

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN TẠO CÁC LƯỢNG TRIỆT TIÊU

*Dự án năm 2019 của nhóm Giáo viên Toán Việt Nam
do thầy Lê Tài Thắng phụ trách*

Trong quá trình dạy và học về bài toán tích phân, chúng ta có rất nhiều cách tính tích phân như đổi biến, từng phần... Tuy nhiên khi đứng trước một bài toán không phải lúc nào chúng ta cũng thấy luôn điều đó, đặc biệt những bài toán cồng kềnh và hình thức phức tạp. Mặc dù cách xử lý lại hết sức đơn giản, xuất phát từ những thứ rất gần gũi và thân quen mà bản thân chúng ta lại không ngờ đến. Từ thực tế kinh nghiệm giảng dạy cũng như như cầu học tập của các em học sinh, BQT xin đưa ra một hướng làm nhỏ về bài toán tích phân: **Phương pháp tích phân từng phần tạo lượng triệt tiêu.**

Cở sở của phương pháp chính là sử dụng tích phân đã được học trong chương trình sách giáo khoa và định nghĩa của tích phân.

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp tích phân từng phần

Tính tích phân
$$I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Cách tính:

Đặt
$$\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = v(x) \end{cases}$$

Khi đó
$$I = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$
 (công thức tích phân từng phần)

Chú ý:

+ Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int_a^b v du$ để tính hơn $\int_a^b u dv$.

+ Với $P(x)$ là hàm đa thức ta có chú ý trong các trường hợp sau

	$\int_a^b P(x) \cdot e^x dx$	$\int_a^b P(x) \cdot \cos x dx$	$\int_a^b P(x) \cdot \sin x dx$	$\int_a^b P(x) \cdot \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

2. Xét bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$, ta có thể giải với một cách như sau:

+ Ta đưa I về dạng $I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$ (1)

+ Ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính $\int_a^b f_1(x) dx$ đưa về dạng

$$\int_a^b f_1(x) dx = A - \int_a^b f_2(x) dx. \text{ Thay vào (1) ta tính được } I = A$$

Vấn đề là ta lựa chọn việc tách $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ sao cho việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần để đưa $\int_a^b f_1(x) dx$ tạo ra tích phân $-\int_a^b f_2(x) dx$.

II. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Cho $\int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \frac{a}{\ln 2} - be$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 2b$.

B. $2a = b$.

C. $a + b = 4$.

D. $a + b = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{Tính } \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} \right) dx - \int_2^e \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx = I_1 + I_2$$

$$+ I_2 = \int_2^e \frac{1}{\ln x} dx \text{ theo từng phần, đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{\ln x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{x \cdot \ln^2 x} dx \\ v = x \end{cases} \text{ suy ra}$$

$$I_2 = \int_2^e \frac{1}{\ln x} dx = \left. \frac{x}{\ln x} \right|_2^e - I_1 = e - \frac{2}{\ln 2} - I_1$$

$$\text{Nên } \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} \right) dx - \int_2^e \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx = I_1 + I_2 = e - \frac{2}{\ln 2}$$

Vậy $a = -2; b = -1$.

Nhận xét: Bài toán đã tách sẵn nên chúng ta chỉ cần tích phân từng phần tích phân thứ nhất để tạo ra lượng là đối của tích phân còn lại.

Câu 2. Cho $I = \int_1^e e^{2x} \ln x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{e^{ae}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. -2 .

B. 2 .

C. -4 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_1^e e^{2x} \ln x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \underbrace{\int_1^e e^{2x} \ln^2 x dx}_M + \underbrace{\int_1^e e^{2x} \ln x \frac{1}{x} dx}_N$$

$$\text{Lại có } N = \int_1^e e^{2x} \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e e^{2x} d(\ln^2 x) = \frac{1}{2} \left[e^{2x} \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e \ln^2 x d(e^{2x})$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e e^{2x} \ln^2 x dx = \frac{1}{2} e^{2e} - M.$$

$$\text{Suy ra } I = M + N = M + \left(\frac{1}{2} e^{2e} - M \right) = \frac{1}{2} e^{2e}.$$

Do đó $a = b = 2, c = 0$. Vậy $T = a + b + c = 4$.

Nhận xét:

+ Ta thấy bài toán tương đối phức tạp nếu thoáng nhìn qua, tuy nhiên nếu đi theo hướng của dạng toán này thì chúng ta sẽ có hướng xử lý ngay.

