightarrow{BC}|$
- Câu 17:** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh 3. Giá trị của  $|\overrightarrow{AC}|$  là bao nhiêu?
- Câu 18:** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính  $|\overrightarrow{CB}|$
- Câu 19:** Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền  $BC = 12$ . Tính  $|\overrightarrow{GM}|$  (với M là trung điểm của BC)
- Câu 20:** Cho hình chữ nhật ABCD, có  $AB = 4$  và  $AC = 5$ . Tìm độ dài vectơ  $\overrightarrow{AC}$ .

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho tứ giác ABCD. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?  
**A.** 4.                               **B.** 6.                               **C.** 8.                               **D.** 12.
- Câu 2:** Cho 5 điểm A, B, C, D, E có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?  
**A.** 4                               **B.** 20                               **C.** 10                               **D.** 12
- Câu 3:** Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với  $\overrightarrow{AB}$ ?  
**A.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$                                **B.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$                                **C.**  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$                                **D.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$
- Câu 4:** Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  
**A.** 4.                               **B.** 6.                               **C.** 7.                               **D.** 9.
- Câu 5:** Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Xác định các vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .  
**A.**  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$                                **B.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$   
**C.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$                                **D.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$
- Câu 6:** Cho hai vectơ khác vectơ - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác  $\vec{0}$  cùng phương với cả hai vectơ đó?  
**A.** 2.                               **B.** 1.                               **C.** không có.                               **D.** vô số.
- Câu 7:** Cho hình bình hành ABCD. Số vectơ khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành ABCD là  
**A.** 1.                               **B.** 2.                               **C.** 3.                               **D.** 4.
- Câu 8:** Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số vectơ khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu điểm cuối là đỉnh của lục giác hoặc tâm O và cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OC}$  là  
**A.** 3.                               **B.** 4.                               **C.** 8.                               **D.** 9.
- Câu 9:** Cho tứ giác ABCD. Số các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác là  
**A.** 4.                               **B.** 6.                               **C.** 8.                               **D.** 12.
- Câu 10:** Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?  
**A.** 3.                               **B.** 6.                               **C.** 4.                               **D.** 9.

- Câu 11:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai?  
**A.** Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. **B.**  $DA = BC$ .  
**C.**  $\overline{AC} = \overline{BD}$ . **D.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
- Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$ . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?  
**A.**  $\overline{AB}$  và  $\overline{MB}$ . **B.**  $\overline{MN}$  và  $\overline{CB}$ . **C.**  $\overline{MA}$  và  $\overline{MB}$ . **D.**  $\overline{AN}$  và  $\overline{CA}$ .
- Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ?  
**A.**  $ABCD$  là vuông. **B.**  $ABDC$  là hình bình hành.  
**C.**  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm. **D.**  $AB = CD$ .
- Câu 14:** Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?  
**A.**  $\overline{OB} = \overline{DO}$ . **B.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ . **C.**  $\overline{OA} = \overline{OC}$ . **D.**  $\overline{CB} = \overline{DA}$ .
- Câu 15:** Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:  
**A.**  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vectơ. **B.**  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vectơ.  
**C.**  $\overline{AA} = \vec{0}$ . **D.**  $|\overline{AB}| > 0$ .
- Câu 16:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , có  $AB = 4$  và  $AC = 5$ . Tìm độ dài vectơ  $\overline{BC}$ .  
**A.** 3. **B.**  $\sqrt{41}$ . **C.** 9. **D.**  $\pm 3$ .
- Câu 17:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, BC = 4$ . Tính độ dài của vectơ  $\overline{CA}$ .  
**A.**  $|\overline{CA}| = 5$ . **B.**  $|\overline{CA}| = 25$ . **C.**  $|\overline{CA}| = 7$ . **D.**  $|\overline{CA}| = \sqrt{7}$ .
- Câu 18:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 1. Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $|\overline{AH}|$ .  
**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **B.** 1. **C.** 2. **D.**  $\sqrt{3}$ .
- Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khi đó  $|\overline{AM}|$  bằng:  
**A.**  $2a$ . **B.**  $2a\sqrt{3}$ . **C.**  $4a$ . **D.**  $a\sqrt{3}$ .
- Câu 20:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Tính  $|\overline{OD}|$ .  
**A.**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . **B.**  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ . **C.**  $a$ . **D.**  $\frac{a^2}{2}$ .
- Câu 21:** Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
**A.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.  
**B.** Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.  
**C.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.  
**D.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.
- Câu 22:** Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là  $A, B$  hoặc  $C$ ?  
**A.** 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.
- Câu 23:** Vectơ có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là:  
**A.**  $AB$ . **B.**  $\overline{AB}$ . **C.**  $|\overline{AB}|$ . **D.**  $\overline{BA}$ .

**CHUYÊN ĐỀ IV – TOÁN 10 – CHƯƠNG IV – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTƠ**

- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$ . Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh  $A, B, C$ ?
- A. 3.                                      B. 6.                                      C. 4.                                      D. 2.
- Câu 25:** Từ hai điểm phân biệt  $A, B$  xác định được bao nhiêu vectơ khác  $\vec{0}$ ?
- A. 3.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 4.
- Câu 26:** Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ .
- B. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
- C. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.
- D. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Câu 27:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  là
- A. 10.                                      B. 14.                                      C. 8.                                      D. 12.
- Câu 28:** Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.
- B. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.
- C. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.
- D. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
- Câu 29:** Phát biểu nào sau đây **đúng**?
- A. Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.
- B. Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.
- C. Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.
- D. Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
- Câu 30:** Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là
- A. Hai vectơ cùng hướng.                                      B. Hai vectơ cùng phương.
- C. Hai vectơ đối nhau.                                      D. Hai vectơ bằng nhau.
- Câu 31:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện  $ABCD$ ?
- A. 12.                                      B. 4.                                      C. 10.                                      D. 8.
- Câu 32:** Phát biểu nào sau đây **sai**?
- A. Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.
- B. Độ dài của véc tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc tơ đó.
- C. Hai véc tơ cùng phương thì cùng hướng.
- D. Véc tơ là đoạn thẳng có hướng.
- Câu 33:** Cho 3 điểm  $M, N, P$  thẳng hàng trong đó  $N$  nằm giữa  $M$  và  $P$ . khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\vec{MN}$  và  $\vec{MP}$ .                                      B.  $\vec{MN}$  và  $\vec{PN}$ .                                      C.  $\vec{NM}$  và  $\vec{NP}$ .                                      D.  $\vec{MP}$  và  $\vec{PN}$ .
- Câu 34:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\vec{MP}$  và  $\vec{PN}$ .                                      B.  $\vec{MN}$  và  $\vec{PN}$ .                                      C.  $\vec{NM}$  và  $\vec{NP}$ .                                      D.  $\vec{MN}$  và  $\vec{MP}$ .

**DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU**



## 1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overline{AB} = \overline{DC}$  hoặc  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .



## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

- Câu 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hãy liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.
- Câu 2:** Cho vectơ  $\overline{AB}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .
- Câu 3:** Cho tứ giác đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overline{MN} = \overline{QP}$ .
- Câu 4:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ?
- Câu 5:** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Xác định điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm  $AB$ .
- Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overline{EF} = \overline{CD}$ .
- Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$ . Chứng minh rằng  $\overline{AE} = \overline{BD}$ .
- Câu 8:** Cho  $\triangle ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CA$ . Tìm điểm  $I$  sao cho  $\overline{NP} = \overline{MI}$ .
- Câu 9:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overline{MN} = \overline{QP}; \overline{NP} = \overline{MQ}$ .
- Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$ .  $AN$  và  $CM$  lần lượt cắt  $BD$  tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ .



## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:
- A.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.  
**B.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.  
**C.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.  
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.
- Câu 2:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm  $O$  sao cho bằng với  $\overline{AB}$ ?
- A.**  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{FD}$ .      **B.**  $\overline{FO}, \overline{AC}, \overline{ED}$ .      **C.**  $\overline{BO}, \overline{OC}, \overline{ED}$ .      **D.**  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{ED}$ .
- Câu 3:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.**  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .      **B.**  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$  cùng phương.  
**C.**  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  ngược hướng.      **D.**  $\overline{CA}$  và  $\overline{CB}$  cùng hướng.
- Câu 4:** Cho tam giác đều cạnh  $2a$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A.**  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .      **B.**  $\overline{AB} = 2a$ .      **C.**  $|\overline{AB}| = 2a$ .      **D.**  $\overline{AB} = AB$ .
- Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?
- A.**  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .      **B.**  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .      **C.**  $\overline{AO} = \overline{OC}$ .      **D.**  $\overline{OD} = \overline{BO}$ .

- Câu 6:** Cho vectơ  $\overline{AB} \neq \vec{0}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .  
**A.** 1                                      **B.** 2                                      **C.** 0                                      **D.** Vô số
- Câu 7:** Chọn câu dưới đây để mệnh đề sau là mệnh đề đúng: Nếu có  $\overline{AB} = \overline{AC}$  thì  
**A.** Tam giác  $ABC$  cân.                                      **B.** Tam giác  $ABC$  đều.  
**C.**  $A$  là trung điểm đoạn  $BC$ .                                      **D.** Điểm  $B$  trùng với điểm  $C$ .
- Câu 8:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện cần và đủ để  $\overline{AB} = \overline{CD}$  là?  
**A.**  $ABCD$  là hình vuông.                                      **B.**  $ABDC$  là hình bình hành.  
**C.**  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm.                                      **D.**  $AB = CD$ .
- Câu 9:** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{AM} = \overline{PC}$  và  $\overline{QB} = \overline{NC}$                                       **B.**  $\overline{AC} = \overline{QN}$  và  $\overline{AM} = \overline{PC}$   
**C.**  $\overline{AB} = \overline{CN}$  và  $\overline{AP} = \overline{QN}$                                       **D.**  $\overline{AB'} = \overline{BN}$  và  $\overline{MN} = \overline{BC}$
- Câu 10:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây sai?  
**A.**  $\overline{AB} = \overline{ED}$ .                                      **B.**  $|\overline{AB}| = |\overline{AF}|$ .                                      **C.**  $\overline{OD} = \overline{BC}$ .                                      **D.**  $\overline{OB} = \overline{OE}$ .
- Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng véctơ  $\overline{MN}$  (không kể véctơ  $\overline{MN}$ )?  
**A.** 1.                                      **B.** 4.                                      **C.** 2.                                      **D.** 3.
- Câu 12:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{AD} = \overline{CB}$ .                                      **B.**  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .                                      **C.**  $\overline{AB} = \overline{AD}$ .                                      **D.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
- Câu 13:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi  
**A.** Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.  
**B.** Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.  
**C.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.  
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.
- Câu 14:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?  
**A.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .                                      **B.**  $\overline{OA} = \overline{CO}$ .                                      **C.**  $\overline{OB} = \overline{DO}$ .                                      **D.**  $\overline{CB} = \overline{AD}$ .
- Câu 15:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng với  $\overline{BA}$  là  
**A.**  $\overline{OF}, \overline{ED}, \overline{OC}$ .                                      **B.**  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .                                      **C.**  $\overline{CA}, \overline{OF}, \overline{DE}$                                       **D.**  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{OC}$ .
- Câu 16:** Cho lục giác đều  $ABCEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overline{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  
**A.** 2.                                      **B.** 3.                                      **C.** 4.                                      **D.** 6.
- Câu 17:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng vectơ  $\overline{BA}$  là:  
**A.**  $\overline{OF}, \overline{ED}, \overline{OC}$ .                                      **B.**  $\overline{CA}, \overline{OF}, \overline{DE}$ .                                      **C.**  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .                                      **D.**  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{OC}$ .
- Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng véctơ  $\overline{MN}$ ?  
**A.** 1.                                      **B.** 4.                                      **C.** 2.                                      **D.** 3
- Câu 19:** Cho hình bình hành tâm  $O$ . Hãy chọn phát biểu sai  
**A.**  $\overline{OC} = \overline{OA}$ .                                      **B.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .                                      **C.**  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .                                      **D.**  $\overline{BO} = \overline{OD}$ .



- Câu 20:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số vectơ bằng vectơ  $\overline{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  
**A.** 6.                      **B.** 3.                      **C.** 2.                      **D.** 4.
- Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  có trục tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ ;  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?  
**A.**  $\overline{OA} = \overline{HE}$ .                      **B.**  $\overline{OH} = \overline{DE}$ .                      **C.**  $\overline{AH} = \overline{OE}$ .                      **D.**  $\overline{BH} = \overline{CD}$ .

**DẠNG 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ ĐẲNG THỨC VECTO**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Sử dụng: Hai véc tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài và cùng hướng.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{MP} = \overline{CN}$ . Hãy xác định vị trí điểm  $N$ .
- Câu 2:** Cho hình thang  $ABCD$  với đáy  $BC = 2AD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $BC, MC, CD, AB$  và  $E$  là điểm thỏa mãn  $\overline{BN} = \overline{QE}$ . Xác định vị trí điểm  $E$ .
- Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AN} = \overline{GC}$ . Hãy xác định vị trí điểm  $N$ .
- Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $N, P$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AD, AB$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{AP} = \overline{NM}$ . Xác định vị trí điểm  $M$ .
- Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{AO} = \overline{OM}$ . Xác định vị trí điểm  $M$ .
- Câu 6:** Cho  $\overline{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Xác định điểm  $D$  thỏa  $|\overline{AB}| = |\overline{AD} - \overline{AC}|$ ?
- Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{MN} = \overline{BP}$ . Chọn khẳng định đúng.  
**A.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $MC$ .                      **B.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $BP$ .  
**C.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $AC$ .                      **D.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $PC$ .
- Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  và  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABDC$ .  
**B.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ .  
**C.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ADBC$ .  
**D.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ .
- Câu 3:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{FO}$ . Mệnh đề nào sau đây sai?  
**A.**  $O$  là tâm của lục giác  $ABCDEF$ .                      **B.**  $O$  là trung điểm của đoạn  $FC$ .  
**C.**  $EDCO$  là hình bình hành.                      **D.**  $O$  là trung điểm của đoạn  $ED$ .
- Câu 4:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{DC}$  và các mệnh đề.  
(I)  $ABCD$  là hình bình hành.  
(II)  $D$  nằm giữa  $B$  và  $C$ .

**CHUYÊN ĐỀ IV – TOÁN 10 – CHƯƠNG IV – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTO**

- (III)  $C$  nằm trên đường thẳng đi qua điểm  $D$  và song song hoặc trùng với đường thẳng  $AB$ .
- (IV) Bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng.
- Số mệnh đề đúng?
- A.** 1.                           **B.** 2.                           **C.** 3.                           **D.** 4.
- Câu 5:** Cho hình thang  $ABCD$  với đáy  $AB = 2CD$ . Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CD, DA$  và  $M$  là điểm thỏa mãn  $\vec{DC} = \vec{MB}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A.**  $M$  là trung điểm của  $PN$ .                           **B.**  $M$  là trung điểm của  $AN$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm của  $AB$ .                           **D.**  $M$  là trung điểm của  $QN$ .
- Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Để điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  phải thỏa mãn mệnh đề nào?
- A.**  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.  
**B.**  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
**C.**  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.  
**D.**  $M$  thuộc trung trực của  $AB$ .
- Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MD}$  là?
- A.** tập rỗng.                           **B.** một đoạn thẳng.                           **C.** một đường tròn.                           **D.** một đường thẳng.
- Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{BM} - \vec{BA}|$  là?
- A.** trung trực đoạn  $BC$ .                           **B.** đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $BC$ .  
**C.** đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$ .                           **D.** đường thẳng  $AB$ .
- Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}$ . Khi đó điểm  $M$  là:
- A.** Trung điểm của  $AD$ .                           **B.** Trung điểm của  $AC$ .  
**C.** Điểm  $C$ .                           **D.** Trung điểm của  $AB$ .
- Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi
- A.**  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .                           **B.**  $AB = CD$ .                           **C.**  $\vec{AC} = \vec{BD}$ .                           **D.**  $\vec{AB} = \vec{CD}$ .
- Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.**  $|\vec{AM}| = a\sqrt{3}$ .                           **B.**  $\vec{AM} = a$ .                           **C.**  $\vec{MB} = \vec{MC}$ .                           **D.**  $\vec{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 12:** Cho  $\vec{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ ?
- A.** Vô số.                           **B.** 1 điểm.                           **C.** 2 điểm.                           **D.** Không có điểm nào.
- Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?
- A.**  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ .                           **B.**  $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$ .                           **C.**  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ .                           **D.**  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ .

CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTO

## BÀI 3. KHÁI NIỆM VECTO



### I. LÝ THUYẾT.

#### I. KHÁI NIỆM VECTO

Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu chọn điểm  $A$  làm *điểm đầu*, điểm  $B$  làm *điểm cuối* thì *đoạn thẳng*  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta nói  $AB$  là một *đoạn thẳng có hướng*.

**1. Định nghĩa:** Vecto là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.



#### 2. Kí hiệu

Vecto có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.

Vecto còn được kí hiệu là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$  khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

**3. Độ dài vectơ:** Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ , như vậy  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

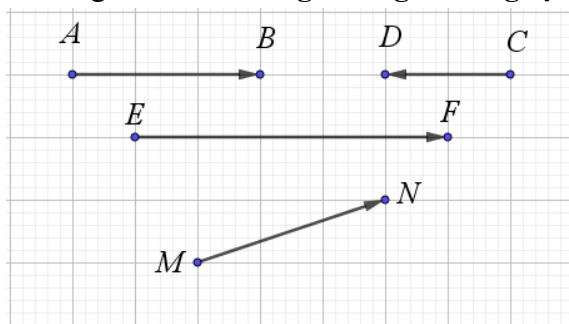
Vecto có độ dài bằng 1 gọi là *vecto đơn vị*.

#### II. HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG

**1. Giá của vectơ:** Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là *giá* của vectơ đó.

**2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:** Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.



#### 3. Nhận xét

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

**III. HAI VECTO BẰNG NHAU:**

Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Chú ý**

+ Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

+ Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}$ .

**IV. VECTO – KHÔNG**

Vecto – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy  $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \dots$  và  $\vec{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$ .



**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**Câu 1:** Cho  $A, B, C$  là ba điểm thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau:

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{CB}$

**Lời giải**



Do các vectơ đều nằm trên đường thẳng  $AB$  nên các vectơ này đều cùng phương với nhau.

Dễ thấy:

Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$  cùng hướng (từ trái sang phải.)

Các vectơ  $\vec{BA}, \vec{CA}, \vec{CB}$  cùng hướng (từ phải sang trái.)

Do đó, các cặp vectơ cùng hướng là:

$\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{BC}$ ;  $\vec{AB}$  và  $\vec{BC}$ ;  $\vec{BA}$  và  $\vec{CA}$ ;  $\vec{BA}$  và  $\vec{CB}$ ;  $\vec{CA}$  và  $\vec{CB}$

Các cặp vectơ ngược hướng là:

$\vec{AB}$  và  $\vec{BA}$ ;  $\vec{AB}$  và  $\vec{CA}$ ;  $\vec{AB}$  và  $\vec{CB}$

$\vec{AC}$  và  $\vec{BA}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{CA}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{CB}$ ;

$\vec{BC}$  và  $\vec{BA}$ ;  $\vec{BC}$  và  $\vec{CA}$ ;  $\vec{BC}$  và  $\vec{CB}$

**Câu 2:** Cho đoạn thẳng  $MN$  có trung điểm là  $I$ .

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm  $M, N, I$ .

b) vectơ nào bằng  $\vec{MI}$ ? Bằng  $\vec{NI}$ ?

Lời giải



a) Các vectơ đó là:  $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{NI}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}$ .

b) Dễ thấy:

+) vectơ  $\overrightarrow{IN}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{MI}$ . Hơn nữa:

$$|\overrightarrow{IN}| = IN = MI = |\overrightarrow{MI}|$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MI}$$

+) vectơ  $\overrightarrow{IM}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{NI}$ . Hơn nữa:

$$|\overrightarrow{IM}| = IM = NI = |\overrightarrow{NI}|$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NI}$$

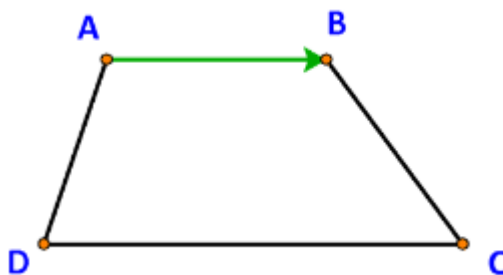
Vậy  $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MI}$  và  $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NI}$

**Câu 3:** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Tìm vectơ:

a) Cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$

b) Ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$

Lời giải



Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là đường thẳng  $AB$ .

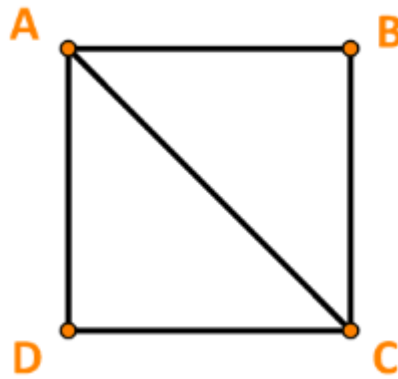
Các vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là:  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{DC}$

a) vectơ  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) vectơ  $\overrightarrow{CD}$  ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh bằng  $3\text{ cm}$ . Tính độ dài của các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

Lời giải

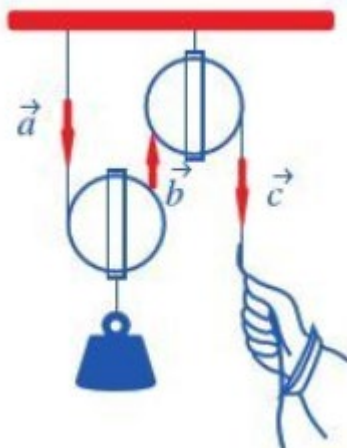


Ta có:  $|\overrightarrow{AB}| = AB$  và  $|\overrightarrow{AC}| = AC$ .

Mà  $AB = 3, AC = 3\sqrt{2}$

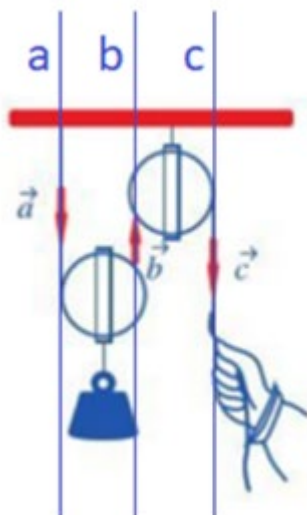
$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3; |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}$

**Câu 5:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (hình)



- Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.
- Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

**Lời giải**



Gọi  $a, b, c$  là các đường thẳng lần lượt chứa các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Khi đó:  $a, b, c$  lần lượt là giá của các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a) Dễ thấy:  $a // b // c$

$\Rightarrow$  Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng phương với nhau.

Vậy các cặp vectơ cùng phương là:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}, \vec{a}$  và  $\vec{c}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

b) Quan sát ba vectơ, ta thấy: vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng xuống còn vectơ  $\vec{b}$  hướng lên trên.

Vậy vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng, vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng, vectơ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**DẠNG 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTO; PHƯƠNG, HƯỚNG CỦA VECTO; ĐỘ DÀI CỦA VECTO**

### 1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.

+ Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

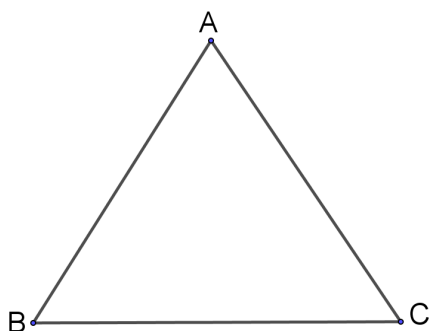
**Câu 1:** Với hai điểm phân biệt  $A, B$  có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ hai điểm trên?

**Lời giải**

Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ ?

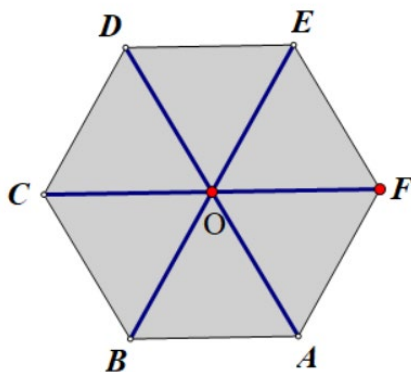
**Lời giải**



Ta có 6 vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 3:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

**Lời giải**



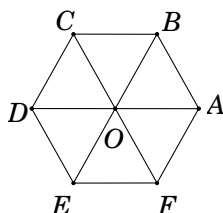
Các vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  là:

$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$ .

**Câu 4:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

**Lời giải**

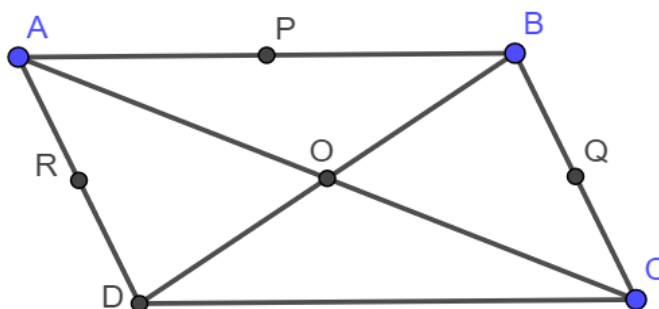
Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .



**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ  $\overrightarrow{AR}$

**Lời giải**





Có 3 vectơ là  $\overrightarrow{RD}$ ;  $\overrightarrow{BQ}$ ;  $\overrightarrow{QC}$ ,  $\overrightarrow{PO}$ .

**Câu 6:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

**Lời giải**

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Khi có 4 điểm  $A, B, C, D$  ta có 4 cách chọn điểm đầu và 3 cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có  $3 \cdot 4 = 12$  cách xác định số vectơ khác  $\vec{0}$  thuộc 4 điểm trên.

**Câu 7:** Số vectơ (khác vectơ  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước?

**Lời giải**

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Khi có 7 điểm ta có 7 cách chọn điểm đầu và 6 cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có  $7 \cdot 6 = 42$  cách xác định số vectơ khác  $\vec{0}$  thuộc 7 điểm trên.

**Câu 8:** Trên mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, mà có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?

**Lời giải**

Xét tập  $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ . Với mỗi cách chọn hai phần tử của tập  $X$  và sắp xếp theo một thứ tự ta được một vectơ thỏa mãn yêu cầu.

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu tương ứng cho ta 30 phần tử thuộc tập  $X$ .

Vậy số các vectơ thỏa mãn yêu cầu bằng 30.

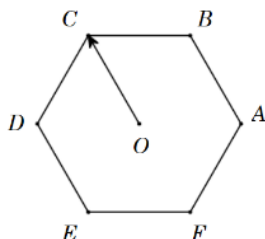
**Câu 9:** Cho  $n$  điểm phân biệt. Hãy xác định số vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối thuộc  $n$  điểm trên?

**Lời giải**

Khi có  $n$  điểm, ta có  $n$  cách chọn điểm đầu và  $n - 1$  cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có  $n(n - 1)$  cách xác định số vectơ khác  $\vec{0}$  thuộc  $n$  điểm trên.

**Câu 10:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm cuối là các đỉnh của lục giác là bao nhiêu?

**Lời giải**



Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 11:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Tìm các cặp vectơ cùng hướng?

**Lời giải**



Các vectơ cùng hướng là:  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ ,  $\overrightarrow{PM}$  và  $\overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{PN}$  và  $\overrightarrow{NM}$ .

**Câu 12:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vectơ khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .

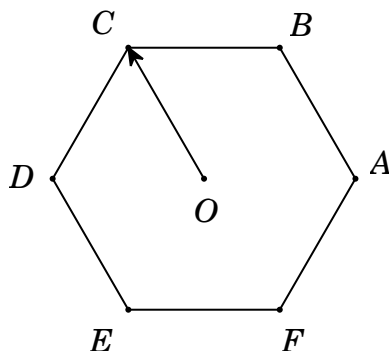
**Lời giải**

Các vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  mà thỏa mãn điều kiện đầu Câu là:  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ .



**Câu 13:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

**Lời giải**



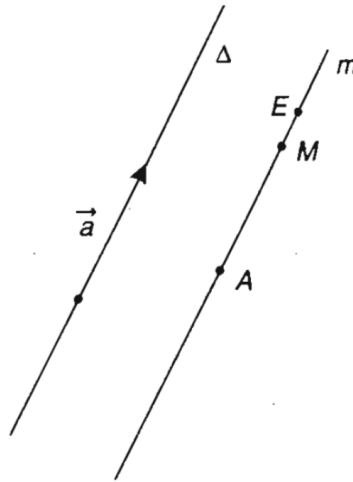
Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FO}$ .

**Câu 14:** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  sao cho:

a)  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .

b)  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\vec{a}$ .

**Lời giải**



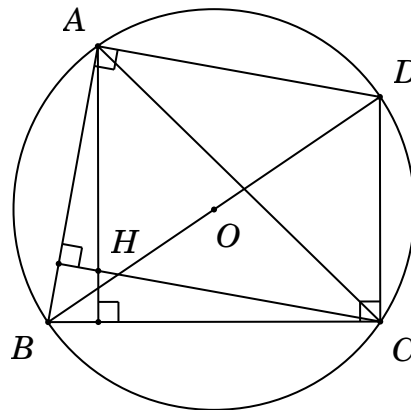
Gọi  $\Delta$  là giá của  $\vec{a}$ .

a) Nếu  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  thì đường thẳng  $AM$  song song với  $\Delta$ . Do đó  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  đi qua  $A$  và song song với  $\Delta$ . Ngược lại, mọi điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  thì  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ . Chú ý rằng nếu  $A$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  thì  $m$  trùng với  $\Delta$ .

b) Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm  $M$  thuộc một nửa đường thẳng gốc  $A$  của đường thẳng  $m$ . Cụ thể, đó là nửa đường thẳng chứa điểm  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AE}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng.

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**Lời giải**



Ta có  $AH \perp BC$  và  $DC \perp BC$  (do góc  $\widehat{DCB}$  chắn nửa đường tròn). Suy ra  $AH \parallel DC$ .

Tương tự ta cũng có  $CH \parallel AD$ .

Suy ra tứ giác  $ADCH$  là hình bình hành. Do đó  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

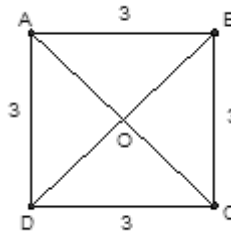
**Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , có  $AB = AC = 4$ . Tính  $|\overrightarrow{BC}|$

**Lời giải**

$$\text{vì } |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

**Câu 17:** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh 3. Giá trị của  $|\overline{AC}|$  là bao nhiêu?

**Lời giải**



vì  $|\overline{AC}| = AC = 3\sqrt{2}$

**Câu 18:** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính  $|\overline{CB}|$

**Lời giải**

vì  $|\overline{CB}| = CB = a$

**Câu 19:** Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC = 12. Tính  $|\overline{GM}|$  (với M là trung điểm của BC)

**Lời giải**

vì  $|\overline{GM}| = GM = \frac{1}{3}.AM = \frac{1}{3}.6 = 2$

**Câu 20:** Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = 4 và AC = 5. Tìm độ dài vectơ  $\overline{AC}$ .

**Lời giải**

vì  $|\overline{AC}| = AC = 5$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho tứ giác ABCD. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A.** 4.                      **B.** 6.                      **C.** 8.                      **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn Câu toán là  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  — có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D.

**Câu 2:** Cho 5 điểm A, B, C, D, E có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?

- A.** 4                      **B.** 20                      **C.** 10                      **D.** 12

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 3:** Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với  $\overline{AB}$ ?

A.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$

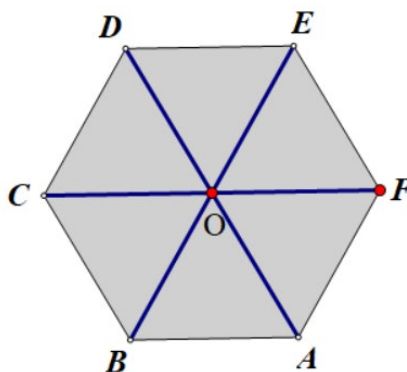
B.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$

C.  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

D.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Chọn D



**Câu 4:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vector khác vector - không, cùng phương với  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4.

B. 6.

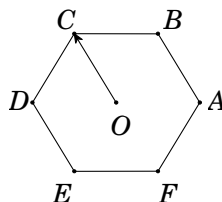
C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vector:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$ .



**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vector cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .

A.  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

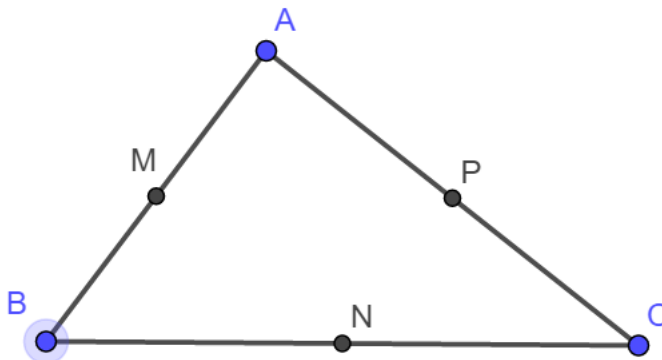
B.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$

C.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

D.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

Lời giải

Chọn C



**Câu 6:** Cho hai vector khác vector - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với cả hai vector đó?

A. 2.

B. 1.

C. không có.

D. vô số.

Lời giải

**Chọn C**

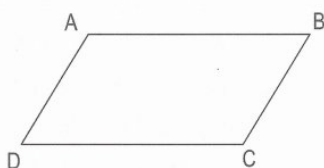
Giả sử tồn tại một vec-tơ  $\vec{c}$  cùng phương với cả hai vec-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Lúc đó tồn tại các số thực  $h$  và  $k$  sao cho  $\vec{c} = h\vec{a}$  và  $\vec{c} = k\vec{b}$ . Từ đó suy ra  $h\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{k}{h}\vec{b}$ .

Suy ra hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương. (mâu thuẫn).  $\rightarrow$  **Chọn C**

**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Số vectơ khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành  $ABCD$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

Lời giải



**Chọn C**

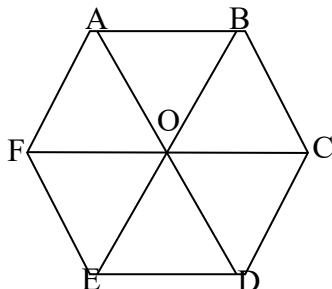
Các vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  mà thỏa mãn điều kiện đầu Câu là:  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ .

**Câu 8:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số vectơ khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu điểm cuối là đỉnh của lục giác hoặc tâm  $O$  và cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OC}$  là

- A. 3.                      B. 4.                      C. 8.                      D. 9.

Lời giải

**Chọn D**

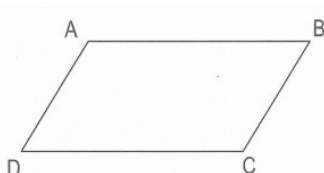


Các vectơ thỏa mãn là:  $\overrightarrow{CO}$ ,  $\overrightarrow{FO}$ ,  $\overrightarrow{OF}$ ,  $\overrightarrow{FC}$ ,  $\overrightarrow{CF}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{ED}$ ,  $\overrightarrow{DE}$ .

**Câu 9:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Số các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác là

- A. 4.                      B. 6.                      C. 8.                      D. 12.

Lời giải



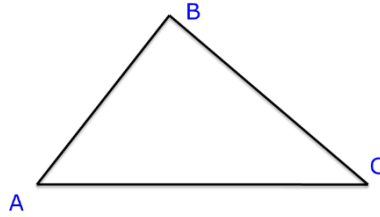
**Chọn D**

Từ mỗi đỉnh ta có một điểm đầu và ba đỉnh còn lại là ba điểm cuối, vậy tạo nên ba vectơ. Với bốn đỉnh như vậy ta có tất cả  $3.4 = 12$  vectơ.

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ ?

- A. 3.                      B. 6.                      C. 4.                      D. 9.

Lời giải



**Chọn B**

Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 11:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai?

- A. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.      B.  $DA = BC$ .  
 C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

Lời giải

**Chọn C**

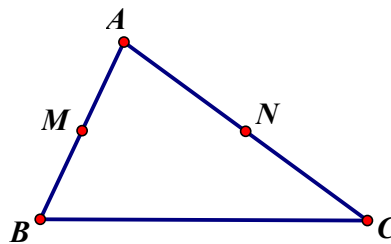
$AC$  và  $BD$  là hai đường chéo của tứ giác  $ABCD$  nên hai vectơ  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$  không cùng phương vì vậy không thể bằng nhau.

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$ . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .      C.  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      D.  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{CA}$ .

Lời giải

**Chọn A**



**Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

- A.  $ABCD$  là vuông.      B.  $ABDC$  là hình bình hành.  
 C.  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm.      D.  $AB = CD$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:

$$\bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$$

$$\bullet \text{ Mặt khác, } ABDC \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

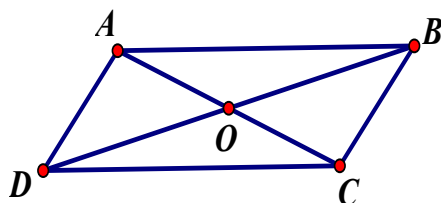
Do đó, điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  là  $ABDC$  là hình bình hành.

**Câu 14:** Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- A.  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .      C.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ .      D.  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ .

Lời giải

**Chọn C**



$\vec{OA}$  và  $\vec{OC}$  là hai vectơ đối nhau.

**Câu 15:** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A.  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vectơ.                      B.  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vectơ.  
 C.  $\vec{AA} = \vec{0}$ .                      D.  $|\vec{AB}| > 0$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

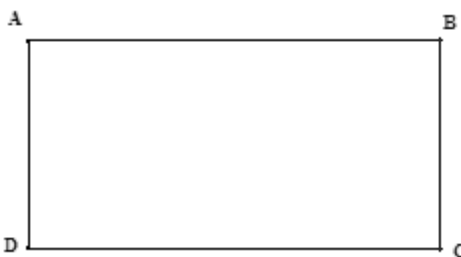
Mệnh đề  $|\vec{AB}| > 0$  là mệnh đề **sai**, vì khi  $A \equiv B$  thì  $|\vec{AB}| = 0$ .

**Câu 16:** Cho hình chữ nhật ABCD, có  $AB = 4$  và  $AC = 5$ . Tìm độ dài vectơ  $\vec{BC}$ .

- A. 3.                      B.  $\sqrt{41}$ .                      C. 9.                      D.  $\pm 3$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



$$|\vec{BC}| = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

**Câu 17:** Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{CA}$ .

- A.  $|\vec{CA}| = 5$ .                      B.  $|\vec{CA}| = 25$ .                      C.  $|\vec{CA}| = 7$ .                      D.  $|\vec{CA}| = \sqrt{7}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$|\vec{CA}| = CA = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$$

**Câu 18:** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC. Tính  $|\vec{AH}|$ .

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      B. 1.                      C. 2.                      D.  $\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$|\vec{AH}| = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Câu 19:** Cho tam giác ABC đều cạnh  $2a$ . Gọi M là trung điểm BC. Khi đó  $|\vec{AM}|$  bằng:

- A.  $2a$ .                      B.  $2a\sqrt{3}$ .                      C.  $4a$ .                      D.  $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } |\vec{AM}| = AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$



**Câu 20:** Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính  $|\overrightarrow{OD}|$ .

- A.**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .                      **B.**  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ .                      **C.** a.                      **D.**  $\frac{a^2}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $|\overrightarrow{OD}| = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 21:** Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.  
**B.** Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.  
**C.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.  
**D.** Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 22:** Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

- A.** 3.                      **B.** 5.                      **C.** 6.                      **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

Các vectơ thỏa đề gồm  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 23:** Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

- A.** AB.                      **B.**  $\overrightarrow{AB}$ .                      **C.**  $|\overrightarrow{AB}|$ .                      **D.**  $\overrightarrow{BA}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 24:** Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

- A.** 3.                      **B.** 6.                      **C.** 4.                      **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là:  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}$ .

Vậy có tất cả 6 vectơ.

**Câu 25:** Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác  $\vec{0}$ ?

- A.** 3.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 26:** Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ .  
**B.** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.  
**C.** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.  
**D.** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo định nghĩa thì "Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài."

**Câu 27:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  là

- A. 10.                      B. 14.                      C. 8.                      D. 12.

Lời giải

**Chọn D**

Chọn một điểm bất kì là điểm đầu, giả sử là  $A$  thì lập được 3 vectơ là  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ .

Tương tự với mỗi điểm đầu lần lượt là  $B, C, D$  thì cũng lập được 3 vectơ. Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  là  $4.3 = 12$ .

**Câu 28:** Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.  
 B. Hai vectơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.  
 C. Hai vectơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.  
 D. Hai vectơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

Lời giải

**Chọn B**

Theo định nghĩa hai vectơ đối nhau.

**Câu 29:** Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ bằng nhau thì có giá trị bằng nhau hoặc song song.  
 B. Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.  
 C. Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.  
 D. Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Lời giải

**Chọn A**

Theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau thì chúng cùng phương nên có giá trị bằng nhau hoặc song song.

**Câu 30:** Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. Hai vectơ cùng hướng.                      B. Hai vectơ cùng phương.  
 C. Hai vectơ đối nhau.                      D. Hai vectơ bằng nhau.

Lời giải

**Chọn C**

Theo định nghĩa hai vectơ đối nhau.

**Câu 31:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện  $ABCD$ ?

- A. 12.                      B. 4.                      C. 10.                      D. 8.

Lời giải

**Chọn A**

Số vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện  $ABCD$  là số các chỉnh hợp chập 2 của phần tử  $\Rightarrow$  số vectơ là  $A_4^2 = 12$ .

**Câu 32:** Phát biểu nào sau đây sai?

- A. Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.  
 B. Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.  
 C. Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng.  
 D. Vectơ là đoạn thẳng có hướng.

Lời giải

Chọn C

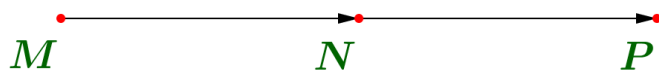
Hai vec tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

**Câu 33:** Cho 3 điểm  $M, N, P$  thẳng hàng trong đó  $N$  nằm giữa  $M$  và  $P$ . khi đó các cặp vec tơ nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .      B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      C.  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ .      D.  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .

Lời giải

Chọn A



**Câu 34:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      C.  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ .      D.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

Lời giải

Chọn D



Cặp vector cùng hướng là  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI VECTO BẰNG NHAU

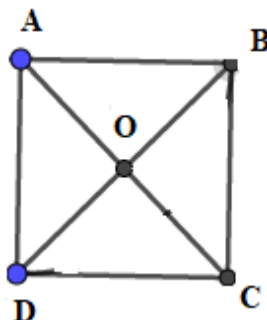
1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Để chứng minh hai vector bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  hoặc  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hãy liệt kê tất cả các vector bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải



Các vector bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}.$$

**Câu 2:** Cho vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**

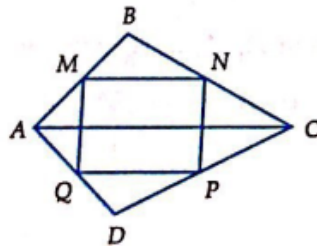
Nếu  $C$  nằm trên đường thẳng  $AB$  thì  $D$  cũng nằm trên đường thẳng  $AB$ .

Nếu  $C$  không nằm trên đường thẳng  $AB$  thì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành. Khi đó  $D$  nằm trên đường thẳng đi qua  $C$  và song song với đường thẳng  $AB$ .

Do vậy, có vô số điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Câu 3:** Cho tứ giác đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2} AC \end{cases}; \begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2} AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}.$$

Vậy  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

**Câu 4:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

**Lời giải**

Ta có:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$  là hình bình hành.
- Mặt khác,  $ABDC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Do đó, điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  là  $ABCD$  là hình bình hành.

**Câu 5:** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Xác định điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm  $AB$ .

**Lời giải**

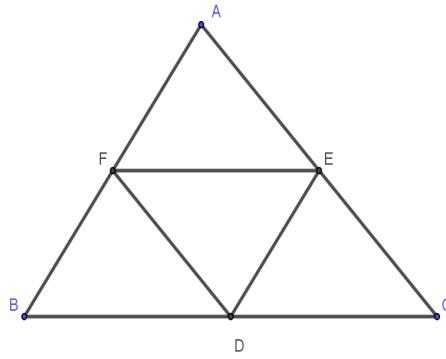
Vì  $I$  là trung điểm  $AB$  nên ta có  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ .

Vậy điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm  $AB$  là:  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ .

Chứng minh  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**



*Cách 1:* Vì  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $EF \parallel CD$  nên

$$EF = \frac{1}{2}CB \Rightarrow EF = CD \Rightarrow |EF| = |CD| \quad (1).$$

Mặt khác:  $\overrightarrow{EF}$  cùng hướng  $\overrightarrow{CD}$  (2).

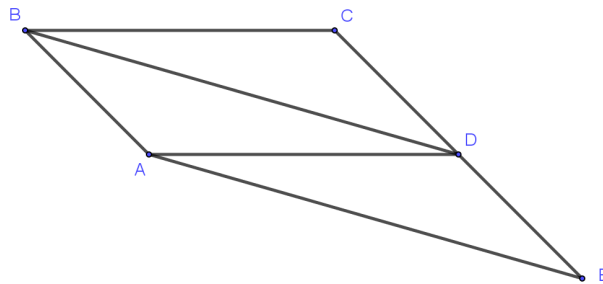
Từ (1) và (2) ta có:  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

*Cách 2:* Chứng minh  $EFCD$  là hình bình hành

Để chứng minh được  $EF = \frac{1}{2}BC = CD$  và  $EF \parallel CD \Rightarrow EFCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**



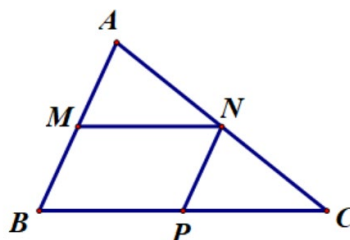
Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có:  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  (1).

Ta có:  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$  nên  $D$  là trung điểm của  $CE \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow ABDE$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$ .

**Câu 8:** Cho  $\Delta ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CA$ . Tìm điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$ .

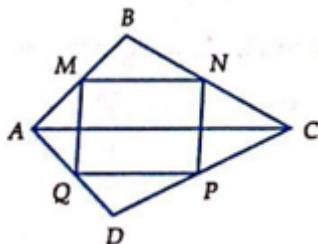
**Lời giải**



Vì  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$  mà  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MB}$  nên  $I \equiv B$ .

**Câu 9:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overline{MN} = \overline{QP}; \overline{NP} = \overline{MQ}$ .

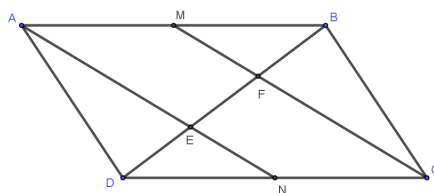
**Lời giải**



Ta có  $MN$  là đường trung bình tam giác  $ABC \Rightarrow MN \parallel \frac{1}{2}AC$  và  $PQ$  là đường trung bình tam giác  $DAC \Rightarrow PQ \parallel \frac{1}{2}AC$ . Do đó  $MN \parallel PQ \Rightarrow MNPQ$  là hình bình hành nên suy ra  $\overline{MN} = \overline{QP}; \overline{NP} = \overline{MQ}$ .

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$ .  $AN$  và  $CM$  lần lượt cắt  $BD$  tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$

**Lời giải**



Ta có :  $\begin{cases} AM = CN \\ AM \parallel CN \end{cases} \Leftrightarrow AMCN$  là hình bình hành.

Theo gt ta có :  $N$  là trung điểm  $DC$  và  $NE \parallel CF \Rightarrow NE$  là đường trung bình của  $\triangle DFC \Rightarrow E$  là trung điểm của  $DF \Rightarrow \overline{DE} = \overline{EF}$  (1).

Tương tự ta cũng có :  $F$  là trung điểm của  $BE$  nên  $\overline{EF} = \overline{FB}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ .

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
- B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
- C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
- D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

**Lời giải**

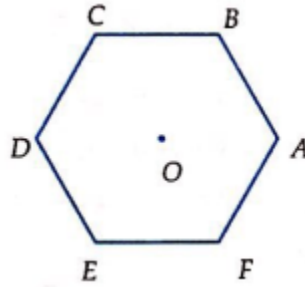
**Chọn D**

**Câu 2:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Hãy tìm các vector khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm  $O$  sao cho bằng với  $\overline{AB}$ ?

