CHƯƠNG I : VECTƠ

I. VECTƠ

1. Các định nghĩa

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B là $\overrightarrow{AB}$.
- **Giá** của vectơ là đường thẳng chứa vectơ đó.
- **Độ dài** của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Vectơ – không** là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu $\vec{0}$.
- Hai vectơ đgl **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- Hai vectơ đgl **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Chú ý: *+ Ta còn sử dụng kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ để biểu diễn vectơ.*

+ Qui ước: Vectơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
+ Điều kiện cần và đủ để 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là

hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

2. Các phép toán trên vectơ

a) Tổng của hai vectơ

- Qui tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- Qui tắc hình bình hành: Với ABCD là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- Tính chất: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; $\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

b) Hiệu của hai vectơ

- **Vectơ đối** của $\vec{a}$ là vectơ $\vec{b}$ sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Kí hiệu vectơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.
- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.
- Qui tắc ba điểm: Với ba điểm O, A, B tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

c) Tích của một vectơ với một số

- Cho vectơ $\vec{a}$ và số $k \in R$. $k\vec{a}$ là một vectơ được xác định như sau:
  + $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
  + $|k\vec{a}|=|k|.|\vec{a}|$.
- Tính chất: $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$; $\quad k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

  $k\vec{a}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- **Điều kiện để hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{b}=k\vec{a}$
- **Điều kiện ba điểm thẳng hàng:** A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- **Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:** Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó $\exists!$ $m, n \in R$: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Chú ý:

- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng**:

  M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (O tuỳ ý).
- **Hệ thức trọng tâm tam giác**:

  G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (O tuỳ ý).

VẤN ĐỀ 1: Khái niệm vectơ

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D ?

Bài 2. Cho ΔABC có A′, B′, C′ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

b) Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}$.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$; $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$; $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC$.

b) Nếu $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right|$ thì ABCD là hình chữ nhật.

Bài 5. Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$. Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

Bài 6. Cho ΔABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Bài 8. Cho ΔABC đều cạnh a, trực tâm H. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh đẳng thức vectơ – Phân tích vectơ

Để chứng minh một đẳng thức vectơ hoặc phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương, ta thường sử dụng:

- *Qui tắc ba điểm để phân tích các vectơ.*
- *Các hệ thức thường dùng như: hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm tam giác.*
- *Tính chất của các hình.*

Bài 1. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài 2. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

c) Gọi G là trung điểm của IJ. Chứng minh: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh các đoạn thẳng IJ, PQ, MN có chung trung điểm.

Bài 3. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh: $2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{DA}) = 3\overrightarrow{DB}$.

Bài 4. Cho ΔABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh: $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC, có AM là trung tuyến. I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kỳ, chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 6. Cho ΔABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Bài 7. Cho hai tam giác ABC và A′B′C′ lần lượt có các trọng tâm là G và G′.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

b) Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, D là trung điểm của BC, N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10. Cho hình thang OABC. M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)$.

Bài 11. Cho ΔABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$ c) $\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Bài 12. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD, đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm của tam giác BCI. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{BI},\ \overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a},\ \vec{b}$.

Bài 14. Cho lục giác đều ABCDEF. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AF}$.

Bài 15. Cho hình thang OABC, AM là trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$.

Bài 16. Cho ΔABC. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN},\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ b) Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Bài 17. Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$

b) Đặt $\overrightarrow{BB_1}=\vec{u},\overrightarrow{CC_1}=\vec{v}$. Tính $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}$ theo $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$.

Bài 18. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI. Gọi F là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho 5FB = 2FC.

a) Tính $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$ *và* $\overrightarrow{AF}$.

Bài 19. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của G qua B.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}-5\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG}=\vec{a},\ \overrightarrow{AH}=\vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

VẤN ĐỀ 3: Xác định một điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, trong đó O và $\vec{a}$ đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:

– Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k.
– Hình bình hành.
– Trung điểm của đoạn thẳng.