+ Ta cũng có thể dùng công thức tích phân từng phần cho tích phân $M = \int_1^e e^{2x} \ln^2 x dx$. Vì vai trò của hai tích phân này là như nhau, quan trọng ta chọn từng phần tích phân nào để nhanh chóng cho ra kết quả nhanh nhất mà lại đơn giản nhất.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ \text{Chọn } v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Ta được } M = \int_1^e e^{2x} \ln^2 x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e e^{2x} \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} e^{2e} - N$$

$$\text{Vậy } I = M + N = \left(\frac{1}{2} e^{2e} - N \right) + N = \frac{1}{2} e^{2e}.$$

Câu 3. Biết $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)^2} e^{1+\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{a} e^a - \frac{1}{b} e^b$, biết a, b là các số nguyên dương. Tính

$$T = \log 6000a - \log b.$$

A. $T = 3 + \log 15$.

B. $T = 4 + \log 3$.

C. $T = 4$.

D. $T = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^{1+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)} e^{1+\frac{1}{x}} dx - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)^2} e^{1+\frac{1}{x}} dx$$

$$\text{Xét } N = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)^2} e^{1+\frac{1}{x}} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^{1+\frac{1}{x}} \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} dx \\ v = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } N = \frac{x}{x+1} e^{1+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{6} e^6 - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)} e^{1+\frac{1}{x}} dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)} e^{1+\frac{1}{x}} dx - \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{6} e^6 - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)} e^{1+\frac{1}{x}} dx \right) = \frac{1}{5} e^5 - \frac{1}{3} e^3.$$

$$\text{Vậy } a=5, b=3 \Rightarrow T = \log(6000 \cdot 5) - \log 3 = \log 10000 = 4.$$

Câu 4. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx = e^a + b$ với là b số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $S = 2a + b$

A. $S = \pi$.

B. $S = 2\pi$.

C. $S = 2$.

D. $S = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot e^x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx = \left(\tan \frac{x}{2} \cdot e^x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Vậy } S = 2a + b = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

Nhận xét:

$$+ \text{ Khi biến đổi thành } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx. \text{ Nếu để ý kĩ thì ta thấy}$$

$$\left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \text{ nên ta có thể viết lại } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)' \cdot e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot (e^x)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \cdot e^x \right)' dx.$$

Làm được việc này đòi hỏi học sinh phải nắm rất chắc các công thức đạo hàm, nguyên hàm và tư duy suy ngược trong giải toán.

+ Bản chất của công thức tích phân từng phần là xuất phát từ

$$\int_a^b (u \cdot v)' dx = \int_a^b (u' \cdot v + uv') dx \Leftrightarrow \int_a^b u' \cdot v dx = \int_a^b (u \cdot v)' dx - \int_a^b uv' dx \text{ nên ta có thể phân tích đưa}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (u \cdot v)' dx \text{ sau đó sử dụng định nghĩa của tích phân thì việc giải bài toán}$$

sẽ nhanh và gọn hơn. Vì vậy, ta sẽ đồng thời sử dụng tích phân từng phần để giải quyết các dạng bài toán kiểu như này

Câu 5. Biết $I = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right)^2 e^x dx = ae + be^c$, với a, b, c là các số thực. Tính $S = a + 2b + c$

A. $S = 3$.

B. $S = \frac{3}{2}$.

C. $S = -3$.

D. $S = 2$.

Lời giải

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} e^x\right) dx = A + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} e^x\right) dx$$

$$\text{Xét } A = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 - \frac{4}{x} \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{4}{x^2} dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } A = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x dx = \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} e^x\right) dx$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} e^x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} e^x\right) dx = \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x \Big|_1^2 = 3e - e^2$$

$$\text{Vậy } a = 3, b = -1, c = 2 \Rightarrow S = a + 2b + c = 3$$

Chú ý: Ta có thể biến đổi để làm như sau:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx = \int_1^2 \left[\frac{4}{x^2} e^x + \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x\right] dx \\ &= \int_1^2 \left[\left(1 - \frac{4}{x}\right)' e^x + \left(1 - \frac{4}{x}\right) (e^x)'\right] dx = \int_1^2 \left[\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x\right]' dx = \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x \Big|_1^2 = 3e - e^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 3, b = -1, c = 2 \Rightarrow S = a + 2b + c = 3$$

Nhận xét: Cách giải theo hướng hai làm cho ta thấy nó rất hiệu quả nếu hiểu rõ vấn đề để đưa biểu thức trong dấu tích phân về được dạng đạo hàm của tích hai biểu thức.

