

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1(1,0 điểm). Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

Câu 2(1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên $[-3; -1]$.

Câu 3(1,0 điểm).

a) Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = iz - \bar{z}$

b) Giải phương trình: $25^x - 2.5^x - 15 = 0$

Câu 4(1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x \ln(x^2 + 4)}{x^2 + 4} dx$

Câu 5(1,0 điểm). Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

a) Xác định tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu (S).

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại điểm M(1; 1; - 1).

Câu 6(1,0 điểm).

a) Giải phương trình $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$

b) Một lớp học có 27 học sinh nữ và 21 học sinh nam. Cô giáo chọn ra 5 học sinh để lập một tổ ca chào mừng 20 - 11. Tính xác suất để trong tổ ca đó có ít nhất một học sinh nữ.

Câu 7(1,0 điểm). Cho hình chóp đều A.BCD có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính thể tích khối chóp A.BCD theo a và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, AD.

Câu 8(1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có I(1; - 2) là tâm đường tròn ngoại tiếp và $\angle AIC = 90^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A trên BC là D(- 1; - 1). Điểm K(4; - 1) thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết điểm A có tung độ dương.

Câu 9(1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1}) = y(y^2-2y+4) \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+2x)} = 5y + 12x - 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 10(1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

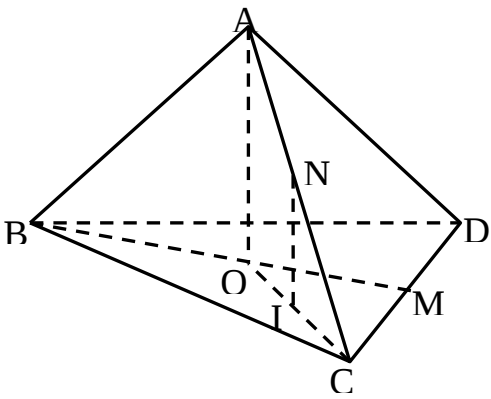
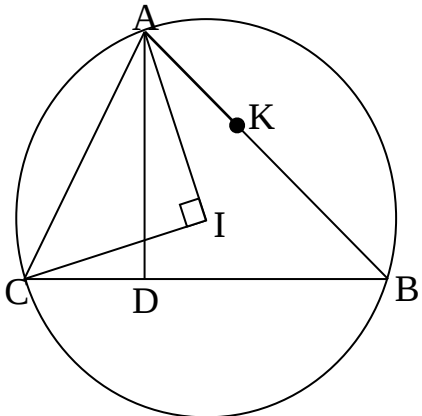
$$M = \frac{3a^4 + 3b^4 + 25c^3 + 2}{(a+b+c)^3}$$

***** Hết *****

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu	Đáp án	Điểm												
1	- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ - Sự biến thiên - Chiều biến thiên: $y' = -\frac{5}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in D$	0.25												
	- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ - Hàm số đã cho không có cực trị - Tiệm cận $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow TCN : y = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2 : TCD$	0.25												
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr></table>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'	-		-	y	2		2	0.25
	x	$-\infty$	2	$+\infty$										
y'	-		-											
y	2		2											
Đồ thị	0.25													
Câu 2	$f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3; -1]$, $y' = 3x^2 + 6x$	0.25												
	$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = -2$.(nhận)	0.25												
	Ta có: $f(-3) = 0$, $f(-2) = 4$, $f(-1) = 2$	0.25												
	Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-3; -1]$ lần lượt là 4 và 0	0.25												
3a	$\bar{z} = 3 - 2i$													

	$w = i(3 + 2i) - (3 - 2i)$ $= -5 + 5i$	0.25
	Phần thực là -5 Phần ảo là 5	0.25
3b	$25^x - 2.5^x - 15 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 2.5^x - 15 = 0 (*)$ Đặt $t = 5^x > 0$ Pt $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$	0.25
	Với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$	0.25
4	Đặt $\ln(x^2 + 4) = u \Rightarrow du = d(\ln(x^2 + 4)) = \frac{2x}{x^2 + 4} dx$ $x=0$ thì $u=\ln 4$ $x=1$ thì $u=\ln 5$	0.25
		0.25
	$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{\ln 4}^{\ln 5} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} \Big _{\ln 4}^{\ln 5} = \frac{1}{4} (\ln^2 5 - \ln^2 4)$	0.5
5	Tâm I(1; -2; 3)	0.25
	R = 5	0.25
	Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng là: $\vec{IM} = (0; 3; -4)$	0.25
	(P): $3y - 4z - 7 = 0$	0.25
6a	PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$ $\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \cos x - 1) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0.25
6b	Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong số 48 học sinh có: $C_{48}^5 = 1712304$ Gọi A là biến cố " chọn 5 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nữ" thì $\bar{A}$ là biến cố " chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh nữ ".	0.25
	Ta có số kết quả thuận lợi cho $\bar{A}$ là: $C_{21}^5 = 20349 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{C_{21}^5}{C_{48}^5} = \frac{20349}{1712304}$	0.25