– *Trọng tâm tam giác, …*

Bài 1. Cho ΔABC . Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . M là điểm tuỳ ý không nằm trên đường thẳng AB . Trên MI kéo dài, lấy 1 điểm N sao cho IN = MI.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MB}$.

b) Tìm các điểm D, C sao cho: $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{ND}$; $\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

b) Xác định điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD, O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng với điểm S bất kì, ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

Bài 6. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ b) $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{BC}$ d) $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Bài 7. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Bài 8. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, F, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{IA}+IB-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

c) $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ d) $3\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Hãy xác định các điểm I, F, K thoả các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{ID}$ b) $2\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}=3\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{FD}$

c) $4\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$. Chứng minh D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh 2 véc tơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ *và* $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Bài 11. Cho tứ giác ABCD.

a) Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (*G đgl trọng tâm của tứ giác ABCD*).

b) Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Bài 1. Cho G là trọng tâm của tứ giác ABCD. A′, B′, C′, D′ lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh:

a) G là điểm chung của các đoạn thẳng AA′, BB′, CC′, DD′.

b) G cũng là trọng tâm của của tứ giác A′B′C′D′.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Trong mỗi trường hợp sau đây hãy xác định điểm I và số k sao cho các vectơ $\vec{v}$ đều bằng $k.\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ d) $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}$.

VẤN ĐỀ 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng – Hai điểm trùng nhau

• *Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chứng minh ba điểm đó thoả mãn đẳng thức* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, *với k ≠ 0.*

• *Để chứng minh hai điểm M, N trùng nhau ta chứng minh chúng thoả mãn đẳng thức* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$, *với O là một điểm nào đó hoặc* $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

Bài 1. Cho bốn điểm O, A, B, C sao cho : $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Trên BC lấy điểm H, trên BD lấy điểm K sao cho: $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh: A, K, H thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$.

Bài 3. Cho ΔABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi: $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. (*HD*: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$)

b) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng (*HD*: J là trọng tâm ΔAIB).

Bài 4. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD. Trên các tia AD, AB lần lượt lấy các điểm F, E sao cho AD = $\frac{1}{2}$AF, AB = $\frac{1}{2}$AE. Chứng minh:

a) Ba điểm F, C, E thẳng hàng.

b) Các tứ giác BDCF, DBEC là hình bình hành.

Bài 6. Cho ΔABC. Hai điểm I, J được xác định bởi: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 7. Cho ΔABC. Hai điểm M, N được xác định bởi: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm M, G, N thẳng hàng, với G là trọng tâm của ΔABC.

Bài 8. Cho ΔABC. Lấy các điểm M N, P: $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. b) Chứng minh 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 1. Cho ΔABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh các tam giác RIP và JQS có cùng trọng tâm.

Bài 2. Cho tam giác ABC, A′ là điểm đối xứng của A qua B, B′ là điểm đối xứng của B qua C, C′ là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có chung trọng tâm.

Bài 3. Cho ΔABC. Gọi A′, B′, C′ là các điểm định bởi: $2\overrightarrow{A'B} + 3\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{B'C} + 3\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{C'A} + 3\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$. Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm.

Bài 4. Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lấy các điểm A′, B′, C′ sao cho:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{AC}$$

Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có chung trọng tâm.

Bài 5. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là điểm đối xứng của M qua các trung điểm K, I, J của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ đồng qui tại một điểm N.

b) Chứng minh rằng khi M di động, đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thoả mãn: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, D và E là hai điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) Tính $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

a) Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

b) Xác định x để đường thẳng MN đi trung điểm I của BC. Tính $\frac{IM}{IN}$.

Bài 9. Cho ba điểm cố định A, B, C và ba số thực *a, b, c* sao cho $a+b+c\neq 0$.

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm G thoả mãn $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Gọi M, P là hai điểm di động sao cho $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi P là trung điểm của BN. Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Để tìm tập hợp điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ ta biến đổi đẳng thức vectơ đó để đưa về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:

– Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

– Tập hợp các điểm cách một điểm cố định một khoảng không đổi đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

–

Bài 1. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ b) $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$.

HD: a) Đường tròn đường kính AB b) Trung trực của AB.

Bài 2. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$

c) $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ d) $|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$.

HD: a) Trung trực của IG (I là trung điểm của BC, G là trọng tâm ΔABC).

b) Dựng hình bình hành ABCD. Tập hợp là đường tròn tâm D, bán kính BA.