Câu 6. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (x \sin x + x^2 \cos x) dx = \frac{a\pi^b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$. Tính $a + b + c$.

A. 11.

B. 21.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Cách 1: Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (x \sin x + x^2 \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cos x dx = A + B.$$

$$\text{Xét } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin^2 x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \sin x \cos x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{x^2}{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cos x dx = \frac{\pi^2}{8} - B.$$

$$\text{Vậy } I = A + B \Leftrightarrow I = \frac{\pi^2}{8} - B + B \Leftrightarrow I = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Do đó } a = 1; b = 2; c = 8 \Rightarrow a + b + c = 11.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (x \sin x + x^2 \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + x^2 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(x^2)' \sin^2 x + x^2 (\sin^2 x)' \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(x^2)' \sin^2 x + x^2 (\sin^2 x)' \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^2 x)' dx = \frac{1}{2} x^2 \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Nhận xét: Việc sử dụng tích phân từng phần tạo ra lượng triệt tiêu hay biến đổi để xuất hiện dạng đạo hàm là tùy thuộc vào khả năng nhìn nhận của mỗi người, do đó hiểu rõ và vận dụng từng hướng làm sẽ đảm bảo cho các em có nhiều công cụ hơn trong việc giải quyết các bài toán.

Kết luận: Bài viết là một kinh nghiệm nho nhỏ trong quá trình dạy học, hy vọng sẽ giúp ích được phần nào cho các thầy cô trong quá trình dạy học cũng như các em học sinh hiểu rõ vấn đề hơn trong quá trình học tập về bài toán tích phân.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 10$,

$f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx$.

- A.** -9. **B.** $1 - \cot 1$. **C.** -1. **D.** $1 - \ln(\cos 1)$.

Câu 2. Biết $I = \int_1^e \left(\sqrt{1 + \ln x} + \frac{1}{2x\sqrt{1 + \ln x}} \right) e^x dx = e^a \sqrt{b} - c.e$ với a là số thực dương và b, c là các số nguyên dương. Giá trị $\ln a + b + c = 4$ là

- A.** 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \sin x - 1) e^{\sin x} dx = 1 - a.e^b$ với a, b là các số thực dương. Giá trị $a - b$ bằng

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 0.

Câu 4. Biết rằng $I = \int_1^e x^5 \cdot \ln^3 x (3 \ln x + 2) dx = \frac{e^a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b$.

- A.** $T = 4$. **B.** $T = -4$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 5$.

Câu 5. Biết $\int_1^2 \frac{x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x}{x} dx = \sin a \cdot \ln b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A.** 8. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 6. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x \cdot \cos x) \cdot e^{\sin x} dx = \frac{a\pi e}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính

- $S = 2a^2 - b^2$. **A.** -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 7. Biết $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \tan x) e^{-x} dx = a.e^{\frac{-b\pi}{c}}$ với a, b, c là các số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ là tối giản. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là
A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 8. Biết $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{2x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{a}{b}.e^c + d$, biết a, b, c, d là các số nguyên không âm và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b^2 + c^3 + d^4$.
A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 9. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \frac{(\cos x + x \sin x)}{\cos^3 x} dx = \frac{a\pi^b}{c}$, với a, b, c là các số thực dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị $a.b + c$ bằng?
A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 10. Giả sử $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x.e^x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{\ln(ae)} - \frac{b}{\ln(be)}$ với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây là sai?
A. $a^2 + b^2 = 13$. **B.** $\log_{ab} 36 = 2$.
C. $2^a + 3^b = 31$. **D.** $\log(a + b + 5) = 2$.

Câu 11. Biết $\int_1^2 (2x^2 + x + 1) e^{x^2 + x + 1} dx = a.e^7 + b.e^3$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Đặt $S = a^{2019} + b^{2020}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?
A. $S < 2^{2019}$. **B.** $2^{2019} < S < 3^{2019}$.
C. $3^{2019} < S < 11^{2020}$. **D.** $11^{2020} < S < 11^{2021}$.

-----Hết-----