	$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{20349}{1712304} = \frac{1691955}{1712304}$		
7		Gọi O là tâm tam giác đều BCD cạnh a. Do A.BCD là chóp đều nên $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO$ là đường cao của hình chóp. Có $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	0.25
		Trong $\triangle AOB$ có: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ $V_{A.BCD} = \frac{1}{3} AO \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} (\text{đvtt})$	0.25
		Gọi N, I, J lần lượt là trung điểm của AC, CO, OM. Có: $AD \parallel MN \Rightarrow AD \parallel (BMN) \Rightarrow d(BM; AD) = d(AD; (BMN))$ $= d(D; (BMN)) = d(C; (BMN)) = 2d(I; (BMN))$ lại có: $\left. \begin{array}{l} BM \perp IJ \\ BM \perp NI \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp (IJN) \Rightarrow (BMN) \perp (IJN)$ theo giao tuyến NJ. Trong mp(IJN) kẻ $IK \perp NJ \Rightarrow IK \perp (BMN) \Rightarrow d(I; (BMN)) = IK$	0.25
		* Xét $\triangle IJN$ có: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IJ^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{35}{2a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{70}}{35}$ Vậy $d(BM; AD) = 2d(I; (BMN)) = \frac{2a\sqrt{70}}{35}$	0.25
8		Do $\angle AIC = 90^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle ABC = 45^\circ \\ \angle ABC = 135^\circ \end{array} \right.$ $\Rightarrow \angle ABD = 45^\circ$ nên $\triangle ADB$ vuông cân tại D do đó $DA = DB$. Lại có: $IA = IB$ $\Rightarrow DI \perp AB$	0.25

8	Nên đường thẳng AB đi qua K (4; - 1) và vuông góc với DI có phương trình $2x - y - 9 = 0$. Gọi $A(a; 2a - 9) \in AB$, do $DA = \sqrt{2}d(D; AB) = 2\sqrt{10}$ $\Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (2a-8)^2} = 2\sqrt{10}$	0.25
	$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -7) \text{ (loại)} \\ A(5; 1) \text{ (t/m)} \end{cases}$ Phương trình DB đi qua D có VTPT $\overrightarrow{AD}: 3x + y + 4 = 0$	0.25
	$C \in DB \Rightarrow C(c; -3c - 4)$. Do ΔIAC vuông cân tại I nên $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow 4(c-1) - 3(3c+2) = 0 \Leftrightarrow c = -2 \Rightarrow C(-2; 2)$	0.25
9	ĐK: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \geq 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y \geq 0$	0.25
	PT (1) $\Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1})^3 - 2(2\sqrt{2x-1})^2 + 4(2\sqrt{2x-1}) = y^3 - 2y^2 + 4y$ (*) Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ ($t \geq 0$) có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = 2t^2 + (t-2)^2 > 0 \quad \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến	0.25
	Từ pt (*) $\Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$ Thay vào pt (2) ta được pt $y^3 + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 3y(y+2)$	0.25
	Đặt $z = \sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)(y^2 + yz - 2z^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \text{ (loại)} \\ y = z \text{ (t/m)} \end{cases}$ Với $y = z$ ta được $y = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$ (t/m)	0.25
10	- Áp dụng BĐT Cô - Si ta có: $2a^4 + (a^4 + 1) \geq 2a^4 + 2a^2 \geq 4a^3$ hay $3a^4 + 1 \geq 4a^3$. - Tương tự $3b^4 + 1 \geq 4b^3 \Rightarrow M \geq \frac{4a^3 + 4b^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3}$	0.25
	Mà $(a-b)^2(a+b) \geq 0 \Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$ $\Rightarrow M \geq \frac{(a+b)^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3} = \left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3 = \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$ Đặt $t = \frac{c}{a+b+c}$ ($0 < t < 1$)	0.25
	Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 25t^3$ ($0 < t < 1$)	0.25

có: $f'(t) = -3 \left[(1-t)^2 - (5t)^2 \right], f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{6}$	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$			$\frac{25}{36}$		

Vậy $\min f(t) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$ khi $t = \frac{1}{6}$ hay $\min M = \frac{25}{36} \quad a = b = 1, c = \frac{2}{5}.$

0.25