Bài 3. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng nối 2 điểm M, N xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm tập hợp các điểm H sao cho: $\left|3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}\right|$.

d) Tìm tập hợp các điểm K sao cho: $2\left|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right| = 3\left|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right|$

Bài 4. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

c) Chứng minh 3 điểm A, I, D thẳng hàng.

d) Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

II. TOẠ ĐỘ

Trục toạ độ

- Trục toạ độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu $\left(O;\vec{e}\right)$.
- Toạ độ của vectơ trên trục: $\vec{u} = (a) \Leftrightarrow \vec{u} = a.\vec{e}$.
- Toạ độ của điểm trên trục: $M(k) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k.\vec{e}$.
- Độ dài đại số của vectơ trên trục: $\overline{AB} = a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a.\vec{e}$.

Chú ý: *+ Nếu* $\overrightarrow{AB}$ *cùng hướng với* $\vec{e}$ *thì* $\overline{AB} = AB$.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ *ngược hướng với* $\vec{e}$ *thì* $\overline{AB} = -AB$.

+ Nếu A(a), B(b) thì $\overline{AB} = b - a$.

+ Hệ thức Sa–lơ: Với A, B, C tuỳ ý trên trục, ta có: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

2. Hệ trục toạ độ

- Hệ gồm hai trục toạ độ *Ox, Oy* vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị trên *Ox, Oy* lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$. O là gốc toạ độ, *Ox* là trục hoành, *Oy* là trục tung.
- Toạ độ của vectơ đối với hệ trục toạ độ: $\vec{u} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
- Toạ độ của điểm đối với hệ trục toạ độ: $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
- Tính chất: Cho $\vec{a} = (x;y), \vec{b} = (x';y'), k \in R$, $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B), C(x_C;y_C)$:

+ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ + $\vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y')$ + $k\vec{a} = (kx;ky)$

+ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow \exists k \in$ R: $x' = kx$ *và* $y' = ky$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$ (nếu $x \neq 0, y \neq 0$).

+ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

+ Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

+ Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

+ Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$: $x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}$; $y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}$.

(M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$).

VẤN ĐỀ 1: Toạ độ trên trục

Bài 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là –2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overline{NA} + 3\overline{NB} = -1$.

Bài 2. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là –3 và 1.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1$.

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB}$.

Bài 3. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A(–2), B(4), C(1), D(6).

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh: $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$.

c) Gọi J là trung điểm của CD. Chứng minh: $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$.

Bài 4. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

Bài 5. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A, B, C, D tuỳ ý.

a) Chứng minh: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{DA}.\overline{BC} = 0$.

b) Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, AB, CD. Chứng minh rằng các đoạn IJ và KL có chung trung điểm.

VẤN ĐỀ 2: Toạ độ trên hệ trục

Bài 1. Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i}$; $\vec{d} = -2\vec{j}$.

b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = -\vec{i} + \dfrac{3}{2}\vec{j}$; $\vec{d} = -4\vec{j}$; $\vec{e} = 3\vec{i}$.

Bài 2. Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u} = (2;-3)$; $\vec{u} = (-1;4)$; $\vec{u} = (2;0)$; $\vec{u} = (0;-1)$.

b) $\vec{u} = (1;3)$; $\vec{u} = (4;-1)$; $\vec{u} = (1;0)$; $\vec{u} = (0;0)$.

Bài 3. Cho $\vec{a} = (1;-2)$, $\vec{b} = (0;3)$. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b};\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b};\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}$. b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b};\ \vec{v}=2+\vec{b};\ \vec{w}=4\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Bài 4. Cho $\vec{a}=(2;0),\ \vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\ \vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$.

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho: $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}$.

c) Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}$.

Bài 5. Cho hai điểm $A(3;-5),\ B(1;0)$.

a) Tìm toạ độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng của A qua C.

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Bài 6. Cho ba điểm A(–1; 1), B(1; 3), C(–2; 0).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB.

Bài 7. Cho ba điểm A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2).

a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Bài 8. Cho ba điểm A(1; –2), B(2; 3), C(–1; –2).

a) Tìm toạ độ điểm D đối xứng của A qua C.

b) Tìm toạ độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tam giác ABC với trực tâm H, B′ là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy xét quan hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{AH}$ *và* $\overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{AB'}$ *và* $\overrightarrow{HC}$.