- A.  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{FD}$ .      B.  $\overline{FO}, \overline{AC}, \overline{ED}$ .      C.  $\overline{BO}, \overline{OC}, \overline{ED}$ .      **D.  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{ED}$ .**

Lời giải

**Chọn D**



Các vector bằng vectơ  $\overline{AB}$  là:  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{ED}$ .

**Câu 3:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .      **B.  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$  cùng phương.**  
C.  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  ngược hướng.      D.  $\overline{CA}$  và  $\overline{CB}$  cùng hướng.

Lời giải

**Chọn B**

Ba điểm  $A, B, C$  phân biệt.

$A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overline{BA}, \overline{BC}$  cùng phương.

**Câu 4:** Cho tam giác đều cạnh  $2a$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .      B.  $\overline{AB} = 2a$ .      **C.  $|\overline{AB}| = 2a$ .**      D.  $\overline{AB} = AB$ .

Lời giải

**Chọn C**

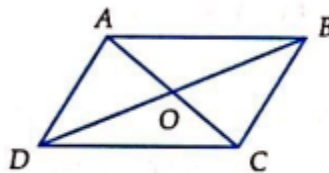
Vì tam giác đều nên  $AB = |\overline{AB}| = 2a$ .

**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?

- A.  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .**      B.  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .      C.  $\overline{AO} = \overline{OC}$ .      D.  $\overline{OD} = \overline{BO}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

**Câu 6:** Cho vectơ  $\overline{AB} \neq \vec{0}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .

- A. 1      B. 2      C. 0      **D. Vô số**

Lời giải

**Chọn D**

Chú ý rằng nếu  $\overline{AB} = \overline{CD}$  thì có duy nhất điểm  $D$ .

**Câu 7:** Chọn câu dưới đây để mệnh đề sau là mệnh đề đúng: Nếu có  $\overline{AB} = \overline{AC}$  thì

- A. Tam giác  $ABC$  cân.  
B. Tam giác  $ABC$  đều.

- C.  $A$  là trung điểm đoạn  $BC$ .  
 D. Điểm  $B$  trùng với điểm  $C$ .

Lời giải

**Chọn D**

$\overline{AB} = \overline{AC}$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng và  $B, C$  nằm cùng phía so với  $A$ . Mà  $AB = AC$  nên điểm  $B$  trùng với điểm  $C$ .

**Câu 8:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện cần và đủ để  $\overline{AB} = \overline{CD}$  là?

- A.  $ABCD$  là hình vuông. **B.**  $ABDC$  là hình bình hành.  
 C.  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm. **D.**  $AB = CD$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có

- $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$  là hình bình hành.  
 □ Mặt khác,  $ABDC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ .

**Câu 9:** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AM} = \overline{PC}$  và  $\overline{QB} = \overline{NC}$  **B.**  $\overline{AC} = \overline{QN}$  và  $\overline{AM} = \overline{PC}$   
 C.  $\overline{AB} = \overline{CN}$  và  $\overline{AP} = \overline{QN}$  **D.**  $\overline{AB'} = \overline{BN}$  và  $\overline{MN} = \overline{BC}$

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $AMCP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{PC}$

Lại có  $AQBM$  và  $BMCN$  là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

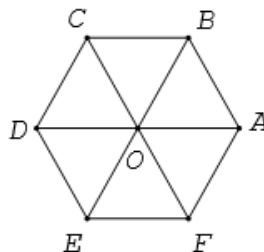
$\Rightarrow AQNC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{AC} = \overline{QN}$ .

**Câu 10:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overline{AB} = \overline{ED}$ . **B.**  $|\overline{AB}| = |\overline{AF}|$ . **C.**  $\overline{OD} = \overline{BC}$ . **D.**  $\overline{OB} = \overline{OE}$ .

Lời giải

**Chọn D**



Ta có vì hai vectơ  $\overline{OB}, \overline{OE}$  ngược hướng nên chúng không bằng nhau.

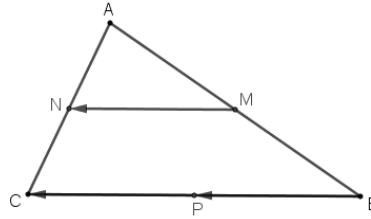
**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overline{MN}$  (không kể vectơ  $\overline{MN}$ )?

- A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải



**Chọn C**



Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng véctơ  $\overline{MN}$  (không kể véctơ  $\overline{MN}$ ) là:  $\overline{BP}$  và  $\overline{PC}$

**Câu 12:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AD} = \overline{CB}$ .      B.  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .      C.  $\overline{AB} = \overline{AD}$ .      D.  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 13:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.  
 B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.  
 C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.  
 D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

**Lời giải**

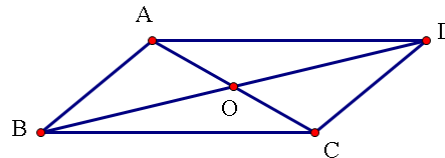
**Chọn D**

**Câu 14:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .      B.  $\overline{OA} = \overline{CO}$ .      C.  $\overline{OB} = \overline{DO}$ .      D.  $\overline{CB} = \overline{AD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



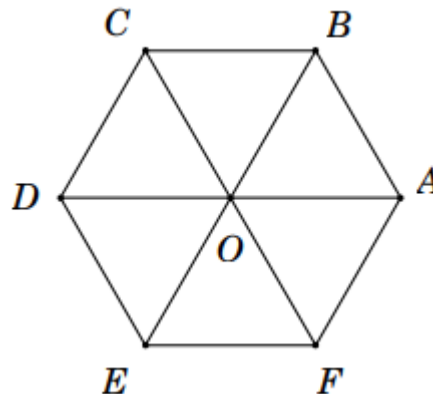
Ta có:  $\overline{CB} = \overline{DA} \neq \overline{AD}$

**Câu 15:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng với  $\overline{BA}$  là

- A.  $\overline{OF}, \overline{ED}, \overline{OC}$ .      B.  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .      C.  $\overline{CA}, \overline{OF}, \overline{DE}$       D.  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{OC}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Ba vectơ bằng  $\overline{BA}$  là  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .

**Câu 16:** Cho lục giác đều  $ABCEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2.

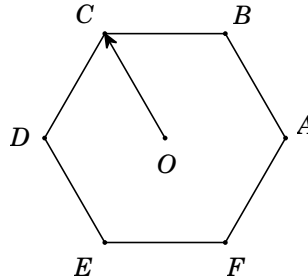
B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A



Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 17:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BA}$  là:

A.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$ .

B.  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ .

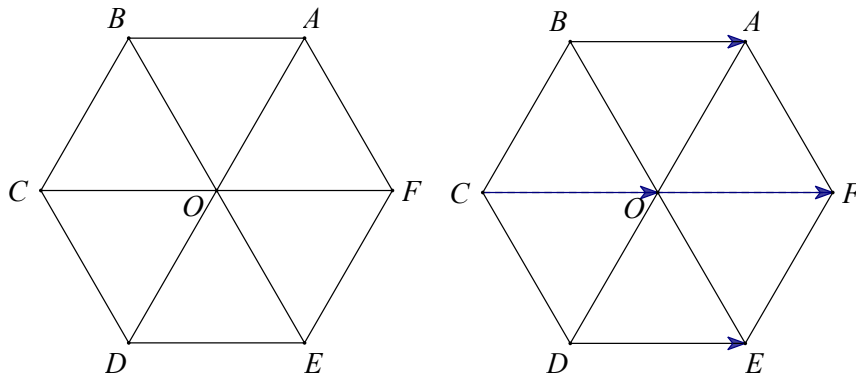
C.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .

D.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$ .

Lời giải

Chọn C

Giả sử lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$  có hình vẽ như sau



Dựa vào hình vẽ và tính chất của lục giác đều ta có các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BA}$  là  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overrightarrow{MN}$ ?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overrightarrow{MN}$  là:  $\overrightarrow{BP}$  và  $\overrightarrow{PC}$

**Câu 19:** Cho hình bình hành tâm  $O$ . Hãy chọn phát biểu sai

A.  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$ .

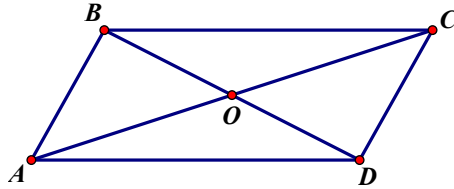
B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

D.  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ .

Lời giải

Chọn A



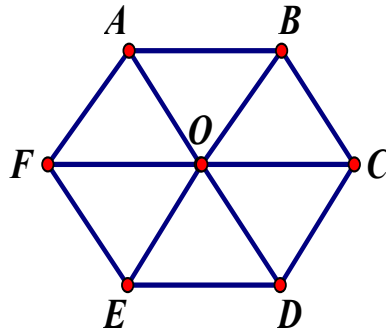
Hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$  nên  $O$  là trung điểm  $AC$ . Suy ra:  $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ .

**Câu 20:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 6.                      B. 3.                      **C. 2.**                      D. 4.

Lời giải

**Chọn C**



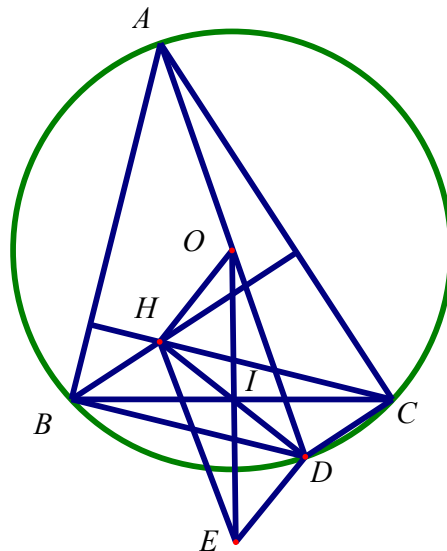
Các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OC}$  mà điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ ;  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HE}$ .                      **B.  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$ .**                      C.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$ .                      D.  $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD}$ .

Lời giải

**Chọn B**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

Do  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$  nên  $I$  là trung điểm của  $OE$  (1).

Ta có,  $CH \parallel DB$  (cùng vuông góc với  $AB$ )

Tương tự,  $BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với  $AC$ )

Từ đó suy ra  $BHCD$  là hình bình hành nên  $I$  là trung điểm của  $HD$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra,  $OHED$  là hình bình hành nên  $\overline{OH} = \overline{DE}$ .

**DẠNG 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ ĐẲNG THỨC VECTO**

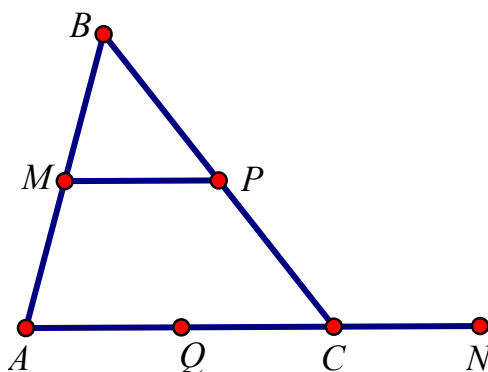
**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Sử dụng: Hai véc tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài và cùng hướng.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{MP} = \overline{CN}$ . Hãy xác định vị trí điểm  $N$ .

**Lời giải**

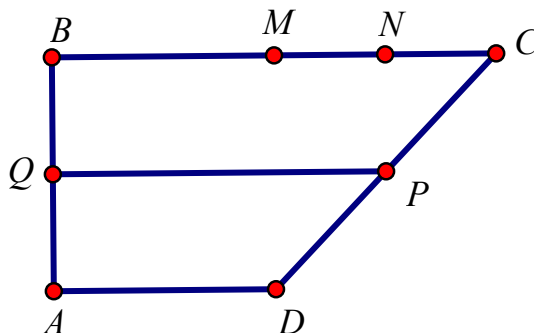


Do  $\overline{MP} = \overline{CN}$  nên  $MP = CN$  và  $\overline{MP}, \overline{CN}$  cùng hướng.

Vậy  $N$  đối xứng với  $Q$  qua  $C$ .

**Câu 2:** Cho hình thang  $ABCD$  với đáy  $BC = 2AD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $BC, MC, CD, AB$  và  $E$  là điểm thỏa mãn  $\overline{BN} = \overline{QE}$ . Xác định vị trí điểm  $E$ .

**Lời giải**

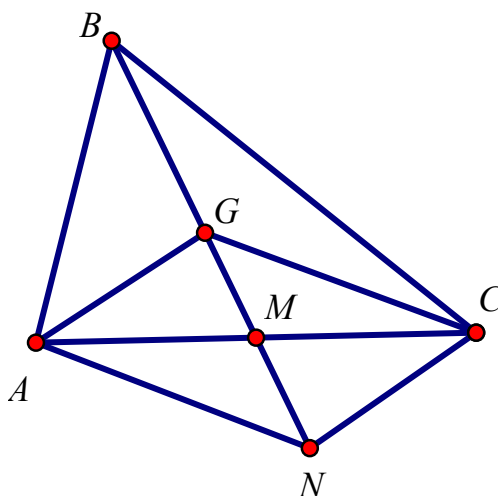


Ta có  $\overline{BN} = \overline{QE}$  nên  $BN = QE$  và  $\overline{BN}, \overline{QE}$  cùng hướng.

Mà  $QP = \frac{AD + BC}{2} = \frac{3}{2}AD = BN$ , suy ra  $\overline{QP} = \overline{BN}$  nên  $E \equiv P$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AN} = \overline{GC}$ . Hãy xác định vị trí điểm  $N$ .

**Lời giải**

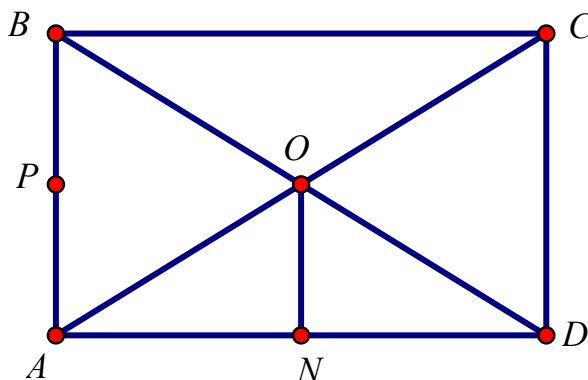


Do  $\overline{AN} = \overline{GC}$  và  $A, C, G$  không thẳng hàng nên  $AGCN$  là hình bình hành.

Vậy  $N$  đối xứng với  $G$  qua trung điểm  $M$  của  $AC$ .

**Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $N, P$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AD, AB$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{AP} = \overline{NM}$ . Xác định vị trí điểm  $M$ .

**Lời giải**

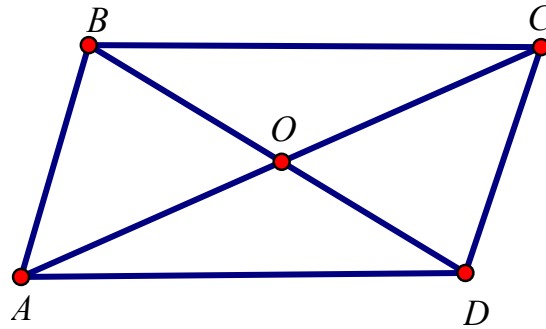


Gọi  $O$  là tâm hình chữ nhật  $ABCD \Rightarrow \overline{AP} = \overline{NO}$ .

Mà  $\overline{AP} = \overline{NM}$  suy ra  $\overline{NM} = \overline{NO} \Rightarrow M \equiv O$ . Vậy  $M$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$ .

**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{AO} = \overline{OM}$ . Xác định vị trí điểm  $M$ .

**Lời giải**



Ta có  $\overline{AO} = \overline{OM}$  suy ra  $AO = OM$  và  $\overline{AO}, \overline{OM}$  cùng hướng nên  $M \equiv C$ .

**Câu 6:** Cho  $\overline{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Xác định điểm  $D$  thỏa  $|\overline{AB}| = |\overline{AD} - \overline{AC}|$ ?

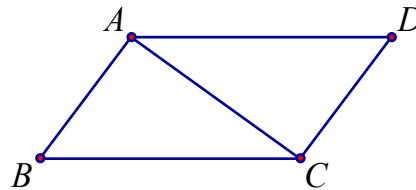
**Lời giải**

Ta có  $|\overline{AB}| = |\overline{AD} - \overline{AC}| \Leftrightarrow |\overline{AB}| = |\overline{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$ .

Suy ra tập hợp các điểm  $D$  là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$

**Lời giải**



$$\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{BA} + \overline{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BA}.$$

Vậy  $M$  thỏa mãn  $CBAM$  là hình bình hành.

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overline{MN} = \overline{BP}$ . Chọn khẳng định đúng.

**A.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $MC$ .

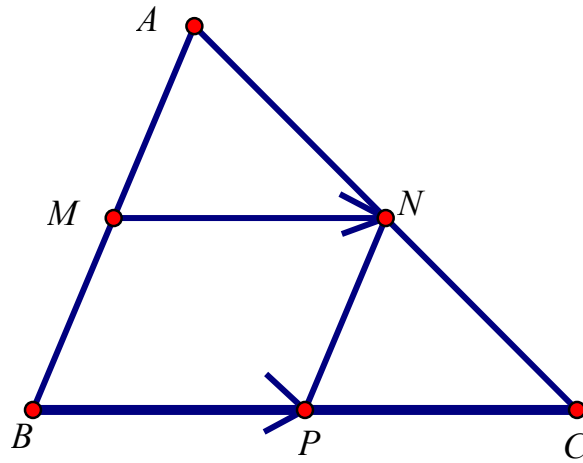
**B.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $BP$ .

**C.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $AC$ .

**D.**  $N$  là trung điểm của cạnh  $PC$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $M, B, P$  không thẳng hàng nên  $\overline{MN} = \overline{BP}$  thì  $\begin{cases} MN = BP \\ MN \parallel BP \end{cases}$ .

Mà  $BP = \frac{1}{2}BC$ , suy ra  $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$  và  $\overline{MN}, \overline{BP}$  cùng hướng.

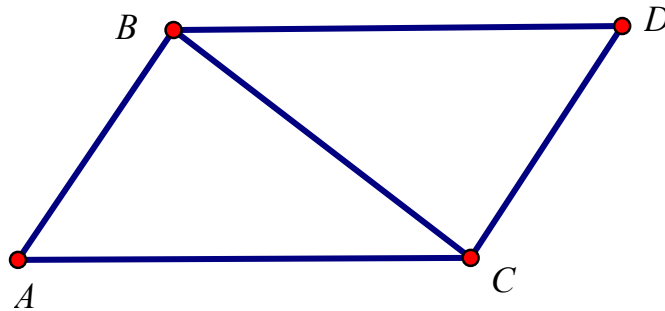
Vậy  $N$  là trung điểm của cạnh  $AC$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  và  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABDC$ .
- B.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ .
- C.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ADBC$ .
- D.**  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



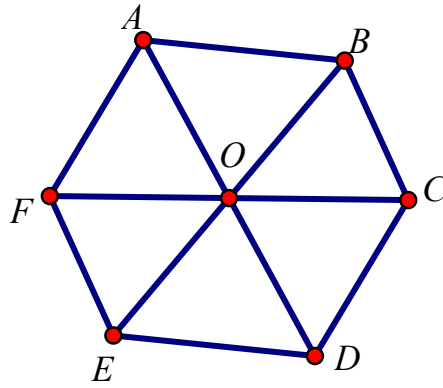
Từ đẳng thức vectơ ta suy ra  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABDC$ .

**Câu 3:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{FO}$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.**  $O$  là tâm của lục giác  $ABCDEF$ .
- B.**  $O$  là trung điểm của đoạn  $FC$ .
- C.**  $EDCO$  là hình bình hành.
- D.**  $O$  là trung điểm của đoạn  $ED$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Do  $ABCDEF$  là lục giác đều và  $\overline{AB} = \overline{FO}$  nên  $O$  là trung điểm của đoạn  $ED$  là khẳng định sai.

**Câu 4:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  thỏa mãn  $\overline{AB} = \overline{DC}$  và các mệnh đề.

(I)  $ABCD$  là hình bình hành.

(II)  $D$  nằm giữa  $B$  và  $C$ .

(III)  $C$  nằm trên đường thẳng đi qua điểm  $D$  và song song hoặc trùng với đường thẳng  $AB$ .

(IV) Bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng.

Số mệnh đề đúng?

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có mệnh đề " $ABCD$  là hình bình hành" là sai khi ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

Mệnh đề " $D$  nằm giữa  $B$  và  $C$ " là sai khi ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Mệnh đề "Bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng" là sai khi ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Mệnh đề " $C$  nằm trên đường thẳng đi qua điểm  $D$  và song song hoặc trùng với đường thẳng  $AB$ " là đúng theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau.

Vậy số mệnh đề đúng là 1.

**Câu 5:** Cho hình thang  $ABCD$  với đáy  $AB = 2CD$ . Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CD, DA$  và  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overline{DC} = \overline{MB}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.**  $M$  là trung điểm của  $PN$ .

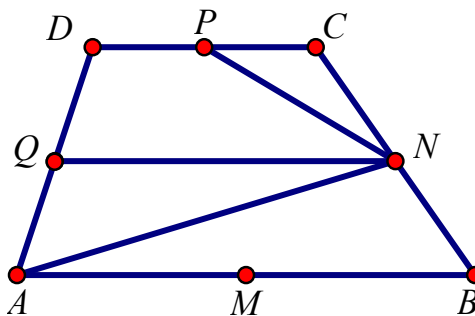
**B.**  $M$  là trung điểm của  $AN$ .

**C.**  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**D.**  $M$  là trung điểm của  $QN$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $\overline{DC} = \overline{MB}$  nên  $DC = MB$  và  $\overline{DC}, \overline{MB}$  cùng hướng. Mà  $AB = 2DC$  và  $\overline{AB}, \overline{DC}$  cùng hướng. Vậy  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Để điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  phải thỏa mãn mệnh đề nào?



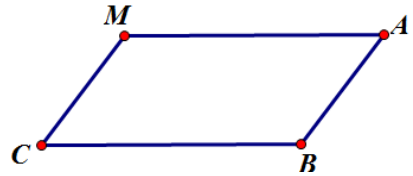
- A.  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.
- B.  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- C.  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.
- D.  $M$  thuộc trung trực của  $AB$ .

Lời giải

Chọn C

Ta có:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ .

Nên tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.

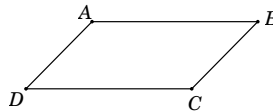


**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$  là?

- A. tập rỗng.
- B. một đoạn thẳng.
- C. một đường tròn.
- D. một đường thẳng.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$  sai  
 $\Rightarrow$  Không có điểm  $M$  thỏa mãn.

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$  là?

- A. trung trực đoạn  $BC$ .
- B. đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $BC$ .
- C. đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$ .
- D. đường thẳng  $AB$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có  $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AM}| \Rightarrow AM = BC$

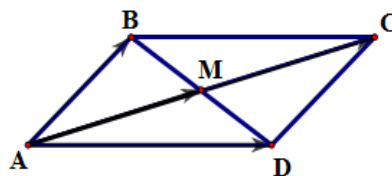
Mà  $A, B, C$  cố định  $\Rightarrow$  Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $BC$ .

**Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ . Khi đó điểm  $M$  là:

- A. Trung điểm của  $AD$ .
- B. Trung điểm của  $AC$ .
- C. Điểm  $C$ .
- D. Trung điểm của  $AB$ .

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình bình hành, ta có:  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

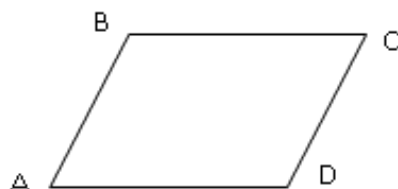
$\Rightarrow M$  là trung điểm của  $AC$ .

**Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
- B.  $AB = CD$ .
- C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .
- D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Lời giải

**Chọn A**



$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DC \\ \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{DC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AM} = a$ .      **C.**  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } 2a \text{ nên } |\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

**Câu 12:** Cho  $\overrightarrow{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ?

- A.** Vô số.      **B.** 1 điểm.      **C.** 2 điểm.      **D.** Không có điểm nào.

**Lời giải**

**Chọn A**

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$ . Do  $A, B, C$  cố định nên có vô số điểm  $D$  thỏa mãn. Tập hợp điểm  $D$  là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$ .

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.**  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .      **B.**  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$ .      **C.**  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      **D.**  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



**A.**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$       **B.**  $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$       **C.**  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$       **D.**  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

**Câu 11:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$       **B.**  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng  
**C.**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng      **D.**  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương

**Câu 12:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

**A.** 4      **B.** 8      **C.** 10      **D.** 12

**Câu 13:** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$  có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:

**A.** 4      **B.** 20      **C.** 10      **D.** 12

**Câu 14:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

- A.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau  
**B.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành  
**C.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều  
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

**Câu 15:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm  $O$  sao cho bằng với  $\overrightarrow{AB}$ ?

**A.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$       **B.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$       **C.**  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$       **D.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

**Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .

**A.**  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       **B.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$   
**C.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       **D.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

**Câu 17:** Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng khi và chỉ khi:

- A.** Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$       **B.** Điểm  $A$  thuộc đoạn  $BC$   
**C.** Điểm  $C$  thuộc đoạn  $AB$       **D.** Điểm  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$

**Câu 18:** Cho tam giác đều cạnh  $2a$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$       **B.**  $\overrightarrow{AB} = 2a$       **C.**  $|\overrightarrow{AB}| = 2a$       **D.**  $\overrightarrow{AB} = AB$

**Câu 19:** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác.  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Tam giác  $ABC$  nhọn thì  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng.  
**B.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  luôn cùng hướng.  
**C.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng phương nhưng ngược hướng.  
**D.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  có cùng giá

**Câu 20:** Cho hình thoi tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ . Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.**  $|\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$       **B.**  $|\overrightarrow{OA}| = a$       **C.**  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$       **D.**  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 21:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$  và  $AC$ . Biết  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ . Chọn câu đúng.

**A.**  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$       **B.**  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$       **C.**  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$       **D.**  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

- Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$  với trực tâm  $H$ .  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overline{HA} = \overline{CD}$  và  $\overline{AD} = \overline{CH}$                       B.  $\overline{HA} = \overline{CD}$  và  $\overline{DA} = \overline{HC}$   
C.  $\overline{HA} = \overline{CD}$  và  $\overline{AD} = \overline{HC}$                       D.  $\overline{AD} = \overline{HC}$  và  $\overline{OB} = \overline{OD}$
- Câu 23:** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây đúng?
- A.  $\overline{AM} = \overline{PC}$  và  $\overline{QB} = \overline{NC}$                       B.  $\overline{AC} = \overline{QN}$  và  $\overline{AM} = \overline{PC}$   
C.  $\overline{AB} = \overline{CN}$  và  $\overline{AP} = \overline{QN}$                       D.  $\overline{AB'} = \overline{BN}$  và  $\overline{MN} = \overline{BC}$
- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Câu nào sau đây đúng?
- A.  $\overline{AH} = \overline{DC}$                       B.  $\overline{AB} = \overline{DC}$                       C.  $\overline{AD} = \overline{BC}$                       D.  $\overline{AO} = \overline{AH}$
- Câu 25:** Cho đường tròn tâm  $O$ . Từ điểm  $A$  nằm ngoài ( $O$ ), kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới ( $O$ ). Xét mệnh đề:
- (I)  $\overline{AB} = \overline{AC}$  (II)  $\overline{OB} = -\overline{OC}$  (III)  $|\overline{BO}| = |\overline{CO}|$
- Mệnh đề đúng là:
- A. Chỉ (I)                      B. (I) và (III)                      C. (I), (II), (III)                      D. Chỉ (III)
- Câu 26:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên là góc hoặc ngọn của các vector. Tìm mệnh đề sai?
- A. Có 2 vector bằng  $\overline{PR}$    B. Có 4 vector bằng  $\overline{AR}$    C. Có 2 vector bằng  $\overline{BO}$    D. Có 5 vector bằng  $\overline{OP}$
- Câu 27:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB, N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của vector  $\overline{MN}$ .
- A.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$                       B.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$                       C.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$                       D.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$
- Câu 28:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của các đường chéo của tứ giác  $MNPQ$ , trung điểm của các đoạn thẳng  $AC, BD$  tương ứng là  $I, J$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overline{OI} = \overline{OJ}$                       B.  $MP = NQ$                       C.  $\overline{MN} = \overline{PQ}$                       D.  $\overline{OI} = -\overline{OJ}$
- Câu 29:** Cho  $\overline{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ , có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .
- A. vô số điểm.                      B. 1 điểm.                      C. 2 điểm.                      D. không có điểm nào.
- Câu 30:** Cho 3 điểm  $M, N, P$  thẳng hàng trong đó  $N$  nằm giữa  $M$  và  $P$ . khi đó các cặp vec tơ nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$ .                      B.  $\overline{MN}$  và  $\overline{PN}$ .                      C.  $\overline{NM}$  và  $\overline{NP}$ .                      D.  $\overline{MP}$  và  $\overline{PN}$ .
- Câu 31:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vector nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\overline{MP}$  và  $\overline{PN}$ .                      B.  $\overline{MN}$  và  $\overline{PN}$ .                      C.  $\overline{NM}$  và  $\overline{NP}$ .                      D.  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$ .
- Câu 32:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu vécto khác vécto không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vécto  $\overline{MN}$  (không kể vécto  $\overline{MN}$ )?
- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 3.

- Câu 33:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Câu 34:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A.** Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.  
**B.** Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.  
**C.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.  
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

**Câu 35:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ .      **C.**  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .      **D.**  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 36:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng với  $\overrightarrow{BA}$  là

**A.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .      **C.**  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$       **D.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$ .

**Câu 37:** Cho lục giác đều  $ABCEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 2.      **B.** 3.      **C.** 4.      **D.** 6.

**Câu 38:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BA}$  là:

**A.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ .      **C.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .      **D.**  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$ .

**Câu 39:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overrightarrow{MN}$ ?

**A.** 1.      **B.** 4.      **C.** 2.      **D.** 3

**Câu 40:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 6.      **B.** 3.      **C.** 2.      **D.** 4.

**Câu 41:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ ;  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.**  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HE}$ .      **B.**  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$ .      **C.**  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$ .      **D.**  $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD}$ .

CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 3. KHÁI NIỆM VECTO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Nếu  $\overline{AB} = \overline{AC}$  thì:
- A. tam giác  $ABC$  là tam giác cân
  - B. tam giác  $ABC$  là tam giác đều
  - C.  $A$  là trung điểm đoạn  $BC$
  - D. điểm  $B$  trùng với điểm  $C$

Lời giải

**Đáp án D**

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow B \equiv C$$

- Câu 2:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó cặp vector nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$
  - B.  $\overline{MN}$  và  $\overline{PN}$
  - C.  $\overline{MP}$  và  $\overline{PN}$
  - D.  $\overline{NP}$  và  $\overline{NM}$

Lời giải

**Đáp án A**

- Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ ?
- A. 4
  - B. 6
  - C. 9
  - D. 12

Lời giải

Ta có các vector:  $\overline{AB}, \overline{BA}, \overline{BC}, \overline{CB}, \overline{CA}, \overline{AC}$ .

**Đáp án B.**

- Câu 4:** Cho hai vector không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng
- A. Không có vector nào cùng phương với cả hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$
  - B. Có vô số vector cùng phương với cả hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$
  - C. Có một vector cùng phương với cả hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , đó là vector  $\vec{0}$
  - D. Cả A, B, C đều sai

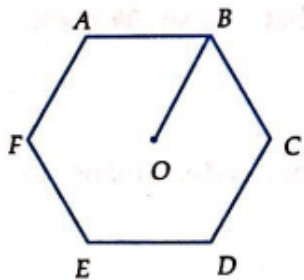
Lời giải

Vì vector  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vector. Nên có một vector cùng phương với cả hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , đó là vector  $\vec{0}$ .

**Đáp án C.**

- Câu 5:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vector khác vector không, cùng phương với vector  $\overline{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là
- A. 4
  - B. 6
  - C. 8
  - D. 10

Lời giải



Các vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  là:

$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$ .

**Đáp án B.**

**Câu 6:** Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

- A. ABCD là hình bình hành
- B. ACBD là hình bình hành
- C. AD và BC có cùng trung điểm
- D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  và  $AB \parallel CD$

**Lời giải**

**Đáp án C**

**Câu 7:** Cho hình vuông ABCD, câu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
- B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- D.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

**Lời giải**

**Đáp án D**

**Câu 8:** Cho vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

- A. 1
- B. 2
- C. 0
- D. Vô số

**Lời giải**

**Đáp án A**

**Câu 9:** Cho hình bình hành ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- B.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- C.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$
- D.  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$

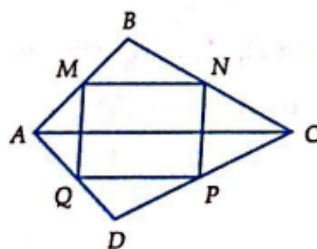
**Lời giải**

**Đáp án A**

**Câu 10:** Cho tứ giác đều ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$
- B.  $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$
- C.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$
- D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$  (do cùng song song và bằng  $\frac{1}{2} AC$ ).

Do đó MNPQ là hình bình hành.

**Đáp án D.**



**Câu 11:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AB} = \overline{BC}$                       B.  $\overline{CA}$  và  $\overline{CB}$  cùng hướng  
 C.  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  ngược hướng                      D.  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$  cùng phương

**Lời giải**

Với ba trường hợp lần lượt  $A, B, C$  nằm giữa thì ta luôn có  $\overline{BA}, \overline{BC}$  cùng phương.

**Đáp án D.**

**Câu 12:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4                                      B. 8                                      C. 10                                      D. 12

**Lời giải**

**Đáp án D**

Một vector khác vector không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Do đó có 12 cách chọn 2 điểm trong 4 điểm của tứ giác.

**Câu 13:** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$  có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:

- A. 4                                      B. 20                                      C. 10                                      D. 12

**Lời giải**

**Đáp án A**

**Câu 14:** Hai vector được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau  
 B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành  
 C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều  
 D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

**Lời giải**

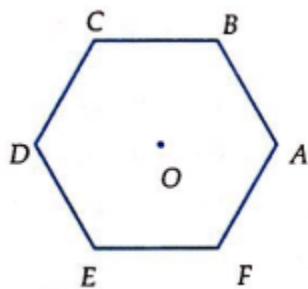
**Đáp án D**

**Câu 15:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Hãy tìm các vector khác vector-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm  $O$  sao cho bằng với  $\overline{AB}$ ?

- A.  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{FD}$                       B.  $\overline{FO}, \overline{AC}, \overline{ED}$                       C.  $\overline{BO}, \overline{OC}, \overline{ED}$                       D.  $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{ED}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



Các vector bằng vector  $\overline{AB}$  là:  
 $\overline{FO}, \overline{OC}, \overline{ED}$

**Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vector cùng phương với  $\overline{MN}$ .

- A.  $\overline{AC}, \overline{CA}, \overline{AP}, \overline{PA}, \overline{PC}, \overline{CP}$                       B.  $\overline{NM}, \overline{BC}, \overline{CB}, \overline{PA}, \overline{AP}$   
 C.  $\overline{NM}, \overline{AC}, \overline{CA}, \overline{AP}, \overline{PA}, \overline{PC}, \overline{CP}$                       D.  $\overline{NM}, \overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AM}, \overline{MA}, \overline{PN}, \overline{CP}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Có 3 đường thẳng song song với  $MN$  là  $AC, AP, PC$

Nên có 7 vectơ

$$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$$

**Câu 17:** Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng khi và chỉ khi:

**A.** Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$

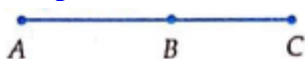
**B.** Điểm  $A$  thuộc đoạn  $BC$

**C.** Điểm  $C$  thuộc đoạn  $AB$

**D.** Điểm  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$

**Lời giải**

**Đáp án A**



**Câu 18:** Cho tam giác đều cạnh  $2a$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

**B.**  $\overrightarrow{AB} = 2a$

**C.**  $|\overrightarrow{AB}| = 2a$

**D.**  $\overrightarrow{AB} = AB$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Vì tam giác đều nên  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2a$

**Câu 19:** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác.  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Tam giác  $ABC$  nhọn thì  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng.

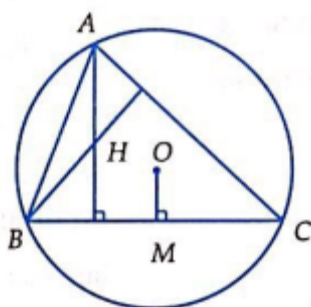
**B.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  luôn cùng hướng.

**C.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng phương nhưng ngược hướng.

**D.**  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  có cùng giá

**Lời giải**

**Đáp án A**



Thật vậy khi  $\Delta ABC$  nhọn thì ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \parallel OM$$

$O, H$  nằm trong tam giác  $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng

**Câu 20:** Cho hình thoi tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ . Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.**  $|\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

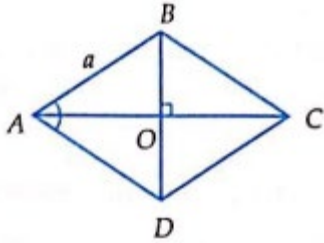
**B.**  $|\overrightarrow{OA}| = a$

**C.**  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$

**D.**  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án A**



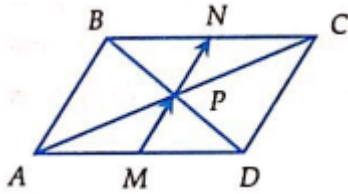
Vì  $\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$  đều  $\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 21:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$  và  $AC$ . Biết  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ . Chọn câu đúng.

- A.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$       B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$       C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$       D.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**

**Đáp án C**



Ta có:  $MP \parallel DC, MP = \frac{1}{2}DC, PN \parallel AB, PN = \frac{1}{2}AB$ . Mà  $MP = PN$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$  với trực tâm  $H$ .  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$       B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$   
 C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$       D.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$  và  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

**Lời giải**

Ta có  $BD$  là đường kính  $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .

$AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH \parallel DC$  (1)

Ta lại có  $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH \parallel DA$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  tứ giác  $HADC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**Đáp án C.**

**Câu 23:** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$  và  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$       B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$  và  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$   
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$  và  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$       D.  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Ta có  $AMCP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có  $AQBM$  và  $BMCN$  là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

$\Rightarrow AQNC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ .

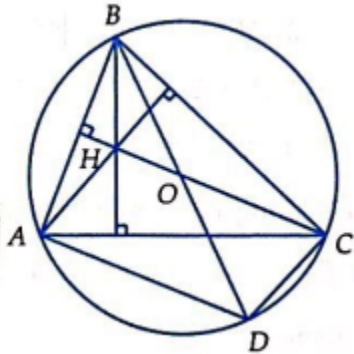
**Đáp án B.**

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Câu nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AH} = \overline{DC}$       B.  $\overline{AB} = \overline{DC}$       C.  $\overline{AD} = \overline{BC}$       D.  $\overline{AO} = \overline{AH}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có thể chỉ ra được  $ADCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{AH} = \overline{DC}$

**Câu 25:** Cho đường tròn tâm  $O$ . Từ điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$ , kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới  $(O)$ . Xét mệnh đề:

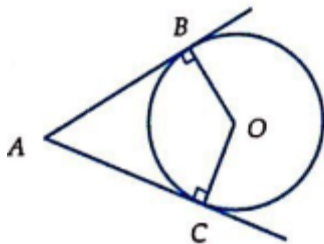
- (I)  $\overline{AB} = \overline{AC}$  (II)  $\overline{OB} = -\overline{OC}$  (III)  $|\overline{BO}| = |\overline{CO}|$

Mệnh đề đúng là:

- A. Chỉ (I)      B. (I) và (III)      C. (I), (II), (III)      D. Chỉ (III)

Lời giải

Đáp án D



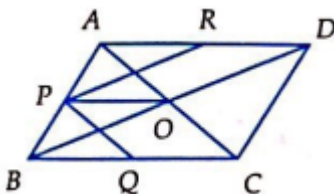
Ta có:  $OB = OC = R \Rightarrow |\overline{BO}| = |\overline{CO}|$

**Câu 26:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

- A. Có 2 vectơ bằng  $\overline{PR}$       B. Có 4 vectơ bằng  $\overline{AR}$       C. Có 2 vectơ bằng  $\overline{BO}$       D. Có 5 vectơ bằng  $\overline{OP}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có:  $\overline{PQ} = \overline{AO} = \overline{OC}$

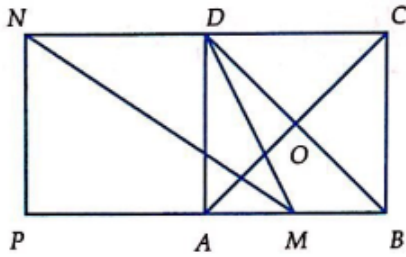
$\overline{AR} = \overline{RQ} = \overline{PO} = \overline{BQ} = \overline{QC}, \overline{BO} = \overline{OD} = \overline{PR}, \overline{OP} = \overline{RA} = \overline{DR} = \overline{CQ} = \overline{QB}$

**Câu 27:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của vectơ  $\overline{MN}$ .

- A.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$       B.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$       C.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$       D.  $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Lời giải

Đáp án C



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông  $MAD$  ta có:

$$\begin{aligned} DM^2 &= AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \\ &= \frac{5a^2}{4} \\ \Rightarrow DM &= \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .

Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông  $NPM$  ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13a^2}{4} \\ \Rightarrow MN &= \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

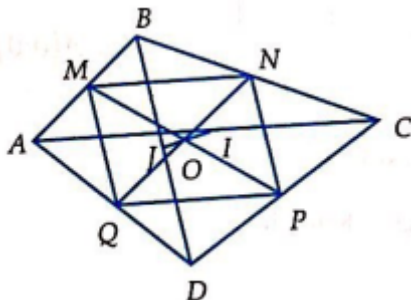
Suy ra  $|\overline{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

**Câu 28:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của các đường chéo của tứ giác  $MNPQ$ , trung điểm của các đoạn thẳng  $AC, BD$  tương ứng là  $I, J$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overline{OI} = \overline{OJ}$       B.  $MP = NQ$       C.  $\overline{MN} = \overline{PQ}$       D.  $\overline{OI} = -\overline{OJ}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có:  $MNPQ$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{QP}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overline{OI} + \overline{OJ} &= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OD} + \overline{OB}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) + \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD}) \\ &= \overline{OM} + \overline{ON} = \vec{0} \\ \Rightarrow \overline{OI} &= -\overline{OJ} \end{aligned}$$

**Câu 29:** Cho  $\overline{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ , có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .

- A.** vô số điểm.      **B.** 1 điểm.      **C.** 2 điểm.      **D.** không có điểm nào.

**Lời giải**

**Chọn A**

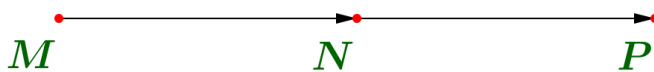
$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| \Rightarrow AB = CD$ . Mà  $AB$  là hằng số dương và  $C$  cố định cho trước nên  $D$  thuộc đường tròn tâm  $C$  bán kính là  $AB$ .

**Câu 30:** Cho 3 điểm  $M, N, P$  thẳng hàng trong đó  $N$  nằm giữa  $M$  và  $P$ . khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

- A.**  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$ .      **B.**  $\overline{MN}$  và  $\overline{PN}$ .      **C.**  $\overline{NM}$  và  $\overline{NP}$ .      **D.**  $\overline{MP}$  và  $\overline{PN}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



**Câu 31:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

- A.**  $\overline{MP}$  và  $\overline{PN}$ .      **B.**  $\overline{MN}$  và  $\overline{PN}$ .      **C.**  $\overline{NM}$  và  $\overline{NP}$ .      **D.**  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



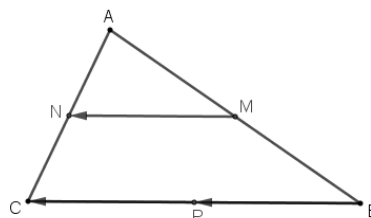
Cặp véc tơ cùng hướng là  $\overline{MN}$  và  $\overline{MP}$ .

**Câu 32:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu véc tơ khác véc tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng véc tơ  $\overline{MN}$  (không kể véc tơ  $\overline{MN}$ )?

- A.** 1.      **B.** 4.      **C.** 2.      **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**



Các véc tơ khác véc tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng véc tơ  $\overline{MN}$  (không kể véc tơ  $\overline{MN}$ ) là:  $\overline{BP}$  và  $\overline{PC}$

**Câu 33:** Cho hình thoi  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\overline{AD} = \overline{CB}$ .      **B.**  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .      **C.**  $\overline{AB} = \overline{AD}$ .      **D.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

Lời giải

Chọn D

- Câu 34:** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi
- A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.
  - B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
  - C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
  - D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

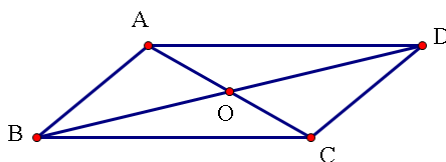
Lời giải

Chọn D

- Câu 35:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?
- A.  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
  - B.  $\overline{OA} = \overline{CO}$ .
  - C.  $\overline{OB} = \overline{DO}$ .
  - D.  $\overline{CB} = \overline{AD}$ .

Lời giải

Chọn D

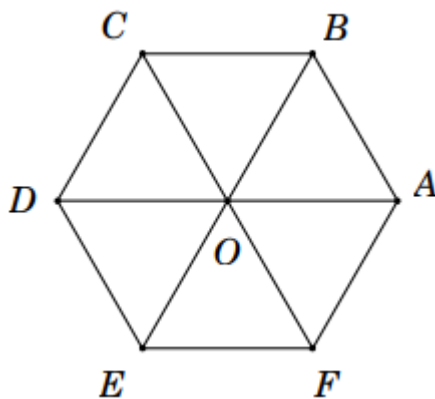


Ta có:  $\overline{CB} = \overline{DA} \neq \overline{AD}$

- Câu 36:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng với  $\overline{BA}$  là
- A.  $\overline{OF}, \overline{ED}, \overline{OC}$ .
  - B.  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .
  - C.  $\overline{CA}, \overline{OF}, \overline{DE}$
  - D.  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{OC}$ .

Lời giải

Chọn B

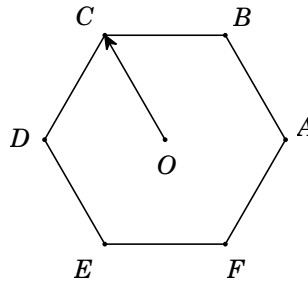


Ba vectơ bằng  $\overline{BA}$  là  $\overline{OF}, \overline{DE}, \overline{CO}$ .

- Câu 37:** Cho lục giác đều  $ABCEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overline{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là
- A. 2.
  - B. 3.
  - C. 4.
  - D. 6.

Lời giải

Chọn A



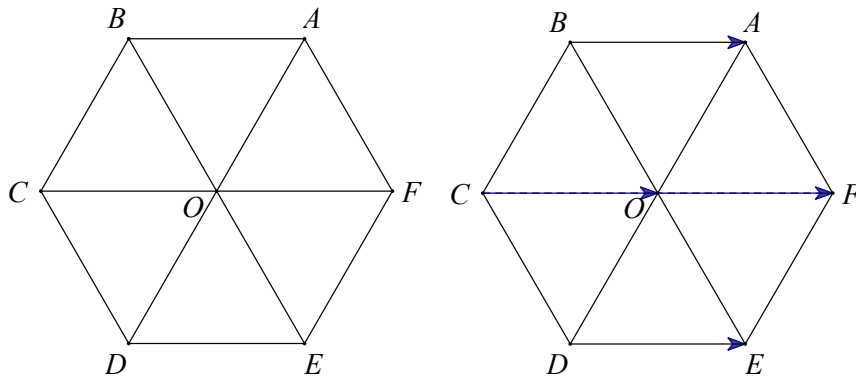
Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .

- Câu 38:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BA}$  là:  
 A.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$ .      B.  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ .      C.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .      D.  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Giả sử lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$  có hình vẽ như sau



Dựa vào hình vẽ và tính chất của lục giác đều ta có các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BA}$  là  $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$ .

- Câu 39:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overrightarrow{MN}$ ?  
 A. 1.      B. 4.      C. 2.      D. 3

Lời giải

**Chọn C**

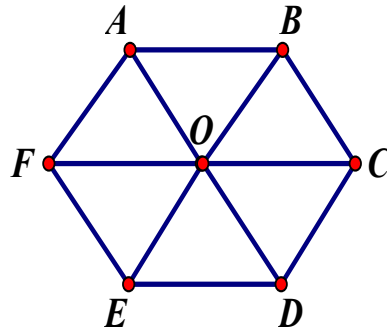
Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm  $A, B, C, M, N, P$  bằng vectơ  $\overrightarrow{MN}$  là:  $\overrightarrow{BP}$  và  $\overrightarrow{PC}$

- Câu 40:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  
 A. 6.      B. 3.      C. 2.      D. 4.