Bài 2. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) Gọi G là trung điểm của IJ. Chứng minh: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

c) Gọi P, Q là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M, N là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có chung trung điểm.

Bài 3. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$. Chứng minh các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh hai tổng vectơ: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Bài 4. Cho ΔABC với trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM.

a) Chứng minh: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì, chứng minh: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$. b) $3\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I và J là trung điểm của BC, CD.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\right)$ b) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$.

c) Tìm điểm M thoả mãn: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi D và E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm D, E, G thẳng hàng.

Bài 8. Cho ΔABC. Gọi D là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ và M là trung điểm đoạn BD.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) AM cắt BC tại I. Tính $\frac{IB}{IC}$ và $\frac{AM}{AI}$.

Bài 9. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa điều kiện:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

d) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$

e) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

Bài 10. Cho ΔABC có A(4; 3), B(−1; 2), C(3; −2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 11. Cho A(2; 3), B(−1; −1), C(6; 0).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

c) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 12. Cho A(0; 2), B(6; 4), C(1; −1). Tìm toạ độ các điểm M, N, P sao cho:

a) Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P làm trung điểm của các cạnh.

b) Tam giác MNP nhận các điểm A, B, C làm trung điểm của các cạnh.

CHƯƠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ

Bài 1: Tính tích vô hướng của 2 vecto.

Phương pháp:

-Tính $\left|\vec{a}\right|;\left|\vec{a}\right|$ và góc tạo bởi 2 vecto $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

-Áp dụng công thức $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

BÀI TẬP

1.Cho hình vuông ABCD có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ĐS: 0 ; a^2

2.Cho tam giác ABC vuông tại C có AC = 9 và BC = 5. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ĐS:81

3.Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3.

a.Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ suy ra $\cos A$ b.Gọi G là trọng tâm tam giác . Tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$

c.Tính $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}.+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

d.Gọi D là giao điểm phân giác trong của góc A với BC . Tính AD theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ rồi suy ra AD

HD:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ bình phương 2 vế : ĐS : $-\frac{3}{2}$ $\cos A = -\frac{1}{4}$

b.$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$ ĐS : $\frac{5}{3}$

c.ĐS: $-\frac{29}{6}$ $AD = \frac{3\sqrt{6}}{5}$

Bài 2:Chưng minh một đẳng thức vec tơ có lien quan đến tích vô hướng hay đẳng thức các độ dài .
Phương pháp :
-Ta sử dụng các phép toán về vec tơ và các tính chất của tích vô hướng .
-Về độ dài ta chú ý :$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Thí dụ1 : Cho tam giác ABC . và M là một điểm bất kỳ .

1.Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$

2.Gọi G là trọng tâm tam giác chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

3.Suy ra $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ với a ; b ;c là độ dài 3 cạnh của tam giác

Chưng minh

$VT = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) =$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$

2.$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$

$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow VT = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}\right)$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) == 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

3.$M \equiv A \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$

$M \equiv B \Rightarrow BA^2 + BC^2 = 4GB^2 + GA^2 + GC^2$

$M \equiv C \Rightarrow CB^2 + AC^2 = 4GC^2 + GB^2 + GA^2$

$\Rightarrow 6\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = 2(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

BÀI TẬP:

1.Cho 2 điểm cố định A và B và M là một điểm bất kỳ .H là hình chiếu của M lên AB và I là trung điểm của AB.Chứng minh rằng :

a)$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ b)$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ c)$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}.\overline{IH}$

2.Cho tứ giác ABCD .

a.Chứng minh rằng $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

b. Chưng minh điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD có 2 đường chéo vuông góc là :$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

3.Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền BC = $a\sqrt{3}$ .Gọi M là trung điểm của BC biết

$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .Tính AB và AC ĐS : $AB = a\sqrt{2}$ $AC = a$

4.Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R .Gọi M và N là 2 điểm thuộc nữa đương tròn và AM và BN cắt nhau tại I.

a.Chưng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$

:b,Từ đó tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R

5.Cho tam giác ABC có trực tâm H và M là trung điểm BC Chứng minh $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{BC^2}{4}$

6.Cho tứ giác ABCD có 2 đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M và P là trung điểm của AD . Chứng minh $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{BC} <=> \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

Bài 3: Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3) .Xác định hình dạng của tam giác ABC.