Lời giải

**Chọn C**





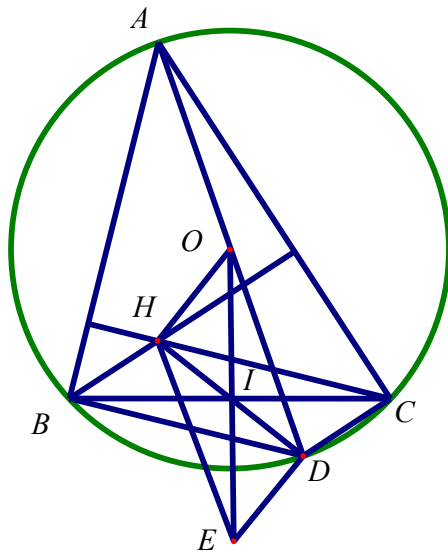
Các vecto bằng vecto  $\overrightarrow{OC}$  mà điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 41:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ ;  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HE}$ .      B.  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$ .      C.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$ .      D.  $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD}$ .

Lời giải

**Chọn B**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

Do  $E$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$  nên  $I$  là trung điểm của  $OE$  (1).

Ta có,  $CH \parallel DB$  (cùng vuông góc với  $AB$ )

Tương tự,  $BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với  $AC$ )

Từ đó suy ra  $BHCD$  là hình bình hành nên  $I$  là trung điểm của  $HD$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra,  $OHED$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$ .

CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 4: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

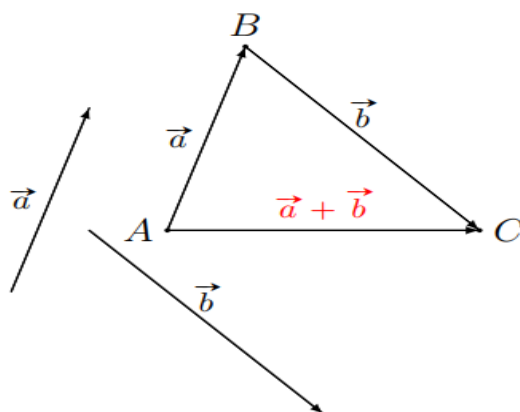
### I LÝ THUYẾT.

#### I. TỔNG CỦA HAI VECTO

##### 1. Định nghĩa:

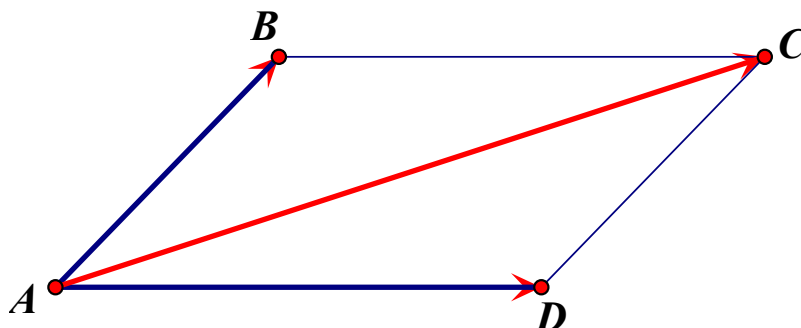
+ Với ba điểm  $A, B, C$ , ta luôn có:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

+ Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{BC} = \vec{b}$ . Vectơ  $\overline{AC}$  được gọi là **tổng** của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ . Vậy  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .



##### 2. Quy tắc hình bình hành:

+ Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, ta có:  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .



##### 3. Tính chất của phép cộng vectơ: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

+ Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

+ Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

+ Tính chất của vectơ - không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

## II. HIỆU CỦA HAI VECTOR

### 1. Hai vector đối:

+ Vector có cùng độ dài và ngược hướng với  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ . Hai vector  $\vec{a}$  và  $-\vec{a}$  là hai vector đối nhau.

+ Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

### 2. Hiệu của hai vector:

+ Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là tổng của vector  $\vec{a}$  và vector đối của  $\vec{b}$ , tức là  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ . Khi đó:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

+ Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

**Chú ý: tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác:**

+ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

+ Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**Câu 1:** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Vector  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{PN}$ .                      B.  $\overrightarrow{PM}$ .                      C.  $\overrightarrow{MP}$ .                      D.  $\overrightarrow{NM}$ .

**Câu 2:** Cho ba điểm  $D, E, G$ . Vector  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{EG}$ .                      B.  $\overrightarrow{GE}$ .                      C.  $\overrightarrow{GD}$ .                      D.  $\overrightarrow{ED}$ .

**Câu 3:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$                       b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

**Câu 4:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ .

c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

**Câu 5:** Cho đường tròn tâm  $O$ . Giả sử  $A, B$  là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  đối nhau.

**Câu 6:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành. Chứng minh  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$  với mỗi điểm  $M$  trong mặt phẳng.

**Câu 7:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính độ dài của các vector sau:

a)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

**Câu 8:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $O$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $120\text{ N}$  và  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Tìm cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .





### HỆ THỐNG BÀI TẬP.

#### DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG CÁC VECTOR



#### BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , xác định các vector  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ , xác định các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 3.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ , xác định các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$ .

**Câu 4.** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , xác định vector

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ$ ,  $BCPQ$ ,  $CARS$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$ .



#### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  khác vector-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

**B.**  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

**C.**  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

**D.**  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$ .

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vector tổng  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$  bằng

**A.**  $\overrightarrow{CA}$ .

**B.**  $\overrightarrow{BD}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AC}$ .

**D.**  $\overrightarrow{DB}$ .

**Câu 3:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ .

**C.**  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$ .

**D.**  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 4:** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Vector tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$  bằng

**A.**  $\vec{0}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AC}$ .

**C.**  $\overrightarrow{BD}$ .

**D.**  $\overrightarrow{BA}$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Vector tổng  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$  bằng

**A.**  $\overrightarrow{BP}$ .

**B.**  $\overrightarrow{MN}$ .

**C.**  $\overrightarrow{CP}$ .

**D.**  $\overrightarrow{PA}$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ .

**C.**  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ .

**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$ .

**B.**  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$ .

**C.**  $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$ .

**Câu 8:** Cho các điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Xác định vector tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

- A.  $\overline{MP}$ .                      B.  $\overline{MN}$ .                      C.  $\overline{MQ}$ .                      D.  $\overline{MR}$ .

**Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{BC}$ .      B.  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .      C.  $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{CB}$ .      D.  $\overline{DC} + \overline{DA} = \overline{DB}$ .

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  và  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ .                      B.  $\overline{AP} + \overline{BM} + \overline{CN} = \vec{0}$ .  
C.  $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = \vec{0}$ .                      D.  $\overline{PB} + \overline{MC} = \overline{MP}$ .

**Câu 11:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE} = \vec{0}$ .                      B.  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} = \overline{EB}$ .  
C.  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \vec{0}$ .                      D.  $\overline{BC} + \overline{EF} = \overline{AD}$ .

**Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $\overline{BC} + \overline{AB} = \overline{CA}$ .      B.  $\overline{OC} + \overline{AO} = \overline{CA}$ .      C.  $\overline{BA} + \overline{DA} = \overline{CA}$ .      D.  $\overline{DC} + \overline{BC} = \overline{CA}$ .

**Câu 13:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \vec{0}$ .                      B.  $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = \vec{0}$ .  
C.  $\overline{OA} + \overline{FE} = \vec{0}$ .                      D.  $\overline{OA} + \overline{ED} + \overline{FA} = \vec{0}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G_1$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $M$ . Vectơ tổng  $\overline{G_1B} + \overline{G_1C}$  bằng

- A.  $\overline{GA}$ .                      B.  $\overline{BC}$ .                      C.  $\overline{G_1A}$ .                      D.  $\overline{G_1M}$ .

**Câu 15:** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- 1)  $\overline{OG} = \vec{0}$ ;
- 2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều;
- 4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

- A. 3.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 4.

**Câu 16:** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- 1)  $\overline{HG} = \vec{0}$ ;
- 2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;
- 3)  $\overline{OG} = \vec{0}$ ;
- 4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

- A. 3.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 4.

**Câu 17:** Xét tam giác  $ABC$  nội tiếp có  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp,  $H$  là trực tâm. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- 1)  $\overline{HB} + \overline{HC} = \overline{HD}$ ;

2)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$ ;

3)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ , với  $H_1$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ ;

4) Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Câu 18:** Cho 5 điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$ .

B.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$ .

D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 19:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Vectơ tổng  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$  bằng

A.  $\vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{BD}$ .

C.  $\overrightarrow{OC}$ .

D.  $\overrightarrow{OA}$ .

**Câu 20:** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vectơ tổng  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$  bằng

A.  $\vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{A_1A_n}$ .

C.  $\overrightarrow{B_1B_n}$ .

D.  $\overrightarrow{A_1B_n}$ .

**DẠNG 2: VECTO ĐỐI, HIỆU CỦA HAI VECTO**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì.

**Câu 2.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Chứng minh rằng

$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ .

a) Tìm  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}; \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}; \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$ .

b) Phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}$ .

**Câu 4.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

**Câu 5.** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là

$B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vectơ khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.

B. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.

C. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.

D. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.

- Câu 2:** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?  
**A.**  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$ . **B.**  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$ .  
**C.**  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ . **D.**  $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$ .
- Câu 3:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\vec{OB} - \vec{OC}$ .  
**A.**  $\vec{BC}$ . **B.**  $\vec{DA}$ . **C.**  $\vec{OD} - \vec{OA}$ . **D.**  $\vec{AB}$ .
- Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vector  $(\vec{AO} - \vec{DO})$  bằng vector nào?  
**A.**  $\vec{BA}$ . **B.**  $\vec{BC}$ . **C.**  $\vec{DC}$ . **D.**  $\vec{AC}$ .
- Câu 5:** Chọn khẳng định sai:  
**A.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
**B.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{BI} = \vec{AB}$ .  
**C.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
**D.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{BI} = \vec{0}$ .
- Câu 6:** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:  
**A.**  $\vec{OA} = \vec{CA} + \vec{CO}$ . **B.**  $\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\vec{BA} = \vec{OB} - \vec{OA}$ . **D.**  $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$ .
- Câu 7:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{BC} - \vec{DA}$ . **B.**  $\vec{AC} - \vec{BD} = \vec{CB} - \vec{AD}$ .  
**C.**  $\vec{AC} - \vec{DB} = \vec{CB} - \vec{DA}$ . **D.**  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DC} - \vec{BC}$ .
- Câu 8:** Chỉ ra vector tổng  $\vec{MN} - \vec{QP} + \vec{RN} - \vec{PN} + \vec{QR}$  trong các vector sau  
**A.**  $\vec{MR}$ . **B.**  $\vec{MQ}$ . **C.**  $\vec{MP}$ . **D.**  $\vec{MN}$ .
- Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ . **B.**  $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{MC} + \vec{MB}$ .  
**C.**  $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{CM} + \vec{MD}$ . **D.**  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .
- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Khi đó, các vector đối của vector  $\vec{DN}$  là:  
**A.**  $\vec{AM}, \vec{MB}, \vec{ND}$ . **B.**  $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{ND}$ . **C.**  $\vec{MB}, \vec{AM}$ . **D.**  $\vec{AM}, \vec{BM}, \vec{ND}$ .
- Câu 11:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{AB} = \vec{BC} - \vec{AC}$ . **B.**  $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ . **C.**  $\vec{AB} = \vec{BC} - \vec{CA}$ . **D.**  $\vec{AB} = \vec{CA} - \vec{CB}$ .
- Câu 12:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\vec{CB} - \vec{CA}$  bằng  
**A.**  $\vec{OC} + \vec{OB}$ . **B.**  $\vec{AB}$ . **C.**  $\vec{OC} + \vec{DO}$ . **D.**  $\vec{CD}$ .
- Câu 13:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{CB} - \vec{DB}$  là:  
**A.**  $\vec{u} = \vec{0}$ . **B.**  $\vec{u} = \vec{AD}$ . **C.**  $\vec{u} = \vec{CD}$ . **D.**  $\vec{u} = \vec{AC}$ .
- Câu 14:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{CB} - \vec{AB}$  bằng:  
**A.**  $\vec{u} = \vec{AD}$ . **B.**  $\vec{u} = \vec{0}$ . **C.**  $\vec{u} = \vec{CD}$ . **D.**  $\vec{u} = \vec{AC}$ .
- Câu 15:** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AC} - \vec{DB}$ . **B.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{BC}$ .  
**C.**  $\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AD} + \vec{CB}$ . **D.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DA} - \vec{CB}$ .
- Câu 16:** Cho Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{AO} + \vec{BO} - \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$ . **B.**  $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{CO} - \vec{OD} = \vec{0}$ . **D.**  $\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$ .
- Câu 17:** Cho Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?



A.  $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{EO} = \vec{0}$ .

B.  $\vec{BC} - \vec{EF} = \vec{AD}$ .

C.  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{EB} - \vec{OC}$ .

D.  $\vec{AB} + \vec{CD} - \vec{EF} = \vec{0}$ .

**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CB}$ .

B.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{BC}$ .

C.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{AD}$ .

D.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CA}$ .

**Câu 19:** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ .

B.  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{BC}$ .

C.  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$ .

D.  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DA} + \vec{BC}$ .

**Câu 20:** Cho  $\Delta ABC$ , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành  $ABEF, ACPQ, BCMN$ . Xét các mệnh đề:

(I)  $\vec{NE} + \vec{FQ} = \vec{MP}$

(II)  $\vec{EF} + \vec{QP} = -\vec{MN}$

(III)  $\vec{AP} + \vec{BF} + \vec{CN} = \vec{AQ} + \vec{EB} + \vec{MC}$

Mệnh đề đúng là :

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III).

C. (I) và (II).

D. Chỉ (II).

### DẠNG 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO



#### BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng

a)  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$

b)  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}$

**Câu 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a)  $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$

b)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

c)  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$ .

**Câu 4.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Chứng minh rằng

$\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

**Câu 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\vec{AM} = \vec{BA}, \vec{MN} = \vec{DA}, \vec{NP} = \vec{DC}, \vec{PQ} = \vec{BC}$ . Chứng minh rằng:  $\vec{AQ} = \vec{0}$ .



#### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho 5 điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MP}$ .

B.  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{PR}$ .

C.  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MR}$ .

D.  $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MN}$ .

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

A.  $\vec{CD} + \vec{CB} = \vec{CA}$ .

B.  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .

C.  $\vec{BA} + \vec{BD} = \vec{BC}$ .

D.  $\vec{CD} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.**  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{DA}$ .      **B.**  $\overline{AO} + \overline{AC} = \overline{BO}$ .      **C.**  $\overline{AO} - \overline{BO} = \overline{CD}$ .      **D.**  $\overline{AO} + \overline{BO} = \overline{BD}$ .

**Câu 4:** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{BA}$ .      **B.**  $\overline{OA} = \overline{CA} - \overline{CO}$ .      **C.**  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ .      **D.**  $\overline{AB} = \overline{OB} + \overline{OA}$ .

**Câu 5:** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA}$ .      **B.**  $\overline{AB} = \overline{CB} + \overline{AC}$ .      **C.**  $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC}$ .      **D.**  $\overline{AB} = \overline{CA} + \overline{BC}$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overline{OA} + \overline{BO}$  bằng

**A.**  $\overline{OC} + \overline{OB}$ .      **B.**  $\overline{AB}$ .      **C.**  $\overline{OC} + \overline{DO}$ .      **D.**  $\overline{CD}$ .

**Câu 7:** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FA} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{DE} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FA} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{DE} = \overline{AF}$ .  
**C.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FA} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{DE} = \overline{AE}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FA} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{DE} = \overline{AD}$ .

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $BC$  và  $AD$ . Tính tổng  $\overline{NC} + \overline{MC}$ .

**A.**  $\overline{AC}$ .      **B.**  $\overline{NM}$ .      **C.**  $\overline{CA}$ .      **D.**  $\overline{MN}$ .

**Câu 9:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

**A.**  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{BC} + \overline{FE} = \overline{AD}$ .  
**C.**  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{EB}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FE} = \vec{0}$ .

**Câu 10:** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Tổng véc tơ:  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$  bằng

**A.**  $\overline{AF} + \overline{CE} + \overline{DB}$ .      **B.**  $\overline{AE} + \overline{CB} + \overline{DF}$ .      **C.**  $\overline{AD} + \overline{CF} + \overline{EB}$ .      **D.**  $\overline{AE} + \overline{BC} + \overline{DF}$ .

**Câu 11:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{ED} + \overline{BC}$ .      **B.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{ED} + \overline{CB}$ .  
**C.**  $\overline{AE} + \overline{BF} + \overline{DC} = \overline{DF} + \overline{BE} + \overline{AC}$ .      **D.**  $\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{EF} = \overline{AD} + \overline{BF} + \overline{EC}$ .

**Câu 12:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ .      **B.**  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{CB} + \overline{DA}$ .  
**C.**  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{CB} + \overline{AD}$ .      **D.**  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ .

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

**A.**  $\overline{IA} + \overline{IC} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .      **C.**  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .      **D.**  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$ .      **B.**  $\overline{CA} + \overline{BA} = \overline{CB}$ .      **C.**  $\overline{AA} + \overline{BB} = \overline{AB}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CB}$ .

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

**A.**  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .      **B.**  $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$ .      **C.**  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{AD}$ .      **D.**  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{CB}$ .

**Câu 16:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

**A.**  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{BC} + \overline{FE} = \overline{AD}$ .      **C.**  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{EB}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{FE} = \vec{0}$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chọn mệnh đề đúng:

**A.**  $\overline{NA} + \overline{NM} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{NA} + \overline{NB} + \overline{NC} = \vec{0}$ .      **C.**  $\overline{NB} + \overline{NE} = \vec{0}$ .      **D.**  $\overline{NE} + \overline{NF} = \overline{EF}$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Hệ thức nào là đúng?

**A.**  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AF} + \overline{CE} + \overline{BD}$ .      **B.**  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$ .  
**C.**  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AE} + \overline{AB} + \overline{CD}$ .      **D.**  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{AC}$ .

**Câu 19:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$ , tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$ .

D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ ,  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .

B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$ .

D.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC TO**

**1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $\Delta ABC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

**Câu 2.** Cho  $\Delta ABC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$ .

**Câu 3.**  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 4.**  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 5.** Cho tứ giác  $ABCD$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$ .

**2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $A$  là trung điểm  $MB$ .

**Câu 2:** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $I$  thỏa  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $I$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .

C. Không có điểm  $I$ .

D. Có vô số điểm  $I$ .

**Câu 3:** Cho  $\Delta ABC$ ,  $B$ . Tìm điểm  $I$  để  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $I$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .

C. Không có điểm  $I$ .

D. Có vô số điểm  $I$ .

**Câu 4:** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .

C. Không có điểm  $M$ .

D. Có vô số điểm  $M$ .

**Câu 5:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $A$  là trung điểm  $MB$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $A$  là trung điểm  $MB$ .

- Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} = \overline{DC} + \overline{AB} + \overline{BD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 8:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 9:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} = \overline{OC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $O$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 10:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} = \overline{BC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 11:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} + \overline{AB} = \overline{DC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $O$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 12:** Cho tứ giác  $PQRN$  có  $O$  là giao điểm 2 đường chéo,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RN} + \overline{NP} + \overline{QR} = \overline{ON}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $P$ .      **B.**  $M$  trùng  $Q$ .      **C.**  $M$  trùng  $O$ .      **D.**  $M$  trùng  $R$ .
- Câu 13:** Cho  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MB} + \overline{MC} = \overline{CM} - \overline{CA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm  $CA$ .      **D.**  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .
- Câu 14:** Cho  $\Delta DEF$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{MF} = \overline{ED}$ .      **B.**  $\overline{FM} = \overline{ED}$ .      **C.**  $\overline{EM} = \overline{DF}$ .      **D.**  $\overline{FM} = \overline{DE}$ .
- Câu 15:** Cho  $\Delta DEF$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{EM} = \overline{ED} + \overline{EF}$ .      **B.**  $\overline{FD} = \overline{EM}$ .      **C.**  $\overline{MD} + \overline{MF} = \overline{EM}$ .      **D.**  $\overline{FM} = \overline{DE}$ .
- Câu 16:** Cho  $\Delta ABC$  có  $O$  là trung điểm  $BC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AB} = \overline{MB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $A$ .      **B.**  $M$  trùng  $B$ .      **C.**  $M$  trùng  $O$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 17:** Cho  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm  $CA$ .      **D.**  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .
- Câu 18:** Cho  $\Delta ABC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overline{MC} - \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{CM} - \overline{CB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $A$ .      **B.**  $M$  trùng  $B$ .  
**C.**  $ACMB$  là hình bình hành.      **D.**  $\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BM}$ .
- Câu 19:** Cho  $\Delta ABC$ ,  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{BD} = \overline{CM}$ .      **B.**  $\overline{AM} = \overline{ED}$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .      **D.**  $\overline{EM} = \overline{BD}$ .

**Câu 20:** Cho tứ giác  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{AC} + \vec{MD} = \vec{CD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ . B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
 C.  $D$  là trung điểm  $BM$ . D.  $M$  là trung điểm  $DC$ .

**DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÍNH ĐỘ DÀI CỦA VECTO**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\vec{AD} + \vec{AB}|$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

**Câu 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\vec{CA} - \vec{HC}|$ .

**Câu 5.** Có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ là  $50$  (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

- A.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$ . B.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . C.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$ . D.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a\sqrt{3}$ .

**Câu 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Độ dài  $|\vec{AD} + \vec{AB}|$  bằng

- A.  $2a$  B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . D.  $a\sqrt{2}$ .

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $|\vec{AC}| = \vec{BC}$ . B.  $\vec{AC} = a$ . C.  $\vec{AB} = \vec{AC}$ . D.  $|\vec{AB}| = a$ .

**Câu 4:** Cho  $\vec{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ ?

- A. Vô số. B. 1 điểm. C. 2 điểm. D. Không có điểm nào.

**Câu 5:** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A.  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vectơ. B.  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vectơ.  
 C.  $\vec{AA} = \vec{0}$ . D.  $|\vec{AB}| > 0$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $I$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\vec{BA} + \vec{DA} = \vec{BA} + \vec{DC}$ . B.  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$ .  
 C.  $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$ . D.  $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\vec{CA} - \vec{HC}|$ .

**A.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .    **B.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = 5$ .    **C.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ .    **D.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ .

**Câu 8:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.**  $\overline{BA} = \overline{CD}$ .    **B.**  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .    **C.**  $\overline{OA} = \overline{OC}$ .    **D.**  $\overline{AO} = \overline{OC}$ .

**Câu 9:** Có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

**A.** 100 (N).    **B.**  $50\sqrt{3}$  (N).    **C.**  $100\sqrt{3}$  (N).    **D.** Đáp án khác.

**Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overline{AB} = \overline{DC}$  và  $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ . Khẳng định nào sau đây sai?

**A.**  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .    **B.**  $ABCD$  là hình thoi.  
**C.**  $|\overline{CD}| = |\overline{BC}|$ .    **D.**  $ABCD$  là hình thang cân.

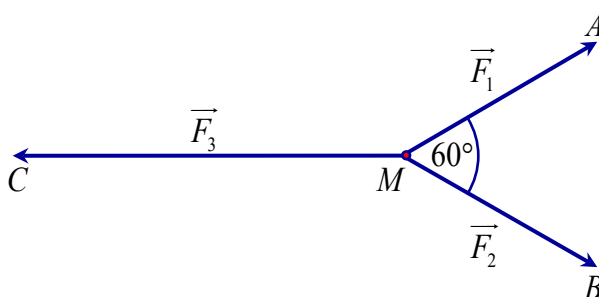
**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AC}|$ .

**A.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a\sqrt{2}$ .    **B.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .    **C.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2a$ .    **D.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , có  $AH$  là đường trung tuyến. Tính  $|\overline{AC} + \overline{AH}|$ .

**A.**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    **B.**  $2a$ .    **C.**  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .    **D.**  $a\sqrt{3}$ .

**Câu 13:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng  $25N$  và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là



- A.  $25\sqrt{3} N$ .                      B.  $50\sqrt{3} N$ .                      C.  $50\sqrt{2} N$ .                      D.  $100\sqrt{3} N$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tìm khẳng định sai.

- A.  $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = IA$ .    B.  $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$ .    C.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI$ .    D.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 3GA$ .

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ .                      B.  $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$ .                      C.  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ .                      D.  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ .

**Câu 16:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ .

- A.  $4a\sqrt{2}$ .                      B.  $4a$ .                      C.  $2a\sqrt{2}$ .                      D.  $2a$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $2a$ , trọng tâm  $G$ . Độ dài vector  $\vec{AB} - \vec{GC}$  là

- A.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .                      B.  $\frac{2a}{3}$ .                      C.  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$  thì tam giác  $ABC$  là

- A. Tam giác vuông  $A$ .                      B. Tam giác vuông  $C$ .  
C. Tam giác vuông  $B$ .                      D. Tam giác cân tại  $C$ .

**Câu 19:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $2a$  có  $G$  là trọng tâm. Khi đó  $|\vec{AB} - \vec{GC}|$  là

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      B.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .                      D.  $\frac{2a}{3}$ .

**Câu 20:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  lần lượt là  $300(N)$  và  $400(N)$ .  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A.  $0(N)$ .                      B.  $700(N)$ .                      C.  $100(N)$ .                      D.  $500(N)$ .

CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 4: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

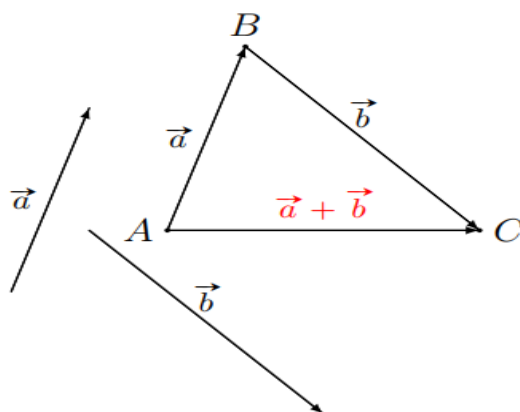
### I LÝ THUYẾT.

#### I. TỔNG CỦA HAI VECTO

##### 1. Định nghĩa:

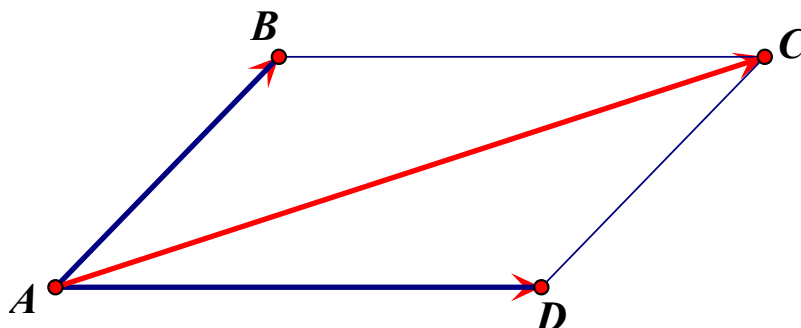
+ Với ba điểm  $A, B, C$ , ta luôn có:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

+ Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{BC} = \vec{b}$ . Vectơ  $\overline{AC}$  được gọi là **tổng** của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ . Vậy  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .



##### 2. Quy tắc hình bình hành:

+ Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, ta có:  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .



##### 3. Tính chất của phép cộng vectơ: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

+ Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

+ Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

+ Tính chất của vectơ - không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .



## II. HIỆU CỦA HAI VECTOR

### 1. Hai vector đối:

+ Vector có cùng độ dài và ngược hướng với  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ . Hai vector  $\vec{a}$  và  $-\vec{a}$  là hai vector đối nhau.

+ Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

### 2. Hiệu của hai vector:

+ Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là tổng của vector  $\vec{a}$  và vector đối của  $\vec{b}$ , tức là  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ . Khi đó:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

+ Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

**Chú ý: tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác:**

+ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

+ Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**Câu 1:** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Vector  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{PN}$ .                      B.  $\overrightarrow{PM}$ .                      C.  $\overrightarrow{MP}$ .                      D.  $\overrightarrow{NM}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ . **Chọn C**

**Câu 2:** Cho ba điểm  $D, E, G$ . Vector  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{EG}$ .                      B.  $\overrightarrow{GE}$ .                      C.  $\overrightarrow{GD}$ .                      D.  $\overrightarrow{ED}$ .

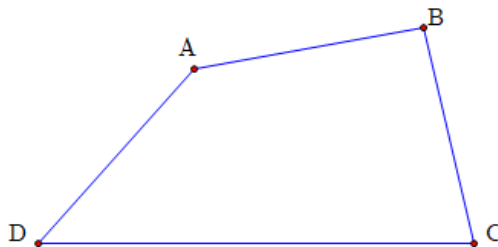
**Lời giải**

Ta có  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG}) = \vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GE}$ . **Chọn B**

**Câu 3:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$                       b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

**Lời giải**



a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

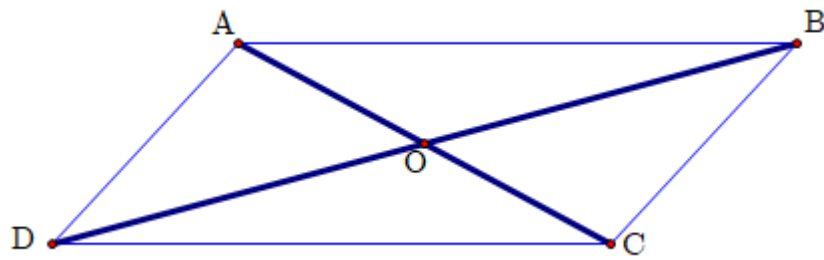
**Câu 4:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

b)  $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{CB}$ .

c)  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{OD}$ .

**Lời giải**



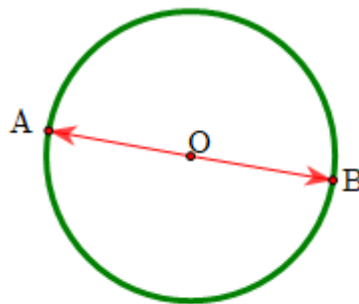
a) Theo quy tắc hình bình hành nên a) đúng

b)  $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD} = \overline{BC} \neq \overline{CB}$  nên b) sai

c)  $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC} - \overline{OD} = \overline{CA} + \overline{DB} \neq \vec{0}$  nên c) sai

**Câu 5:** Cho đường tròn tâm  $O$ . Giả sử  $A, B$  là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ  $\overline{OA}$  và  $\overline{OB}$  đối nhau.

**Lời giải**

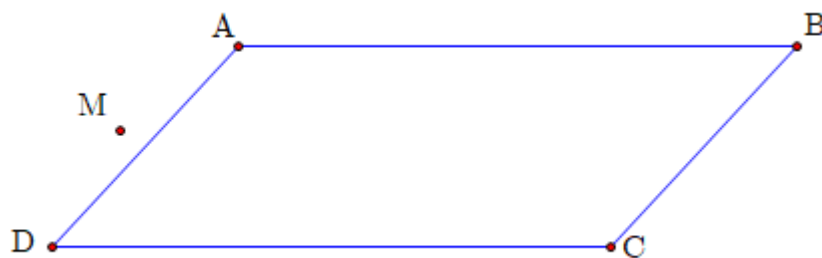


Hai vectơ đối nhau khi chúng cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau

Do đó, để hai vectơ  $\overline{OA}$  và  $\overline{OB}$  đối nhau khi và chỉ khi  $AB$  là đường kính của đường tròn tâm  $O$ .

**Câu 6:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành. Chứng minh  $\overline{MB} - \overline{MA} = \overline{MC} - \overline{MD}$  với mỗi điểm  $M$  trong mặt phẳng.

**Lời giải**



Ta có 
$$\begin{cases} \overline{MB} - \overline{MA} = \overline{AB} \\ \overline{MC} - \overline{MD} = \overline{DC} \end{cases}$$

Mà  $\overline{AB} = \overline{DC}$  nên được điều phải chứng minh

**Câu 7:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính độ dài của các vectơ sau:

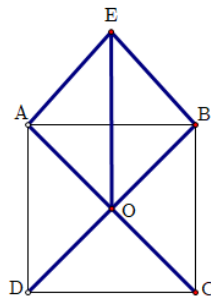
- a)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ;
- b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
- c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

**Lời giải**

a)  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

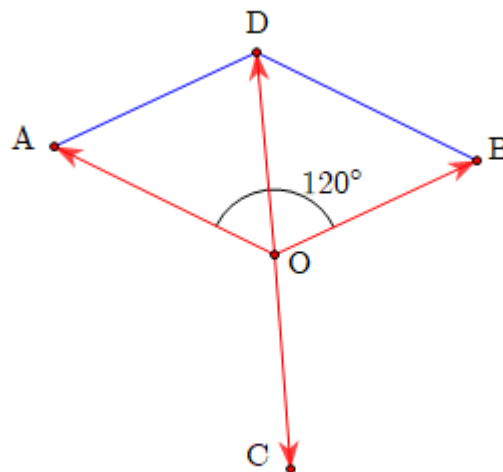
c) Vẽ hình bình hành  $OAEB$  vì góc  $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OAEB$  là hình vuông nên ta có



$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = a\sqrt{2}$$

**Câu 8:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $O$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $120\text{ N}$  và  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Tìm cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải**



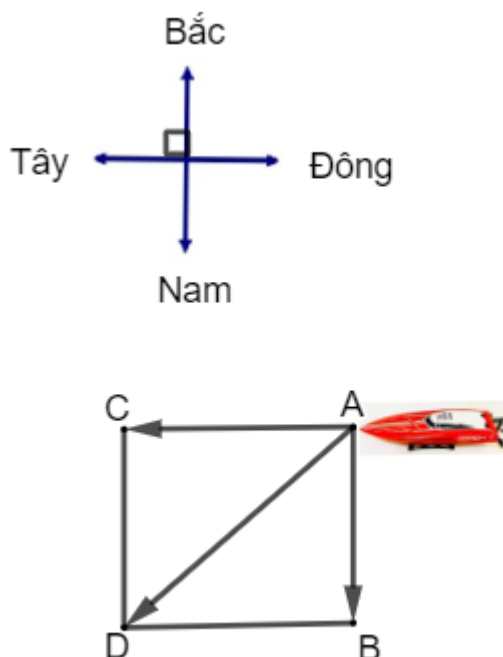
Vẽ hình bình hành  $OADB$  ta dễ có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$  vì  $OA = OB$  nên  $OADB$  là hình thoi. Suy ra tam giác là  $OBD$ , nên  $OD = OA = OB$ .

Vì vật đứng yên, nên ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Suy ra  $OC = OD = 120\text{ N}$

Vậy cường độ lực  $\vec{F}_3 = 120\text{ N}$ . Có hướng ngược  $\overrightarrow{OD}$  (là hợp lực của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ )

**Câu 9:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

**Lời giải**



Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng  $A$  sang  $C$ , khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi  $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_1| = 40\text{ km/h}$ , vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_2| = 10\text{ km/h}$ .

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Ta cần tính độ lớn của vectơ  $\vec{v}$ , hay chính là  $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên  $AB$  và  $AC$  vuông góc với nhau.

Suy ra ACDB là hình chữ nhật.

Nên  $AB = CD = 10, AC = BD = 40$ .

Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ACD, ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

Lại có do ACDB là hình bình hành nên:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  Do đó:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{v}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 10\sqrt{17}$$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là  $10\sqrt{17}\text{ km/h}$ .

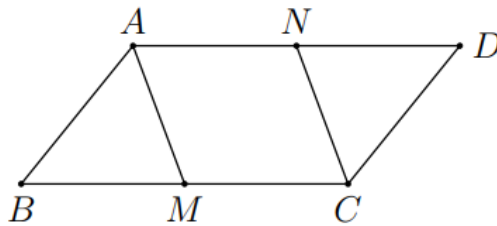


**Câu 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tìm tổng của hai vectơ:

a)  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$

b)  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{CD}$

**Lời giải**



a) Vì  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$  nên ta có  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$ .

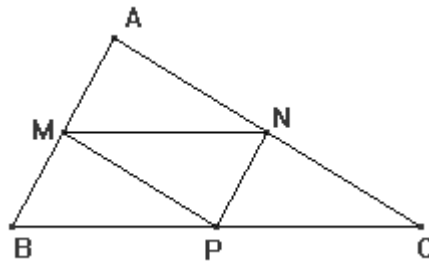
b) Vì  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  nên ta có  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ .

1) Tìm các hiệu sau  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ ;  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$ ;

2) Phân tích vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

**Lời giải**



1) Theo qui tắc ba điểm, thì  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$ .

Vì  $MP$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  và  $\overrightarrow{MP}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{NC}$  nên ta có  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$ .

Do vậy:  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ .

Vì  $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$  nên  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .

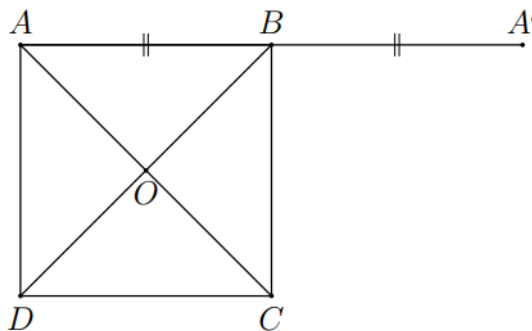
2) Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP}$  nên có phân tích sau  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  với tâm là  $O$ . Tính:

a) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$

b) Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$ .

Mặt khác  $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Nên  $|\overline{OA} - \overline{CB}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

b) Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ .

Ta có  $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BA'} = \overline{AA'}$  nên  $|\overline{AB} + \overline{DC}| = |\overline{AA'}| = 2a$ .

**Câu 4.** Cho bốn điểm bất kỳ  $A, B, C$  và  $D$ . Hãy chứng minh đẳng thức:  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB}$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Sử dụng qui tắc tổng

$$\overline{AB} + \overline{CD} = (\overline{AD} + \overline{DB}) + (\overline{CB} + \overline{BD}) = \overline{AD} + \overline{CB} + (\overline{BD} + \overline{DB}) = \overline{AD} + \overline{CB} + \vec{0} = \overline{AD} + \overline{CB}.$$

**Cách 2:** Sử dụng hiệu hai vectơ.

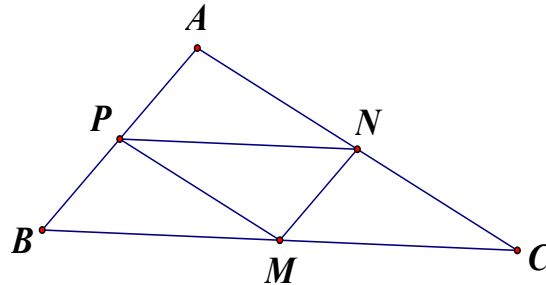
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{CB} - \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{DB} = \overline{DB}.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overline{BM} + \overline{CN} + \overline{AP} = \vec{0}$

b)  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$ , với  $O$  là điểm bất kì.

**Lời giải**



a) Vì  $PN, MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $PN \parallel BM, MN \parallel BP$  suy ra tứ giác

$BMNP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{BM} = \overline{PN}$ .

$N$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow \overline{CN} = \overline{NA}$ .

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overline{BM} + \overline{CN} + \overline{AP} = (\overline{PN} + \overline{NA}) + \overline{AP} = \overline{PA} + \overline{AP} = \vec{0}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

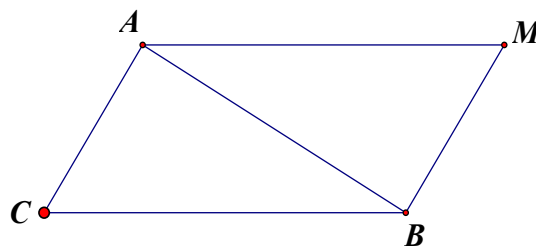
$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = (\overline{OP} + \overline{PA}) + (\overline{OM} + \overline{MB}) + (\overline{ON} + \overline{NC}) = (\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}) + \overline{PA} + \overline{MB} + \overline{NC}$$

$$= (\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}) - (\overline{BM} + \overline{CN} + \overline{AP})$$

Theo câu a)  $\overline{BM} + \overline{CN} + \overline{AP} = \vec{0}$  ta suy ra  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$ .

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $M$  thỏa điều kiện  $\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = \vec{0}$ .

**Lời giải**



Ta có  $\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = \vec{0}$

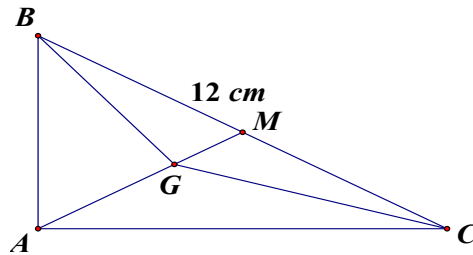
$$\Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} = \overline{BC}.$$

Suy ra  $M$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ACBM$ .

**Câu 7.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác vuông  $ABC$ , với cạnh huyền  $BC = 12$ . Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ .

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$

Ta có  $AM = \frac{1}{2}BC = 6$ ;  $AG = \frac{2}{3}AM = 4$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$

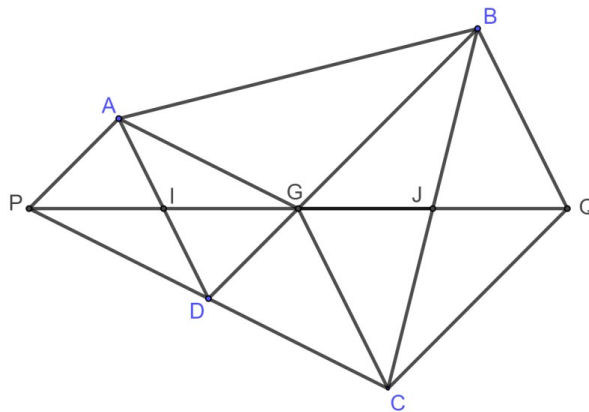
Suy ra  $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{AG}| = AG = 4$ .

**Câu 8.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm hai cạnh  $AD, BC$  và  $G$  là trung điểm  $IJ$ . Gọi  $P$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $I, Q$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $J$ . Chứng minh các đẳng thức vectơ sau:

a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GP}$ ;  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GQ}$ .

b)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

**Lời giải**



a) Hai tứ giác  $AGDP$  và  $BGCQ$  có hai đường chéo giao nhau tại trung điểm mỗi đường nên chúng là các hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GP} \text{ (đpcm).}$$

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GQ} \text{ (đpcm).}$$

b) Theo cách dựng hình từ đề bài ta thấy  $G$  là trung điểm  $PQ$  nên  $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$ .

Biến đổi biểu thức vectơ đề cho và dựa vào kết quả câu a:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

**Câu 9.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2, AD = 1$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $CD$ . Hãy tính:

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|$ .      b)  $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}|$ .

**Lời giải**

a) Ta thực hiện biến đổi:

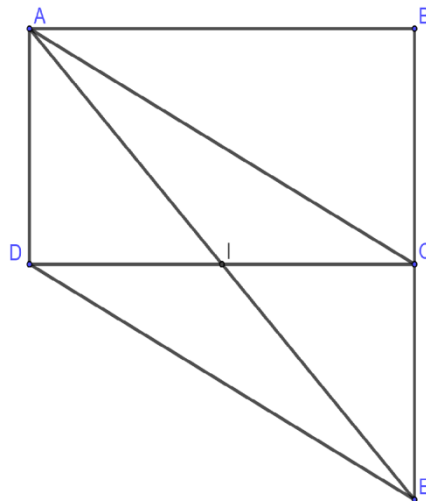
$$|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BC}| = |\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD}| = |\overline{AC} + \overline{AD}|.$$

Dựng điểm  $E$  sao cho:  $\overline{CE} = \overline{AD}$ .

Suy ra  $ACED$  là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành:  $|\overline{AC} + \overline{AD}| = |\overline{AE}| = AE$ .

Tam giác  $ABE$  vuông cân tại  $B$  nên:  $AE = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .



b) Ta thực hiện biến đổi:

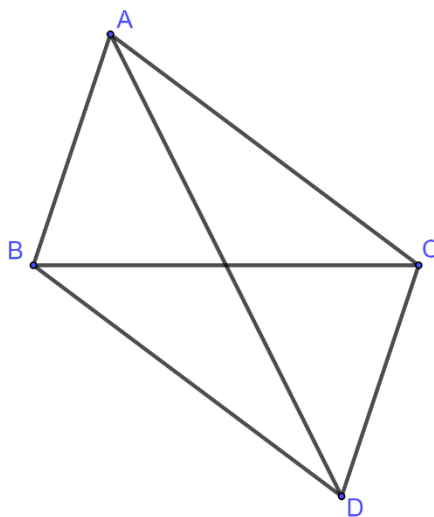
$$|\overline{AC} - \overline{AB} - \overline{AI}| = |\overline{BC} - \overline{AI}| = |\overline{AD} - \overline{AI}| = |\overline{ID}| = ID = \frac{CD}{2} = 1.$$

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ , đặt:  $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{AC}$ ;  $\vec{v} = \overline{AB} - \overline{AC}$ . Tìm điều kiện của tam giác  $ABC$  để:

a)  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

b)  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Lời giải**



Dựng hình bình hành  $ABDC$ , theo quy tắc hình bình hành và nguyên tắc trừ vectơ, ta có:

$$\vec{u} = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}.$$

$$\vec{v} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}.$$

a)  $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow AD = BC$ . Hình bình hành  $ABDC$  có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi  $ABDC$  là hình chữ nhật.

Vậy  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  thì  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

b)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow AD \perp BC$ . Hình bình hành  $ABDC$  có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi  $ABDC$  là hình thoi.



Vậy  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  thì  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

#### DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG CÁC VECTO

### 1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , xác định các vectơ  $\vec{CB} + \vec{CD}$ ,  $\vec{AC} + \vec{DA}$ .

**Lời giải**

$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA} \text{ và } \vec{AC} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}.$$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ , xác định các vectơ  $\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

**Lời giải**

$$\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

Gọi  $D$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình bình hành. Khi đó

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}.$$

**Câu 3.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ , xác định các vectơ  $\vec{AB} + \vec{OD}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD}$ .

**Lời giải**

$$\vec{AB} + \vec{OD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}.$$

**Câu 4.** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , xác định vectơ

$$\vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2}.$$

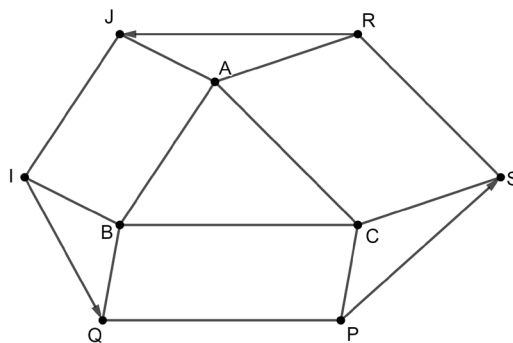
**Lời giải**

$$\begin{aligned} & \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2} \\ &= \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n} \end{aligned}$$

Do đó  $\vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2} = \vec{A_1A_n}$ .

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ$ ,  $BCPQ$ ,  $CARS$ . Chứng minh rằng  $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$ .

**Lời giải**



$$\vec{RJ} = \vec{RA} + \vec{AJ}, \vec{IQ} = \vec{IB} + \vec{BQ}, \vec{PS} = \vec{PC} + \vec{CS}.$$

$$\begin{aligned}\overline{RJ} + \overline{IQ} + \overline{PS} &= (\overline{RA} + \overline{AJ}) + (\overline{IB} + \overline{BQ}) + (\overline{PC} + \overline{CS}) \\ &= (\overline{RA} + \overline{CS}) + (\overline{AJ} + \overline{IB}) + (\overline{BQ} + \overline{PC}) \\ &= (\overline{SC} + \overline{CS}) + (\overline{BI} + \overline{IB}) + (\overline{CP} + \overline{PC}) \\ &= \overline{SS} + \overline{BB} + \overline{CC} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Vậy  $\overline{RJ} + \overline{IQ} + \overline{PS} = \vec{0}$ .

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.**  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ . **B.**  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

**C.**  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ . **D.**  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vectơ tổng  $\overline{CB} + \overline{CD}$  bằng

**A.**  $\overline{CA}$ . **B.**  $\overline{BD}$ . **C.**  $\overline{AC}$ . **D.**  $\overline{DB}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{CB} + \overline{CD} = \overline{CA}.$$

**Câu 3:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.**  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ . **B.**  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ .

**C.**  $\overline{CA} + \overline{BC} = \overline{BA}$ . **D.**  $\overline{CB} + \overline{AC} = \overline{BA}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overline{CB} + \overline{AC} = \overline{AB}.$$

**Câu 4:** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Vectơ tổng  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA}$  bằng

**A.**  $\vec{0}$ . **B.**  $\overline{AC}$ . **C.**  $\overline{BD}$ . **D.**  $\overline{BA}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA} = \vec{0}.$$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Vectơ tổng  $\overline{MP} + \overline{NP}$  bằng

**A.**  $\overline{BP}$ . **B.**  $\overline{MN}$ . **C.**  $\overline{CP}$ . **D.**  $\overline{PA}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{MP} + \overline{NP} = \overline{BM} + \overline{MP} = \overline{BP}.$$

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.**  $\overline{IA} + \overline{DC} = \overline{IB}$ .      **B.**  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{BD}$ .      **C.**  $\overline{IA} + \overline{BC} = \overline{IB}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{IA} = \overline{BI}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{IA} + \overline{DC} = \overline{IA} + \overline{AB} = \overline{IB}.$$

**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\overline{IA} + \overline{DC} = \overline{IB}$ .      **B.**  $\overline{DA} + \overline{DC} + \overline{BI} = \overline{DI}$ .  
**C.**  $\overline{ID} + \overline{AB} = \overline{IC}$ .      **D.**  $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CI} = \overline{IA}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CI} = \overline{AC} + \overline{CI} = \overline{AI}.$$

**Câu 8:** Cho các điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Xác định vector tổng  $\overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RP} + \overline{NP} + \overline{QR}$ .

- A.**  $\overline{MP}$ .      **B.**  $\overline{MN}$ .      **C.**  $\overline{MQ}$ .      **D.**  $\overline{MR}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RP} + \overline{NP} + \overline{QR} = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{MP}.$$

**Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{BC}$ .      **B.**  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ .      **C.**  $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{CB}$ .      **D.**  $\overline{DC} + \overline{DA} = \overline{DB}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC}.$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  và  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{AP} + \overline{BM} + \overline{CN} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = \vec{0}$ .      **D.**  $\overline{PB} + \overline{MC} = \overline{MP}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overline{PB} + \overline{MC} = \overline{PB} + \overline{BM} = \overline{PM}.$$

**Câu 11:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} = \overline{EB}$ .  
**C.**  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \vec{0}$ .      **D.**  $\overline{BC} + \overline{EF} = \overline{AD}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}.$$

**Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ .      **B.**  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$ .      **C.**  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .      **D.**  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$

**Câu 13:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?.

**A.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .      **D.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}.$$

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G_1$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $M$ . Vectơ tổng  $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$  bằng

**A.**  $\overrightarrow{GA}$ .      **B.**  $\overrightarrow{BC}$ .      **C.**  $\overrightarrow{G_1A}$ .      **D.**  $\overrightarrow{G_1M}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{GA}.$$

**Câu 15:** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1)  $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ ;
- 2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều;
- 4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

**A.** 3.      **B.** 1.      **C.** 2.      **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv G. \text{ Do đó tam giác } ABC \text{ là tam giác đều.}$$

**Câu 16:** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1)  $\overrightarrow{HG} = \vec{0}$ ;
- 2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;
- 3)  $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ ;
- 4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

**A.** 3.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HG} = \vec{0} \Rightarrow H \equiv G$ . Do đó tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 17:** Xét tam giác  $ABC$  nội tiếp có  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp,  $H$  là trực tâm. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1)  $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ ;

2)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$ ;

3)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ , với  $H_1$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ ;

4) Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**A.** 3.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ .

Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì  $\overrightarrow{HH_1} = \vec{0}$ , suy ra  $H \equiv O$ .

**Câu 18:** Cho 5 điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$ .

**B.**  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

**C.**  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$ .

**D.**  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 19:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Vector tổng  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$  bằng

**A.**  $\vec{0}$ .

**B.**  $\overrightarrow{BD}$ .

**C.**  $\overrightarrow{OC}$ .

**D.**  $\overrightarrow{OA}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$ .

**Câu 20:** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vector tổng  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$  bằng

**A.**  $\vec{0}$ .

**B.**  $\overrightarrow{A_1A_n}$ .

**C.**  $\overrightarrow{B_1B_n}$ .

**D.**  $\overrightarrow{A_1B_n}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Lấy điểm  $O$  bất kì. Khi đó

$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + \dots + \overrightarrow{A_nO}) + (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n})$

Vì  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  nên

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

Do đó  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + (\overrightarrow{A_nO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$ .

**DẠNG 2: VECTO ĐỐI, HIỆU CỦA HAI VECTO**

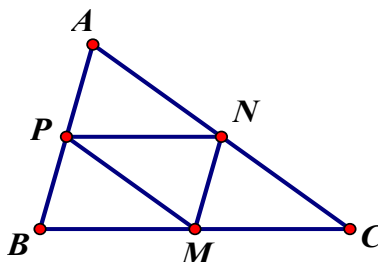
**1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

b)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì.

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  $APMN$  là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AP} + \vec{AN} = \vec{AM}$ , kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{CM} + \vec{BM}$$

Mà  $\vec{CM} + \vec{BM} = \vec{0}$  do  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

Vậy  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$ .

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= (\vec{OP} + \vec{PA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{ON} + \vec{NC}) \\ &= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) + \vec{PA} + \vec{MB} + \vec{NC} \\ &= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) - (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP}) \end{aligned}$$

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0} \text{ suy ra } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}.$$

**Câu 2.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Chứng minh rằng  $\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

**Lời giải**

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

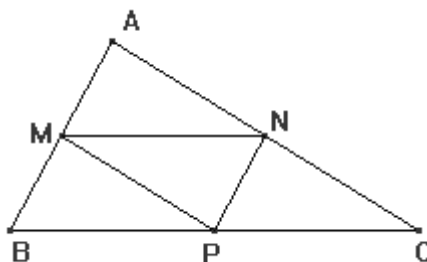
$$\begin{aligned} \vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} &= (\vec{AB} - \vec{AB'}) + (\vec{AC'} - \vec{AC}) + (\vec{AD} - \vec{AD'}) \\ &= (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AC} - (\vec{AB'} + \vec{AD'}) + \vec{AC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ .

a) Tìm  $\overline{AM} - \overline{AN}; \overline{MN} - \overline{NC}; \overline{MN} - \overline{PN}; \overline{BP} - \overline{CP}$ .

b) Phân tích  $\overline{AM}$  theo hai vectơ  $\overline{MN}; \overline{MP}$ .

**Lời giải**



$$a) \overline{AM} - \overline{AN} = \overline{NM}$$

$$\overline{MN} - \overline{NC} = \overline{MN} - \overline{MP} = \overline{PN} \text{ (Vì } \overline{NC} = \overline{MP} \text{)}$$

$$\overline{MN} - \overline{PN} = \overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$$

$$\overline{BP} - \overline{CP} = \overline{BP} + \overline{PC} = \overline{BC}$$

$$b) \overline{AM} = \overline{NP} = \overline{MP} - \overline{MN}.$$

**Câu 4.** Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng:  $\overline{AC} + \overline{DE} - \overline{DC} - \overline{CE} + \overline{CB} = \overline{AB}$

**Lời giải**

Ta có  $-\overline{DC} = \overline{CD}; -\overline{CE} = \overline{EC}$  nên

$$VT = \overline{AC} + \overline{DE} - \overline{DC} - \overline{CE} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{DE} + \overline{CD} + \overline{EC} + \overline{CB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EC} + \overline{CB} = \overline{AB} = VP \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Câu 5.** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Chứng minh rằng:  $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Lấy điểm  $O$  bất kì. Khi đó

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n} = (\overline{OB_1} + \overline{OB_2} + \dots + \overline{OB_n}) - (\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n})$$

Vì  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  nên

$$\overline{OB_1} + \overline{OB_2} + \dots + \overline{OB_n} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n}$$

Do đó  $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n} = \vec{0}$ .





**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vectơ khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.
- B. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.
- C. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.
- D. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.

**Lời giải**

**Chọn D**

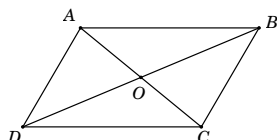
Ta có  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Do đó,  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

**Câu 2:** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$ .
- B.  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$ .
- C.  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ .
- D.  $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA} = \vec{CD}$ . Vậy A đúng.
- Đáp án B. Ta có  $\begin{cases} \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} = -\vec{AD} \\ \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD} \end{cases}$ . Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ . Vậy C đúng.
- Đáp án D. Ta có  $\begin{cases} \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC} \\ \vec{DC} - \vec{DA} = \vec{AC} \end{cases}$ . Vậy D đúng.

**Câu 3:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\vec{OB} - \vec{OC}$ .

- A.  $\vec{BC}$ .
- B.  $\vec{DA}$ .
- C.  $\vec{OD} - \vec{OA}$ .
- D.  $\vec{AB}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

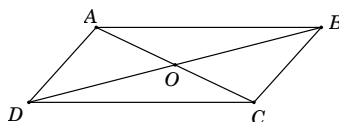
$$\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} = \vec{DA}.$$

**Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vectơ  $(\vec{AO} - \vec{DO})$  bằng vectơ nào?

- A.  $\vec{BA}$ .
- B.  $\vec{BC}$ .
- C.  $\vec{DC}$ .
- D.  $\vec{AC}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



$$\vec{AO} - \vec{DO} = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD} = \vec{BC}.$$

**Câu 5:** Chọn khẳng định sai:

- A.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
**B.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{BI} = \vec{AB}$ .  
**C.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
**D.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{BI} = \vec{0}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{BA} \neq \vec{0}.$$

**Câu 6:** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A.**  $\vec{OA} = \vec{CA} + \vec{CO}$ .      **B.**  $\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\vec{BA} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .      **D.**  $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AC} = \vec{0}.$$

**Câu 7:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{BC} - \vec{DA}$ .      **B.**  $\vec{AC} - \vec{BD} = \vec{CB} - \vec{AD}$ .  
**C.**  $\vec{AC} - \vec{DB} = \vec{CB} - \vec{DA}$ .      **D.**  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DC} - \vec{BC}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}, \quad \vec{DC} - \vec{BC} = \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DB}.$$

$$\text{Vậy: } \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DC} - \vec{BC}.$$

**Câu 8:** Chỉ ra vector tổng  $\vec{MN} - \vec{QP} + \vec{RN} - \vec{PN} + \vec{QR}$  trong các vector sau

- A.**  $\vec{MR}$ .      **B.**  $\vec{MQ}$ .      **C.**  $\vec{MP}$ .      **D.**  $\vec{MN}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RN} = \vec{MN}.$$

**Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ .      **B.**  $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{MC} + \vec{MB}$ .  
**C.**  $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{CM} + \vec{MD}$ .      **D.**  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$$

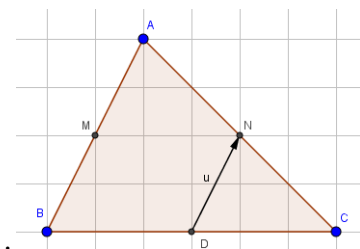
$$\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}. (\text{đúng}).$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Khi đó, các vector đối của vector  $\vec{DN}$  là:

- A.**  $\vec{AM}, \vec{MB}, \vec{ND}$ .      **B.**  $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{ND}$ .      **C.**  $\vec{MB}, \vec{AM}$ .      **D.**  $\vec{AM}, \vec{BM}, \vec{ND}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Nhìn hình ta thấy vectơ đối của vectơ  $\overrightarrow{DN}$  là  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{ND}$ .

**Câu 11:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

**Câu 12:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB}$ .      C.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ .      D.  $\overrightarrow{CD}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \text{ (qui tắc 3 điểm).}$$

**Câu 13:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$  là:

- A.  $\vec{u} = \vec{0}$ .      B.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ .      C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ .      D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

**Câu 14:** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$  bằng:

- A.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ .      B.  $\vec{u} = \vec{0}$ .      C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ .      D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

**Câu 15:** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

**Câu 16:** Cho Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .      B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .      D.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{AO} + \vec{CO} + \vec{BO} + \vec{DO} = \vec{0}$ .

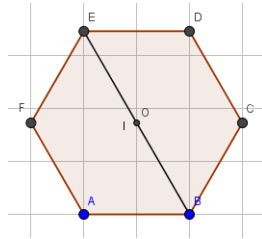
Do  $\vec{AO}$ ,  $\vec{CO}$  đối nhau,  $\vec{BO}$ ,  $\vec{DO}$  đối nhau.

**Câu 17:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

- A.**  $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{EO} = \vec{0}$ .    **B.**  $\vec{BC} - \vec{EF} = \vec{AD}$ .  
**C.**  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{EB} - \vec{OC}$ .    **D.**  $\vec{AB} + \vec{CD} - \vec{EF} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có:  $\vec{AB} + \vec{CD} - \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{BO} - \vec{OA} = \vec{AO} - \vec{OA} = 2\vec{AO} \neq \vec{0}$ .

**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CB}$ .    **B.**  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{BC}$ .  
**C.**  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{AD}$ .    **D.**  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CA}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CA} + \vec{DC} = \vec{DC} + \vec{CA} = \vec{DA} = \vec{CB}$ .

**Câu 19:** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ .    **B.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{BC}$ .  
**C.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$ .    **D.**  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{DA} + \vec{BC}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{DB} = \vec{DB}$ .

**Câu 20:** Cho  $\Delta ABC$ , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành  $ABEF$ ,  $ACPQ$ ,  $BCM N$ . Xét các mệnh đề:

- (I)  $\vec{NE} + \vec{FQ} = \vec{MP}$   
 (II)  $\vec{EF} + \vec{QP} = -\vec{MN}$   
 (III)  $\vec{AP} + \vec{BF} + \vec{CN} = \vec{AQ} + \vec{EB} + \vec{MC}$

Mệnh đề đúng là :

- A.** Chỉ (I).    **B.** Chỉ (III).    **C.** (I) và (II).    **D.** Chỉ (II).

**Lời giải**

**Chọn A**

$\vec{NE} + \vec{FQ} = \vec{MP}$ .

**DẠNG 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng

a)  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$

b)  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}$

**Lời giải**

a) Biến đổi về trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= (\vec{AC} + \vec{CB}) + \vec{CD} + (\vec{ED} + \vec{DA}) \\ &= (\vec{CB} + \vec{ED}) + (\vec{AC} + \vec{CD}) + \vec{DA} \\ &= (\vec{CB} + \vec{ED}) + \vec{AD} + \vec{DA} \end{aligned}$$

$$= \vec{CB} + \vec{ED} = VP.$$

b) Đẳng thức tương đương với

$$(\vec{AC} - \vec{AE}) + (\vec{CD} - \vec{CB}) - \vec{EC} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{EC} + \vec{BD} - \vec{EC} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$\vec{BD} + \vec{DB} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

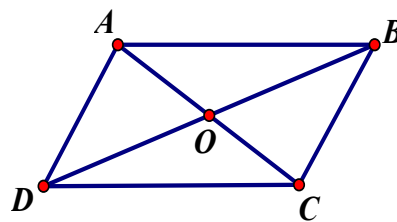
**Câu 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a)  $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$

b)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

c)  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AC}$   
 $= -(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  suy ra

$$\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = -\vec{AC} + \vec{AC} = \vec{0}$$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có:  $\vec{OA} = \vec{CO} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AO} = \vec{0}$

Tương tự:  $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ .

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên  $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{MA} + \vec{MC} &= \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DC} \\ &= \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{MB} + \vec{MD} \end{aligned}$$

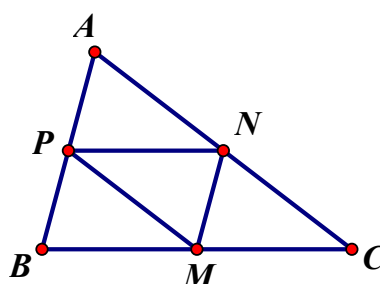
Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MD} - \vec{MC} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}.$$

**Lời giải**



Vì  $PN, MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên

$PN \parallel BM, MN \parallel BP$  suy ra tứ giác  $BMNP$  là hình bình hành

$$\Rightarrow \vec{BM} = \vec{PN}$$

$N$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow \vec{CN} = \vec{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = (\vec{PN} + \vec{NA}) + \vec{AP}$$

$$= \vec{PA} + \vec{AP} = \vec{0}.$$

**Câu 4.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Chứng minh rằng  $\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

**Lời giải**

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = (\vec{AB} - \vec{AB'}) + (\vec{AC'} - \vec{AC}) + (\vec{AD} - \vec{AD'})$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AC} - (\vec{AB'} + \vec{AD'}) + \vec{AC} = \vec{0}.$$

**Câu 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Dụng  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

Mặt khác  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$  suy ra  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ .

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho 5 điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$ .      B.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .  
 C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$ .      D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ .      D.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

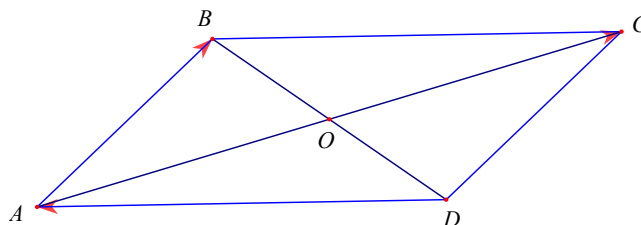
Đẳng thức vectơ  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$  đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$ .      B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$ .      D.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$  nên  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 4:** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .      B.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{OB} = -\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{BA} = -\vec{BA} \text{ nên A sai}$$

$$\vec{OA} = \vec{CA} - \vec{CO} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{CA} = -\vec{CO} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{AC} = -\vec{CO} \Leftrightarrow \vec{OC} = -\vec{CO} \text{ nên B đúng.}$$

**Câu 5:** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{AB} = \vec{BC} + \vec{CA}$ .      B.  $\vec{AB} = \vec{CB} + \vec{AC}$ .  
 C.  $\vec{AB} = \vec{BC} + \vec{AC}$ .      D.  $\vec{AB} = \vec{CA} + \vec{BC}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{AC}.$$

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\vec{OA} + \vec{BO}$  bằng

- A.  $\vec{OC} + \vec{OB}$ .      B.  $\vec{AB}$ .      C.  $\vec{OC} + \vec{DO}$ .      D.  $\vec{CD}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BA} = \vec{CD}.$$

**Câu 7:** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{0}$ .      B.  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AF}$ .  
 C.  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AE}$ .      D.  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AD}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\begin{aligned} & \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} \\ &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} \\ &= \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{0} \end{aligned}$$

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $BC$  và  $AD$ . Tính tổng  $\vec{NC} + \vec{MC}$ .

- A.  $\vec{AC}$ .      B.  $\vec{NM}$ .      C.  $\vec{CA}$ .      D.  $\vec{MN}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\vec{NC} + \vec{MC} = \vec{NC} + \vec{AN} = \vec{AN} + \vec{NC} = \vec{AC}.$$

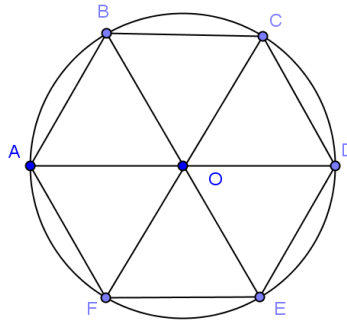
**Câu 9:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

- A.  $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE} = \vec{0}$ .      B.  $\vec{BC} + \vec{FE} = \vec{AD}$ .  
 C.  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{EB}$ .      D.  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FE} = \vec{0}$ .

Lời giải

**Chọn D**





$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} \neq \vec{0}.$$

**Câu 10:** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Tổng véc tơ:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$  bằng

- A.**  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

**Câu 11:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

- A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ (vô lý).}$$

**Câu 12:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định *sai*?

- A.**  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$ABCD$  là hình bình hành với  $I$  là giao điểm của hai đường chéo nên  $I$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên ta có:  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ;  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$ .

C.  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow$  B đúng.

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

**A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$ .      **D.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ , ta có:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 16:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

**A.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chọn mệnh đề đúng:

**A.**  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ .      **B.**  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$ .      **D.**  $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

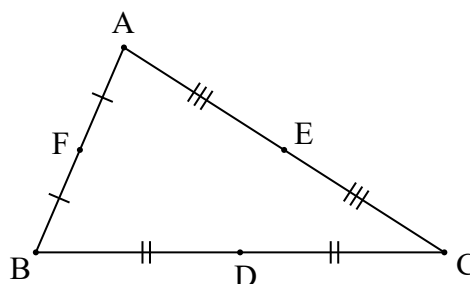
Trong tam giác  $BCE$  có  $MF$  là đường trung bình nên  $MF \parallel BE \Rightarrow MF \parallel NE$

$N$  là trung điểm của  $AM$  nên  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Hệ thức nào là đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**



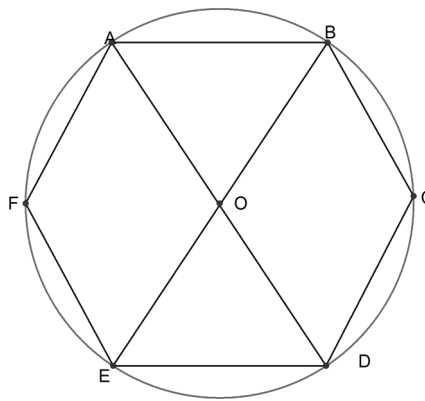
**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

**Câu 19:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$ , tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ . **B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$   
**C.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$ . **D.**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Lời giải**



**Chọn A**

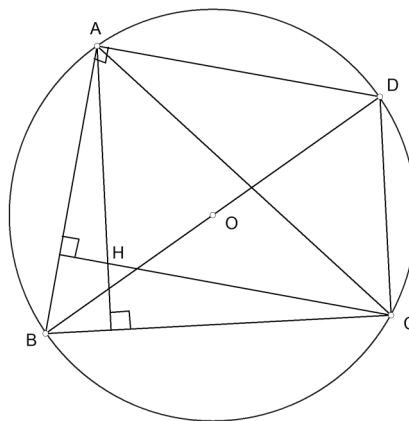
$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ ,  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ . **B.**  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$ . **D.**  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có: Vì  $D$  đối xứng với  $B$  qua  $O$  nên  $D$  thuộc đường tròn  $(O)$

$AD \parallel CH$  (cùng vuông góc với  $AB$ )

$AH // CD$  (cùng vuông góc với  $BC$ )

Suy ra  $ADHC$  là hình bình hành

Vậy  $\overline{HA} = \overline{CD}$  và  $\overline{AD} = \overline{CH}$ .

**DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC TƠ**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $\Delta ABC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{O}$ .

**Lời giải**

$$\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{BA} + \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BA}.$$

Suy ra  $M$  là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là  $C$  sao cho  $\overline{CM} = \overline{BA}$ .

**Câu 2.** Cho  $\Delta ABC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AB} = \overline{MB}$ .

**Lời giải**

$$\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AB} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MC} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  trùng  $C$ .

**Câu 3.**  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA}$ .

**Lời giải**

$$\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{BA} + \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ .

**Câu 4.**  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MC} - \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{CM} - \overline{CB}$ .

**Lời giải**

$$\overline{MC} - \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{CM} - \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{BC} + \overline{BA} = \overline{BM} \Leftrightarrow \overline{BC} - \overline{BM} = \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BA}.$$

Suy ra  $M$  là điểm thỏa  $ABCM$  là hình bình hành.

**Câu 5.** Cho tứ giác  $ABCD$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$ .

**Lời giải**

$$\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD} = \overline{DC} + \overline{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DM} = \overline{BD}.$$

Vậy  $M$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $D$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MA} + \overline{BA} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .

**B.**  $M$  trùng  $A$ .

- C.  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $A$  là trung điểm  $MB$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overline{MA} + \overline{BA} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{AM} + \overline{AB} = \overline{O} \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm } MB.$$

- Câu 2:** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $I$  thỏa  $\overline{IA} = \overline{BI}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $I$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
**C.** Không có điểm  $I$ .      **D.** Có vô số điểm  $I$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{IA} = \overline{BI} \Leftrightarrow \overline{IA} + \overline{IB} = \overline{O} \Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } AB.$$

- Câu 3:** Cho  $\Delta ABC$ ,  $B$ . Tìm điểm  $I$  để  $\overline{IA}$  và  $\overline{CB}$  cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $I$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
**C.** Không có điểm  $I$ .      **D.** Có vô số điểm  $I$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\overline{IA} \text{ và } \overline{CB} \text{ cùng phương nên } AI // CB. \text{ Suy ra có vô số điểm } I.$$

- Câu 4:** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
**C.** Không có điểm  $M$ .      **D.** Có vô số điểm  $M$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{O} \text{ (vô lý)}.$$

- Câu 5:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MB} + \overline{MA} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $A$  là trung điểm  $MB$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\overline{MB} + \overline{MA} = \overline{O} \text{ suy ra } M \text{ là trung điểm } AB.$$

- Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $A$  là trung điểm  $MB$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{O} \text{ nên } M \text{ là trọng tâm } \Delta ABC.$$

- Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{AM} = \overline{DC} + \overline{AB} + \overline{BD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 8:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 9:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $O$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} \text{ (} O \text{ là trung điểm } AC \text{) nên } M \text{ trùng } O.$$

**Câu 10:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $D$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \text{ suy ra } M \text{ trùng } D.$$

**Câu 11:** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $O$ .      **B.**  $M$  trùng  $A$ .      **C.**  $M$  trùng  $B$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}.$$

**Câu 12:** Cho tứ giác  $PQRN$  có  $O$  là giao điểm 2 đường chéo,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $P$ .      **B.**  $M$  trùng  $Q$ .  
**C.**  $M$  trùng  $O$ .      **D.**  $M$  trùng  $R$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO}.$$

**Câu 13:** Cho  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm  $CA$ .      **D.**  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overline{MB} + \overline{MC} = \overline{CM} - \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

**Câu 14:** Cho  $\Delta DEF$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\overline{MF} = \overline{ED}$ .      **B.**  $\overline{FM} = \overline{ED}$ .      **C.**  $\overline{EM} = \overline{DF}$ .      **D.**  $\overline{FM} = \overline{DE}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{ED} + \overline{MF} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{FM} = \overline{ED}.$$

Suy ra  $M$  là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là  $F$  sao cho  $\overline{FM} = \overline{ED}$ .

**Câu 15:** Cho  $\Delta DEF$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\overline{EM} = \overline{ED} + \overline{EF}$ .      **B.**  $\overline{FD} = \overline{EM}$ .      **C.**  $\overline{MD} + \overline{MF} = \overline{EM}$ .      **D.**  $\overline{FM} = \overline{DE}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overline{MD} - \overline{ME} + \overline{MF} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{ED} + \overline{MF} = \overline{O} \Leftrightarrow \overline{FM} = \overline{ED}.$$

Suy ra  $DEFM$  là hình bình hành. Do đó  $\overline{EM} = \overline{ED} + \overline{EF}$ .

**Câu 16:** Cho  $\Delta ABC$  có  $O$  là trung điểm  $BC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AB} = \overline{MB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $A$ .      **B.**  $M$  trùng  $B$ .      **C.**  $M$  trùng  $O$ .      **D.**  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AB} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MC} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  trùng  $C$ .

**Câu 17:** Cho  $\Delta ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **B.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm  $CA$ .      **D.**  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{BA} + \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ .

**Câu 18:** Cho  $\Delta ABC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overline{MC} - \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{CM} - \overline{CB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $M$  trùng  $A$ .      **B.**  $M$  trùng  $B$ .  
**C.**  $ACMB$  là hình bình hành.      **D.**  $\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BM}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overline{MC} - \overline{MB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{CM} - \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{BC} + \overline{BA} = \overline{BM} \Leftrightarrow \overline{BC} - \overline{BM} = \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BA}$$

Suy ra  $M$  là điểm thỏa  $ACMB$  là hình bình hành. Nên  $\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BM}$ .

**Câu 19:** Cho  $\Delta ABC$ ,  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{BD} = \overline{CM}$ .                      B.  $\overline{AM} = \overline{ED}$ .  
 C.  $M$  là trung điểm  $BC$ .                      D.  $\overline{EM} = \overline{BD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overline{MA} + \overline{BC} - \overline{BM} - \overline{AB} = \overline{BA} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{BA} + \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MC} = \overline{O}$$

Suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ . Suy ra  $BEMD$  là hình bình hành nên  $\overline{EM} = \overline{BD}$ .

**Câu 20:** Cho tứ giác  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .                      B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
 C.  $D$  là trung điểm  $BM$ .                      D.  $M$  là trung điểm  $DC$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} + \overline{MD} = \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MD} = \overline{DC} + \overline{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DM} = \overline{BD}$$

## DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÍNH ĐỘ DÀI CỦA VECTO

### 1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\overline{AD} + \overline{AB}|$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có  $|\overline{AD} + \overline{AB}| = |\overline{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AC}|$ .

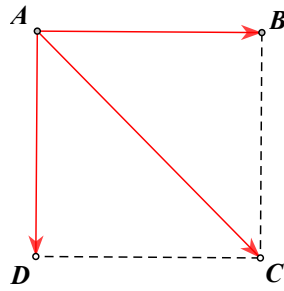
**Lời giải**

Gọi  $M$  là điểm sao cho  $ABMC$  là hình bình hành. Ta có  $AB = AC$  nên  $ABMC$  là hình thoi. Gọi  $O$  là tâm hình thoi  $ABMC$ .  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AM}| = AM = 2AO = a\sqrt{3}$ .

**Câu 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AD}|$ .

**Lời giải**





Ta có  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$ .

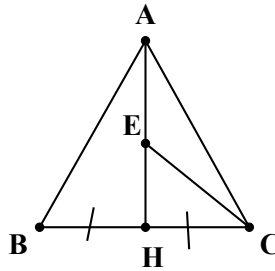
**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ .

**Lời giải**

Gọi  $M$  là điểm sao cho  $CHMA$  là hình bình hành.

Ta có:  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CM}| = CM = 2CE$  ( $E$  là tâm của hình bình hành  $CHMA$ ).

Ta lại có:  $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  ( $\Delta ABC$  đều,  $AH$  là đường cao).

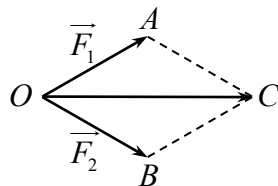


Trong tam giác  $HEC$  vuông tại  $H$ , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

**Câu 5.** Có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



Giả sử  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ .

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OC}$ , như hình vẽ.

Ta có  $\widehat{AOB} = 60^\circ, OA = OB = 50$ , nên tam giác  $OAB$  đều, suy ra  $OC = 50\sqrt{3}$ .

Vậy  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OC}| = 50\sqrt{3}$  (N).

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

- A.**  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$ .    **B.**  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    **C.**  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$ .    **D.**  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $M$  là điểm sao cho  $ABMC$  là hình bình hành. Ta có  $AB = AC$  nên  $ABMC$  là hình thoi. Gọi  $O$  là tâm hình thoi  $ABMC$ .  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AM}| = AM = 2AO = a\sqrt{3}$ .

**Câu 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Độ dài  $|\vec{AD} + \vec{AB}|$  bằng

- A.**  $2a$                       **B.**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .                      **C.**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.**  $a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$|\vec{AD} + \vec{AB}| = |\vec{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $|\vec{AC}| = \vec{BC}$ .                      **B.**  $\vec{AC} = a$ .                      **C.**  $\vec{AB} = \vec{AC}$ .                      **D.**  $|\vec{AB}| = a$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$|\vec{AB}| = AB = a.$$

**Câu 4:** Cho  $\vec{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ ?

- A.** Vô số.                      **B.** 1 điểm.                      **C.** 2 điểm.                      **D.** Không có điểm nào.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } |\vec{AB}| = |\vec{CD}| \Leftrightarrow AB = CD.$$

Suy ra tập hợp các điểm  $D$  là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$ .

**Câu 5:** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A.**  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vectơ.                      **B.**  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vectơ.  
**C.**  $\vec{AA} = \vec{0}$ .                      **D.**  $|\vec{AB}| > 0$ .

Lời giải

**Chọn D**

Mệnh đề  $|\overline{AB}| > 0$  là mệnh đề **sai**, vì khi  $A \equiv B$  thì  $|\overline{AB}| = 0$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $I$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.**  $\overline{BA} + \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{DC}$ .

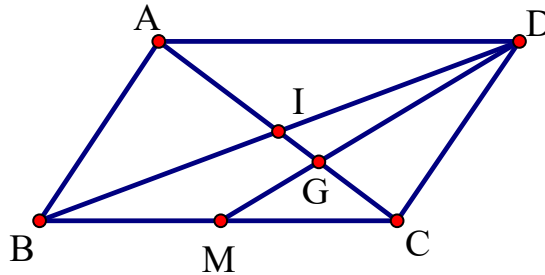
**B.**  $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AG}$ .

**C.**  $|\overline{BA} + \overline{BC}| = |\overline{DA} + \overline{DC}|$ .

**D.**  $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \vec{0}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có  $\overline{BA} + \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{DA} = \overline{DC}$  (vô lý)  $\rightarrow$  A sai.

$G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ ;  $A$  là một điểm nằm ngoài tam giác  $BCD$   $\rightarrow$  đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có  $|\overline{BA} + \overline{BC}| = |\overline{BD}|$  và  $|\overline{DA} + \overline{DC}| = |\overline{DB}|$ . Mà  $|\overline{DB}| = |\overline{BD}| \rightarrow$  đáp án C đúng.

Ta có  $\overline{IA}$  và  $\overline{IC}$  đối nhau, có độ dài bằng nhau  $\Leftrightarrow \overline{IA} + \overline{IC} = \vec{0}$ ; tương tự  $\Leftrightarrow \overline{IB} + \overline{ID} = \vec{0} \rightarrow$  đáp án D là đúng.

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overline{CA} - \overline{HC}|$ .

**A.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = 5$ .

**C.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ .

**D.**  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ .

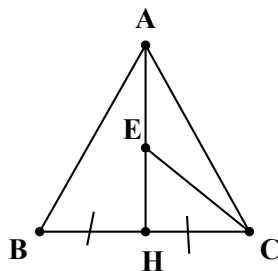
Lời giải

**Chọn D**

Gọi  $M$  là điểm sao cho  $CHMA$  là hình bình hành.

Ta có:  $|\overline{CA} - \overline{HC}| = |\overline{CA} + \overline{CH}| = |\overline{CM}| = CM = 2CE$  ( $E$  là tâm của hình bình hành  $CHMA$ ).

Ta lại có:  $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  ( $\Delta ABC$  đều,  $AH$  là đường cao).



Trong tam giác  $HEC$  vuông tại  $H$ , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overline{CA} - \overline{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

**Câu 8:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overline{BA} = \overline{CD}$ .      B.  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .      C.  $\overline{OA} = \overline{OC}$ .      D.  $\overline{AO} = \overline{OC}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

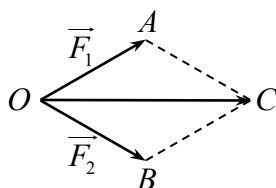
Ta có  $O$  là trung điểm của  $AC$  nên  $\overline{OA} = -\overline{OC}$ .

**Câu 9:** Có hai lực  $\overline{F_1}$ ,  $\overline{F_2}$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\overline{F_1}$ ,  $\overline{F_2}$  đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N).      B.  $50\sqrt{3}$  (N).      C.  $100\sqrt{3}$  (N).      D. Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn B**



Giả sử  $\overline{F_1} = \overline{OA}$ ,  $\overline{F_2} = \overline{OB}$ .

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra  $\overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{OC}$ , như hình vẽ.

Ta có  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ ,  $OA = OB = 50$ , nên tam giác  $OAB$  đều, suy ra  $OC = 50\sqrt{3}$ .

Vậy  $|\overline{F_1} + \overline{F_2}| = |\overline{OC}| = 50\sqrt{3}$  (N).

**Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overline{AB} = \overline{DC}$  và  $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .      B.  $ABCD$  là hình thoi.  
C.  $|\overline{CD}| = |\overline{BC}|$ .      D.  $ABCD$  là hình thang cân.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tứ giác  $ABCD$  có  $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành (1), nên  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .

Mà  $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $ABCD$  là hình thoi nên  $|\overline{CD}| = |\overline{BC}|$ .

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AC}|$ .

- A.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a\sqrt{2}$ .    **B.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .    **C.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2a$ .    **D.**  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

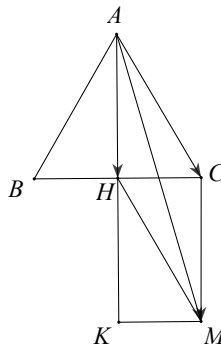
Gọi  $D$  là điểm thỏa  $ABDC$  là hình bình hành. Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  suy ra  $ABDC$  là hình vuông.  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , có  $AH$  là đường trung tuyến. Tính  $|\overline{AC} + \overline{AH}|$ .

- A.**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    **B.**  $2a$ .    **C.**  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .    **D.**  $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Dựng  $\overline{CM} = \overline{AH} \Rightarrow AHMC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{AC} + \overline{AH} = \overline{AM} \Rightarrow |\overline{AC} + \overline{AH}| = AM$ .

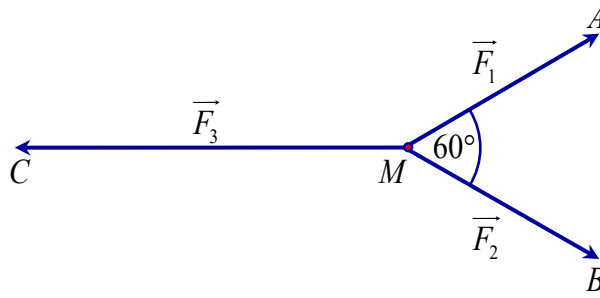
Gọi  $K$  đối xứng với  $A$  qua  $BC \Rightarrow \Delta AKM$  vuông tại  $K$ .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; \quad KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

**Câu 13:** Cho ba lực  $\overline{F_1} = \overline{MA}$ ,  $\overline{F_2} = \overline{MB}$ ,  $\overline{F_3} = \overline{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên.

Cho biết cường độ của  $\overline{F_1}$ ,  $\overline{F_2}$  đều bằng  $25N$  và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\overline{F_3}$  là

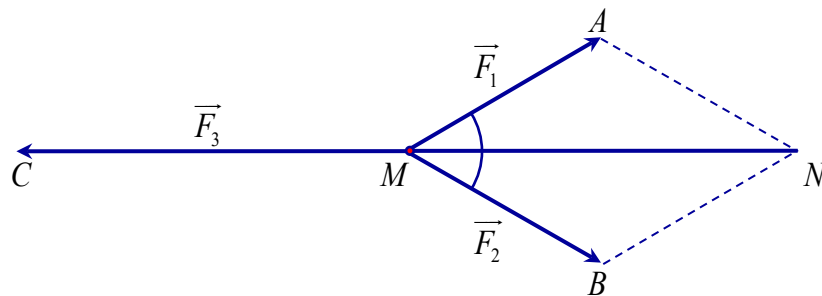


- A.  $25\sqrt{3}$  N.      B.  $50\sqrt{3}$  N.      C.  $50\sqrt{2}$  N.      D.  $100\sqrt{3}$  N.

Lời giải

**Chọn A**

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ .



Dựng hình bình hành  $AMBN$ . Ta có  $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$ .

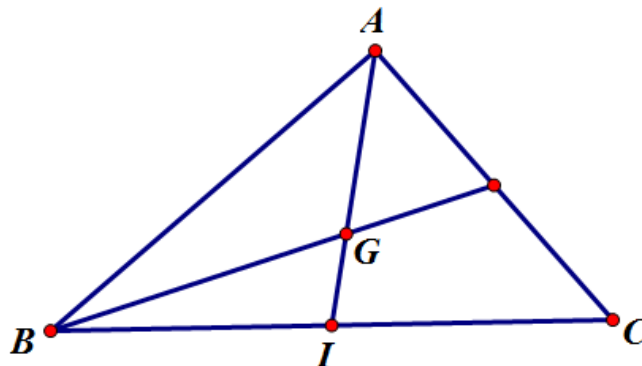
Suy ra  $|\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tìm khẳng định **sai**.

- A.  $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = IA$ .    B.  $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$ .    C.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI$ .    D.  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 3GA$ .

Lời giải

**Chọn B**



$|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = |\vec{0} + \vec{IA}| = |\vec{IA}| = IA$  (Do  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở A đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = 2AI$  (Gọi  $D$  là điểm thỏa  $ABDC$  là hình bình hành,  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở C đúng.

$|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2AI = 3GA$  (Do  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ) nên khẳng định ở D đúng.

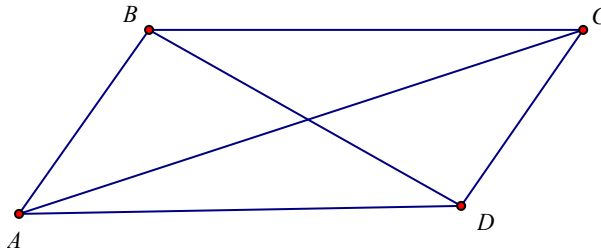
$|\overline{IB} + \overline{IC}| = |\vec{0}| = 0$  (Do  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở B sai.

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.**  $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ .      **B.**  $|\overline{BC}| = |\overline{DA}|$ .      **C.**  $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ .      **D.**  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



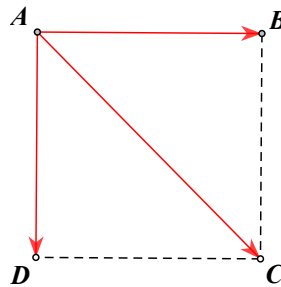
Ta có  $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$  là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

**Câu 16:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AD}|$ .

- A.**  $4a\sqrt{2}$ .      **B.**  $4a$ .      **C.**  $2a\sqrt{2}$ .      **D.**  $2a$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $2a$ , trọng tâm  $G$ . Độ dài vectơ  $\overline{AB} - \overline{GC}$  là

- A.**  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .      **B.**  $\frac{2a}{3}$ .      **C.**  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .      **D.**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có :  $\overline{AB} - \overline{GC} = \overline{GB} - \overline{GA} - \overline{GC} = \overline{GB} - (\overline{GA} + \overline{GC}) = \overline{GB} - (-\overline{GB})$  vì  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ .

Khi đó  $|\overline{AB} - \overline{GC}| = |\overline{GE}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$  ( $E$  đối xứng với  $G$  qua  $M$ ).

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}|$  thì tam giác  $ABC$  là

- A.** Tam giác vuông  $A$ .   **B.** Tam giác vuông  $C$ .  
**C.** Tam giác vuông  $B$ .   **D.** Tam giác cân tại  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

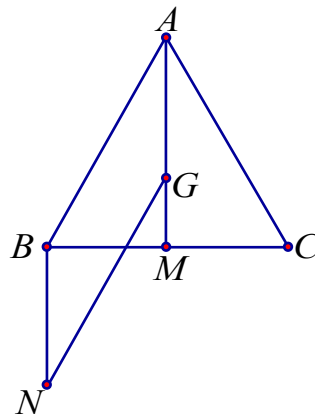
Gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $ABCM$  là hình bình hành. Ta có  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}| \Leftrightarrow |\overline{AM}| = |\overline{CB}| \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2}BC$ . Trung tuyến kẻ từ  $A$  bằng một nửa cạnh  $BC$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 19:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $2a$  có  $G$  là trọng tâm. Khi đó  $|\overline{AB} - \overline{GC}|$  là

- A.**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      **B.**  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .                      **C.**  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .                      **D.**  $\frac{2a}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , dựng điểm  $N$  sao cho  $\overline{BN} = \overline{AG}$ .

$$\text{Ta có : } |\overline{AB} - \overline{GC}| = |\overline{GB} - \overline{GA} - \overline{GC}| = |\overline{GB} - (\overline{GA} + \overline{GC})| = |2\overline{GB}| = 2.GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

( $E$  đối xứng với  $B$  qua  $G$ ).

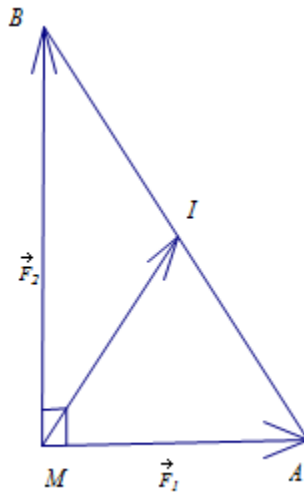
**Câu 20:** Cho hai lực  $\overline{F_1} = \overline{MA}$ ,  $\overline{F_2} = \overline{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\overline{F_1}$ ,  $\overline{F_2}$  lần lượt là  $300(\text{N})$  và  $400(\text{N})$ .  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A.**  $0(\text{N})$ .                      **B.**  $700(\text{N})$ .                      **C.**  $100(\text{N})$ .                      **D.**  $500(\text{N})$ .

**Lời giải**

**Chọn D**





Cường độ lực tổng hợp của  $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MA} + \vec{MB}| = 2|\vec{MI}| = AB$  ( $I$  là trung điểm của  $AB$ ). Ta có  $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$  suy ra  $|\vec{F}| = 500(N)$ .

CHƯƠNG



# VECTƠ

## BÀI 3: TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO



### LÝ THUYẾT.

#### 1. ĐỊNH NGHĨA:

+ Cho số  $k \neq 0$  và một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của vectơ  $\vec{a}$  với số  $k$  là một vectơ, kí hiệu  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

+ Quy ước:  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ;  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

+ Với hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bất kỳ, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

$$1) k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad 2) (h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$3) h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}; \quad 4) 1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

+ Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

+ Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ .

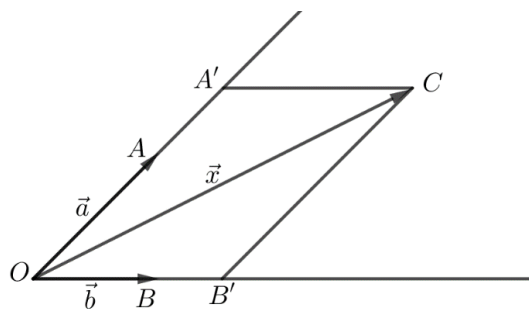
#### 2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG:

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số thực  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

Nhận xét: Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

#### Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó mọi vectơ  $\vec{x}$  đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $h, k$  sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .



### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**Câu 1:** Cho hình thang  $MNPQ$ ,  $MN \parallel PQ$ ,  $MN = 2PQ$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\vec{MN} = 2\vec{PQ}$ .      B.  $\vec{MQ} = 2\vec{NP}$ .      C.  $\vec{MN} = -2\vec{PQ}$ .      D.  $\vec{MQ} = -2\vec{NP}$ .

**Câu 2:** Cho đoạn thẳng  $AB = 6\text{ cm}$ .

- a) Xác định điểm  $C$  thỏa mãn  $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

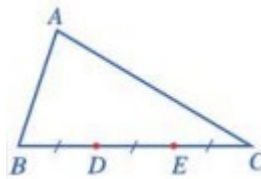
b) Xác định điểm  $D$  thoả mãn  $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$

b)  $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E$  thuộc cạnh  $BC$  thoả mãn  $BD = DE = EC$ . Giả sử  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ . Biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}$ .



**Câu 5:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN, E$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$

b)  $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$

c) Điểm  $G$  thuộc đoạn thẳng  $AE$  và  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$  theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E, H$  thoả mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vectơ  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Chứng minh  $D, E, H$  thẳng hàng.

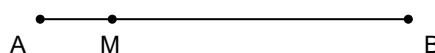
## II VÍ DỤ MINH HỌA.

**Câu 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm  $k$  trong các

đẳng thức sau:

a)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$       b)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$       c)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

**Lời giải**



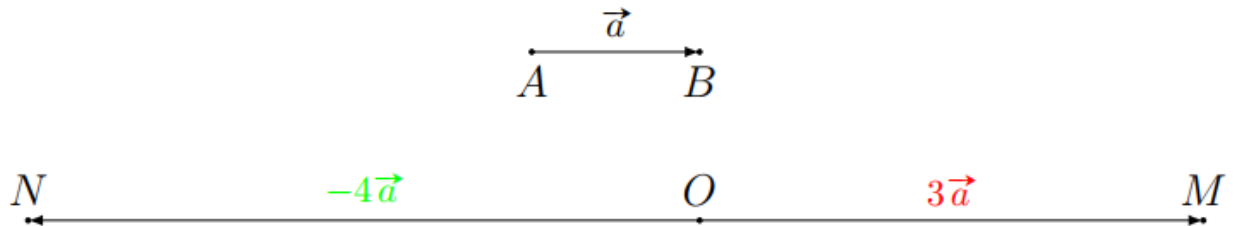
a)  $\overline{AM} = k\overline{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{AB}|} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\overline{AM}$  cùng hướng  $\overline{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$ .

b)  $\overline{MA} = k\overline{MB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overline{MA}|}{|\overline{MB}|} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$ , mà  $\overline{MA}$  ngược hướng  $\overline{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$ .

c)  $\overline{MA} = k\overline{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overline{MA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\overline{MA}$  ngược hướng  $\overline{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$ .

**Câu 2.** Cho  $\vec{a} = \overline{AB}$  và điểm  $O$ . Xác định hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho:  $\overline{OM} = 3\vec{a}$ ;  $\overline{ON} = -4\vec{a}$ .

**Lời giải**



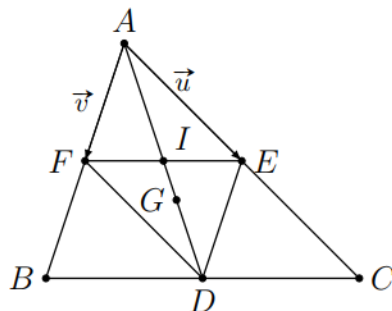
Vẽ  $d$  đi qua  $O$  và song song với giá của  $\vec{a}$  (nếu  $O$  thuộc giá của  $\vec{a}$  thì  $d$  là giá của  $\vec{a}$ ).

– Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = 3|\vec{a}|$ ,  $\overline{OM}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng. Khi đó  $\overline{OM} = 3\vec{a}$ .

– Trên  $d$  lấy điểm  $N$  sao cho  $ON = 4|\vec{a}|$ ,  $\overline{ON}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng nên  $\overline{ON} = -4\vec{a}$ .

**Câu 3.** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overline{AE}$ ,  $\vec{v} = \overline{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overline{AI}, \overline{AG}, \overline{DE}, \overline{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$ .

**Lời giải**



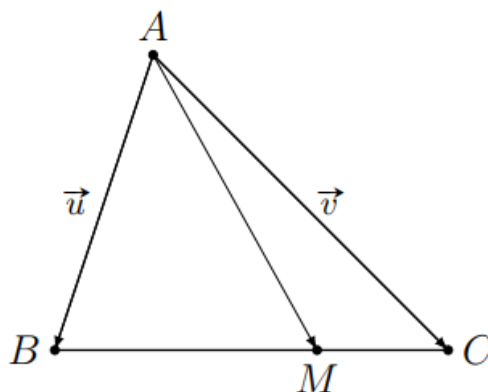
Dễ thấy tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành dẫn đến  $I$  là trung điểm của  $AD$ .

Do đó  $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{AF}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ .

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ ;  $\overline{DE} = \overline{FA} = -\overline{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}$ ;  $\overline{DC} = \overline{FE} = \overline{AE} - \overline{AF} = \vec{u} - \vec{v}$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vectơ  $\overline{AM}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overline{AB}$ ,  $\vec{v} = \overline{AC}$ .

**Lời giải**



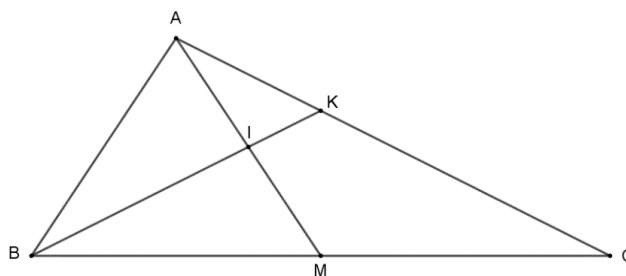
Từ giả thiết  $MB = 2MC$  ta dễ dàng chứng minh được  $\overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ .

Do đó  $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{BC}$  mà  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \Rightarrow$

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{2}{3}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{3}\overline{u} + \frac{2}{3}\overline{v}.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Lời giải**



Ta có  $I$  là trung điểm của  $AM \Rightarrow 2\overline{BI} = \overline{BA} + \overline{BM}$ .

Mặt khác  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ .

Do đó  $2\overline{BI} = \overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} \Leftrightarrow 4\overline{BI} = 2\overline{BA} + \overline{BC}$  (1).

$$\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \overline{BA} + \frac{1}{3}(\overline{BC} - \overline{BA}) = \frac{2}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{BK} = 2\overline{BA} + \overline{BC}$$
 (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 3\overline{BK} = 4\overline{BI} \Rightarrow \overline{BK} = \frac{4}{3}\overline{BI}$ .

Suy ra 3 điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:  $\overline{BC} + \overline{MA} = \vec{0}$  và  $\overline{AB} - \overline{NA} - 3\overline{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\overline{BC} + \overline{MA} + \overline{AB} - \overline{NA} - 3\overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AC} + \overline{MN} - 3\overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{MN} = 2\overline{AC}$$
 (1).

Mặt khác,  $\overline{BC} + \overline{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AM}$ .

Do ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là bốn đỉnh của hình bình hành  $BCMA \Rightarrow$  ba điểm  $A, M, C$  không thẳng hàng (2).

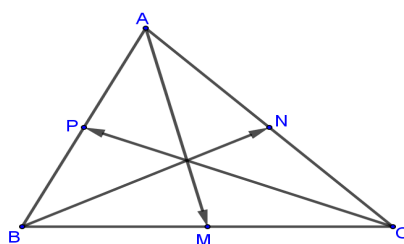
Từ (1) và (2) suy ra  $MN \parallel AC$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

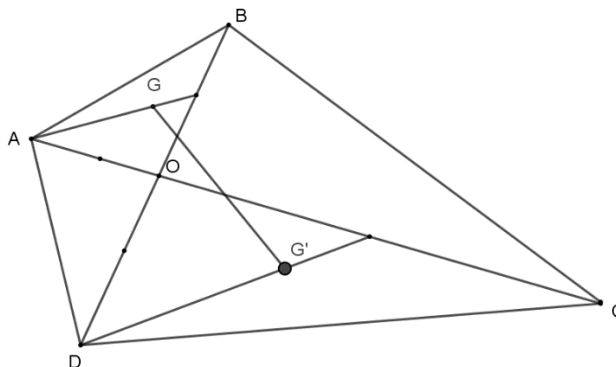
Ta có

$$\begin{aligned} \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BA}) + \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CA}) + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$



**Câu 8.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G, G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Chứng minh rằng  $\vec{AC} + \vec{BD} = 3\vec{GG'}$ .

**Lời giải**



Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $OCD$  nên ta có:

$$\vec{GG'} = \frac{1}{3}(\vec{GO} + \vec{GC} + \vec{GD}) \quad (1).$$

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  nên ta có:

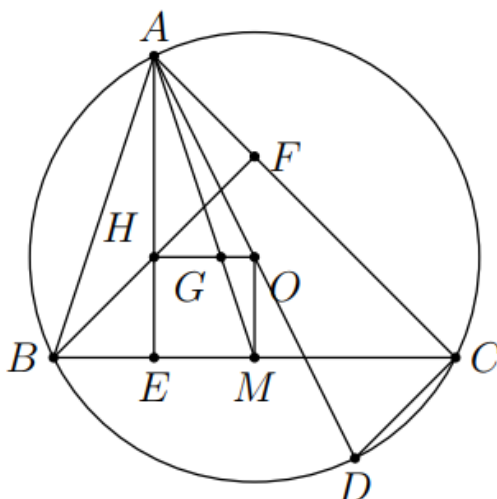
$$\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GO} = -(\vec{GA} + \vec{GB}) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \vec{GG'} = \frac{1}{3}(\vec{GC} - \vec{GA} + \vec{GD} - \vec{GB}) = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{BD})$$

$$\Rightarrow \vec{AC} + \vec{BD} = 3\vec{GG'}$$

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh  $\overline{OH} = 3\overline{OG}$ .

*Lời giải*



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ , ta có

$BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với  $AC$ ) (1).

$CH \parallel BD$  (cùng vuông góc với  $AB$ ) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow$  ba điểm  $H, M, D$  thẳng hàng.

$\Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{OM}$ .

Ta có  $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH} = \overline{OA} + 2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OG}$ .

Suy ra  $\overline{OH} = 3\overline{OG}$ .



### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**4.11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Hãy biểu thị  $\overline{AM}$  theo hai vectơ  $\overline{AB}$  và  $\overline{AD}$ .

**4.12.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh rằng  $\overline{BC} + \overline{AD} = 2\overline{MN} = \overline{AC} + \overline{BD}$ .

**4.13.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overline{KA} + 2\overline{KB} = \vec{0}$ .

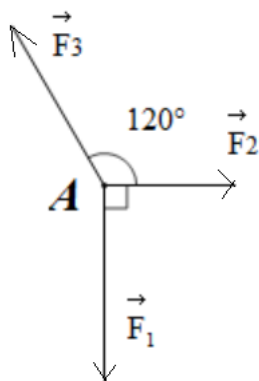
b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overline{OK} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OB}$ .

**4.14.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overline{OA} + \overline{OB} + 2\overline{OC} = 4\overline{OM}$ .

**4.15.** Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$  như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của các lực  $\overline{F_2}, \overline{F_3}$ , biết  $\overline{F_1}$  có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

#### DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTO $k\vec{a}$

#### 1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Xác định điểm  $M$  biết  $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB}$

b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính

a)  $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}|$                       b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

**Câu 4:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính:

a)  $|\vec{BA} + \vec{BC}|$                       b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$



**2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Khẳng định nào **sai**?

- A.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- B.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k > 0$
- C.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k < 0$
- D. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương khi có một số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$

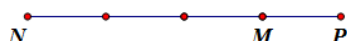
**Câu 2:** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overline{MN} = -3\overline{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3
- B. Hình 4
- C. Hình 1
- D. Hình 2

**Câu 3:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overline{AB} = -3\overline{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\overline{BC} = -4\overline{AC}$
- B.  $\overline{BC} = -2\overline{AC}$
- C.  $\overline{BC} = 2\overline{AC}$
- D.  $\overline{BC} = 4\overline{AC}$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $\overline{BI} = \overline{IC}$
- B.  $3\overline{BI} = 2\overline{IC}$
- C.  $\overline{BI} = 2\overline{IC}$
- D.  $2\overline{BI} = \overline{IC}$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A.  $\overline{AB} = 2\overline{AM}$
- B.  $\overline{AC} = 2\overline{CN}$
- C.  $\overline{BC} = -2\overline{NM}$
- D.  $\overline{CN} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$

**Câu 6:** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và điểm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm thỏa mãn  $\overline{OM} = 3\vec{a}$  và  $\overline{ON} = -4\vec{a}$ . Khi đó:

- A.  $\overline{MN} = 7\vec{a}$
- B.  $\overline{MN} = -5\vec{a}$
- C.  $\overline{MN} = -7\vec{a}$
- D.  $\overline{MN} = -5\vec{a}$

**Câu 7:** Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = m\vec{b}$ , biết rằng  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A.  $m = 3$
- B.  $m = -\frac{1}{3}$
- C.  $m = \frac{1}{3}$
- D.  $m = -3$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $2a$ . Độ dài của  $\overline{AB} + \overline{AC}$  bằng:

- A.  $2a$
- B.  $a\sqrt{3}$
- C.  $2a\sqrt{3}$
- D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0}$ .

- A.  $M$  là trung điểm của  $BC$
- B.  $M$  là trung điểm của  $IC$
- C.  $M$  là trung điểm của  $IA$
- D.  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AC}$ . Khi đó điểm  $M$  là:

- A. Trung điểm của  $AC$
- B. Điểm  $C$
- C. Trung điểm của  $AB$
- D. Trung điểm của  $AD$

**Câu 11:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh  $2a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính độ dài vectơ  $\overline{AB} + \overline{AD}$ .

A.  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = 2a\sqrt{3}$

B.  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = a\sqrt{3}$

C.  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = 3a$

D.  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = 3a\sqrt{3}$

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC}| = |\overline{OA} - \overline{OB}|$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Tam giác  $ABC$  đều

B. Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$

C. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$

D. Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

**Câu 13:** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  với  $OA = OB = a$ . Độ dài của véc tơ  $\vec{u} = \frac{21}{4}\overline{OA} - \frac{5}{2}\overline{OB}$  là:

A.  $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

B.  $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C.  $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

D.  $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

**Câu 14:** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{AE}$

B.  $\overline{IJ} = \frac{1}{3}\overline{AE}$

C.  $\overline{IJ} = \frac{1}{4}\overline{AE}$

D.  $\overline{IJ} = \frac{1}{5}\overline{AE}$

**Câu 15:** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm trên  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{4}AB$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A.  $\overline{MA} = \frac{1}{3}\overline{MB}$ .

B.  $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ .

C.  $\overline{BM} = \frac{3}{4}\overline{BA}$ .

D.  $\overline{MB} = -3\overline{MA}$ .

**Câu 16:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $MA = \frac{1}{5}AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A.  $\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AB}$

B.  $\overline{MA} = -\frac{1}{4}\overline{MB}$

C.  $\overline{MB} = -4\overline{MA}$

D.  $\overline{MB} = -\frac{4}{5}\overline{AB}$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Đường thẳng  $BN$  cắt  $AC$  tại  $P$ . Khi đó  $\overline{AC} = x\overline{CP}$  thì giá trị của  $x$  là:

A.  $-\frac{4}{3}$

B.  $-\frac{2}{3}$

C.  $-\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{5}{3}$

**DẠNG 2: HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là trung điểm  $AC$  sao  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:  
 $\overline{BC} + \overline{MA} = \vec{0}$ ,  $\overline{AB} - \overline{NA} - 3\overline{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN // AC$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:  
**A.**  $AB = AC$                       **B.**  $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$     **C.**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$       **D.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$
- Câu 2:** Cho  $\Delta ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ . Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?  
**A.**  $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$               **B.**  $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$               **C.**  $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$       **D.**  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$
- Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?  
**A.**  $-3\vec{a} + \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$     **B.**  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $2\vec{a} + \vec{b}$   
**C.**  $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$     **D.**  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - 2\vec{b}$
- Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?  
**A.**  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$     **B.**  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$   
**C.**  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$     **D.**  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
- Câu 5:** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:  
**A.**  $-7$                                       **B.**  $7$                                       **C.**  $5$                                       **D.**  $6$
- Câu 6:** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:  
**A.**  $\frac{1}{2}$                                       **B.**  $-\frac{3}{2}$                                       **C.**  $-\frac{1}{2}$                                       **D.**  $\frac{3}{2}$
- Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?  
**A.**  $MN \perp AC$                       **B.**  $MN // AC$   
**C.**  $M$  nằm trên đường thẳng  $AC$     **D.** Hai đường thẳng  $MN$  và  $AC$  trùng nhau

**DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG**



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng:  
 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 2:** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .
- Câu 3:** Cho  $AK$  và  $BM$  là hai trung tuyến của tam giác  $ABC$ , trọng tâm  $G$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AK}, \vec{v} = \overrightarrow{BM}$

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Trên đường thẳng chứa cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $\overline{MB} = 3\overline{MC}$ . Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overline{AM} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{AC}$                       B.  $\overline{AM} = 2\overline{AB} + \overline{AC}$   
 C.  $\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{AC}$                                       D.  $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  biết  $AB = 8, AC = 9, BC = 11$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $N$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $AN = x (0 < x < 9)$ . Hệ thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overline{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB}$                       B.  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{BA}$   
 C.  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$                       D.  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm và  $H$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $G$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$                                       B.  $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$   
 C.  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AB}$                                       D.  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC}$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $\overline{AG} = \frac{1}{2}\overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AF}$     B.  $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AE} + \frac{1}{3}\overline{AF}$     C.  $\overline{AG} = \frac{3}{2}\overline{AE} + \frac{3}{2}\overline{AF}$     D.  $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AE} + \frac{2}{3}\overline{AF}$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là điểm sao cho  $\overline{BD} = \frac{2}{3}\overline{BC}$  và  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$ ,  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AM} = \frac{2}{5}\overline{AC}$ . Vector  $\overline{BI}$  được phân tích theo hai vector  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$ . Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A.  $\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$ .                                      B.  $\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC}$ .  
 C.  $\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{3}{4}\overline{BC}$ .                                      D.  $\overline{BI} = \frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{1}{6}\overline{BC}$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $\overline{CN} = 2\overline{NA}$ .  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $\overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$ .                                      B.  $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ .  
 C.  $\overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ .                                      D.  $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$ .

**Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Khi đó  $\overline{GG'}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ .                      B.  $\frac{2}{3}(\overline{AC} + \overline{BD})$ .                      C.  $3(\overline{AC} + \overline{BD})$ .                      D.  $\frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{BD})$ .

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  với phân giác trong  $AD$ . Biết  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 7$ . Khi đó  $\overline{AD}$  bằng:

A.  $\frac{5}{12}\overline{AB} + \frac{7}{12}\overline{AC}$ .      B.  $\frac{7}{12}\overline{AB} - \frac{5}{12}\overline{AC}$ .      C.  $\frac{7}{12}\overline{AB} + \frac{5}{12}\overline{AC}$ .      D.  $\frac{5}{12}\overline{AB} - \frac{7}{12}\overline{AC}$ .

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó:

A.  $\overline{AK} = \frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$       B.  $\overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC}$   
 C.  $\overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$       D.  $\overline{AK} = \frac{1}{6}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC}$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là điểm xác định bởi  $\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Hệ thức tính  $\overline{AC}$  theo  $\overline{AG}$ ,  $\overline{AN}$  là:

A.  $\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AG} + \frac{1}{2}\overline{AN}$       B.  $\overline{AC} = \frac{4}{3}\overline{AG} - \frac{1}{2}\overline{AN}$   
 C.  $\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AG} + \frac{1}{2}\overline{AN}$       D.  $\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AG} - \frac{1}{2}\overline{AN}$

**Câu 11:** Cho  $AD$  và  $BE$  là hai phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 4$ ,  $BC = 5$  và  $CA = 6$ . Khi đó  $\overline{DE}$  bằng:

A.  $\frac{5}{9}\overline{CA} - \frac{3}{5}\overline{CB}$ .      B.  $\frac{3}{5}\overline{CA} - \frac{5}{9}\overline{CB}$ .      C.  $\frac{9}{5}\overline{CA} - \frac{3}{5}\overline{CB}$ .      D.  $\frac{3}{5}\overline{CA} - \frac{9}{5}\overline{CB}$ .

**DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTO CHỨA TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ**

**1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng:  $\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{IJ}$ .

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{EF}$

b) Gọi  $G$  là trung điểm của  $EF$ . Chứng minh rằng  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0}$

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overline{AB} + 2\overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AC}$

**Câu 4:** Chứng minh rằng nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $3\overline{GG'} = \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:  
**A.**  $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = \overline{AC} + 2\overline{BC}$       **B.**  $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{AC} + \overline{BC}$   
**C.**  $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{CA} + \overline{CB}$       **D.**  $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{CB} - \overline{CA}$
- Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:  
**A.**  $\overline{OH} = \frac{3}{2}\overline{OG}$       **B.**  $\overline{OH} = 3\overline{OG}$       **C.**  $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{GH}$       **D.**  $2\overline{GO} = -3\overline{OH}$
- Câu 3:** Ba trung tuyến  $AM, BN, CP$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $G$ . Hỏi vectơ  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP}$  bằng vectơ nào?  
**A.**  $\frac{3}{2}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})$       **B.**  $3(\overline{MG} + \overline{NG} + \overline{GP})$       **C.**  $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$       **D.**  $\vec{0}$
- Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD, I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Hệ thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{AI} + \overline{AK} = 2\overline{AC}$       **B.**  $\overline{AI} + \overline{AK} = \overline{AB} + \overline{AD}$   
**C.**  $\overline{AI} + \overline{AK} = \overline{IK}$       **D.**  $\overline{AI} + \overline{AK} = \frac{3}{2}\overline{AC}$
- Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ . Điểm  $M$  là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của  $M$  xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là  $D, E, F$ . Hệ thức giữa các vectơ  $\overline{MD}, \overline{ME}, \overline{MF}, \overline{MO}$  là:  
**A.**  $\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = \frac{1}{2}\overline{MO}$       **B.**  $\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = \frac{2}{3}\overline{MO}$   
**C.**  $\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = \frac{3}{4}\overline{MO}$       **D.**  $\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = \frac{3}{2}\overline{MO}$
- Câu 6:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $AB$  và  $DC$ . Lấy các điểm  $P, Q$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\overline{PA} = -2\overline{PD}, \overline{QB} = -2\overline{QC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ .      **B.**  $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{MQ}$ .  
**C.**  $\overline{MN} = -\frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ .      **D.**  $\overline{MN} = \frac{1}{4}(\overline{MD} + \overline{MC} + \overline{NB} + \overline{NA})$ .
- Câu 7:** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có:  
**A.**  $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MI}$       **B.**  $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$       **C.**  $\overline{MA} + \overline{MB} = 3\overline{MI}$       **D.**  $\overline{MA} + \overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{MI}$
- Câu 8:** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Với mọi điểm  $M$ , ta luôn có:  
**A.**  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MG}$       **B.**  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MG}$   
**C.**  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$       **D.**  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 4\overline{MG}$
- Câu 9:** Cho  $\Delta ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Đẳng thức nào đúng?  
**A.**  $\overline{GA} = 2\overline{GI}$       **B.**  $\overline{IG} = -\frac{1}{3}\overline{IA}$       **C.**  $\overline{GB} + \overline{GC} = 2\overline{GI}$       **D.**  $\overline{GB} + \overline{GC} = \overline{GA}$

- Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào **đúng**?
- A.  $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$     B.  $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$     C.  $\overline{AC} - \overline{BD} = 2\overline{CD}$     D.  $\overline{AC} - \overline{AD} = \overline{CD}$
- Câu 11:** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?
- A.  $\overline{AB} + \overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AG}$     B.  $\overline{BA} + \overline{BC} = 3\overline{BG}$     C.  $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CG}$     D.  $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \vec{0}$
- Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?
- A.  $\overline{AB} + \overline{AD} = 2\overline{AO}$     B.  $\overline{AD} + \overline{DO} = -\frac{1}{2}\overline{CA}$     C.  $\overline{OA} + \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{CB}$     D.  $\overline{AC} + \overline{DB} = 4\overline{AB}$
- Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó  $\overline{AC} + \overline{BD}$  bằng:
- A.  $\overline{MN}$     B.  $2\overline{MN}$     C.  $3\overline{MN}$     D.  $-2\overline{MN}$
- Câu 14:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A.  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{MO}$     B.  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MO}$   
 C.  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 3\overline{MO}$     D.  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}$
- Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
- A.  $\overline{OH} = 4\overline{OG}$     B.  $\overline{OH} = 3\overline{OG}$     C.  $\overline{OH} = 2\overline{OG}$     D.  $3\overline{OH} = \overline{OG}$
- Câu 16:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$  bằng:
- A.  $2\overline{MI}$     B.  $3\overline{MI}$     C.  $4\overline{MI}$     D.  $5\overline{MI}$
- Câu 17:** Cho tam giác đều  $ABC$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là một điểm tùy ý bên trong tam giác  $ABC$ . Hạ  $ID, IE, IF$  tương ứng vuông góc với  $BC, CA, AB$ . Giả sử  $\overline{ID} + \overline{IE} + \overline{IF} = \frac{a}{b}\overline{IO}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Khi đó  $a + b$  bằng:
- A. 5    B. 4    C. 6    D. 7
- Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn:  $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 1$
- A. 0    B. 1    C. 2    D. vô số
- Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng vector  $\vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}$ . Hãy xác định vị trí của điểm  $D$  sao cho  $\overline{CD} = \vec{v}$ .
- A.  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCD$   
 B.  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ACBD$   
 C.  $D$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$   
 D.  $D$  là trực tâm của tam giác  $ABC$
- Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$ . Gọi  $O$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overline{OA} + \overline{OB} + 2\overline{OC} = \vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho vector  $\vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}$  có độ dài nhỏ nhất.
- A. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $d$   
 B. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$   
 C. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $d$   
 D. Điểm  $M$  là giao điểm của  $AB$  và  $d$

- Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Hãy xác định điểm  $K$  thỏa mãn:  $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$  và điểm  $D$  thỏa mãn:  $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ .
- A.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $BC$   
 B.  $K$  là trung điểm của  $BC$  và  $D$  là trung điểm của  $MN$   
 C.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $AB$   
 D.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $AC$
- Câu 22:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ . Khi đó điểm  $M$  là:
- A. trung điểm  $AC$       B. điểm  $C$       C. trung điểm  $AB$       D. trung điểm  $AD$
- Câu 23:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  là:
- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .      B. Đường tròn đường kính  $BC$ .  
 C. Đường trung trực của cạnh  $AD$ .      D. Đường trung trực của cạnh  $AB$ .
- Câu 24:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}|$  là:
- A. Một đường thẳng.      B. Một đường tròn.  
 C. Toàn bộ mặt phẳng ( $ABCD$ ).      D. Tập rỗng.
- Câu 25:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa  $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ . Tập hợp  $M$  là:
- A. Một đường tròn      B. Một đường thẳng      C. Một đoạn thẳng      D. Nửa đường thẳng
- Câu 26:** Cho tam giác  $ABC$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$
- A. 1      B. 2      C. 3      D. Vô số
- Câu 27:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa  $|\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ . Tập hợp  $M$  là:
- A. Một đoạn thẳng      B. Một đường tròn      C. Nửa đường tròn      D. Một đường thẳng
- Câu 28:** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Khẳng định nào đúng?
- A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$       B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$   
 C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$       D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$
- Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  sao cho  $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ . Điểm  $M$  di động nằm trên  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ . Tìm  $x$  sao cho độ dài của vector  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- A.  $\frac{4}{5}$ .      B.  $\frac{5}{6}$ .      C.  $\frac{6}{5}$ .      D.  $\frac{5}{4}$ .
- Câu 30:** Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$ . Một điểm  $M$  di động sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $AB$ . Tính độ dài lớn nhất của  $MH$ ?
- A.  $\frac{a}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $a$ .      D.  $2a$ .



CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 5: TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO



LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA:

+ Cho số  $k \neq 0$  và một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của vectơ  $\vec{a}$  với số  $k$  là một vectơ, kí hiệu  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

+ Quy ước:  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ;  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bất kỳ, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

- 1)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;      2)  $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;  
3)  $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;      4)  $1\vec{a} = \vec{a}$ ,  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. **Trung điểm của đoạn thẳng:** Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

2. **Trọng tâm của tam giác:** Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ .

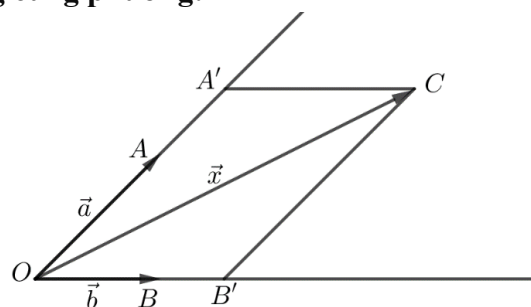
3. **Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng.**

+ Điều kiện cần và đủ để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số thực  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

+ Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt  $A$ ,  $B$ ,  $C$  thẳng hàng là có số  $k$  khác 0 để  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

**Chú ý: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:**

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó mọi vectơ  $\vec{x}$  đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $h, k$  sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .



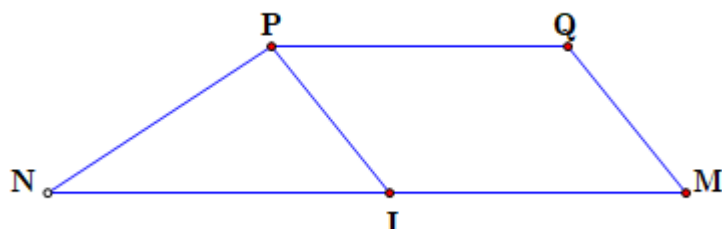


**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**Câu 1:** Cho hình thang  $MNPQ$ ,  $MN \parallel PQ$ ,  $MN = 2PQ$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$ .      B.  $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$ .      C.  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$ .      D.  $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$ .

**Lời giải**

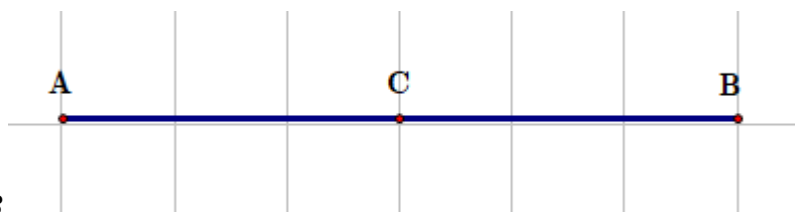


Ta có  $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{QP} = -2\overrightarrow{PQ}$ . **Chọn C**

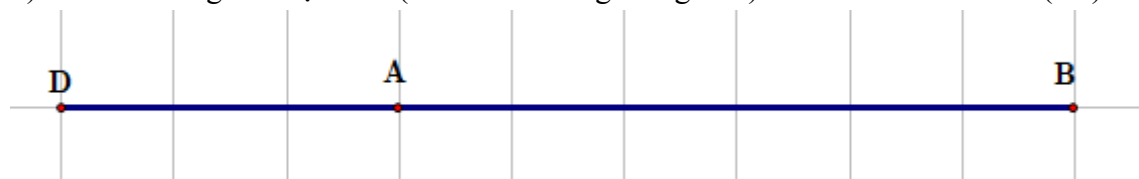
**Câu 2:** Cho đoạn thẳng  $AB = 6\text{ cm}$ .

- a) Xác định điểm  $C$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .  
 b) Xác định điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**



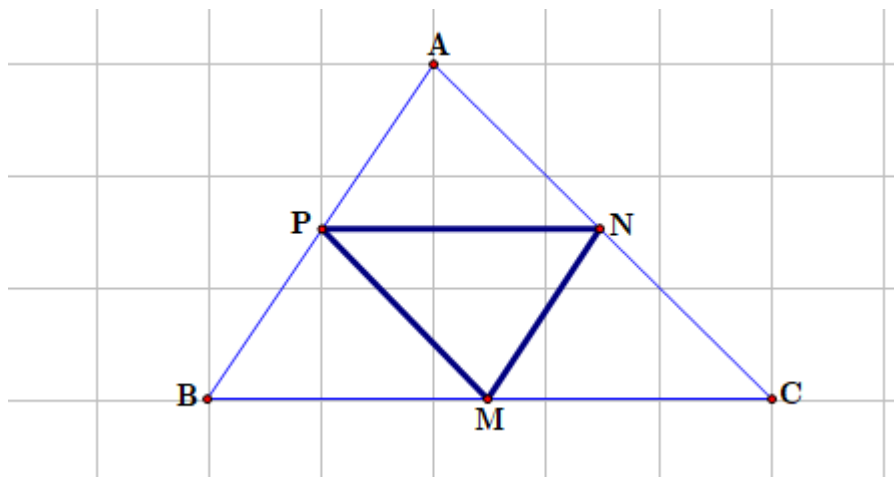
- a)  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$   
 b)  $D$  là điểm ngoài đoạn  $AB$  (nằm trên đường thẳng  $AB$ ) sao cho  $DA + AB = 9$  (cm)



**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh:

- a)  $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$   
 b)  $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$

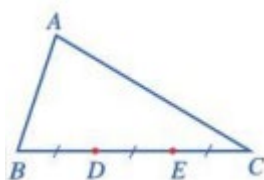
**Lời giải**



a)  $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AN}$  (đpcm)

b)  $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$  (đpcm)

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa mãn  $BD = DE = EC$ . Giả sử  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ . Biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}$ .



**Lời giải**

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{BC}}{3} = \frac{-\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{BC}}{3} = \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{-\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

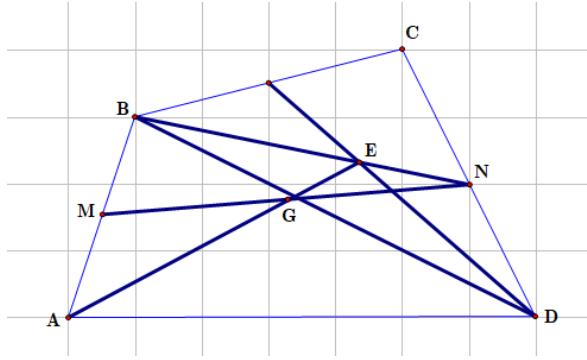
**Câu 5:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN, E$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$

b)  $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$

c) Điểm  $G$  thuộc đoạn thẳng  $AE$  và  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ .

**Lời giải**



a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GD} \\ &= 4\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 4\overrightarrow{EG} + \vec{0} = 4\overrightarrow{EG} \end{aligned}$$

b) Vì  $E$  là trọng tâm tam giác  $BCD$  nên  $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ , theo câu a) ta được  $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$

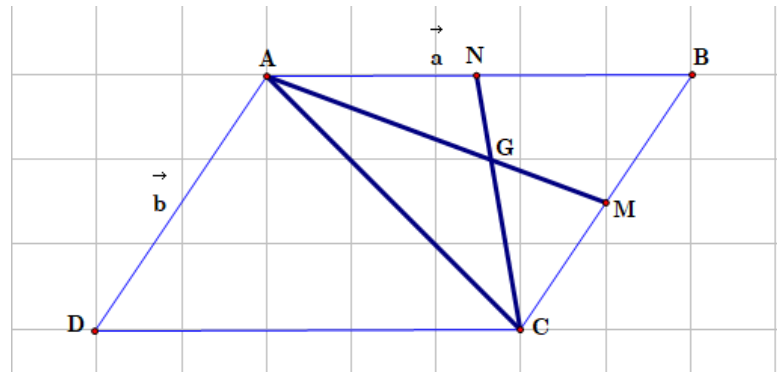
c) Theo câu b) ta suy ra ba điểm  $E, A, G$  thẳng hàng và vì  $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$  nên  $G$  thuộc đoạn  $EA$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = 4\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GE} \quad (1)$$

Từ câu b) ta có  $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{GE} \Rightarrow \overrightarrow{GE} = \frac{\overrightarrow{AE}}{4}$  (2). Lấy (2) thay vào (1) ta được điều phải chứng minh

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$  theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(-2\vec{b} - \vec{a})$$

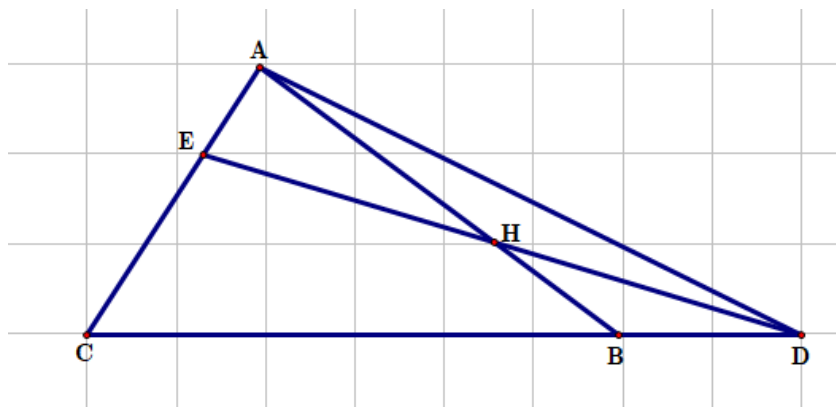
**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E, H$  thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vectơ  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Chứng minh  $D, E, H$  thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{3}$

Ta có  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có  $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Ta thấy  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ , nên 3 điểm  $D, E, H$  thẳng hàng.

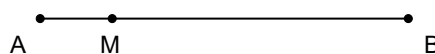


VÍ DỤ MINH HỌA.

**Câu 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau:

a)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$       b)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$       c)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải



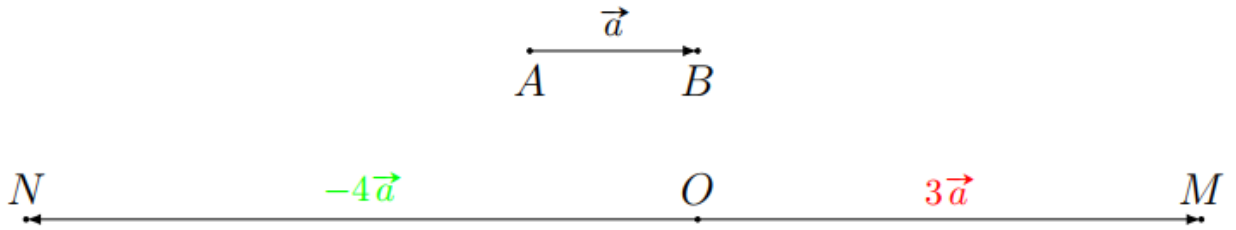
a)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng  $\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$ .

b)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$ , mà  $\overrightarrow{MA}$  ngược hướng  $\overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$ .

c)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\overrightarrow{MA}$  ngược hướng  $\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$ .

**Câu 2.** Cho  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  và điểm  $O$ . Xác định hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho:  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ ;  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .

Lời giải



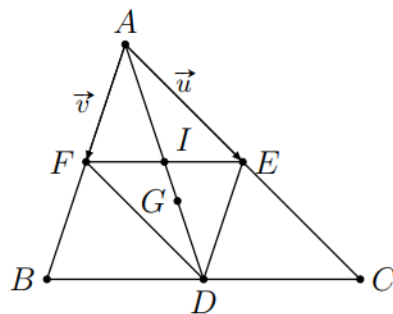
Vẽ  $d$  đi qua  $O$  và song song với giá của  $\vec{a}$  (nếu  $O$  thuộc giá của  $\vec{a}$  thì  $d$  là giá của  $\vec{a}$ ).

– Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = 3|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{OM}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng. Khi đó  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ .

– Trên  $d$  lấy điểm  $N$  sao cho  $ON = 4|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{ON}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng nên  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .

**Câu 3.** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$ .

Lời giải



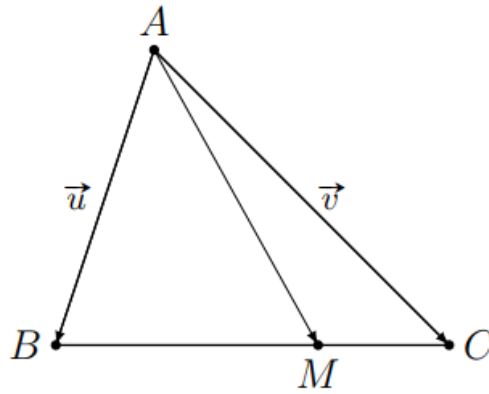
Dễ thấy tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành dẫn đến  $I$  là trung điểm của  $AD$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}; \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}; \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Lời giải



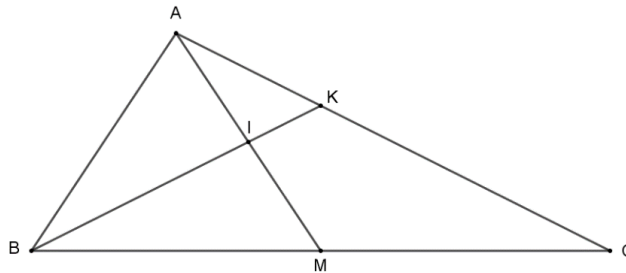
Từ giả thiết  $MB = 2MC$  ta dễ dàng chứng minh được  $\overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ .

Do đó  $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{BC}$  mà  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \Rightarrow$

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{2}{3}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{3}\overline{u} + \frac{2}{3}\overline{v}.$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Lời giải**



Ta có  $I$  là trung điểm của  $AM \Rightarrow 2\overline{BI} = \overline{BA} + \overline{BM}$ .

Mặt khác  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ .

Do đó  $2\overline{BI} = \overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} \Leftrightarrow 4\overline{BI} = 2\overline{BA} + \overline{BC}$  (1).

$$\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \overline{BA} + \frac{1}{3}(\overline{BC} - \overline{BA}) = \frac{2}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{BK} = 2\overline{BA} + \overline{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 3\overline{BK} = 4\overline{BI} \Rightarrow \overline{BK} = \frac{4}{3}\overline{BI}$ .

Suy ra 3 điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:  $\overline{BC} + \overline{MA} = \vec{0}$  và  $\overline{AB} - \overline{NA} - 3\overline{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Mặt khác,  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$ .

Do ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là bốn đỉnh của hình bình hành  $BCMA \Rightarrow$  ba điểm  $A, M, C$  không thẳng hàng (2).

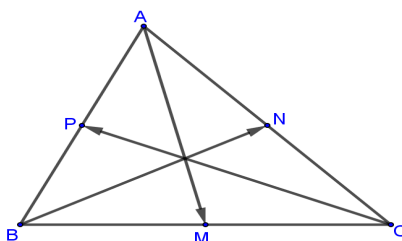
Từ (1) và (2) suy ra  $MN \parallel AC$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

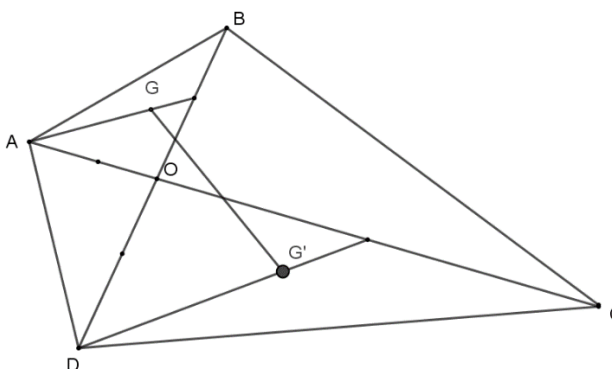
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$



**Câu 8.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G, G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

**Lời giải**



Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $OCD$  nên ta có:



$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (1).$$

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  nên ta có:

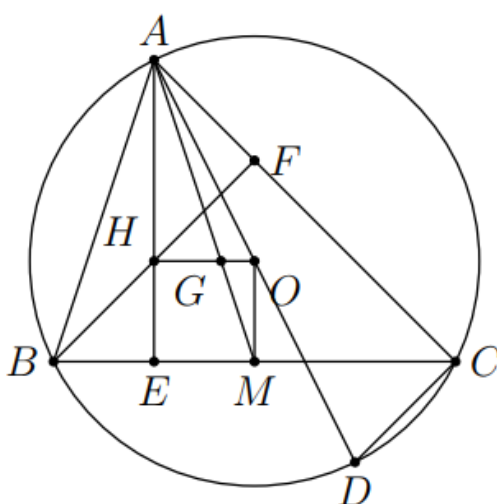
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$$

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

*Lời giải*



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ , ta có

$$BH \parallel DC \text{ (cùng vuông góc với } AC \text{)} \quad (1).$$

$$CH \parallel BD \text{ (cùng vuông góc với } AB \text{)} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow$  ba điểm  $H, M, D$  thẳng hàng.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

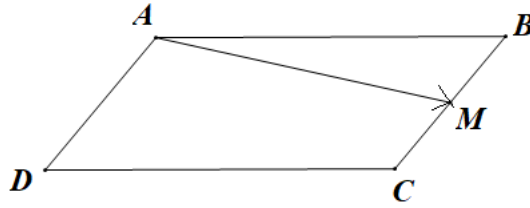
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$



## **BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**4.11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Hãy biểu thị  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

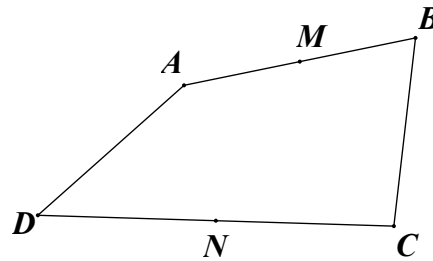
Lời giải



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

4.12. Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

Lời giải



$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

4.13. Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .

Lời giải

a)  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Ta có:  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK}$$

4.14. Cho tam giác  $ABC$ .

a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$ .

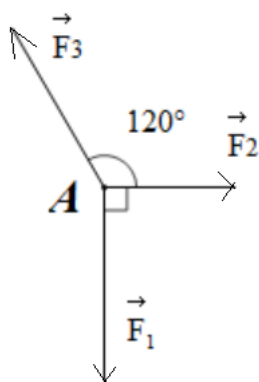
Lời giải

a)

$$\begin{aligned} \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MA} + \overline{AB} + 2\overline{MA} + 2\overline{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overline{MA} &= -(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \\ \Leftrightarrow \overline{AM} &= \frac{1}{4}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \end{aligned}$$

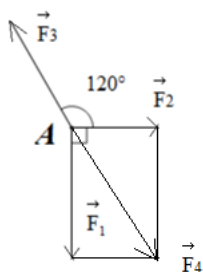
b)  $\overline{OA} + \overline{OB} + 2\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MA} + \overline{OM} + \overline{MB} + 2\overline{OM} + 2\overline{MC} = 4\overline{OM}$

4.15. Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của các lực  $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ , biết  $\vec{F}_1$  có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

**Lời giải**



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_4$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_4 = -\vec{F}_3 \Rightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$$

Ta có:  $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| \cdot \tan 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ;  $|\vec{F}_4| = \frac{|\vec{F}_1|}{\cos 30^\circ} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ ;

Vậy  $|\vec{F}_2| = \frac{20\sqrt{3}}{3}$  N,  $|\vec{F}_3| = \frac{40\sqrt{3}}{3}$  N.

**III** HỆ THỐNG BÀI TẬP.

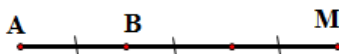
**DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTO  $\vec{k}\vec{a}$**



**1** BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Xác định điểm  $M$  biết  $2\overline{MA} - 3\overline{MB} = \vec{0}$

**Lời giải**



Ta có:

$$2\overline{MA} - 3\overline{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{MA} - 3(\overline{MA} + \overline{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overline{MA} - 3\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AM} = 3\overline{AB}$$

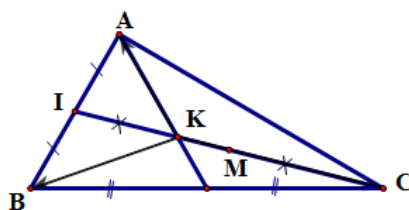
$$\Rightarrow \overline{AM}, \overline{AB} \text{ cùng hướng và } AM = 3AB.$$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\overline{KA} + 2\overline{KB} = \overline{CB}$

b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0}$

**Lời giải**



a) Ta có:  $\overline{KA} + 2\overline{KB} = \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{KA} + 2\overline{KB} = \overline{KB} - \overline{KC} \Leftrightarrow \overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = \vec{0}$

$\Rightarrow K$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{MI} + 2\overline{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{MI} + \overline{MC} = \vec{0}$$

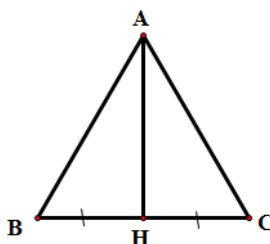
$\Rightarrow M$  là trung điểm của  $IC$ .

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính

a)  $|\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}|$

b)  $|\overline{AB} + \overline{AC}|$

**Lời giải**



a)  $|\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}| = |(\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{AC}| = |\overline{AC} + \overline{AC}| = |2\overline{AC}| = 2|\overline{AC}| = 2AC = 2a.$

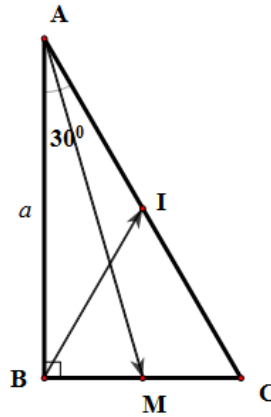
b) Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có:

$$|\overline{AB} + \overline{AC}| = |2\overline{AH}| = 2|\overline{AH}| = 2AH = 2\sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

**Câu 4:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính:

- a)  $|\overline{BA} + \overline{BC}|$                       b)  $|\overline{AB} + \overline{AC}|$

**Lời giải**



Ta có:  $BC = AB \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

a)  $|\overline{BA} + \overline{BC}| = |2\overline{BI}| = 2|\overline{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

b)  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |2\overline{AM}| = 2|\overline{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$ .

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Khẳng định nào sai?

- A.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- B.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k > 0$
- C.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k < 0$
- D. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương khi có một số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

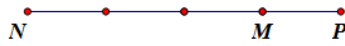
**Câu 2:** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overline{MN} = -3\overline{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



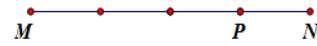
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 3

**B.** Hình 4

**C.** Hình 1

**D.** Hình 2

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overline{MN} = -3\overline{MP} \Rightarrow \overline{MN} \text{ ngược hướng với } \overline{MP} \text{ và } |\overline{MN}| = 3|\overline{MP}|.$$

**Câu 3:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overline{AB} = -3\overline{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

**A.**  $\overline{BC} = -4\overline{AC}$

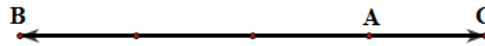
**B.**  $\overline{BC} = -2\overline{AC}$

**C.**  $\overline{BC} = 2\overline{AC}$

**D.**  $\overline{BC} = 4\overline{AC}$

**Lời giải**

**Chọn D**



**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**

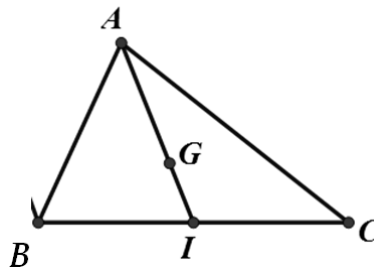
**A.**  $\overline{BI} = \overline{IC}$

**B.**  $3\overline{BI} = 2\overline{IC}$

**C.**  $\overline{BI} = 2\overline{IC}$

**D.**  $2\overline{BI} = \overline{IC}$

**Lời giải**



**Chọn A**

Vì  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $BI = CI$  và  $\overline{BI}$  cùng hướng với  $\overline{IC}$  do đó hai vectơ  $\overline{BI}, \overline{IC}$  bằng nhau hay  $\overline{BI} = \overline{IC}$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

**A.**  $\overline{AB} = 2\overline{AM}$

**B.**  $\overline{AC} = 2\overline{CN}$

**C.**  $\overline{BC} = -2\overline{NM}$

**D.**  $\overline{CN} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 6:** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và điểm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm thỏa mãn  $\overline{OM} = 3\vec{a}$  và  $\overline{ON} = -4\vec{a}$ . Khi đó:

**A.**  $\overline{MN} = 7\vec{a}$

**B.**  $\overline{MN} = -5\vec{a}$

**C.**  $\overline{MN} = -7\vec{a}$

**D.**  $\overline{MN} = 5\vec{a}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}$ .

**Câu 7:** Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = m\vec{b}$ , biết rằng  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A.  $m = 3$                       B.  $m = -\frac{1}{3}$                       C.  $m = \frac{1}{3}$                       D.  $m = -3$

Lời giải

**Chọn B**

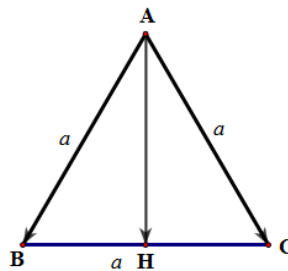
Do  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng nên  $m = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$ .

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $2a$ . Độ dài của  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  bằng:

- A.  $2a$                       B.  $a\sqrt{3}$                       C.  $2a\sqrt{3}$                       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Khi đó:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2.AH = 2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$ .

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A.  $M$  là trung điểm của  $BC$   
 B.  $M$  là trung điểm của  $IC$   
 C.  $M$  là trung điểm của  $IA$   
 D.  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$

Lời giải

**Chọn B**

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$  là trung điểm của  $IC$ .

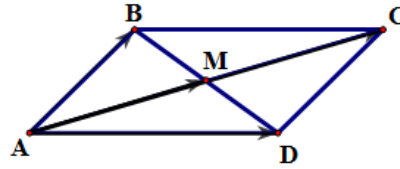
**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ . Khi đó điểm  $M$  là:

- A. Trung điểm của  $AC$     B. Điểm  $C$   
 C. Trung điểm của  $AB$     D. Trung điểm của  $AD$

Lời giải

**Chọn A**





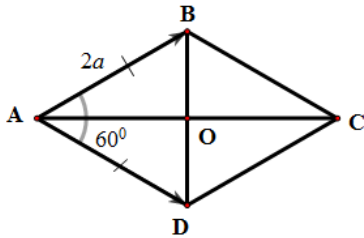
Theo quy tắc hình bình hành, ta có:  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$   
 $\Rightarrow M$  là trung điểm của  $AC$ .

**Câu 11:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh  $2a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính độ dài vectơ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

- A.**  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{3}$     **B.**  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$   
**C.**  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a$     **D.**  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a\sqrt{3}$

Lời giải

**Chọn A**



Tam giác  $ABD$  cân tại  $A$  và có góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  nên  $\triangle ABD$  đều

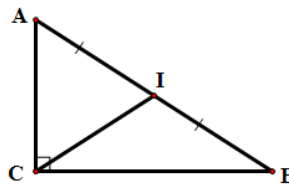
$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AO}| = 2 \cdot AO = 2 \cdot \sqrt{AB^2 - BO^2} = 2 \cdot \sqrt{4a^2 - a^2} = 2a\sqrt{3}$$

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Tam giác  $ABC$  đều    **B.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$   
**C.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$     **D.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có:

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB$$

$$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| = AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } C.$$

**Câu 13:** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  với  $OA = OB = a$ . Độ dài của véc tơ  $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$  là:

A.  $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

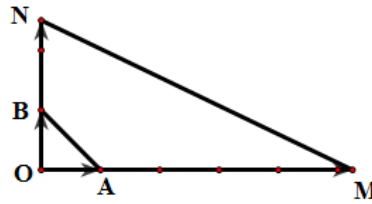
B.  $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C.  $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

**D.**  $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Lời giải

**Chọn D**



Dựng điểm  $M, N$  sao cho:  $\overline{OM} = \frac{21}{4}\overline{OA}, \overline{ON} = \frac{5}{2}\overline{OB}$ . Khi đó:

$$|\vec{u}| = |\overline{OM} - \overline{ON}| = |\overline{NM}| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

**Câu 14:** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AE}$

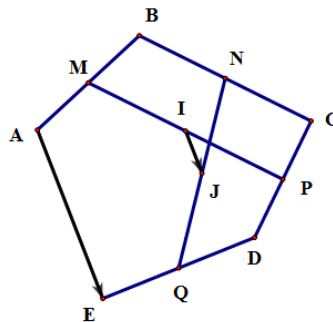
B.  $\vec{IJ} = \frac{1}{3}\vec{AE}$

**C.**  $\vec{IJ} = \frac{1}{4}\vec{AE}$

D.  $\vec{IJ} = \frac{1}{5}\vec{AE}$

Lời giải

**Chọn C**



Ta có:  $2\vec{IJ} = \vec{IQ} + \vec{IN} = \vec{IM} + \vec{MQ} + \vec{IP} + \vec{PN} = \vec{MQ} + \vec{PN}$

$$\begin{cases} \vec{MQ} = \vec{MA} + \vec{AE} + \vec{EQ} \\ \vec{MQ} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{MQ} = \vec{AE} + \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{MQ} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{BD}), \vec{PN} = -\frac{1}{2}\vec{BD}$$

Suy ra:  $2\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{BD}) - \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{AE} \Rightarrow \vec{IJ} = \frac{1}{4}\vec{AE}$ .

**Câu 15:** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm trên  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{4}AB$ . Khẳng định nào sau đây sai?

A.  $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$ .

B.  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ .

C.  $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$ .

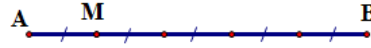
**D.**  $\vec{MB} = -3\vec{MA}$ .

**Câu 16:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $MA = \frac{1}{5}AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$       B.  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$       C.  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$       D.  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

**Chọn D**



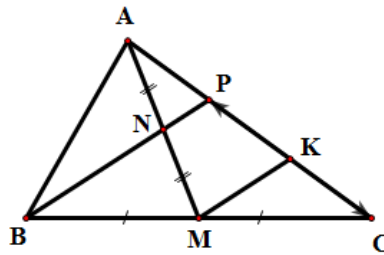
Ta thấy  $\overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$  là sai.

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Đường thẳng  $BN$  cắt  $AC$  tại  $P$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$  thì giá trị của  $x$  là:

- A.  $-\frac{4}{3}$       B.  $-\frac{2}{3}$       C.  $-\frac{3}{2}$       D.  $-\frac{5}{3}$

Lời giải

**Chọn C**



Kẻ  $MK \parallel BP (K \in AC)$ . Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên suy ra  $K$  là trung điểm của  $CP$

Vì  $MK \parallel BP \Rightarrow MK \parallel NP$  mà  $N$  là trung điểm của  $AM$  nên suy ra  $P$  là trung điểm của  $AK$

Do đó:  $AP = PK = KC$ . Vậy  $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

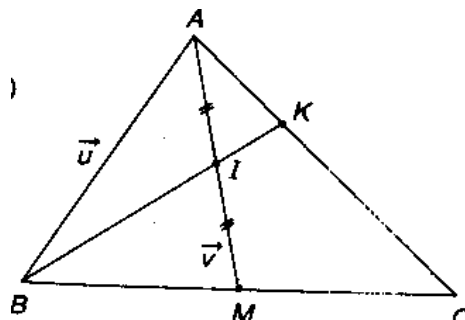
## DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG



### BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là trung điểm  $AC$  sao  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

Lời giải



Ta có  $2\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{BM} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC} \Rightarrow 4\vec{BI} = 2\vec{BA} + \vec{BC}$  (1)

Ta có  $\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK} = \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{BA} + \frac{1}{3}(\vec{BC} - \vec{BA}) = \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\Rightarrow 3\vec{BK} = 2\vec{BA} + \vec{BC}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 3\vec{BK} = 4\vec{BI} \Rightarrow \vec{BK} = \frac{4}{3}\vec{BI} \Rightarrow B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:

$\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}, \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN // AC$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{BC} + \vec{MA} + \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$  hay  $\vec{AC} + \vec{MN} - 3\vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MN} = 2\vec{AC}$ .

Vậy  $\vec{MN}, \vec{AC}$  cùng phương.

Theo giả thiết  $\vec{BC} = \vec{AM}$ . Mà  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là bốn đỉnh của hình bình hành  $\Rightarrow M$  không thuộc  $AC$ .

Vậy  $MN // AC$ .

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A.**  $AB = AC$       **B.**  $\exists k \neq 0: \vec{AB} = k.\vec{AC}$       **C.**  $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$       **D.**  $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MC}, \forall$  điểm  $M$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 2:** Cho  $\Delta ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \vec{BC}, \vec{b} = \vec{AC}$ . Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

- A.**  $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$       **B.**  $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$       **C.**  $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$       **D.**  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2.(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow 5\vec{a} + \vec{b}$  và  $-10\vec{a} - 2\vec{b}$  cùng phương.

**Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

- A.  $-3\vec{a} + \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$                                       B.  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $2\vec{a} + \vec{b}$   
 C.  $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$                                       D.  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - 2\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

- A.  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$                                       B.  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$   
 C.  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$                                       D.  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 5:** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:

- A.  $-7$                                       B.  $7$                                       C.  $5$                                       D.  $6$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện để hai vectơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương là:  $\frac{x+1}{3} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x = -7$ .

**Câu 6:** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:

- A.  $\frac{1}{2}$                                       B.  $-\frac{3}{2}$                                       C.  $-\frac{1}{2}$                                       D.  $\frac{3}{2}$

**Lời giải**

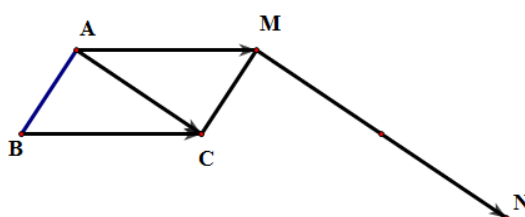
**Chọn C**

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$ ,  $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $MN \perp AC$                                       B.  $MN \parallel AC$   
 C.  $M$  nằm trên đường thẳng  $AC$                                       D. Hai đường thẳng  $MN$  và  $AC$  trùng nhau

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có:  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$  nên  $M \notin AC$  (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ , ta được:  
 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $MN // AC$ .

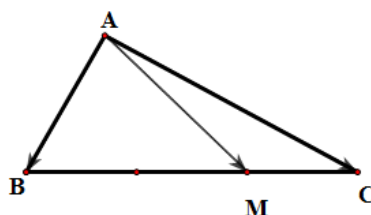
**DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG**

**1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

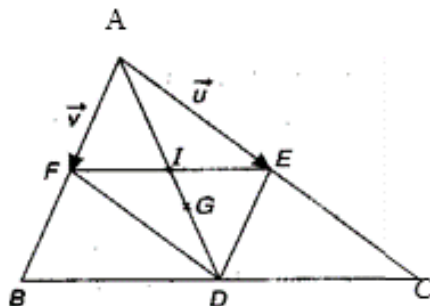
**Lời giải**



Ta có:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  (đpcm).

**Câu 2:** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $AEDF$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

Ta có  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

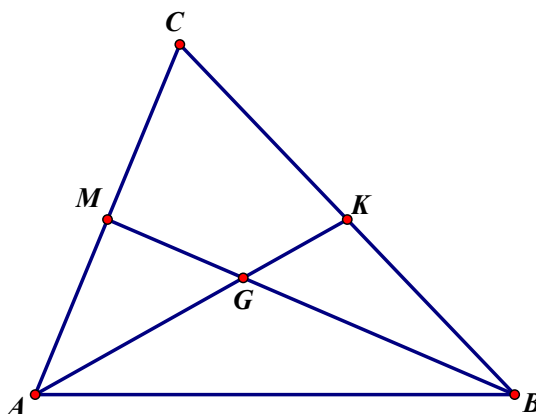
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}$$

**Câu 3:** Cho  $AK$  và  $BM$  là hai trung tuyến của tam giác  $ABC$ , trọng tâm  $G$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

Lời giải



$$* \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$$

$$* \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}) = 2 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$$

$$* \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) = -(\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Trên đường thẳng chứa cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ . Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

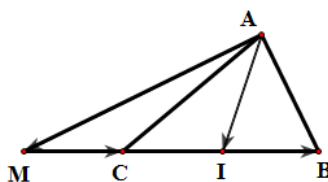
**A.**  $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

**B.**  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

**C.**  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$       **D.**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Lời giải

**Chọn A**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Khi đó  $C$  là trung điểm của  $MI$ . Ta có:

$$\overline{AM} + \overline{AI} = 2\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AM} = -\overline{AI} + 2\overline{AC} = -\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) + 2\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{AC}.$$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  biết  $AB = 8, AC = 9, BC = 11$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $N$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $AN = x (0 < x < 9)$ . Hệ thức nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\overline{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB}$

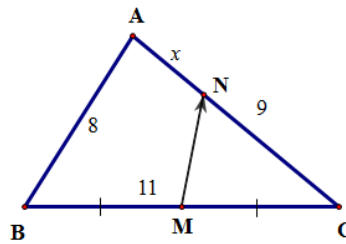
**B.**  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{BA}$

**C.**  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$

**D.**  $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có:  $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{x}{9}\overline{AC} - \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}.$

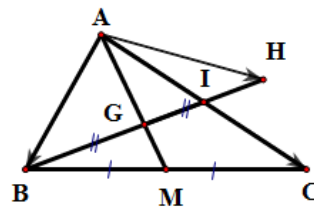
**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm và  $H$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $G$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.**  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$     **B.**  $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$

**C.**  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AB}$     **D.**  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC}$

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $M, I$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AC$ .

Ta thấy  $AHCG$  là hình bình hành nên

$$\overline{AH} + \overline{AG} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AH} + \frac{2}{3}\overline{AM} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AH} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AH} = \overline{AC} - \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}) \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

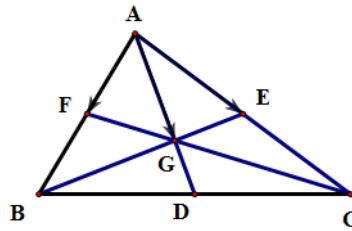
**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$     B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$     C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$     **D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$**

Lời giải

**Chọn D**



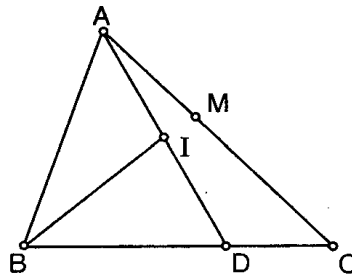
Ta có:  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  và  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$ ,  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Vectơ  $\overrightarrow{BI}$  được phân tích theo hai vectơ  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ . Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

**A.**  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .    **B.**  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ .    **D.**  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ .

Lời giải

**Chọn A**



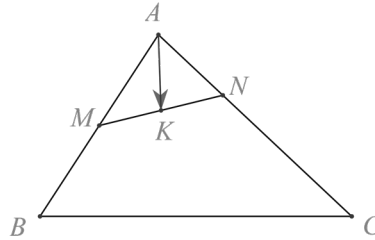
Ta có:  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$  nên  
 $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$ .  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ .    **B.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .    **D.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có  $M$  là trung điểm  $AB$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

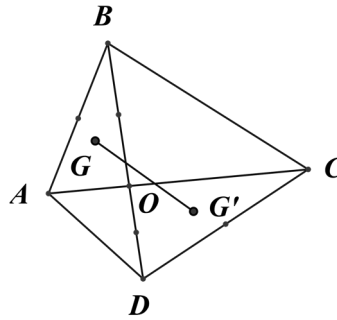
Do đó  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ .

**Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Khi đó  $\overrightarrow{GG'}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .      B.  $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .      C.  $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .      D.  $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .

Lời giải

**Chọn D**



Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $OCD$  nên  $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ . (1)

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  nên:  $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$  (2)

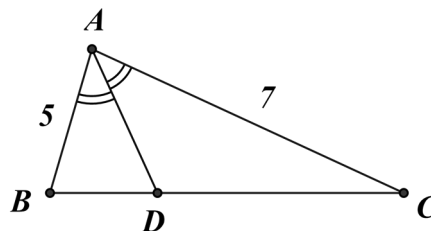
Từ (1) và (2) suy ra:  $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  với phân giác trong  $AD$ . Biết  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 7$ . Khi đó  $\overrightarrow{AD}$  bằng:

- A.  $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .      B.  $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ .      C.  $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ .      D.  $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

**Chọn C**



Vì  $AD$  là phân giác trong của tam giác  $ABC$  nên:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}.$$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó:

**A.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$     **B.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

**C.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$     **D.**  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

**Chọn C**

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Hệ

thức tính  $\overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{AN}$  là:

**A.**  $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$     **B.**  $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

**C.**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$     **D.**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

Lời giải

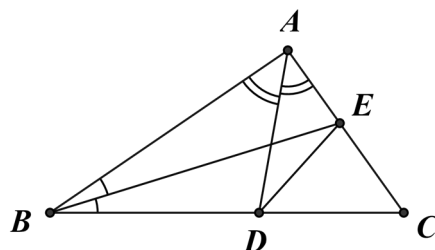
**Chọn C**

**Câu 11:** Cho  $AD$  và  $BE$  là hai phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 4$ ,  $BC = 5$  và  $CA = 6$ . Khi đó  $\overrightarrow{DE}$  bằng:

**A.**  $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .    **B.**  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$ .    **C.**  $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .    **D.**  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$ .

Lời giải

**Chọn A**



$AD$  là phân giác trong của tam giác  $ABC$  nên  $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4}$

$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .

Tương tự:  $\frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$ .

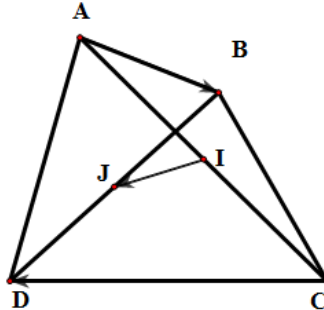
Vậy  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

**1** BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng:  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{IJ}$ .

Lời giải



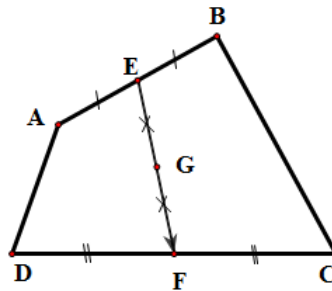
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} \overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AB} + \overline{BJ} \\ \overline{IJ} = \overline{IC} + \overline{CD} + \overline{DJ} \end{cases} &\Rightarrow 2\overline{IJ} = (\overline{IA} + \overline{IC}) + (\overline{AB} + \overline{CD}) + (\overline{BJ} + \overline{DJ}) \\ &\Leftrightarrow 2\overline{IJ} = \vec{0} + \overline{AB} + \overline{CD} + \vec{0} = \overline{AB} + \overline{CD}. \end{aligned}$$

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{EF}$

b) Gọi  $G$  là trung điểm của  $EF$ . Chứng minh rằng  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0}$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{AC} + \overline{BD} &= (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FC}) + (\overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FD}) = 2\overline{EF} + (\overline{AE} + \overline{BE}) + (\overline{FC} + \overline{FD}) \\ &= 2\overline{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overline{EF} \quad (1) \end{aligned}$$

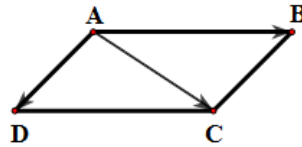
$$\begin{aligned} \overline{AD} + \overline{BC} &= (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD}) + (\overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FC}) = 2\overline{EF} + (\overline{AE} + \overline{BE}) + (\overline{FD} + \overline{FC}) \\ &= 2\overline{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overline{EF} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{EF}$

b)  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = 2\overline{GE} + 2\overline{GF} = 2(\overline{GE} + \overline{GF}) = 2\vec{0} = \vec{0}$ .

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overline{AB} + 2\overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AC}$

Lời giải



$$\vec{VT} = \vec{AB} + 2\vec{AC} + \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) + 2\vec{AC} = \vec{AC} + 2\vec{AC} = 3\vec{AC} = \vec{VP}.$$

**Câu 4:** Chứng minh rằng nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $3\vec{GG}' = \vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}'$ .

Lời giải

$$\begin{aligned} \vec{VP} &= \vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' \\ &= \vec{AG} + \vec{GG}' + \vec{G'A'} + \vec{BG} + \vec{GG}' + \vec{G'B'} + \vec{CG} + \vec{GG}' + \vec{G'C'} \\ &= 3\vec{GG}' + \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} + \vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'} \\ &= 3\vec{GG}' - (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + \vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'} = 3\vec{GG}' = \vec{VP}. \end{aligned}$$

## 2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

- A.  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{AC} + 2\vec{BC}$
- B.  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$
- C.  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{CA} + \vec{CB}$**
- D.  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{CB} - \vec{CA}$

Lời giải

**Chọn C**

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

- A.  $\vec{OH} = \frac{3}{2}\vec{OG}$
- B.  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$**
- C.  $\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{GH}$
- D.  $2\vec{GO} = -3\vec{OH}$

Lời giải

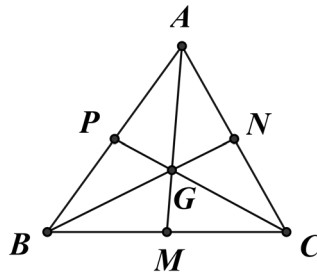
**Chọn B**

**Câu 3:** Ba trung tuyến  $AM, BN, CP$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $G$ . Hỏi vectơ  $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP}$  bằng vectơ nào?

- A.  $\frac{3}{2}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})$
- B.  $3(\vec{MG} + \vec{NG} + \vec{GP})$**
- C.  $\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC})$
- D.  $\vec{0}$**

Lời giải

**Chọn D**



Ta có:  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) = \vec{0}$ .

**Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $BC$ ,  $CD$ . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$   
 C.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$       **D.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$**

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ . Điểm  $M$  là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của  $M$  xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là  $D, E, F$ . Hệ thức giữa các vectơ  $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}$  là:

- A.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$       B.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$   
 C.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$       **D.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$**

**Câu 6:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $AB$  và  $DC$ . Lấy các điểm  $P, Q$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .**      B.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ .  
 C.  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .      D.  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$ .

**Câu 7:** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có:

- A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$       **B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$**       C.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$       D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$

Lời giải

**Chọn B**

Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

**Câu 8:** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Với mọi điểm  $M$ , ta luôn có:

- A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$**       B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$   
 C.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$       D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

Lời giải

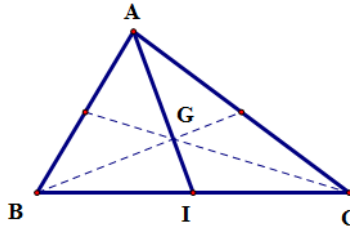
**Chọn C**

Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác: Với mọi điểm  $M$ , ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**Câu 9:** Cho  $\Delta ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Đẳng thức nào **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$       B.  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$       C.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$       D.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$

Lời giải



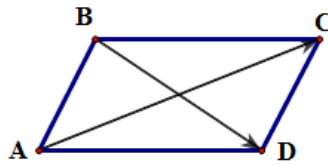
Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, ta có:  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$       B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$       C.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$       D.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

Lời giải

**Chọn A**



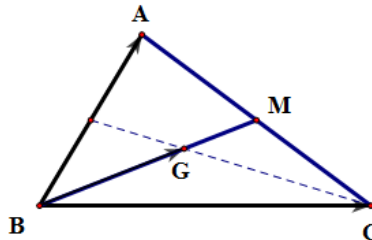
Ta có:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{BC}$ .

**Câu 11:** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$       B.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$       C.  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$       D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Lời giải

**Chọn B**



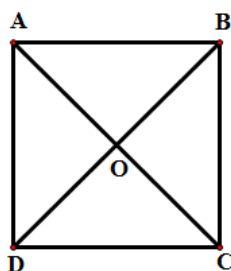
Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó:  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}$ .

**Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$       B.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$       C.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$       D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$

Lời giải

**Chọn D**



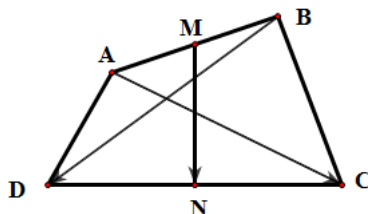
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

**Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$  bằng:

- A.  $\overrightarrow{MN}$                       B.  $2\overrightarrow{MN}$                       C.  $3\overrightarrow{MN}$                       D.  $-2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

**Chọn B**



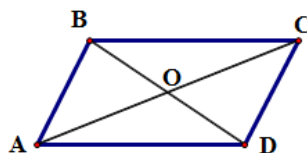
$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

**Câu 14:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$     B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$   
 C.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$                       D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

**Chọn D**



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$$

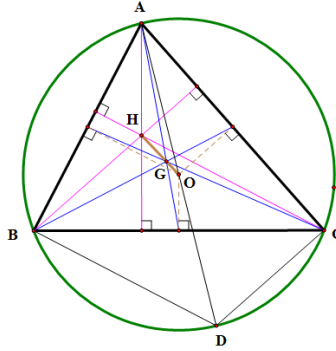
**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$                       B.  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$                       C.  $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$                       D.  $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$

Lời giải

**Chọn B**





Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ . Ta có:  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$  (1)

Vì  $HBDC$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$  (2)

Từ (1),(2) suy ra:

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.$$

**Câu 16:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$  bằng:

A.  $2\overrightarrow{MI}$

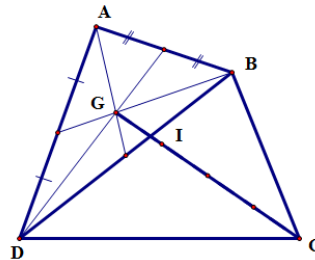
B.  $3\overrightarrow{MI}$

C.  $4\overrightarrow{MI}$

D.  $5\overrightarrow{MI}$

Lời giải

**Chọn C**



Ta có:  $3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}$ .

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$  nên

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}$$

$$= 4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 4\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MI}$$

**Câu 17:** Cho tam giác đều  $ABC$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là một điểm tùy ý bên trong tam giác  $ABC$ . Hạ

$ID, IE, IF$  tương ứng vuông góc với  $BC, CA, AB$ . Giả sử  $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân

số tối giản). Khi đó  $a + b$  bằng:

A. 5

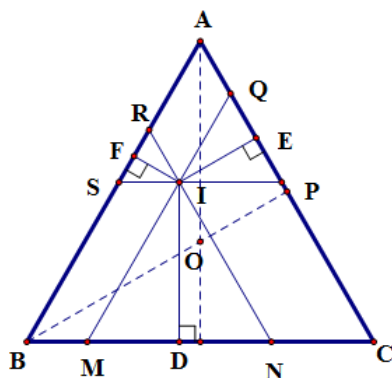
B. 4

C. 6

D. 7

Lời giải

**Chọn A**



Qua điểm  $I$  dựng các đoạn  $MQ \parallel AB, PS \parallel BC, NR \parallel CA$ .

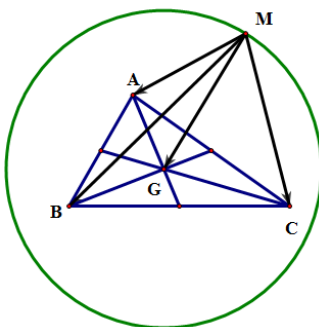
Vì  $ABC$  là tam giác đều nên các tam giác  $IMN, IPQ, IRS$  cũng là tam giác đều.

Suy ra  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $MN, PQ, RS$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \vec{ID} + \vec{IE} + \vec{IF} &= \frac{1}{2}(\vec{IM} + \vec{IN}) + \frac{1}{2}(\vec{IP} + \vec{IQ}) + \frac{1}{2}(\vec{IR} + \vec{IS}) \\ &= \frac{1}{2}[(\vec{IQ} + \vec{IR}) + (\vec{IM} + \vec{IS}) + (\vec{IN} + \vec{IP})] = \frac{1}{2}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\vec{IO} = \frac{3}{2}\vec{IO} \Rightarrow a = 3, b = 2. \text{ Do đó: } a + b = 5. \end{aligned}$$

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn:  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 1$   
**A.** 0                                      **B.** 1                                      **C.** 2                                      **D.** vô số  
**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$

$$\text{Ta có } |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |3\vec{MG}| = 3MG = 1 \Rightarrow MG = \frac{1}{3}$$

Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 1$  là đường tròn tâm  $G$  bán kính  $R = \frac{1}{3}$ .

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng vectơ  $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ .  
 Hãy xác định vị trí của điểm  $D$  sao cho  $\vec{CD} = \vec{v}$ .  
**A.**  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCD$

- B.  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ACBD$
- C.  $D$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$
- D.  $D$  là trực tâm của tam giác  $ABC$

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{MA} - \vec{MC} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CI}$  (Với  $I$  là trung điểm của  $AB$ )

Vậy vectơ  $\vec{v}$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ . Khi đó:  $\vec{CD} = \vec{v} = 2\vec{CI} \Rightarrow I$  là trung điểm của  $CD$

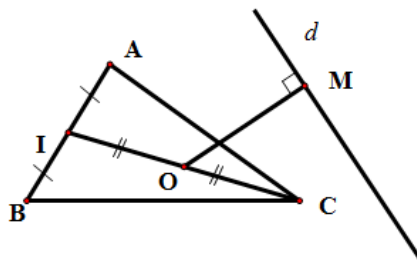
Vậy  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ .

**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$ . Gọi  $O$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho vectơ  $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$  có độ dài nhỏ nhất.

- A. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $d$
- B. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$
- C. Điểm  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $d$
- D. Điểm  $M$  là giao điểm của  $AB$  và  $d$

Lời giải

**Chọn A**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

Khi đó:  $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{OI} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} + \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow O$  là trung điểm của  $IC$

Ta có:

$$\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{OA} - \vec{OM} + \vec{OB} - \vec{OM} + 2(\vec{OC} - \vec{OM}) = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} - 4\vec{OM} = -4\vec{OM}$$

Do đó  $|\vec{v}| = 4OM$ .

Độ dài vectơ  $\vec{v}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $4OM$  nhỏ nhất hay  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $d$ .

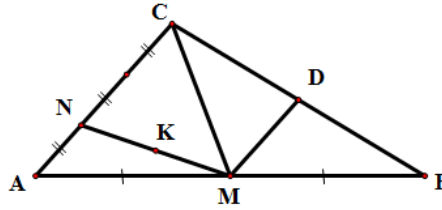
**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Hãy xác định điểm  $K$  thỏa mãn:  $3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 12\vec{AK} = \vec{0}$  và điểm  $D$  thỏa mãn:  $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\vec{KD} = \vec{0}$ .

- A.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $BC$
- B.  $K$  là trung điểm của  $BC$  và  $D$  là trung điểm của  $MN$
- C.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $AB$

D.  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $D$  là trung điểm của  $AC$

Lời giải

**Chọn A**



Ta có:

$$\begin{cases} \overline{AB} = 2\overline{AM} \\ \overline{AC} = 3\overline{AN} \end{cases} \Rightarrow 3\overline{AB} + 2\overline{AC} - 12\overline{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 3.2\overline{AM} + 2.3\overline{AN} - 12\overline{AK} = \vec{0} \Rightarrow \overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{AN})$$

Suy ra  $K$  là trung điểm của  $MN$

Ta có:

$$3\overline{AB} + 4\overline{AC} - 12\overline{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{AB} + 4\overline{AC} - 12(\overline{AD} - \overline{AK}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{AB} + 4\overline{AC} + 12\overline{AK} = 12\overline{AD}$$

$$\Leftrightarrow 12\overline{AD} = 3\overline{AB} + 4\overline{AC} + 3\overline{AB} + 2\overline{AC} \Leftrightarrow 12\overline{AD} = 6\overline{AB} + 6\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

Suy ra  $D$  là trung điểm của  $BC$ .

**Câu 22:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $4\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$ . Khi đó điểm  $M$  là:

- A.** trung điểm  $AC$       **B.** điểm  $C$   
**C.** trung điểm  $AB$       **D.** trung điểm  $AD$

Lời giải

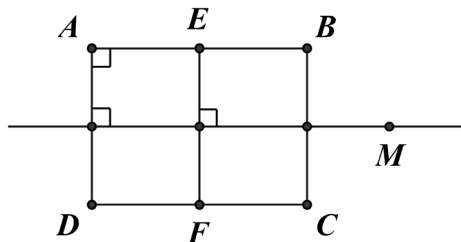
**Chọn A**

**Câu 23:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MC} + \overline{MD}|$  là:

- A.** Đường tròn đường kính  $AB$ .      **B.** Đường tròn đường kính  $BC$ .  
**C.** Đường trung trực của cạnh  $AD$ .      **D.** Đường trung trực của cạnh  $AB$ .

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $DC$ .

$$|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MC} + \overline{MD}| \Leftrightarrow |2\overline{ME}| = |2\overline{MF}| \Leftrightarrow ME = MF$$

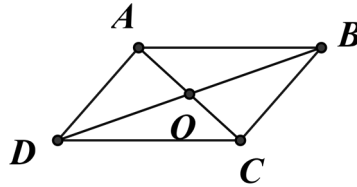
Do đó  $M$  thuộc đường trung trực của đoạn  $EF$  hay  $M$  thuộc đường trung trực của cạnh  $AD$ .

**Câu 24:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}|$  là:

- A. Một đường thẳng.      B. Một đường tròn.  
 C. Toàn bộ mặt phẳng ( $ABCD$ ).      D. Tập rỗng.

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ . Ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MO}| = |2\overrightarrow{MO}|$$

$$\Leftrightarrow MO = MO \text{ (đúng với mọi } M \text{)}$$

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là toàn bộ mặt phẳng ( $ABCD$ ).

**Câu 25:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa  $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ . Tập hợp  $M$  là:

- A. Một đường tròn      B. Một đường thẳng  
 C. Một đoạn thẳng      D. Nửa đường thẳng

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 26:** Cho tam giác  $ABC$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$

- A. 1      B. 2      C. 3      D. Vô số

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 27:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa  $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ . Tập hợp  $M$  là:

- A. Một đoạn thẳng      B. Một đường tròn  
 C. Nửa đường tròn      D. Một đường thẳng

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 28:** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Khẳng định nào đúng?

A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$

B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$

C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$

D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

**Chọn D**

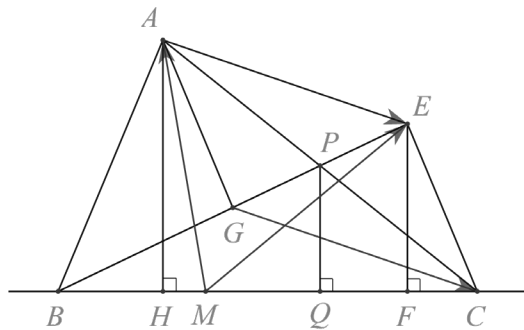
$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{EC} &= \overline{AE} - \overline{DB} + \overline{CB} \Leftrightarrow (\overline{AC} - \overline{AE}) + (\overline{CD} - \overline{CB}) - \overline{EC} + \overline{DB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{EC} + \overline{BD} - \overline{EC} + \overline{DB} &= \vec{0} \\ \overline{BD} + \overline{DB} &= \vec{0} \text{ (đúng) ĐPCM.} \end{aligned}$$

**Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  sao cho  $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{HC}$ . Điểm  $M$  di động nằm trên  $BC$  sao cho  $\overline{BM} = x\overline{BC}$ . Tìm  $x$  sao cho độ dài của vectơ  $\overline{MA} + \overline{GC}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $\frac{4}{5}$ .                      B.  $\frac{5}{6}$ .                      C.  $\frac{6}{5}$ .                      D.  $\frac{5}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Dựng hình bình hành  $AGCE$ . Ta có  $\overline{MA} + \overline{GC} = \overline{MA} + \overline{AE} = \overline{ME}$ .

Kẻ  $EF \perp BC$  ( $F \in BC$ ). Khi đó  $|\overline{MA} + \overline{GC}| = |\overline{ME}| = ME \geq EF$ .

Do đó  $|\overline{MA} + \overline{GC}|$  nhỏ nhất khi  $M \equiv F$ .

Gọi  $P$  là trung điểm  $AC$ ,  $Q$  là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $BC$  ( $Q \in BC$ ).

Khi đó  $P$  là trung điểm  $GE$  nên  $BP = \frac{3}{4}BE$ .

Ta có  $\triangle BPQ$  và  $\triangle BEF$  đồng dạng nên  $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$  hay  $\overline{BF} = \frac{4}{3}\overline{BQ}$ .

Mặt khác,  $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{HC}$ .

$PQ$  là đường trung bình  $\triangle AHC$  nên  $Q$  là trung điểm  $HC$  hay  $\overline{HQ} = \frac{1}{2}\overline{HC}$ .

Suy ra  $\overline{BQ} = \overline{BH} + \overline{HQ} = \frac{1}{3}\overline{HC} + \frac{1}{2}\overline{HC} = \frac{5}{6}\overline{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\overline{BC} = \frac{5}{8}\overline{BC}$ .

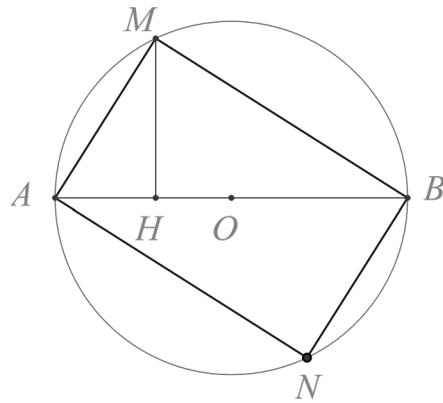
Do đó  $\overline{BF} = \frac{4}{3}\overline{BQ} = \frac{5}{6}\overline{BC}$ .

**Câu 30:** Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$ . Một điểm  $M$  di động sao cho  $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $AB$ . Tính độ dài lớn nhất của  $MH$ ?

- A.  $\frac{a}{2}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $a$ .                      D.  $2a$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $N$  là đỉnh thứ 4 của hình bình hành  $MANB$ . Khi đó  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$ .

Ta có  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{BA}|$  hay  $MN = AB$ .

Suy ra  $MANB$  là hình chữ nhật nên  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .

Do đó  $M$  nằm trên đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ .

$MH$  lớn nhất khi  $H$  trùng với tâm  $O$  hay  $\max MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ .

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### I LÝ THUYẾT.

#### I. ĐỊNH NGHĨA

##### 1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

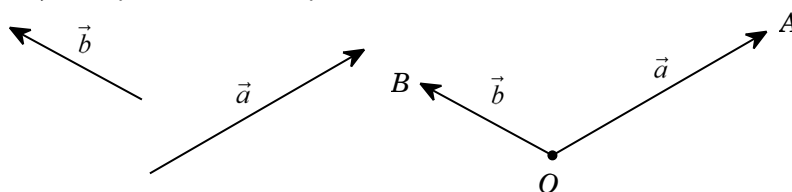
Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  là góc giữa hai tia  $OA$  và  $OB$  và được kí hiệu là  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \widehat{AOB}$

Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  là một số, kí hiệu  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  và được tính bởi công thức:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$$

##### 2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý

**Góc giữa hai vectơ:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .



**Chú ý.** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**Tích vô hướng của hai vectơ:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng vectơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Chú ý**

- Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .



- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là bình phương vô hướng của vector  $\vec{a}$ .

Ta có:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

## II. TÍNH CHẤT

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$  ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

**Nhận xét.** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ .

## III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

### 1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có:  $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$

Do đó độ dài đoạn thẳng được tính  $AB = \sqrt{|\overline{AB}|^2}$ .

### 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vector  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**Câu 1:** Nếu hai điểm  $M, N$  thoả mãn  $\overline{MN} \cdot \overline{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $MN = 4$ .                      **B.**  $MN = 2$ .                      **C.**  $MN = 16$ .                      **D.**  $MN = 256$ .

**Câu 2:** Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;
- B.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;
- C.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

**D.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Câu 3:** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$  ;

b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$  ;

c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;

d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các tích vô hướng sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

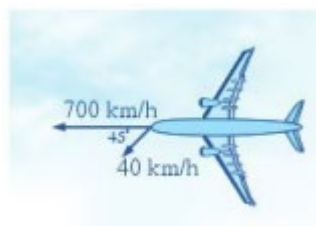
**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:  $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

**Câu 6:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 7:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40 \text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).



**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overline{AB}, \overline{BC})$



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hệ thức nào sau đây sai?  
**A.**  $(\overline{AB}, \overline{BC}) = 130^\circ$ .    **B.**  $(\overline{BC}, \overline{AC}) = 40^\circ$ .    **C.**  $(\overline{AB}, \overline{CB}) = 50^\circ$ .    **D.**  $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 40^\circ$ .

**Câu 2:** Cho  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $MNP$ . Góc nào sau đây bằng  $120^\circ$ ?  
**A.**  $(\overline{MN}, \overline{NP})$ .    **B.**  $(\overline{MO}, \overline{ON})$ .    **C.**  $(\overline{MN}, \overline{OP})$ .    **D.**  $(\overline{MN}, \overline{MP})$ .

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overline{AB}, \overline{BC}) + \cos(\overline{BC}, \overline{CA}) + \cos(\overline{CA}, \overline{AB})$ .  
**A.**  $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .    **B.**  $P = \frac{3}{2}$ .    **C.**  $P = -\frac{3}{2}$ .    **D.**  $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH$  Tính  $(\overline{AH}, \overline{BA})$ .  
**A.**  $30^\circ$ .    **B.**  $60^\circ$ .    **C.**  $120^\circ$ .    **D.**  $150^\circ$ .

**Câu 5:** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có  $BC = 2AC$ . Tính  $\cos(\overline{AC}, \overline{CB})$ .  
**A.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{CB}) = \frac{1}{2}$ .    **B.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{CB}) = -\frac{1}{2}$ .  
**C.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    **D.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Tính tổng  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA}) + (\overline{CA}, \overline{AB})$ .  
**A.**  $180^\circ$ .    **B.**  $360^\circ$ .    **C.**  $270^\circ$ .    **D.**  $120^\circ$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  với  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính tổng  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA})$ .  
**A.**  $120^\circ$     **B.**  $360^\circ$     **C.**  $270^\circ$     **D.**  $240^\circ$

**Câu 8:** Cho hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA})$ .  
**A.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .    **B.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
**C.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = 0$ .    **D.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = -1$ .

**Câu 9:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  Tính tổng  $(\overline{AB}, \overline{DC}) + (\overline{AD}, \overline{CB}) + (\overline{CO}, \overline{DC})$ .  
**A.**  $45^\circ$     **B.**  $405^\circ$     **C.**  $315^\circ$     **D.**  $225^\circ$

**Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  bằng  $100^\circ$  và có trực tâm  $H$ . Tính tổng  $(\overline{HA}, \overline{HB}) + (\overline{HB}, \overline{HC}) + (\overline{HC}, \overline{HA})$ .  
**A.**  $360^\circ$     **B.**  $180^\circ$     **C.**  $80^\circ$     **D.**  $160^\circ$

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.



PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

**Câu 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
- $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $A$ .

- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , rồi suy ra  $\cos A$ .
- Tính  $\overrightarrow{AM}^2$  và  $\overrightarrow{AD}^2$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 2:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- $\alpha = 180^\circ$ .
- $\alpha = 0^\circ$ .
- $\alpha = 90^\circ$ .
- $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- $\alpha = 30^\circ$ .
- $\alpha = 45^\circ$ .
- $\alpha = 60^\circ$ .
- $\alpha = 120^\circ$ .

**Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và hai vectơ  $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau. Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- $\alpha = 90^\circ$ .
- $\alpha = 180^\circ$ .
- $\alpha = 60^\circ$ .
- $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 5:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Câu 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2a^2$ .      **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = a^2$       **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 8:** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}a^2$       **B.**  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = -\frac{1}{2}a^2$       **C.**  $\overline{GA} \cdot \overline{GB} = \frac{a^2}{6}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = \frac{1}{2}a^2$

**Câu 9:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.**  $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$       **B.**  $(\overline{AB}, \overline{HA}) = 150^\circ$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và có  $AB = AC = a$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -a^2$       **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = a^2$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .

**A.**  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = b^2$       **B.**  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = c^2$       **C.**  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = b^2 + c^2$       **D.**  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = b^2 - c^2$

**Câu 12:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CA = 5$  cm. Tính  $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$

**A.**  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 13$       **B.**  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 15$       **C.**  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 17$       **D.**  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 19$

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $P = (\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC}$

**A.**  $P = b^2 - c^2$       **B.**  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       **C.**  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       **D.**  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Câu 14:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overline{AC} \cdot (\overline{CD} + \overline{CA})$

**A.**  $P = -1$       **B.**  $P = 3a^2$       **C.**  $P = -3a^2$       **D.**  $P = 2a^2$

**Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(3; -1)$ ,  $B(2; 10)$ ,  $C(-4; 2)$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 40$       **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -40$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 26$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -26$

**Câu 16:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

**A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$ .      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .      **C.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ .      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$ .

**Câu 17:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-3; 2)$  và  $\vec{b} = (-1; -7)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{c}$  biết  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$  và  $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

**A.**  $\vec{c} = (-1; -3)$       **B.**  $\vec{c} = (-1; 3)$       **C.**  $\vec{c} = (1; -3)$       **D.**  $\vec{c} = (1; 3)$

**Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 3)$  và  $\vec{c} = (2; 3)$ .

Tính  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ .

**A.**  $P = 0$       **B.**  $P = 18$       **C.**  $P = 20$       **D.**  $P = 28$

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 0)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

**A.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$       **B.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       **C.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$       **D.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

**Câu 20:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-2; -1)$  và  $\vec{b} = (4; -3)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

**A.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$       **B.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$       **C.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       **D.**  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

**Câu 21:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A.**  $\alpha = 90^\circ$       **B.**  $\alpha = 60^\circ$       **C.**  $\alpha = 45^\circ$       **D.**  $\alpha = 30^\circ$

**Câu 22:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{x} = (1; 2)$  và  $\vec{y} = (-3; -1)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$

**A.**  $\alpha = 45^\circ$       **B.**  $\alpha = 60^\circ$       **C.**  $\alpha = 90^\circ$       **D.**  $\alpha = 135^\circ$

**Câu 23:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; 1)$  và  $C(5; -1)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$

**A.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$       **B.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
**C.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$       **D.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

**Câu 24:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(6; 0)$ ,  $B(3; 1)$  và  $C(-1; -1)$ . Tính số đo góc  $B$  của tam giác đã cho.

**A.**  $15^\circ$       **B.**  $60^\circ$       **C.**  $120^\circ$       **D.**  $135^\circ$

**Câu 25:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(-8; 0)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(2; 0)$  và  $D(-3; -5)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  phụ nhau.      **B.** Góc  $\widehat{BCD}$  là góc nhọn.  
**C.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$       **D.** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  bù nhau.

**DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

**Câu 2.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  bất kì. Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 (*)$ .

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

- Câu 3.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Có  $AC$  và  $BD$  là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng :  $\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \overline{BE} \cdot \overline{BD} = AB^2$
- Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  và  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng  $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .                      B.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .
- C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .                      D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .
- Câu 2:** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là
- A. tam giác  $OAB$  đều.                      B. tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .
- C. tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .                      D. tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .
- Câu 3:** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
- A.  $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .                      B.  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .
- C.  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$ .                      D.  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .
- Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$                       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$                       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$                       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$
- Câu 5:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .                      B.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .                      C.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .                      D.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .
- Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 2. Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ .                      B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .                      C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ .                      D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .
- Câu 7:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8, AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .                      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .                      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .
- Câu 8:** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .                      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .                      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .
- Câu 9:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .                      B.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 \sqrt{2}$ .                      C.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ .                      D.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .
- Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.
- A.  $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .                      B.  $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ .                      C.  $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$ .                      D.  $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ .
- Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(2;0), B(0;2)$  và  $C(0;7)$ . Tìm tọa độ đỉnh thứ tư  $D$  của hình thang cân  $ABCD$ .
- A.  $D(7;0)$ .                      B.  $D(7;0), D(2;9)$ .                      C.  $D(0;7), D(9;2)$ .                      D.  $D(9;2)$ .



DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Cho  $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ . Khi đó  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

- Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vector  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$  và  $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$ . Tìm  $k$  để vector  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .
- Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2;4)$  và  $B(8;4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc trục hoành sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .
- Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2;4)$ ,  $B(-3;1)$ ,  $C(3;-1)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $A'$  vẽ từ đỉnh  $A$  của tam giác đã cho.

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vector  $\vec{a} = (-2;3)$ ,  $\vec{b} = (4;1)$  và  $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$  với  $k, m \in \mathbb{R}$ . Biết rằng vector  $\vec{c}$  vuông góc với vector  $(\vec{a} + \vec{b})$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $2k = 2m$                       **B.**  $3k = 2m$                       **C.**  $2k + 3m = 0$                       **D.**  $3k + 2m = 0$ .
- Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vector  $\vec{u} = (3;4)$  và  $\vec{v} = (-8;6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .                      **B.**  $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ . và  $\vec{v}$  cùng phương.  
**C.**  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .                      **D.**  $\vec{u} = -\vec{v}$ .
- Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(7;-3)$ ,  $B(8;4)$ ,  $C(1;5)$  và  $D(0;-2)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$ .                      **B.** Tam giác  $ABC$  đều.  
**C.** Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.                      **D.** Tứ giác  $ABCD$  không nội tiếp đường tròn.
- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1)$ ,  $B(1;3)$  và  $C(1;-1)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?  
**A.** Tam giác  $ABC$  đều.                      **B.** Tam giác  $ABC$  có ba góc đều nhọn.  
**C.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$ .                      **D.** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .
- Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;2)$  và  $B(-3;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc trục tung sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
**A.**  $C(0;6)$ .                      **B.**  $C(5;0)$ .                      **C.**  $C(3;1)$ .                      **D.**  $C(0;-6)$ .
- Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3;0)$ ,  $B(3;0)$  và  $C(2;6)$ . Gọi  $H(a;b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .  
**A.**  $a + 6b = 5$ .                      **B.**  $a + 6b = 6$ .                      **C.**  $a + 6b = 7$ .                      **D.**  $a + 6b = 8$ .
- Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;3)$ ,  $B(2;7)$  và  $C(-3;-8)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $A'$  kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$ .

- A.  $A'(1; -4)$ .      B.  $A'(-1; 4)$ .      C.  $A'(1; 4)$ .      D.  $A'(4; 1)$ .

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0)$ ,  $B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

- A.  $a + 6b = 5$ .      B.  $a + 6b = 6$ .      C.  $a + 6b = 7$ .      D.  $a + 6b = 8$ .

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ . Biết điểm  $M(2; 1)$ ,  $N(3; -2)$  và  $P$  là điểm nằm trên trục  $Oy$ . Tính diện tích tam giác  $MNP$ .

- A.  $\frac{10}{3}$ .      B.  $\frac{5}{3}$ .      C.  $\frac{16}{3}$ .      D.  $\frac{20}{3}$ .

**DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho  $A, B$  là các điểm cố định.  $M$  là điểm di động

- Nếu  $|\overline{AM}| = k$  với  $k$  là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = k$ .
- Nếu  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$
- Nếu  $\overline{MA} \cdot \vec{a} = 0$  với  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$  cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{a}$

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có độ dài bằng  $a$ , vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

a)  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{3a^2}{4}$       b)  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA^2$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $(\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{CB}) \cdot \overline{BC} = 0$

**Câu 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = k$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MA}(\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$  là:

- A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Câu 2:** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MB}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MA} \cdot \overline{BC} = 0$  là:

- A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Câu 4:** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overline{AN} \cdot \overline{AB} = 2a^2$  là:

- A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Câu 5:** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -16$  là:

A. một điểm.                      B. đường thẳng.                      C. đoạn thẳng.                      D. đường tròn.

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

A.  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $R = \frac{a}{4}$ .                      C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh 18cm. Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là

A. Tập rỗng.                      B. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2$  cm.  
C. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3$  cm.                      D. Một đường thẳng.

**DẠNG 6: CỰC TRỊ.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(-2;6)$ ,  $C(9;8)$ .

- a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- b) Xác định tọa độ điểm  $H$  thuộc  $BC$  sao cho  $AH$  ngắn nhất.

**Câu 2.** Cho điểm  $A(2;1)$ . Lấy điểm  $B$  nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm  $C$  trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm tọa độ  $B, C$  để tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;-1)$  và  $B(3;2)$ . Tìm  $M$  thuộc trục tung sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất.

A.  $M(0;1)$ .                      B.  $M(0;-1)$ .                      C.  $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ .                      D.  $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 2:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2;-3)$ ,  $B(3;-4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho chu vi tam giác  $AMB$  nhỏ nhất.

A.  $M\left(\frac{18}{7};0\right)$ .                      B.  $M(4;0)$ .                      C.  $M(3;0)$ .                      D.  $M\left(\frac{17}{7};0\right)$ .

**Câu 3:** Cho  $M(-1;-2)$ ,  $N(3;2)$ ,  $P(4;-1)$ . Tìm  $E$  trên  $Ox$  sao cho  $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$  nhỏ nhất.

A.  $E(4;0)$ .                      B.  $E(3;0)$ .                      C.  $E(1;0)$ .                      D.  $E(2;0)$ .

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### I LÝ THUYẾT.

#### I. ĐỊNH NGHĨA

##### 1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

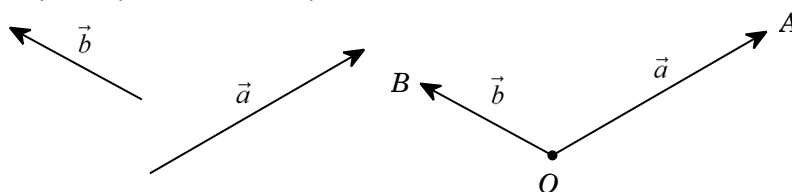
Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  là góc giữa hai tia  $OA$  và  $OB$  và được kí hiệu là  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \widehat{AOB}$

Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  là một số, kí hiệu  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  và được tính bởi công thức:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$$

##### 2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý

**Góc giữa hai vectơ:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .



**Chú ý.** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**Tích vô hướng của hai vectơ:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng vectơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Chú ý**

- Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

## II. TÍNH CHẤT

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$  ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

**Nhận xét.** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ .

## III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

### 1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có:  $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$

Do đó độ dài đoạn thẳng được tính  $AB = \sqrt{|\overline{AB}|^2}$ .

### 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**Câu 1:** Nếu hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overline{MN} \cdot \overline{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $MN = 4$ .                      **B.**  $MN = 2$ .                      **C.**  $MN = 16$ .                      **D.**  $MN = 256$ .

**Lời giải**

$\overline{MN} \cdot \overline{NM} = -4 = |\overline{MN}| \cdot |\overline{NM}| \cdot \cos 180^\circ = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2$ . **Chọn A**

**Câu 2:** Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

**B.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

**C.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

**D.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 3:** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;

b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;

c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;

d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**Lời giải**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$  từ đó suy ra

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 30 \cdot \cos 120^\circ = -15$$

$$\text{c) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 0^\circ = 6$$

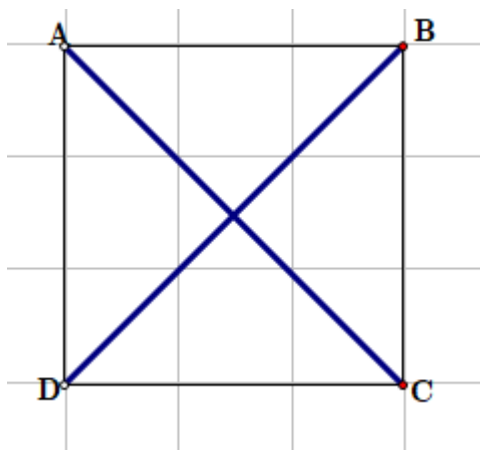
$$\text{d) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 180^\circ = -6$$

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các tích vô hướng sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**

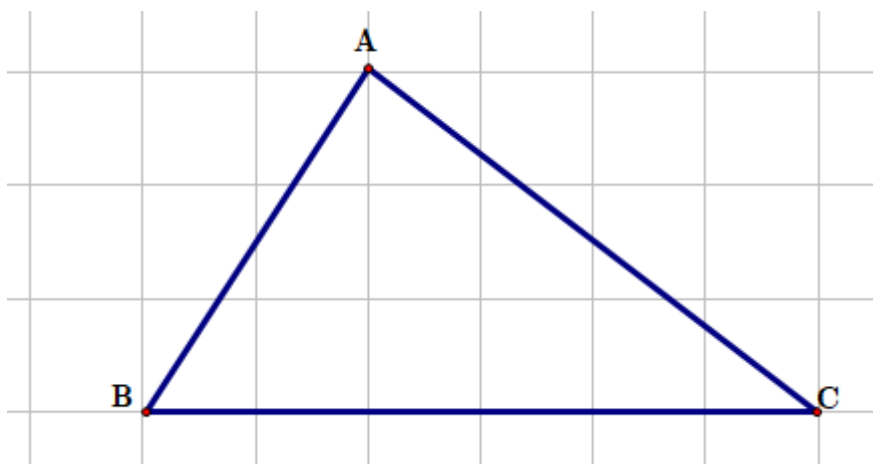


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

b)  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos 90^\circ = 0$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:  $AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = 0$

**Lời giải**

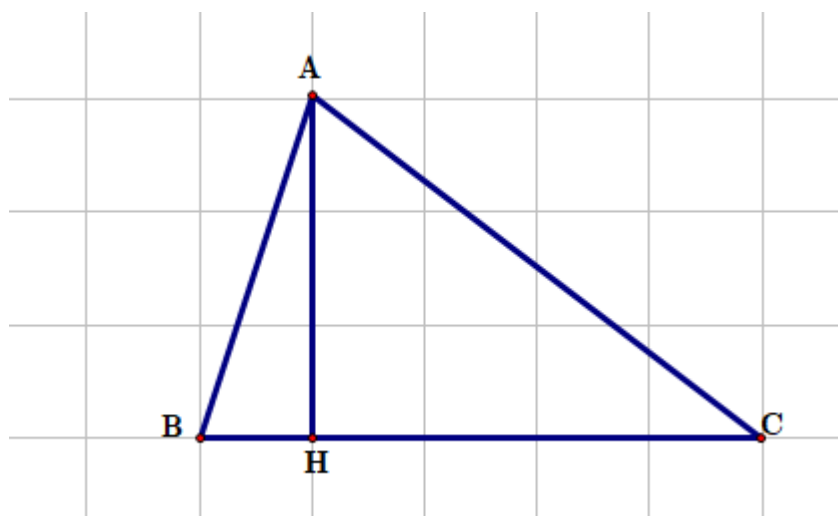


Ta có  $AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = AB^2 + \vec{AB} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA}) = AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BA} = AB^2 - AB^2 = 0$  (đpcm)

**Câu 6:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$ .      b)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}$ .

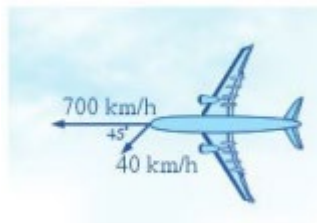
**Lời giải**



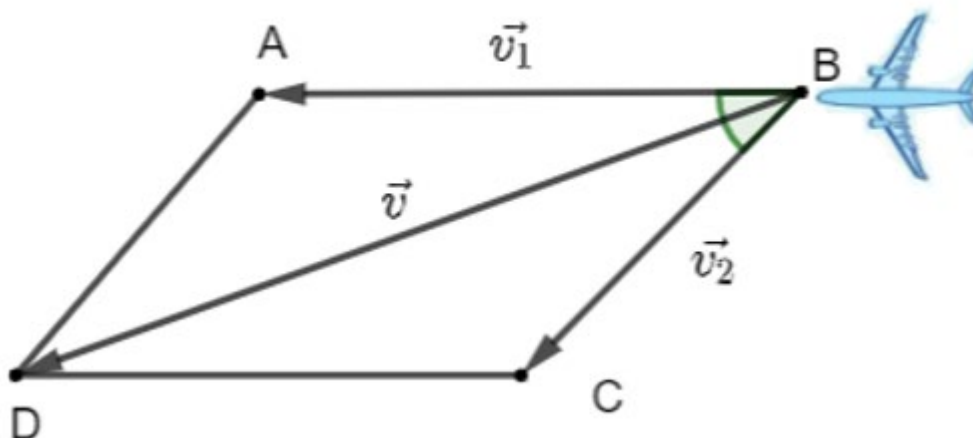
a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH} \Leftrightarrow \vec{AH} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = \vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0$  (đpcm)

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{BC} \cdot (\vec{AB} - \vec{HB}) = \vec{BC} \cdot \vec{AH} = 0$  (đpcm)

**Câu 7:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700\text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40\text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Lời giải



Khi đó ta có:  $ABCD$  là hình bình hành có  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ .

Suy ra:  $\widehat{DAB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;  $AD = |\vec{v}_2| = 40$ ,  $AB = |\vec{v}_1| = 700$ .

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng  $BD$ , đây chính là độ dài vector  $\vec{v}$ .

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABD$ , ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos A \\ &= 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ \approx 531197,98 \end{aligned}$$

Suy ra  $BD \approx 728,83(km/h)$ .

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là  $728,83km/h$ .

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thỏa mãn  $\vec{AD} = \frac{7}{12} \vec{AC}$ .

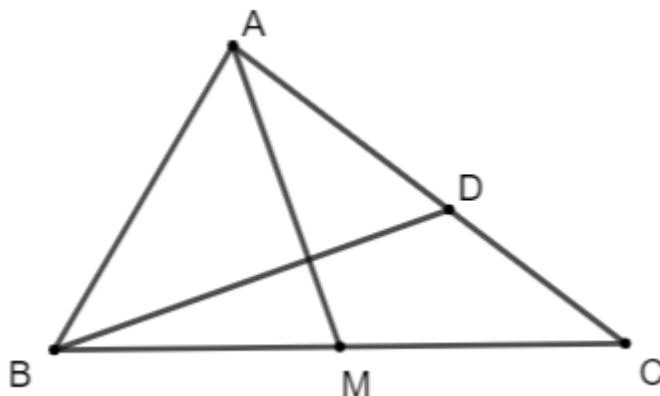
a) Tính  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

b) Biểu diễn  $\vec{AM}, \vec{BD}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

Lời giải





a) Ta có:  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$ .

b) + Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên với điểm  $A$  ta có:

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AM} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Do đó:  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$

+ Ta có:  $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = (-\overline{AB}) + \overline{AD}$ . Mà  $\overline{AD} = \frac{7}{12}\overline{AC}$

Nên  $\overline{BD} = (-\overline{AB}) + \frac{7}{12}\overline{AC} = -\overline{AB} + \frac{7}{12}\overline{AC}$

Vậy  $\overline{BD} = -\overline{AB} + \frac{7}{12}\overline{AC}$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{BD} &= \left( \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \right) \cdot \left( -\overline{AB} + \frac{7}{12}\overline{AC} \right) = \frac{-1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{7}{24}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB} + \frac{7}{24}\overline{AC}^2 \\ &= \frac{-1}{2} \cdot AB^2 + \frac{7}{24} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{7}{24} \cdot AC^2 = \frac{-1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 = 0 \end{aligned}$$

Suy ra:  $\overline{AM} \cdot \overline{BD} = 0$

Vậy  $AM \perp BD$ .

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

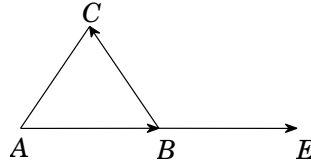
#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...

**2** BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

Lời giải



Vẽ  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ . Khi đó  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180 - \widehat{CBA} = 120^\circ$

$$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

**3** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hệ thức nào sau đây sai?

- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ .    B.  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$ .    C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ .    **D.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$ .**

Lời giải

**Chọn D**

(Bạn đọc tự vẽ hình)

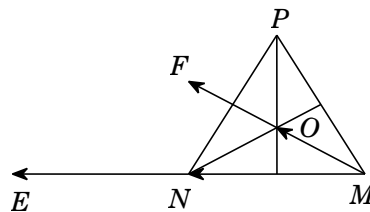
$$\text{Vì } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

**Câu 2:** Cho  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $MNP$ . Góc nào sau đây bằng  $120^\circ$ ?

- A.  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$ .**    B.  $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$ .    C.  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$ .    D.  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ .

Lời giải

**Chọn A**



$$\bullet \text{ Vẽ } \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MN}. \text{ Khi đó } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NP})$$

$$= \widehat{PNE} = 180^\circ - \widehat{MNP} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

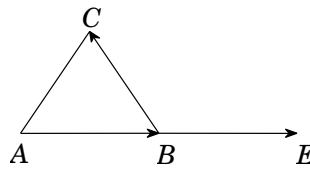
- Vẽ  $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{MO}$ . Khi đó  $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ON}) = \widehat{NOF} = 60^\circ$
- Vì  $MN \perp OP \Rightarrow (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}) = 90^\circ$ .
- Ta có  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \widehat{NMP} = 60^\circ$ .

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ .

- A.  $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $P = \frac{3}{2}$ .      C.  $P = -\frac{3}{2}$ .      D.  $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải

Chọn C



Vẽ  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ . Khi đó  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180^\circ - \widehat{CBA} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có  $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$ .

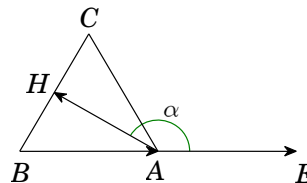
$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}.$$

**Câu 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH$  Tính  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$ .

- A.  $30^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $120^\circ$ .      D.  $150^\circ$ .

Lời giải

Chọn D



Vẽ  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$ .

Khi đó  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{HAE} = \alpha$  (hình vẽ)

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

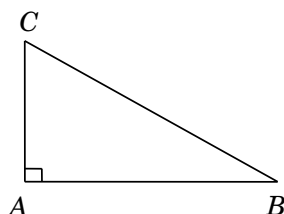
**Câu 5:** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có  $BC = 2AC$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ .

A.  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$ .    **B.  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$ .**

C.  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    D.  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Xác định được  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB}$

Ta có  $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$

Vậy  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ .

A.  $180^\circ$ .

**B.  $360^\circ$ .**

C.  $270^\circ$ .

D.  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có 
$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases}$$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 540^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  với  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ .

A.  $120^\circ$

**B.  $360^\circ$**

C.  $270^\circ$

**D.  $240^\circ$**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overline{AB}, \overline{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overline{BC}, \overline{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow (\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA}) &= 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 360^\circ - 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ \end{aligned}$$

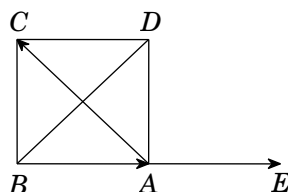
**Câu 8:** Cho hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA})$ .

**A.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .    **B.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**C.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = 0$ .    **D.**  $\cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Vẽ  $\overline{AE} = \overline{BA}$ .

$$\text{Khi đó } \cos(\overline{AC}, \overline{BA}) = \cos(\overline{AC}, \overline{AE}) = \cos \widehat{CAE} = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 9:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  Tính tổng  $(\overline{AB}, \overline{DC}) + (\overline{AD}, \overline{CB}) + (\overline{CO}, \overline{DC})$ .

**A.**  $45^\circ$

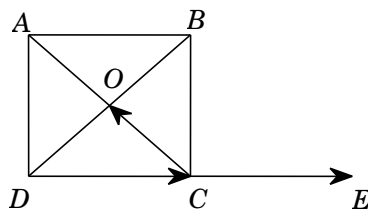
**B.**  $405^\circ$

**C.**  $315^\circ$

**D.**  $225^\circ$

**Lời giải**

**Chọn C**



• Ta có  $\overline{AB}, \overline{DC}$  cùng hướng nên  $(\overline{AB}, \overline{DC}) = 0^\circ$ .

.

• Ta có  $\overline{AD}, \overline{CB}$  ngược hướng nên  $(\overline{AD}, \overline{CB}) = 180^\circ$

• Vẽ  $\overline{CE} = \overline{DC}$ , khi đó

$$(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{OCE} = 135^\circ$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$$

**Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  bằng  $100^\circ$  và có trực tâm  $H$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$ .

A.  $360^\circ$

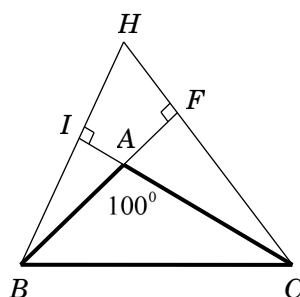
B.  $180^\circ$

C.  $80^\circ$

**D.  $160^\circ$**

**Lời giải**

**Chọn D**



$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{BHA} \\ (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{BHC} \\ (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{CHA} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{BHA} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA}$$

$$= 2\widehat{BHC} = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ.$$

(do tứ giác  $HIAF$  nội tiếp)

### DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

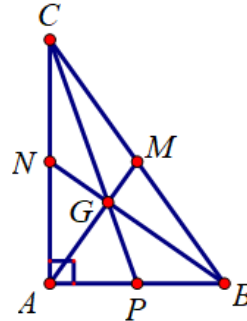
- Dựa vào định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm.

- a) Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- b) Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- c) Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

**Lời giải**



Hình 2.2

- a) \* Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

Mặt khác  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Nên  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

\* Ta có  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có  $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

- b) Cách 1: Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  và từ câu a ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$ . Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$
 Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

- c) Tương tự cách 2 của câu b) vì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$

$$\text{Để thấy tam giác } ABM \text{ đều nên } GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

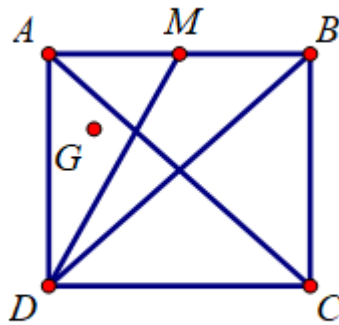
$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}.$$

**Câu 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$       b)  $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

**Lời giải**



Hình 2.3

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$

Mặt khác  $\widehat{ACB} = 45^\circ$  và theo định lý Pitago ta có :

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$

b) Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$  nên  $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có  $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$  và



$$\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CA}) = \frac{1}{2}[\overline{CB} - (\overline{AB} + \overline{AD})] = -\frac{1}{2}(\overline{AB} + 2\overline{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overline{CG} = -\overline{AB} - (\overline{AB} + \overline{AD}) - \frac{1}{2}(\overline{AB} + 2\overline{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overline{AB} + 2\overline{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overline{CA} + \overline{DM} = -(\overline{AB} + \overline{AD}) + \overline{AM} - \overline{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{AD}\right)$$

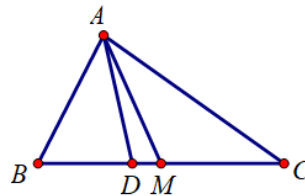
$$\text{Nên } \overline{CG} \cdot (\overline{CA} + \overline{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overline{AB} + 2\overline{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overline{AB} - 2\overline{AD}\right) = \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $A$ .

a) Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ , rồi suy ra  $\cos A$ .

b) Tính  $\overline{AM}^2$  và  $\overline{AD}^2$

**Lời giải**



Hình 2.3

$$\text{a) Ta có } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}[\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - (\overline{AB} - \overline{AC})^2] = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Mặt khác } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{b) * Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\text{Suy ra } \overline{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2)$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) \text{ nên}$$

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$\text{* Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Suy ra  $\overline{BD} = \frac{BD}{DC} \overline{DC} = \frac{b}{c} \overline{DC}$  (\*)

Mặt khác  $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$  và  $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD}$  thay vào (\*) ta được

$$\overline{AD} - \overline{AB} = \frac{b}{c} (\overline{AC} - \overline{AD}) \Leftrightarrow (b+c) \overline{AD} = b \overline{AB} + c \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overline{AD}^2 = (b \overline{AB})^2 + 2bc \overline{AB} \overline{AC} + (c \overline{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overline{AD}^2 = b^2 c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 b^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a)$$

Hay  $\overline{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$

**Nhận xét :** Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh  $A$  là  $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vector  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .      **C.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng nên  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 2:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.**  $\alpha = 180^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 0^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 90^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Mà theo giả thiết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ , suy ra  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

**Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.**  $\alpha = 30^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 45^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 60^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

**Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và hai vectơ  $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau. Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $\alpha = 90^\circ$ .

**B.  $\alpha = 180^\circ$ .**

C.  $\alpha = 60^\circ$ .

D.  $\alpha = 45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

**Câu 5:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$

B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

**C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$**

D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số  $\frac{1}{2}$  và  $\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right) \cdot \frac{1}{4}$  nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right) \quad \text{Chọn C}$$

• A đúng, vì  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng, vì  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$$

**Câu 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$

**D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$**

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  là góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ .

Do đó  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = a^2$       **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Xác định được góc  $(\overline{AB}, \overline{BC})$  là góc ngoài của góc  $\widehat{B}$  nên  $(\overline{AB}, \overline{BC}) = 120^\circ$

Do đó  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

**Câu 8:** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} a^2$       **B.**  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = -\frac{1}{2} a^2$       **C.**  $\overline{GA} \cdot \overline{GB} = \frac{a^2}{6}$       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = \frac{1}{2} a^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc  $(\overline{AB}, \overline{AC})$  là góc  $\widehat{A}$  nên  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = 60^\circ$

Do đó  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow$  **A đúng.**

- Xác định được góc  $(\overline{AC}, \overline{CB})$  là góc ngoài của góc  $\widehat{C}$  nên  $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 120^\circ$

Do đó  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overline{AC}, \overline{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \longrightarrow$  **B đúng.**

- Xác định được góc  $(\overline{GA}, \overline{GB})$  là góc  $\widehat{AGB}$  nên  $(\overline{GA}, \overline{GB}) = 120^\circ$

Do đó  $\overline{GA} \cdot \overline{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overline{GA}, \overline{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6} \longrightarrow$  **C sai. Chọn C**

- Xác định được góc  $(\overline{AB}, \overline{AG})$  là góc  $\widehat{GAB}$  nên  $(\overline{AB}, \overline{AG}) = 30^\circ$

Do đó  $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow$  **D đúng.**

**Câu 9:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.**  $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$       **B.**  $(\overline{AB}, \overline{HA}) = 150^\circ$       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  là góc ngoài của góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và có  $AB = AC = a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$       **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$       **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  là góc ngoài của góc  $\hat{B}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$$

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**A.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       **B.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       **C.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       **D.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

**Cách khác.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  suy ra  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

**Câu 12:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CA = 5$  cm. Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

**A.**  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       **B.**  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       **C.**  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       **D.**  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $AB + BC = CA \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và  $AC \rightarrow I(4; -1)$ . nằm giữa  $A, C$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

**Cách khác.** Ta có  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

**A.**  $P = b^2 - c^2$       **B.**  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       **C.**  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       **D.**  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= (\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) \\ &= (\overline{AC} + \overline{AB}) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2 \end{aligned}$$

**Câu 14:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overline{AC} \cdot (\overline{CD} + \overline{CA})$

- A.**  $P = -1$                       **B.**  $P = 3a^2$                       **C.**  $P = -3a^2$                       **D.**  $P = 2a^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết suy ra  $AC = a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overline{AC} \cdot (\overline{CD} + \overline{CA}) = \overline{AC} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{CA} = -\overline{CA} \cdot \overline{CD} - \overline{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overline{CA}, \overline{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2 \end{aligned}$$

**Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(3; -1)$ ,  $B(2; 10)$ ,  $C(-4; 2)$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

- A.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 40$                       **B.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -40$                       **C.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 26$                       **D.**  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -26$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\overline{AB} = (-1; 11)$ ,  $\overline{AC} = (-7; 3)$ .

Suy ra  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$  Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; -1)$  và  $B(2; 10)$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AO} \cdot \overline{OB}$

- A.**  $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = -4$  .                      **B.**  $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = 0$  .                      **C.**  $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = 4$  .                      **D.**  $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = 16$  .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\overline{AO} = (-3; 1)$ ,  $\overline{OB} = (2; 10)$ . Suy ra  $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$ .

**Câu 16:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$  .                      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$  .                      **C.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$  .                      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$  .

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết suy ra  $\vec{a} = (4; 6)$  và  $\vec{b} = (3; -7)$

Suy ra  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$

**Câu 17:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-3; 2)$  và  $\vec{b} = (-1; -7)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{c}$  biết  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$  và  $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

- A.**  $\vec{c} = (-1; -3)$                       **B.**  $\vec{c} = (-1; 3)$                       **C.**  $\vec{c} = (1; -3)$                       **D.**  $\vec{c} = (1; 3)$

Lời giải

**Chọn B**

Gọi  $\vec{c} = (x; y)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1; 3)$$

**Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 3)$  và  $\vec{c} = (2; 3)$ .

Tính  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ .

A.  $P = 0$

**B.  $P = 18$**

C.  $P = 20$

D.  $P = 28$

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$ . Suy ra  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$ .

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 0)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$       **B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$**       C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$       D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 20:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-2; -1)$  và  $\vec{b} = (4; -3)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

**A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$**       B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

**Câu 21:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $\alpha = 90^\circ$

B.  $\alpha = 60^\circ$

**C.  $\alpha = 45^\circ$**

D.  $\alpha = 30^\circ$

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1+49}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$$

**Câu 22:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{x} = (1; 2)$  và  $\vec{y} = (-3; -1)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$

- A.**  $\alpha = 45^\circ$                       **B.**  $\alpha = 60^\circ$                       **C.**  $\alpha = 90^\circ$                       **D.**  $\alpha = 135^\circ$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 135^\circ$$

**Câu 23:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; 1)$  và  $C(5; -1)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$

- A.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$     **B.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
**C.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$     **D.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$  và  $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$ .

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

**Câu 24:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(6; 0)$ ,  $B(3; 1)$  và  $C(-1; -1)$ . Tính số đo góc  $B$  của tam giác đã cho.

- A.**  $15^\circ$                       **B.**  $60^\circ$                       **C.**  $120^\circ$                       **D.**  $135^\circ$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overrightarrow{BA} = (3; -1)$  và  $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$ . Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \widehat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$$

**Câu 25:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(-8; 0)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(2; 0)$  và  $D(-3; -5)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  phụ nhau.                      **B.** Góc  $\widehat{BCD}$  là góc nhọn.  
**C.**  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$                       **D.** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  bù nhau.

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $\overline{AB} = (8; 4)$ ,  $\overline{AD} = (5; -5)$ ,  $\overline{CB} = (-2; 4)$ ,  $\overline{CD} = (-5; 5)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cos(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\overline{CB}, \overline{CD}) = \frac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{AD}) + \cos(\overline{CB}, \overline{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

**DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.**



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức  $AB^2 = \overline{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.



**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng :  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = IM^2 - IA^2$

**Lời giải**

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{IM}^2 - \overline{IA}^2$

Để làm xuất hiện  $\overline{IM}$ ,  $\overline{IA}$  ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm  $I$  vào ta được

$$\begin{aligned} VT &= (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) = (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} - \overline{IA}) \\ &= \overline{IM}^2 - \overline{IA}^2 = VP \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

**Câu 2.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  bất kì. Chứng minh rằng:  $\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0$  (\*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{DA} \cdot (\overline{DC} - \overline{DB}) + \overline{DB} \cdot (\overline{DA} - \overline{DC}) + \overline{DC} \cdot (\overline{DB} - \overline{DA}) \\ &= \overline{DA} \cdot \overline{DC} - \overline{DA} \cdot \overline{DB} + \overline{DB} \cdot \overline{DA} - \overline{DB} \cdot \overline{DC} + \overline{DC} \cdot \overline{DB} - \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 0 \end{aligned}$$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  (1)

Từ đẳng thức (\*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$  suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

**Câu 3.** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng :  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

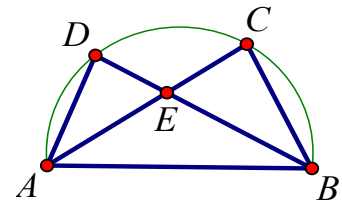
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nên  $\widehat{ADB} = 90^\circ, \widehat{ACB} = 90^\circ$

Suy ra  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Do đó  $VT = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB}^2 = VP$  (đpcm).



Hình 2.4

**Câu 4.** Cho tam giác ABC có  $BC = a, CA = b, AB = c$  và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng  $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) + \\ + bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) + ca(IA^2 + IC^2 - CA^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ba + bc)IB^2 + \\ + (c^2 + ca + cb)IC^2 - (abc^2 + ab^2c + a^2bc) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2) = (a + b + c)abc$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = abc \quad (\text{đpcm}).$$



### **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Cho tam giác ABC có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .    **B.**  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .    **D.**  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Khi đó  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$

**Câu 2:** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là

**A.** tam giác  $OAB$  đều.    **B.** tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .

**C.** tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .

**D.** tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$

**Câu 3:** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

**A.**  $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .    **B.**  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

**C.**  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$ .    **D.**  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$     **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$     **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$     **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

**Câu 5:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .      **B.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .      **C.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .      **D.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

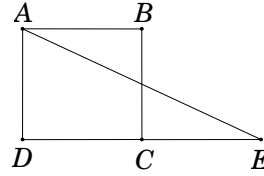
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $C$  là trung điểm của  $DE$  nên  $DE = 2a$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$



**Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 2. Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ .      **B.**  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .      **C.**  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ .      **D.**  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

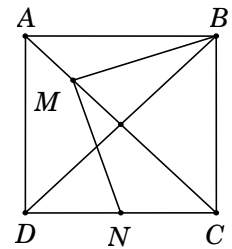
$$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} - \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \left( \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left( \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{16} (3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{16} (0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



**Câu 7:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

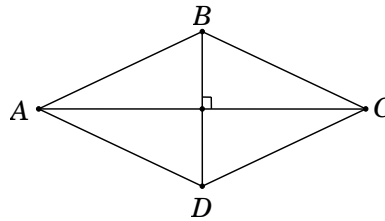
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

**Câu 8:** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .

Lời giải

**Chọn D**



Gọi  $O = AC \cap BD$ , giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

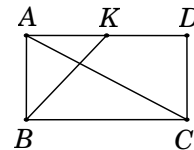
**Câu 9:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      **B.**  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .      **C.**  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .      **D.**  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ .



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left( \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left( \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2} (a\sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  là góc ngoài của góc  $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

**Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-4;1)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(2;-2)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

- A.**  $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .      **B.**  $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ .      **C.**  $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$ .      **D.**  $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overline{AI} = (x+4; y-1) \\ \overline{BI} = (x-2; y-4) \\ \overline{CI} = (x-2; y+2) \end{cases}$$

$$\text{Do } I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ nên } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = (x-2)^2 + 9 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(2;0)$ ,  $B(0;2)$  và  $C(0;7)$ . Tìm tọa độ đỉnh thứ tư  $D$  của hình thang cân  $ABCD$ .

**A.**  $D(7;0)$ .      **B.**  $D(7;0)$ ,  $D(2;9)$ .      **C.**  $D(0;7)$ ,  $D(9;2)$ .      **D.**  $D(9;2)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Để tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi  $D(x; y)$ .

$$\bullet \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overline{CD} = k\overline{AB} \text{ (với } k \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (x-0; y-7) = (-2k; 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 2k + 7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AD} = (x-2; y) \Rightarrow AD = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ \overline{BC} = (0;5) \Rightarrow BC = 5 \end{cases} \longrightarrow AD = BC \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } (-2k-2)^2 + (2k+7)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \text{ (loại)} \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases} \longrightarrow D(7;0).$$

$$\bullet \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \neq BC \end{cases}. \text{ Làm tương tự ta được } D = (2;9).$$

Vậy  $D(7;0)$  hoặc  $D(2;9)$ .

#### DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.



#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho  $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ . Khi đó  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$  và  $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$ . Tìm  $k$  để vectơ  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra  $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right), \vec{v} = (k; -4)$ .

Yêu cầu bài toán:  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$ .

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2; 4)$  và  $B(8; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc trục hoành sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

**Lời giải**

Ta có  $C \in Ox$  nên  $C(c; 0)$  và  $\begin{cases} \overline{CA} = (-2 - c; 4) \\ \overline{CB} = (8 - c; 4) \end{cases}$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2 - c) \cdot (8 - c) + 4 \cdot 4 = 0$

$\Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \rightarrow C(6; 0) \\ c = 0 \rightarrow C(0; 0) \end{cases}$ .

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; 4), B(-3; 1), C(3; -1)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $A'$  vẽ từ đỉnh  $A$  của tam giác đã cho.

**Lời giải**

Gọi  $A'(x; y)$ . Ta có  $\begin{cases} \overline{AA'} = (x - 2; y - 4) \\ \overline{BC} = (6; -2) \\ \overline{BA'} = (x + 3; y - 1) \end{cases}$ .

Vì  $A'$  là chân đường cao vẽ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  nên

$\begin{cases} \overline{AA'} \perp \overline{BC} \\ B, C, A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BA'} = k\overline{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2) \cdot 6 + (y - 4) \cdot (-2) = 0 \\ \frac{x + 3}{6} = \frac{y - 1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

- Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-2; 3)$ ,  $\vec{b} = (4; 1)$  và  $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$  với  $k, m \in \mathbb{R}$ . Biết rằng vectơ  $\vec{c}$  vuông góc với vectơ  $(\vec{a} + \vec{b})$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $2k = 2m$                       B.  $3k = 2m$                       **C.  $2k + 3m = 0$**                       D.  $3k + 2m = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4) \end{cases}.$$

$$\text{Để } \vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0.$$

- Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (-8; 6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .                      B.  $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$  và  $\vec{v}$  cùng phương.
- C.  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .**                      D.  $\vec{u} = -\vec{v}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0 \text{ suy ra } \vec{u} \text{ vuông góc với } \vec{v}.$$

- Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(7; -3)$ ,  $B(8; 4)$ ,  $C(1; 5)$  và  $D(0; -2)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ .                      B. Tam giác  $ABC$  đều.
- C. Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.**                      D. Tứ giác  $ABCD$  không nội tiếp đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AB} = (1; 7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2} \\ \overline{BC} = (-7; 1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2} \\ \overline{CD} = (-1; -7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2} \\ \overline{DA} = (7; -1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Lại có } \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1(-7) + 7 \cdot 1 = 0 \text{ nên } AB \perp BC.$$

Từ đó suy ra  $ABCD$  là hình vuông.

- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 1)$ ,  $B(1; 3)$  và  $C(1; -1)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Tam giác  $ABC$  đều.                      B. Tam giác  $ABC$  có ba góc đều nhọn.
- C. Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$ .                      **D. Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $\overline{AB} = (2; 2)$ ,  $\overline{BC} = (0; -4)$  và  $\overline{AC} = (2; -2)$ .

Suy ra  $\begin{cases} AB = AC = 2\sqrt{2} \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$ . Vậy tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

**Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 2)$  và  $B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc trục tung sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A.**  $C(0; 6)$ .      **B.**  $C(5; 0)$ .      **C.**  $C(3; 1)$ .      **D.**  $C(0; -6)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $C \in Oy$  nên  $C(0; c)$  và  $\begin{cases} \overline{AB} = (-4; -1) \\ \overline{AC} = (-1; c-2) \end{cases}$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$ .

Vậy  $C(0; 6)$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0)$ ,  $B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

- A.**  $a + 6b = 5$ .      **B.**  $a + 6b = 6$ .      **C.**  $a + 6b = 7$ .      **D.**  $a + 6b = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\begin{cases} \overline{AH} = (a+3; b) & \& \overline{BC} = (-1; 6) \\ \overline{BH} = (a-3; b) & \& \overline{AC} = (5; 6) \end{cases}$ . Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3) \cdot (-1) + b \cdot 6 = 0 \\ (a-3) \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a + 6b = 7.$$

**Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4; 3)$ ,  $B(2; 7)$  và  $C(-3; -8)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $A'$  kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$ .

- A.**  $A'(1; -4)$ .      **B.**  $A'(-1; 4)$ .      **C.**  $A'(1; 4)$ .      **D.**  $A'(4; 1)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $A'(x; y)$ . Ta có  $\begin{cases} \overline{AA'} = (x-4; y-3) \\ \overline{BC} = (-5; -15) \\ \overline{BA'} = (x-2; y-7) \end{cases}$ .

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} AA' \perp BC \\ B, A', C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0 & (1) \\ \overline{BA'} = k \overline{BC} & (2) \end{cases}$$

• (1)  $\Leftrightarrow -5(x-4) - 15(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 13.$

• (2)  $\Leftrightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x - y = -1.$

Giải hệ  $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \longrightarrow A'(1; 4).$

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0)$ ,  $B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

- A.**  $a + 6b = 5.$       **B.**  $a + 6b = 6.$       **C.**  $a + 6b = 7.$       **D.**  $a + 6b = 8.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho khi đó ta có:

$$\overrightarrow{AH}(a+3; b), \overrightarrow{BC}(-1; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -a - 3 + 6b = 0$$

$$\overrightarrow{BH}(a-3; b), \overrightarrow{AC}(5; 6) \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 5a - 15 + 6b = 0$$

Từ đó ta có hệ phương trình  $\begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a + 6b = 7.$

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ . Biết điểm  $M(2; 1)$ ,  $N(3; -2)$  và  $P$  là điểm nằm trên trục  $Oy$ . Tính diện tích tam giác  $MNP$ .

- A.**  $\frac{10}{3}.$       **B.**  $\frac{5}{3}.$       **C.**  $\frac{16}{3}.$       **D.**  $\frac{20}{3}.$

**Lời giải**

**Chọn A**

$P$  nằm trên  $Oy \Rightarrow P(0; p)$  mà  $MNP$  vuông tại  $M \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$

$$\Leftrightarrow -2 - 3p + 3 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \frac{2\sqrt{10}}{3}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{10} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot \sqrt{10} = \frac{10}{3}.$$

**DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho  $A, B$  là các điểm cố định.  $M$  là điểm di động

- Nếu  $|\overline{AM}| = k$  với  $k$  là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = k$ .
- Nếu  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$
- Nếu  $\overline{MA} \cdot \vec{a} = 0$  với  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$  cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{a}$

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có độ dài bằng  $a$ , vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

a)  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{3a^2}{4}$       b)  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA^2$

**Lời giải**

a) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  ta có

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{3a^2}{4} &\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) = \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overline{IB} = -\overline{IA}\text{)} \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI = a \end{aligned}$$

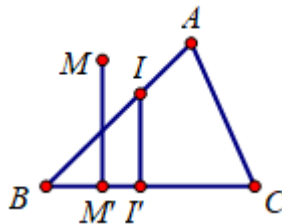
Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R = a$ .

b) Ta có  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA}^2$   
 $\Leftrightarrow \overline{MA} \cdot (\overline{MA} - \overline{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{BA} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{BA}$

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $AB$  tại  $A$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $(\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{CB}) \cdot \overline{BC} = 0$

**Lời giải**



Gọi  $I$  là điểm xác định bởi  $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0}$

Khi đó  $(\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{CB}) \cdot \overline{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[ (\overline{MI} + \overline{IA}) + 2(\overline{MI} + \overline{IB}) \right] \cdot \overline{BC} = 3BC^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI} \cdot \overline{BC} = BC^2$$

Gọi  $M', I'$  lần lượt là hình chiếu của  $M, I$  lên đường thẳng  $BC$  Theo công thức hình chiếu ta

$$\text{có } \overline{MI} \cdot \overline{BC} = \overline{M'I'} \cdot \overline{BC} \text{ do đó } \overline{M'I'} \cdot \overline{BC} = BC^2$$

Vì  $BC^2 > 0$  nên  $\overline{M'I'}, \overline{BC}$  cùng hướng suy ra

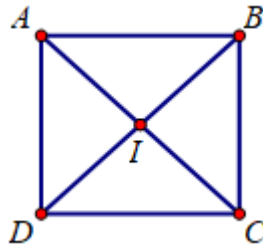
$$\overline{M'I'} \cdot \overline{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$$

Do  $I$  cố định nên  $I'$  cố định suy ra  $M'$  cố định.

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $M'$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = k$

**Lời giải**



Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \overline{MA} \cdot \overline{MC} &= (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IC}) \\ &= MI^2 + \overline{MI}(\overline{IC} + \overline{IA}) + \overline{IA} \cdot \overline{IC} \\ &= MI^2 + \overline{IA} \cdot \overline{IC} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } \overline{MB} \cdot \overline{MD} = MI^2 + \overline{IB} \cdot \overline{ID}$$

$$\text{Nên } \overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overline{IB} \cdot \overline{ID} + \overline{IA} \cdot \overline{IC} = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu  $k < -a^2$  : Tập hợp điểm  $M$  là tập rỗng

Nếu  $k = -a^2$  thì  $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$  suy ra tập hợp điểm  $M$  là điểm  $I$

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

suy ra tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$ .



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  là:

- A. một điểm.                      B. đường thẳng.                      C. đoạn thẳng.                      D. đường tròn.

Lời giải

**Chọn D**

Gọi  $I$  là trung điểm  $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ .

Ta có  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$ . (\*)

Biểu thức (\*) chứng tỏ  $MA \perp MI$  hay  $M$  nhìn đoạn  $AI$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AI$ .

**Câu 2:** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm.                      B. đường thẳng.                      C. đoạn thẳng.                      D. đường tròn.

Lời giải

**Chọn D**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

Ta có  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$ . (\*)

Biểu thức (\*) chứng tỏ  $MB \perp MG$  hay  $M$  nhìn đoạn  $BG$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BG$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$  là:

- A. một điểm.                      B. đường thẳng.                      C. đoạn thẳng.                      D. đường tròn.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$ .

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 4:** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$  là:

- A. một điểm.                      B. đường thẳng.                      C. đoạn thẳng.                      D. đường tròn.

Lời giải

**Chọn B**

Gọi  $C$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $B$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ .

Suy ra  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2\overline{AB}^2 = 2a^2$ .

Kết hợp với giả thiết, ta có  $\overline{AN} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

$\Leftrightarrow \overline{AB}(\overline{AN} - \overline{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB$ .

Vậy tập hợp các điểm  $N$  là đường thẳng qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

- Câu 5:** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -16$  là:  
**A.** một điểm.                      **B.** đường thẳng.                      **C.** đoạn thẳng.                      **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \longrightarrow \overline{IA} = -\overline{IB}$ .

Ta có  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) = (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} - \overline{IA})$

$= \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .

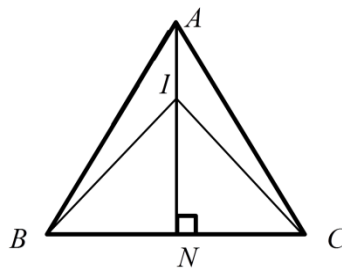
Theo giả thiết, ta có  $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I$ .

- Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

- A.**  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .                      **B.**  $R = \frac{a}{4}$ .                      **C.**  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.**  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $N$  là trung điểm đoạn  $BC$ .

Gọi  $I$  là điểm thỏa:  $4\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overline{IA} + 2\overline{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{IA} + \overline{IN} = \vec{0}$ , nên điểm  $I$  thuộc đoạn thẳng  $AN$  sao cho  $IN = 2IA$ .

Khi đó:  $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , và  $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$ .

Ta có:  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 + (\overline{MI} + \overline{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$ .

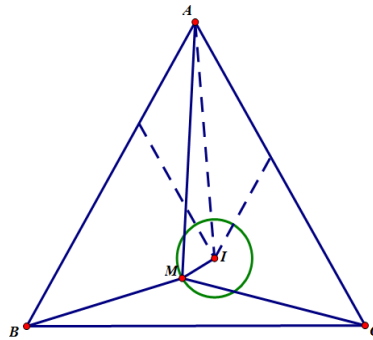
$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh 18cm. Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$  là

- A.** Tập rỗng.                      **B.** Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2$  cm.  
**C.** Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3$  cm.    **D.** Một đường thẳng.

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có  $|\overline{MA} - \overline{MB}| = |\overline{AB}| = 18$ .

Dựng điểm  $I$  thỏa mãn  $2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 4\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{4}{9}\overline{AC}$ .

Khi đó:  $|2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC}| = |\overline{MA} - \overline{MB}| \Leftrightarrow 9|\overline{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$ .

Do đó tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn cố định có bán kính  $R = 2$  cm.

**DẠNG 6: CỰC TRỊ.**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(-2;6)$ ,  $C(9;8)$ .

- a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
 b) Xác định tọa độ điểm  $H$  thuộc  $BC$  sao cho  $AH$  ngắn nhất.

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB}(-3;4), \overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$

Do đó  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  hay tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

b)  $AH$  khi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$

Gọi  $H(x; y)$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$ .

Ta có  $\overrightarrow{AH}(x-1; y-2), \overrightarrow{BH}(x+2; y-6), \overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$

Hay  $11x + 2y - 15 = 0$  (1)

Mặt khác  $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương nên  $\frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $x = \frac{1}{5}, y = \frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của  $A$  lên  $BC$  là  $H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$ .

**Câu 2.** Cho điểm  $A(2;1)$ . Lấy điểm  $B$  nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm  $C$  trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm tọa độ  $B, C$  để tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi  $B(b;0), C(0;c)$  với  $b \geq 0, c > 0$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB}(b-2; -1), \overrightarrow{AC}(-2; c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$

Ta có  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2}$

$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$

Vì  $c > 0$  nên  $-2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$

Xét hàm số  $y = x^2 - 4x + 5$  với  $0 \leq x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên



$x$	0	2	$\frac{5}{2}$
$y$	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^2 - 4x + 5$  với  $0 \leq x < \frac{5}{2}$  là  $y = 5$  khi  $x = 0$ . Do đó diện tích tam giác  $ABC$  lớn nhất khi và chỉ khi  $b = 0$ , suy ra  $c = 5$ .

Vậy  $B(0;0)$ ,  $C(0;5)$  là điểm cần tìm.

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;-1)$  và  $B(3;2)$ . Tìm  $M$  thuộc trục tung sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất.

- A.  $M(0;1)$ .      B.  $M(0;-1)$ .      C.  $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ .      D.  $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $M \in Oy$  nên  $M(0;m)$  và  $\begin{cases} \overline{MA} = (1; -1 - m) \\ \overline{MB} = (3; 2 - m) \end{cases}$ .

Khi đó  $MA^2 + MB^2 = |\overline{MA}|^2 + |\overline{MB}|^2 = 1^2 + (-1 - m)^2 + 3^2 + (2 - m)^2 = 2m^2 - 2m + 15$ .

$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra  $\{MA^2 + MB^2\}_{\min} = \frac{29}{2}$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $m = \frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 2:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2;-3)$ ,  $B(3;-4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho chu vi tam giác  $AMB$  nhỏ nhất.

- A.  $M\left(\frac{18}{7};0\right)$ .      B.  $M(4;0)$ .      C.  $M(3;0)$ .      D.  $M\left(\frac{17}{7};0\right)$ .

Lời giải

**Chọn D**

Cách 1: Do  $M$  trên trục hoành  $\Rightarrow M(x;0)$ ,  $\overline{AB} = (1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$ .

$$\overline{AM} = (x-2;3), \overline{BM} = (x-3;4)$$

Ta có chu vi tam giác  $AMB$ :  $P_{ABM} = \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(3-x)^2 + 4^2} \geq \sqrt{2} + \sqrt{(x-2+3-x)^2 + (3+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow P_{ABM} \geq 6\sqrt{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \frac{x-2}{3-x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; 0\right).$$

Cách 2: Lấy đối xứng  $A$  qua  $Ox$  ta được  $A'(2;3)$ . Ta có  $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $M$  trùng với giao điểm của  $A'B$  với  $Ox$ .

**Câu 3:** Cho  $M(-1;-2)$ ,  $N(3;2)$ ,  $P(4;-1)$ . Tìm  $E$  trên  $Ox$  sao cho  $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$  nhỏ nhất.

**A.**  $E(4;0)$ .                      **B.**  $E(3;0)$ .                      **C.**  $E(1;0)$ .                      **D.**  $E(2;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Do  $E \in Ox \Rightarrow E(a;0)$ .

Ta có:  $\overline{EM} = (-1-a; -2)$ ;  $\overline{EN} = (3-a; 2)$ ;  $\overline{EP} = (4-a; -1)$

Suy ra  $\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP} = (6-3a; -1)$ .

Do đó:  $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}| = \sqrt{(6-3a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(6-3a)^2 + 1} \geq 1$ .

Giá trị nhỏ nhất của  $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$  bằng 1.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $6-3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$ .

Vậy  $E(2;0)$ .

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VECTƠ

## BÀI 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

**Câu 1:** Cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; -1)$ ,  $\vec{v} = (-3; 4)$ . Tích  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  là

- A. 11.                                      B. -10.                                      C. 5.                                      D. -2.

**Câu 2:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 5)$  và  $\vec{b} = (-3; 1)$ . Khi đó, giá trị của  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bằng

- A. -5.                                      B. 1.                                      C. 13.                                      D. -1.

**Câu 3:** Cho  $A(0; 3)$ ;  $B(4; 0)$ ;  $C(-2; -5)$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

- A. 16.                                      B. 9.                                      C. -10.                                      D. -9.

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$  và  $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$ . Tính  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- A.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ .                                      B.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ .                                      C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ .                                      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ .

**Câu 5:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ;  $\vec{v} = (2; -1)$ . Tính biểu thức tọa độ của  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- A.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ .                                      B.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .                                      C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$ .                                      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$ .

**Câu 6:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .                                      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .                                      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  là

- A.  $8a^2$ .                                      B.  $8a$ .                                      C.  $8\sqrt{3}a^2$ .                                      D.  $8\sqrt{3}a$ .

**Câu 8:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$  Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ .

- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ .                                      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = a$ .                                      C.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \frac{a^2}{2}$ .                                      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = a^2$ .

**Câu 9:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .                                      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .

C.  $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$ .                                      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ .

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  và  $AB = a$ . Khi đó  $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$  bằng

**A.**  $-2a^2$ .                      **B.**  $2a^2$ .                      **C.**  $3a^2$ .                      **D.**  $-3a^2$ .

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a; AC = a\sqrt{3}$  và  $AM$  là trung tuyến. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

**A.**  $\frac{a^2}{2}$ .                      **B.**  $a^2$ .                      **C.**  $-a^2$ .                      **D.**  $-\frac{a^2}{2}$ .

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  bằng

**A.**  $-1$ .                      **B.**  $1$ .                      **C.**  $-\frac{1}{2}$ .                      **D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 14:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng

**A.**  $-1$ .                      **B.**  $\frac{1}{2}$ .                      **C.**  $-1$ .                      **D.**  $-\frac{1}{2}$ .

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài đường chéo  $AC$  bằng

**A.**  $\sqrt{5}$ .                      **B.**  $\sqrt{7}$ .                      **C.**  $5$ .                      **D.**  $\frac{7}{2}$ .

**Câu 16:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài đường chéo  $BD$  bằng

**A.**  $\sqrt{3}$ .                      **B.**  $\sqrt{5}$ .                      **C.**  $5$ .                      **D.**  $3$ .

**Câu 17:** Cho các véc tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  thỏa mãn các điều kiện  $|\vec{a}| = x, |\vec{b}| = y$  và  $|\vec{z}| = c$  và  $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ .

Tính  $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

**A.**  $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$ .      **B.**  $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$ .      **C.**  $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$ .      **D.**  $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$ .

**Câu 18:** Cho  $\Delta ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$  bằng

**A.**  $-18$ .                      **B.**  $27$ .                      **C.**  $18$ .                      **D.**  $-27$ .

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B, BC = a\sqrt{3}$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**A.**  $3a^2$ .                      **B.**  $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      **C.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.**  $-3a^2$ .

**Câu 20:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

**A.**  $\sqrt{11}$ .                      **B.**  $\sqrt{13}$ .                      **C.**  $\sqrt{12}$ .                      **D.**  $\sqrt{14}$ .

**Câu 21:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $D; AB = AD = a, CD = 2a$ . Khi đó tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$  bằng

**A.**  $-a^2$ .                      **B.**  $0$ .                      **C.**  $\frac{3a^2}{2}$ .                      **D.**  $\frac{-a^2}{2}$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a; BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**A.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ .      **B.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .      **C.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$ .      **D.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 4$ . Kết quả  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng

**A.**  $16$ .                      **B.**  $0$ .                      **C.**  $4\sqrt{2}$ .                      **D.**  $4$ .

- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 30^\circ, AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overline{AM} \cdot \overline{BM}$ .
- A.  $P = -2$ .                      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .                      C.  $P = 2$ .                      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .
- Câu 25:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overline{AK} = -2\overline{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overline{BK} \cdot \overline{AC}$
- A.  $3a^2$ .                      B.  $6a^2$ .                      C.  $0$ .                      D.  $a^2$ .
- Câu 26:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5, AC=8, BC=7$  thì  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:
- A.  $-20$ .                      B.  $40$ .                      C.  $10$ .                      D.  $20$ .
- Câu 27:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8, AD = 5$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$
- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = 62$ .                      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = -64$ .                      C.  $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = -62$ .                      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = 64$ .

**DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VECTO**

- Câu 28:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .
- A.  $\alpha = 90^\circ$ .                      B.  $\alpha = 0^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 180^\circ$ .
- Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $A(1;2), B(0;4), C(3;1)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  của tam giác  $ABC$  gần với giá trị nào dưới đây?
- A.  $90^\circ$ .                      B.  $36^\circ 52'$ .                      C.  $143^\circ 7'$ .                      D.  $53^\circ 7'$ .
- Câu 30:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  khác vectơ-không thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng:
- A.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .                      B.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .                      C.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$ .                      D.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .
- Câu 31:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.
- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 30^\circ$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .
- Câu 32:** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4;3)$  và  $\vec{b} = (1;7)$ . Số đo góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng
- A.  $45^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .
- Câu 33:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2;5), \vec{b} = (3;-7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 120^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 135^\circ$ .
- Câu 34:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2;1)$  và  $\vec{b} = (3;-6)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng
- A.  $0^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $180^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .
- Câu 35:** Cho hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  là
- A.  $60^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .
- Câu 36:** Cho vectơ  $\vec{a}(1;-2)$ . Với giá trị nào của  $y$  thì vectơ  $\vec{b} = (3;y)$  tạo với vectơ  $\vec{a}$  một góc  $45^\circ$
- A.  $y = -9$ .                      B.  $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ .                      D.  $y = -1$ .

- Câu 37:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$  và hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $120^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC**

- Câu 38:** Tìm x để hai vectơ  $\vec{a} = (x; 2)$  và  $\vec{b} = (2; -3)$  có giá vuông góc với nhau.
- A. 3.                      B. 0.                      C. -3.                      D. 2.
- Câu 39:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (-8; 6)$ . Khẳng định nào đúng?
- A.  $\vec{u} = -\vec{v}$ .                      B.  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .  
C.  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .                      D.  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.
- Câu 40:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 2), B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- A.  $C(6; 0)$ .                      B.  $C(0; 6)$ .                      C.  $C(-6; 0)$ .                      D.  $C(0; -6)$ .
- Câu 41:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$ . Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .
- A.  $(0; 3)$ .                      B.  $(0; -3)$ .                      C.  $(3; 0)$ .                      D.  $(-3; 0)$ .
- Câu 42:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m), m \neq 0$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Xác định  $m$  để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$ .
- A.  $m = -\sqrt{6}$ .                      B.  $m = \pm 3\sqrt{6}$ .                      C.  $m = 3\sqrt{6}$ .                      D.  $m = \pm\sqrt{6}$ .
- Câu 43:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$ . Diện tích  $DABC$  là
- A. 6.                      B.  $6\sqrt{2}$ .                      C. 12.                      D. 9.
- Câu 44:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-1; 3)$  và  $C(3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .
- A.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(2; -4)$ .                      B.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(2; 4)$ .  
C.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(-2; -4)$ .                      D.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(-2; 4)$ .
- Câu 45:** Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm  $A(0; 4), B(3; 4), C(3; 0)$ .
- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .                      C. 5.                      D. 3.
- Câu 46:** Trong mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0); B(-1; 1); C(5; -1)$ . Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là
- A.  $H(-1; -9)$ .                      B.  $H(-8; -27)$ .                      C.  $H(-2; 5)$ .                      D.  $H(3; 14)$ .
- Câu 47:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ ; cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 1), B(1; 3)$  và trọng tâm là  $G\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên tia  $Oy$  sao cho tam giác  $MBC$  vuông tại  $M$ .
- A.  $M(0; -3)$ .                      B.  $M(0; 3)$ .                      C.  $M(0; 4)$ .                      D.  $M(0; -4)$ .

- Câu 48:** Trên hệ trục tọa độ  $xOy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;3)$ ,  $B(2;7)$ ,  $C(-3;-8)$ . Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$  là  
**A.**  $(1;-4)$ .                      **B.**  $(-1;4)$ .                      **C.**  $(1;4)$ .                      **D.**  $(4;1)$ .
- Câu 49:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .  
**A.**  $x = \frac{5a}{12}$ .                      **B.**  $x = \frac{a}{2}$ .                      **C.**  $x = \frac{4a}{5}$ .                      **D.**  $x = \frac{7a}{12}$ .
- Câu 50:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$ . Biết  $A(3;-1), B(-1;2)$  và  $I(1;-1)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ  $(a;b)$ . Tính  $a+3b$ .  
**A.**  $a+3b = \frac{2}{3}$ .                      **B.**  $a+3b = -\frac{4}{3}$ .                      **C.**  $a+3b = 1$ .                      **D.**  $a+3b = -2$ .
- Câu 51:** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overline{AM} = k\overline{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$   
**A.**  $\frac{4}{9}$ .                      **B.**  $\frac{3}{7}$ .                      **C.**  $\frac{1}{3}$ .                      **D.**  $\frac{2}{5}$ .
- Câu 52:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3;0), B(3;0)$  và  $C(2;6)$ . Gọi  $H(a;b)$  là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính  $a+6b$ .  
**A.**  $a+6b = 5$ .                      **B.**  $a+6b = 6$ .                      **C.**  $a+6b = 7$ .                      **D.**  $a+6b = 8$ .
- Câu 53:** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2$  là:  
**A.** Đường tròn đường kính  $BC$ .                      **B.** Đường tròn  $(B; BC)$ .  
**C.** Đường tròn  $(C; CB)$ . **D.** Một đường khác.
- Câu 54:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$  là:  
**A.** Đường tròn đường kính  $AB$ .  
**B.** Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
**C.** Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
**D.** Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .
- Câu 55:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overline{AK} = 3\overline{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overline{KA} + \overline{KB} + 2\overline{KC} = \vec{0}$ .  
 Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overline{MK} + \overline{AK}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}) = 0$ .  
 Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.  
**A.** Đường tròn đường kính  $IJ$ .                      **B.** Đường tròn đường kính  $IK$ .  
**C.** Đường tròn đường kính  $JK$ .                      **D.** Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO**

- Câu 56:** Trong mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ , cho  $\overline{AB} = (6;2)$ . Tính  $|\overline{AB}|$ ?  
**A.**  $|\overline{AB}| = 2\sqrt{10}$ .                      **B.**  $|\overline{AB}| = 20$ .                      **C.**  $AB = 4\sqrt{10}$ .                      **D.**  $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ .
- Câu 57:** Cho hai điểm  $A(1;0)$  và  $B(-3;3)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .  
**A.**  $AB = \sqrt{13}$ .                      **B.**  $AB = 3\sqrt{2}$ .                      **C.**  $AB = 4$ .                      **D.**  $AB = 5$ .

- Câu 58:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1;2); B(-1;1)$ . Điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  thỏa mãn tam giác  $MAB$  cân tại  $M$ . Khi đó độ dài đoạn  $OM$  bằng
- A.  $\frac{5}{2}$ .                                      B.  $\frac{3}{2}$ .                                      C.  $\frac{1}{2}$ .                                      D.  $\frac{7}{2}$ .
- Câu 59:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(2;1)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(-2;-3)$ ,  $D(-2;-1)$ . Xét ba mệnh đề:
- (I)  $ABCD$  là hình thoi.  
 (II)  $ABCD$  là hình bình hành.  
 (III)  $AC$  cắt  $BD$  tại  $M(0;-1)$ .
- Chọn khẳng định đúng
- A. Chỉ (I) đúng.                                      B. Chỉ (II) đúng.  
 C. Chỉ (II) và (III) đúng.                                      D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.
- Câu 60:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$ . Hỏi tọa độ điểm  $I$  tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là cặp số nào?
- A.  $(-2;6)$ .                                      B.  $(0;6)$ .                                      C.  $(0;12)$ .                                      D.  $(2;6)$ .
- Câu 61:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1;-17); B(-11;-25)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc tia  $BA$  sao cho  $BC = \sqrt{13}$ .
- A.  $C(-14;-27)$ .                                      B.  $C(-8;-23)$ .  
 C.  $C(-14;-27)$  và  $C(-8;-23)$ .                                      D.  $C(14;27)$  và  $C(8;23)$ .
- Câu 62:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(3;1)$ . Giả sử  $A(a;0)$  và  $B(0;b)$  là hai điểm sao cho tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$  và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 + b^2$ .
- A.  $T = 10$ .                                      B.  $T = 9$ .                                      C.  $T = 5$ .                                      D.  $T = 17$ .



CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC  
VECTƠ

BÀI 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; -1)$ ,  $\vec{v} = (-3; 4)$ . Tích  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  là

- A. 11.                                      B. -10.                                      C. 5.                                      D. -2.

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10$$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 5)$  và  $\vec{b} = (-3; 1)$ . Khi đó, giá trị của  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bằng

- A. -5.                                      B. 1.                                      C. 13.                                      D. -1.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1$ .

Câu 3: Cho  $A(0; 3)$ ;  $B(4; 0)$ ;  $C(-2; -5)$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

- A. 16.                                      B. 9.                                      C. -10.                                      D. -9.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\overline{AB} = (4; -3)$ ;  $\overline{BC} = (-6; -5)$

Vậy  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9$ .

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$  và  $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$ . Tính  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- A.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ .                                      B.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ .                                      C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ .                                      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ .

Lời giải

**Chọn B**

Theo giả thiết ta có  $\vec{u} = (1;3)$  và  $\vec{v} = (-2;2)$ .

Khi đó  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4$ .

**Câu 5:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ;  $\vec{v} = (2; -1)$ . Tính biểu thức tọa độ của  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- A.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ .      **B.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .      **C.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$ .      **D.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1;3)$ .

Vậy  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$ .

**Câu 6:** Cho hai véctơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác véctơ  $\vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .  
**C.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ.

**Câu 7:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  là

- A.**  $8a^2$ .      **B.**  $8a$ .      **C.**  $8\sqrt{3}a^2$ .      **D.**  $8\sqrt{3}a$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$ .

**Câu 8:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

- A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì  $ABCD$  là hình vuông nên  $AB \perp AD$  do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

**Câu 9:** Cho hai véctơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .  
**C.**  $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$ .      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ .

**Lời giải**

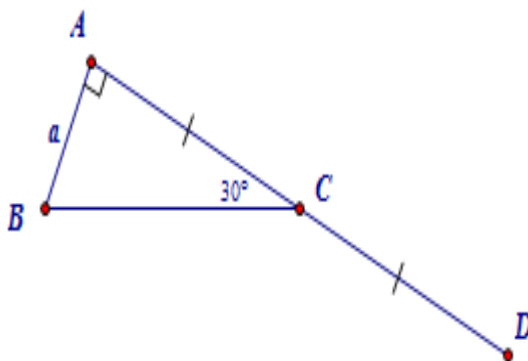
**Chọn C**

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \text{ nên C sai.}$$

- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  và  $AB = a$ . Khi đó  $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$  bằng  
 A.  $-2a^2$ .                      B.  $2a^2$ .                      C.  $3a^2$ .                      D.  $-3a^2$ .

Lời giải

**Chọn D**



Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $C$ .

$$\text{Khi đó: } \vec{AC} \cdot \vec{CB} = \vec{CD} \cdot \vec{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

- Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ .  
 A.  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$ .      D.  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{-a^2}{2}$ .

Lời giải

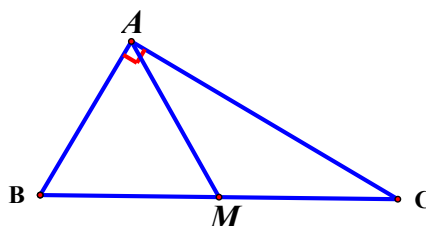
**Chọn D**

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

- Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ;  $AC = a\sqrt{3}$  và  $AM$  là trung tuyến. Tính tích vô hướng  $\vec{BA} \cdot \vec{AM}$   
 A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $a^2$ .                      C.  $-a^2$ .                      D.  $-\frac{a^2}{2}$ .

Lời giải

**Chọn D**



Ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AM$  là trung tuyến nên  $AM = \frac{BC}{2}$ .

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

Tam giác  $AMB$  có  $AB = BM = AM = a$  nên là tam giác đều. Suy ra góc  $\widehat{MAB} = 60^\circ$ .

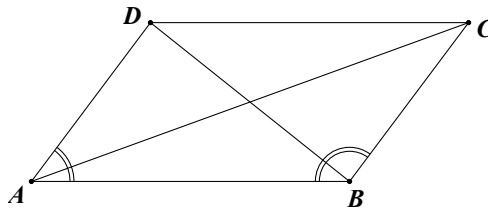
Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$ .

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  bằng

- A.  $-1$ .                      B. **1**.                      C.  $-\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



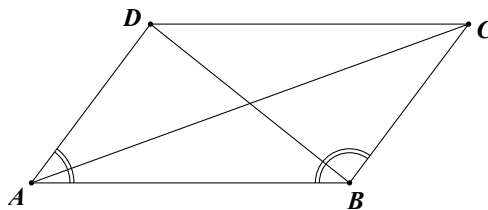
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

**Câu 14:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng

- A.  $-1$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  **$-1$** .                      D.  $-\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Theo giả thiết:  $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$ .

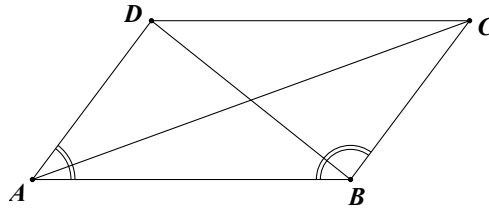
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1.$$

**Câu 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài đường chéo  $AC$  bằng

- A.  $\sqrt{5}$ .                      B.  **$\sqrt{7}$** .                      C.  $5$ .                      D.  $\frac{7}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



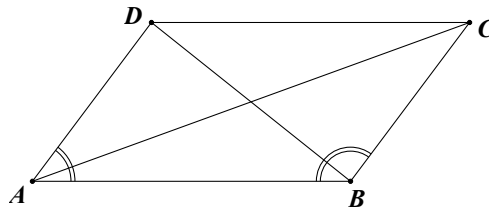
Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

- Câu 16:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , với  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài đường chéo  $BD$  bằng  
**A.**  $\sqrt{3}$ .                      **B.**  $\sqrt{5}$ .                      **C.** 5.                      **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1) \Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

- Câu 17:** Cho các véc tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  thỏa mãn các điều kiện  $|\vec{a}| = x$ ,  $|\vec{b}| = y$  và  $|\vec{c}| = z$  và  $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ . Tính  $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .  
**A.**  $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$ .      **B.**  $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$ .      **C.**  $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$ .      **D.**  $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}. \\ \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A &= 4\vec{c}^2. \\ \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= (-2\vec{c})^2. \end{aligned}$$

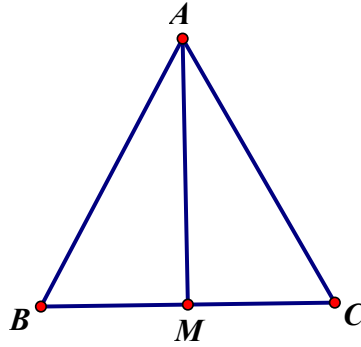
Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án } \mathbf{B}.$$

- Câu 18:** Cho  $\Delta ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$  bằng  
**A.** -18.                      **B.** 27.                      **C.** 18.                      **D.** -27.

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$ .

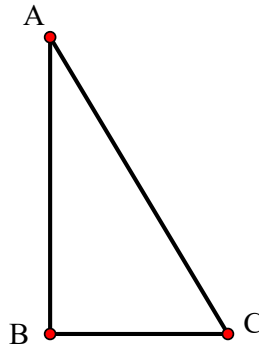
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

- A.  $3a^2$ .                      B.  $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.  $-3a^2$ .**

Lời giải

**Chọn D**



Ta có  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -AC \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = -AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = -BC^2 = -3a^2$ .

**Câu 20:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

- A.  $\sqrt{11}$ .                      **B.  $\sqrt{13}$ .**                      C.  $\sqrt{12}$ .                      D.  $\sqrt{14}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ,

$$\Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

**Câu 21:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $D$ ;  $AB = AD = a, CD = 2a$ . Khi đó tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$  bằng

- A.  $-a^2$ .                      B. 0.                      C.  $\frac{3a^2}{2}$ .                      D.  $\frac{-a^2}{2}$ .

Lời giải

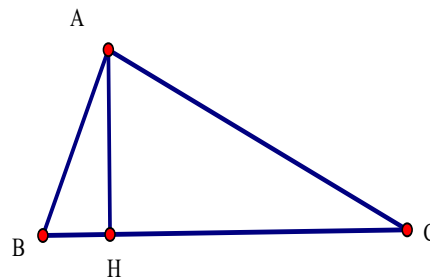
**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AD^2 - 2AB^2 = -a^2. \end{aligned}$$

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a; BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ .                      B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .                      C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$ .                      D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải



**Chọn A**

Vẽ  $AH \perp BC, H \in BC$ .

$$\text{Có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \cdot BC = BA^2 = a^2.$$

**Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 4$ . Kết quả  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng

- A. 16.                      B. 0.                      C.  $4\sqrt{2}$ .                      D. 4.

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Vì } (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \widehat{ABC} \text{ nên } \cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}.$$

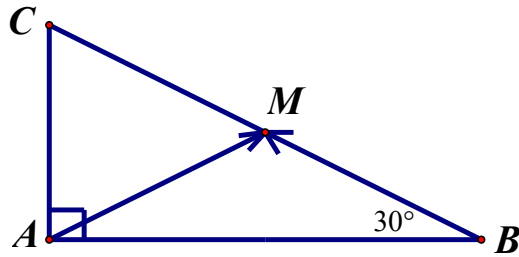
$$\text{Do đó } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$$

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 30^\circ, AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

- A.  $P = -2$ .                      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .                      C.  $P = 2$ .                      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có:  $P = \overline{AM} \cdot \overline{BM} = (\overline{AB} + \overline{BM}) \cdot \overline{BM} = \overline{AB} \cdot \overline{BM} + \overline{BM}^2$

$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4$ ;  $AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}$ ;  $BM = 2$

$\Rightarrow \overline{BM}^2 = 4$ ;  $\overline{AB} \cdot \overline{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow$  **Chọn A**

**Câu 25:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overline{AK} = -2\overline{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overline{BK} \cdot \overline{AC}$

A.  $3a^2$ .

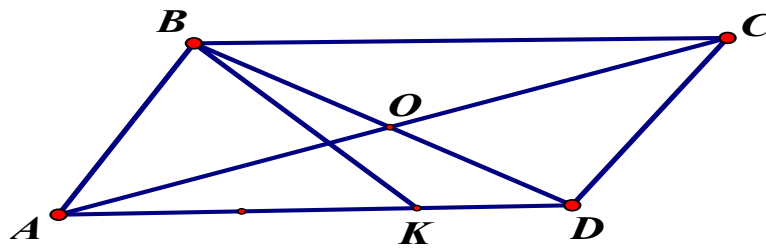
B.  $6a^2$ .

C. 0.

D.  $a^2$ .

Lời giải

**Chọn D**



Ta có  $\overline{BK} = -\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}$ ;  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$

Khi đó  $\overline{BK} \cdot \overline{AC} = (-\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD})(\overline{AB} + \overline{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overline{ABAD}$

$\overline{BK} \cdot \overline{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

**Câu 26:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5, AC=8, BC=7$  thì  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

**Chọn D**

$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$

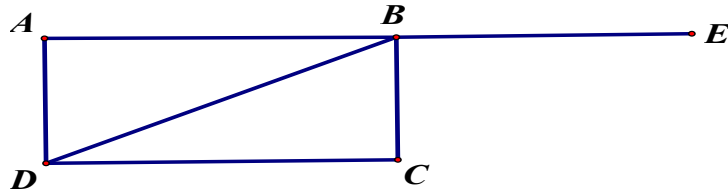
**Câu 27:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8, AD = 5$ . Tích  $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$



- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .

Lời giải

**Chọn B**



Giả sử  $E$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$  ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Xét  $\triangle ABD$  có  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét  $\triangle ABD$  có  $\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$  suy ra  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = \cos \widehat{DBE} = -\cos \widehat{ABD} = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(\frac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$

## DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VECTO

**Câu 28:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.  $\alpha = 90^\circ$ .      B.  $\alpha = 0^\circ$ .      C.  $\alpha = 45^\circ$ .      D.  $\alpha = 180^\circ$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ . Mà  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  nên  $\cos \alpha = -1$ . Suy ra,  $\alpha = 180^\circ$ .

**Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(0;4)$ ,  $C(3;1)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  của tam giác  $ABC$  gần với giá trị nào dưới đây?

- A.  $90^\circ$ .      B.  $36^\circ 52'$ .      C.  $143^\circ 7'$ .      D.  $53^\circ 7'$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (2; -1)$ .

$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \widehat{BAC} = 143^\circ 7'$ .

**Câu 30:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  khác vectơ-không thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bằng:

- A.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .      B.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .      C.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$ .      D.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$$

**Câu 31:** Cho hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 30^\circ$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .                      **D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**Câu 32:** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ . Số đo góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $45^\circ$ .**                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có 
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 nên  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 33:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai véctơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 120^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      **D.  $\alpha = 135^\circ$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Ta có 
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{9 + 49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

**Câu 34:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$  và  $\vec{b} = (3; -6)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $0^\circ$ .                      **B.  $90^\circ$ .**                      C.  $180^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

**Câu 35:** Cho hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  là

**A.**  $60^\circ$ .

**B.**  $120^\circ$ .

**C.**  $150^\circ$ .

**D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .

**Câu 36:** Cho véc tơ  $\vec{a}(1; -2)$ . Với giá trị nào của  $y$  thì véc tơ  $\vec{b} = (3; y)$  tạo với véc tơ  $\vec{a}$  một góc  $45^\circ$

**A.**  $y = -9$ .

**B.**  $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ .

**C.**  $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ .

**D.**  $y = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}$ .

Góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $45^\circ$  suy ra  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (1).

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

**Câu 37:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$  và hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A.**  $120^\circ$ .

**B.**  $60^\circ$ .

**C.**  $90^\circ$ .

**D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

### DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

**Câu 38:** Tìm  $x$  để hai vectơ  $\vec{a} = (x; 2)$  và  $\vec{b} = (2; -3)$  có giá vuông góc với nhau.

**A.**  $3$ .

**B.**  $0$ .

**C.**  $-3$ .

**D.**  $2$ .

Lời giải

**Chọn A**

Vector  $\vec{a} = (x; 2)$  và  $\vec{b} = (2; -3)$  có giá vuông góc với nhau  $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy  $x = 3$ .

**Câu 39:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vector  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (-8; 6)$ . Khẳng định nào đúng?

- A.  $\vec{u} = -\vec{v}$ .  
 B.  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .  
 C.  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .  
 D.  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ . Do đó,  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Câu 40:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 2), B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A.  $C(6; 0)$ .  
 B.  $C(0; 6)$ .  
 C.  $C(-6; 0)$ .  
 D.  $C(0; -6)$ .

Lời giải

**Chọn B**

$C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$

$\overrightarrow{AB} = (-4; -1), \overrightarrow{AC} = (-1; y - 2)$ .

Ba điểm  $A, B, C$  tạo thành một tam giác vuông tại  $A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow y = 6$ .

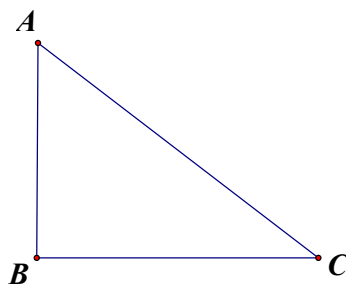
Vậy  $C(0; 6)$ .

**Câu 41:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$ . Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $(0; 3)$ .  
 B.  $(0; -3)$ .  
 C.  $(3; 0)$ .  
 D.  $(-3; 0)$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có  $\overline{AB} = (1; 1); \overline{AC} = (6; -4); \overline{BC} = (5; -5)$ .

Nhận thấy rằng  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  trùng với đỉnh  $B(0; 3)$ .

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 2)$  và  $\vec{v} = (4m; 2m - 2)$ . Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

- A.**  $m = \frac{1}{2}$ .                      **B.**  $m = -\frac{1}{2}$ .                      **C.**  $m = 1$ .                      **D.**  $m = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Hai vectơ  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 \cdot (2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 42:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m), m \neq 0$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Xác định  $m$  để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$ .

- A.**  $m = -\sqrt{6}$ .                      **B.**  $m = \pm 3\sqrt{6}$ .                      **C.**  $m = 3\sqrt{6}$ .                      **D.**  $m = \pm\sqrt{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ , suy ra  $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$ .

Ta có  $\overline{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \overline{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$ .

Để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$  thì  $\overline{GA} \cdot \overline{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$ .

**Câu 43:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$ . Diện tích  $DABC$  là

- A.** 6.                      **B.**  $6\sqrt{2}$ .                      **C.** 12.                      **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\overline{AB} = (2; -2), \overline{BC} = (3; 3)$

Ta thấy  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

**Câu 44:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-1;3)$  và  $C(3;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

**A.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(2;-4)$ .

**B.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(2;4)$ .

**C.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(-2;-4)$ .

**D.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(-2;4)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

$$\text{Gọi } A(x; y). \text{ Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy  $A(0;0)$  hoặc  $A(2;4)$ .

**Câu 45:** Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm  $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$ .

**A.**  $\frac{5}{2}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**C.** 5.

**D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tính được  $AB = 3, BC = 4$  và  $AC = 5$ . Suy ra  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2}$ .

**Câu 46:** Trong mặt phẳng tọa độ ( $Oxy$ ) cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$ . Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là

**A.**  $H(-1;-9)$ .

**B.**  $H(-8;-27)$ .

**C.**  $H(-2;5)$ .

**D.**  $H(3;14)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} (1).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (x-1; y); \overrightarrow{BC} = (6; -2); \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1), \overrightarrow{AC} = (4; -1).$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2.y = 0 \\ 4(x+1) - 1.(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}.$$

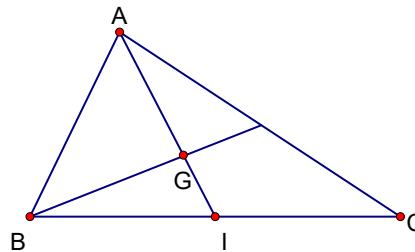
Vậy  $H(-8; -27)$ .

**Câu 47:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ ; cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1)$ ,  $B(1;3)$  và trọng tâm là  $G\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên tia  $Oy$  sao cho tam giác  $MBC$  vuông tại  $M$ .

- A.**  $M(0; -3)$ .      **B.**  $M(0; 3)$ .      **C.**  $M(0; 4)$ .      **D.**  $M(0; -4)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-6; -2)$$

Ta có  $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $BC$  ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BM} = (-1; m-3); \overrightarrow{CM} = (6; m+2); \overrightarrow{CB} = (7; 5); \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta MBC \text{ vuông cân tại } M \text{ khi: } \begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3).$$

- Câu 48:** Trên hệ trục tọa độ  $xOy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;3)$ ,  $B(2;7)$ ,  $C(-3;-8)$ . Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$  là
- A.  $(1;-4)$ .                      B.  $(-1;4)$ .                      C.  $(1;4)$ .                      D.  $(4;1)$ .

Lời giải

**Chọn C**

Gọi  $D(x; y)$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  xuống cạnh  $BC$  ta có  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $D, B, C$  thẳng hàng

Mà  $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$ ;  $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$  nên ta có hệ

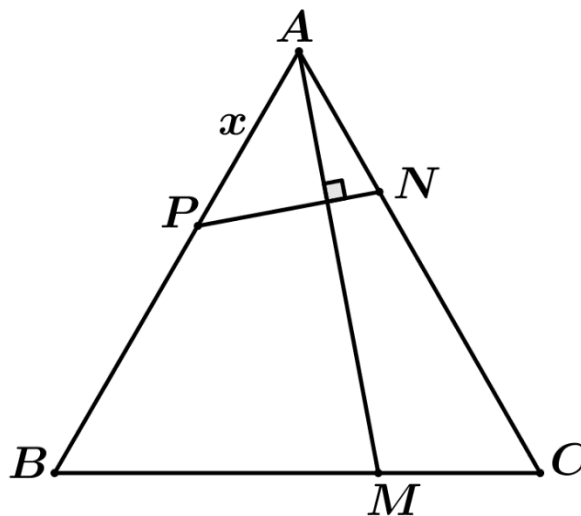
$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

- Câu 49:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

- A.  $x = \frac{5a}{12}$ .                      B.  $x = \frac{a}{2}$ .                      C.  $x = \frac{4a}{5}$ .                      D.  $x = \frac{7a}{12}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Đặt  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$ , ta có  $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$  và  $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + \vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có  $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c})(-3x\vec{b} + \vec{c}) = 0$



$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b}\cdot\vec{c}) - 6x(\vec{b}\cdot\vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

**Câu 50:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$ . Biết  $A(3;-1), B(-1;2)$  và  $I(1;-1)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ  $(a;b)$ . Tính  $a+3b$ .

**A.**  $a+3b = \frac{2}{3}$ .

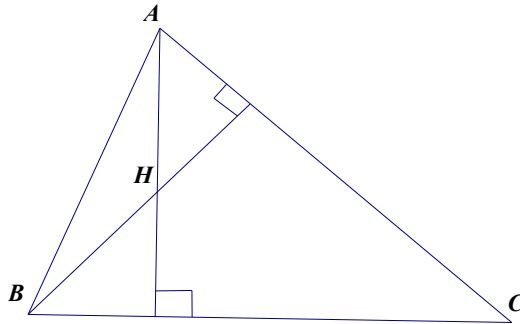
**B.**  $a+3b = -\frac{4}{3}$ .

**C.**  $a+3b = 1$ .

**D.**  $a+3b = -2$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Giả sử  $C(x_C; y_C)$  và  $H(x_H; y_H)$ . Có  $I$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có  $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

$H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

**Câu 51:** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$

**A.**  $\frac{4}{9}$ .

**B.**  $\frac{3}{7}$ .

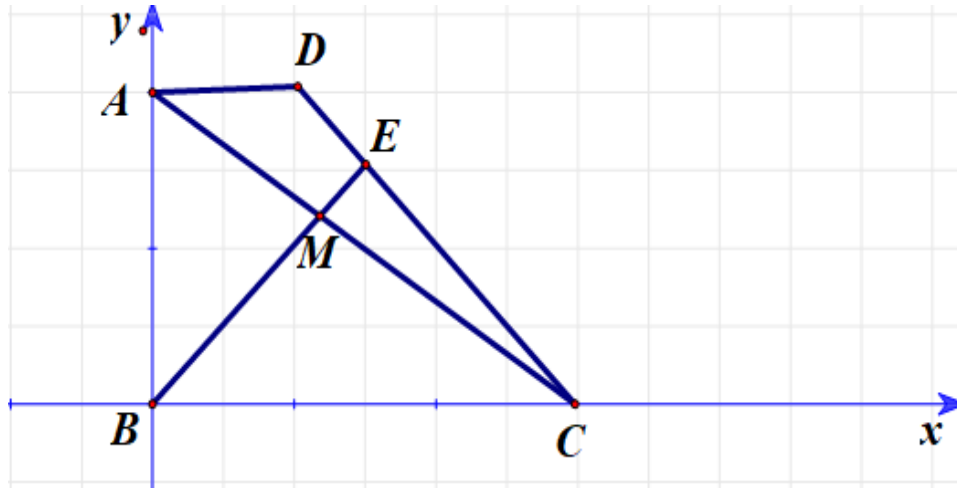
**C.**  $\frac{1}{3}$ .

**D.**  $\frac{2}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm  $B$ , điểm  $A$  thuộc trục  $Oy$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Ox$ .



Theo bài ra ta có  $B(0;0)$ ,  $A(0;2)$ ,  $C(3;0)$ ,  $D(1;2)$

Khi đó  $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$ . Phương trình tham số của đthẳng  $AC$  là  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi  $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$ . Ta có  $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$  và  $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$ .

Để  $BM \perp DC$  thì  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$  và  $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$ .

Vì  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$  cùng chiều  $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$ .

**Câu 52:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3;0)$ ,  $B(3;0)$  và  $C(2;6)$ . Gọi  $H(a;b)$  là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

**A.**  $a + 6b = 5$ .      **B.**  $a + 6b = 6$ .      **C.**  $a + 6b = 7$ .      **D.**  $a + 6b = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1; 6)$ ,  $\overrightarrow{BH} = (a - 3; b)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (5; 6)$ .

Vì  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$  nên  $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$ .

$\Rightarrow a + 6b = 7$ .

**Câu 53:** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$  là :

**A.** Đường tròn đường kính  $BC$ .      **B.** Đường tròn  $(B; BC)$ .  
**C.** Đường tròn  $(C; CB)$ . **D.** Một đường khác.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2 \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{CB} - \overline{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BC$ .

**Câu 54:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$  là :

- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .
- B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .
- C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{CB} - \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overline{CM} - \overline{CA}) \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

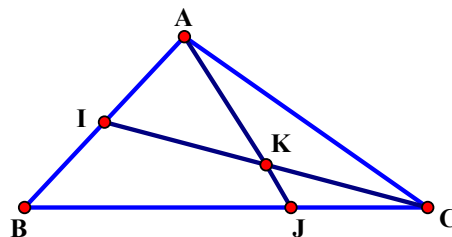
**Câu 55:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overline{AK} = 3\overline{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overline{KA} + \overline{KB} + 2\overline{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overline{MK} + \overline{AK}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .
- B. Đường tròn đường kính  $IK$ .
- C. Đường tròn đường kính  $JK$ .
- D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**Lời giải**



**Chọn C**

Ta có:  $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = 4\overline{MK} + \overline{KA} + \overline{KB} + 2\overline{KC} = 4\overline{MK}$ .

Lấy điểm  $J$  thỏa mãn  $\overline{AK} = 3\overline{KJ}$ . Ta có  $\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AI} + \overline{AC}) = \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AC}}{2}$ , mà  $\overline{AK} = 3\overline{KJ}$  nên

$$\overline{AJ} = \overline{AK} + \overline{KJ} = \overline{AK} + \frac{1}{3}\overline{AK} = \frac{4}{3}\overline{AK} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overline{BJ} = \overline{AJ} - \overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} - \overline{AB} = -\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{BC}.$$

Suy ra  $J$  là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng  $BC$  xác định bởi hệ thức  $\overline{BJ} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ .

$$\text{Ta có } 3\overline{MK} + \overline{AK} = 3\overline{MK} + 3\overline{KJ} = 3\overline{MJ}.$$

$$\text{Nhu vậy } (3\overline{MK} + \overline{AK}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overline{MJ}) \cdot (4\overline{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MJ} \cdot \overline{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $JK$ .

Vì  $J, K$  là các điểm cố định nên điểm  $M$  luôn thuộc một đường tròn đường kính  $JK$  là đường tròn cố định.

**DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO**

**Câu 56:** Trong mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ , cho  $\overline{AB} = (6; 2)$ . Tính  $|\overline{AB}|$ ?

- A.**  $|\overline{AB}| = 2\sqrt{10}$ .      **B.**  $|\overline{AB}| = 20$ .      **C.**  $AB = 4\sqrt{10}$ .      **D.**  $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

**Câu 57:** Cho hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B(-3; 3)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A.**  $AB = \sqrt{13}$ .      **B.**  $AB = 3\sqrt{2}$ .      **C.**  $AB = 4$ .      **D.**  $AB = 5$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

**Câu 58:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1; 2); B(-1; 1)$ . Điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  thỏa mãn tam giác  $MAB$  cân tại  $M$ . Khi đó độ dài đoạn  $OM$  bằng

- A.**  $\frac{5}{2}$ .      **B.**  $\frac{3}{2}$ .      **C.**  $\frac{1}{2}$ .      **D.**  $\frac{7}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Điểm  $M$  thuộc trục  $Oy \Rightarrow M(0; y)$ .

Ta có tam giác  $MAB$  cân tại  $M \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1-y)^2}$   
 $\Leftrightarrow 4 - 4y = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ . Vậy  $OM = \frac{3}{2}$ .

**Câu 59:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(2; 1), B(2; -1), C(-2; -3), D(-2; -1)$ . Xét ba mệnh đề:  
 (I)  $ABCD$  là hình thoi.  
 (II)  $ABCD$  là hình bình hành.  
 (III)  $AC$  cắt  $BD$  tại  $M(0; -1)$ .

Chọn khẳng định đúng

- A.** Chỉ (I) đúng.      **B.** Chỉ (II) đúng.  
**C.** Chỉ (II) và (III) đúng.      **D.** Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $\overline{AB} = (0; -2)$ ;  $\overline{DC} = (0; -2)$ ;  $\overline{AC} = (-4; -4)$ .

Suy ra  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  không cùng phương và  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

Nên  $ABCD$  là hình bình hành. Vậy mệnh đề đúng.

Suy ra  $AC$  cắt  $BD$  tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ  $M = (0; -1)$ , suy ra đúng.

Ta có  $\overline{AB} = (0; -2)$ , suy ra  $AB = |-2| = 2$ ;  $\overline{AD} = (-4; -2)$ , suy ra  $AD = \sqrt{20}$ , nên  $AB \neq AD$ , suy ra  $ABCD$  không là hình thoi. Mệnh đề sai.

**Câu 60:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(-1; 4)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(-2; 7)$ . Hỏi tọa độ điểm  $I$  tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là cặp số nào?

- A.  $(-2; 6)$ .                      **B.  $(0; 6)$ .**                      C.  $(0; 12)$ .                      D.  $(2; 6)$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:

$$\overline{AB} = (3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}.$$

$$\overline{AC} = (-1; 3) \Rightarrow AC = \sqrt{10}.$$

$$\overline{BC} = (-4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{20}.$$

Nhận thấy  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  và  $AB = AC$  nên  $\Delta ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ , suy ra tâm  $I$  là trung điểm cạnh huyền  $BC$ . Vậy  $I(0; 6)$ .

**Câu 61:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1; -17)$ ;  $B(-11; -25)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc tia  $BA$  sao cho  $BC = \sqrt{13}$ .

- A.  $C(-14; -27)$ .                      **B.  $C(-8; -23)$ .**  
C.  $C(-14; -27)$  và  $C(-8; -23)$ .                      D.  $C(14; 27)$  và  $C(8; 23)$ .

Lời giải

**Chọn B**

Giả sử  $C(x_C; y_C)$ . Theo bài ra ta có  $C$  thuộc tia  $BA$  nên  $\overline{BC}$ ;  $\overline{BA}$  cùng hướng.

$$\text{Với } \overline{BC} = (x_C + 11; y_C + 25); \overline{BA} = (12; 8) \text{ ta có: } \overline{BC} = k\overline{BA} \quad (k > 0) \Leftrightarrow \frac{x_C + 11}{12} = \frac{y_C + 25}{8} = k$$

$$\Leftrightarrow 8x_C - 12y_C - 212 = 0 \Leftrightarrow y_C = \frac{8x_C - 212}{12} \Leftrightarrow y_C = \frac{2x_C - 53}{3} \quad (1)$$

$$+) \quad BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2 = 13 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C - 53}{3} + 25\right)^2 = 13 \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C + 22}{3}\right)^2 = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}(x_C + 11)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_C + 11)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -14 \\ x_C = -8 \end{cases}$$

Với  $x_C = -14$  thế vào (1) ta được:  $y_C = \frac{2 \cdot (-14) - 53}{3} = -27$ .

Khi đó  $k = \frac{-14 + 11}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} < 0$ .

Với  $x_C = -8$  thế vào (1) ta được:  $y_C = \frac{2 \cdot (-8) - 53}{3} = -23$ .

Khi đó  $k = \frac{-8 + 11}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > 0$ .

Vậy  $C(-8; -23)$ .

**Câu 62:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(3;1)$ . Giả sử  $A(a;0)$  và  $B(0;b)$  là hai điểm sao cho tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$  và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 + b^2$ .

**A.**  $T = 10$ .

**B.**  $T = 9$ .

**C.**  $T = 5$ .

**D.**  $T = 17$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$ .  $MAB$  là tam giác vuông tại  $M$  khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$

Với  $a \geq 0, b \geq 0$  suy ra  $0 \leq a \leq \frac{10}{3}$  (\*\*)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a - 3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b - 1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a - 3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó  $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$  đạt được khi  $a = 3$ , khi đó  $b = 1$ .

Vậy  $T = a^2 + b^2 = 10$ .