Phương pháp :

– Tính $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $BC=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$ $CA=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$

–Nêu AB = BC = CA =>Tam giác ABC đều .

–Nếu AB = AC =>Tam giác ABC cân

–Nếu AB = AC và BC = AB√2 => Tam giác ABC vuông cân tại B

–Nếu $BC^2=AB^2+AC^2$ =>tam giác ABC vuông tại A

Thí dụ 1:

TRong mpOxy cho tam giác ABC với A(1;5) B(3;–1) C(6;0).Xác định hình dạng của tam giác ABC . Tính diện tích tam giác ABC.

GIẢI :

$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{40}$ $BC=\sqrt{(6-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{10}$ $CA=\sqrt{(1-6)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}$

$CA^2=50$; $AB^2+BC^2=40+10=50 => CA^2=AB^2+BC^2 => \Delta ABC$ vuông tại B

$=> S=\frac{1}{2}BA.BC=10$đvdt

Thí dụ 2:Cho tam giác ABC với A(–1;3) B(3;5) C(2;2).Xác định hình dạng của tam giác ABC ,Tính diện tích của tam giác ABC và chiều cao kẻ từ A.

$AB=\sqrt{20}$ $BC=\sqrt{10}$; $CA=\sqrt{10} => AB=\sqrt{2}.BC => \Delta ABC$ vuông cân tại A

S=5đvdt

Thí dụ 3:Trong mpOxy cho A(4;0) $B\left(2;2\sqrt{3}\right)$

Chứng minh tam giac OAB đều . .Tìm trực tâm của tam giác OAB

Giải :

$OA=4$ $OB=4$ $AB=\sqrt{(2-4)^2+\left(2\sqrt{3}-0\right)^2}=4$

$=> OA=OB=AB=4 => \Delta OAB$ đều

Trực tâm H của tam giác OAB cũng là trọng tâm tam giác OAB $=> H\left(2;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài Tập :

1. Cho tam giác ABC với A(1;0) B(–2;–1) và C(0;3).Xác định hình dạng của tam giác ABC .Tìm Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

ĐS: Vuông tại A , Tâm I (–1;1)

2.Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(0;2) B(m ; 0) và C(m+3; 1) .Định m để tam giác ABC vuông tại A.

ĐS:m = –1 hay m =-2

3. Cho tam giác ABC biết A(–1;3) B(–3;–2) và C(4;1) , Chứng minh tam giác ABC vuông từ đó suy ra khoảng cách từ C đến AB.

4.Ch 2 điểm A (2 ; –1) và B(–2;1) Tìm điểm M biết tung độ là 2 và tam giác ABM vuông tại C .

ĐS: M(1;2) và M(–1;2)

5.Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;4) và B(1 ; 1) . Tìm điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

ĐS: C(4;0) và C(–2;2)

Bài 4: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3) .Xác định trọng tâm G , trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.***

Phương pháp :

–Trọng tâm $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Tìm trực tâm H

-Gọi H(x;y)là trực tâm của tam giác ABC

Tính $\overrightarrow{AH}=(x-x_1;y-y_1)$ Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ .Tính $BH=(x-x_2;y-y_2)$;$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$

Do H là trực tâm $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$ Giải hệ trên tìm x ; y

Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi I(x;y) . Tính $AI^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$ $BI^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$ $CI^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

I là tâm đường tròn ngoai tiếp tam giác ABC ⇔AI = BI =CI

Giải hệ trên tìm x ; y

BÀI TẬP:

Bài 13. Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(5 ;4) B(2 ;7) và C(–2 ;–1) .

a.Tìm trọng tâm G , trực tâm H và tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b.Chứng minh I ; G ;H thẳng hang.

1.Cho tứ giác ABCD với A(3;4) B(4;1) C(2;–3;D(–1;6) .Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn.

HD: Tìm tâm I của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (ĐS: I(-1;1), Chứng minh IA =ID.

2.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–1;–3) B(2;5) và C(4;0).Xác định trực tâm H của tam giác ABC.

ĐS:$\left(\frac{164}{31};-\frac{15}{31}\right)$

3.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–1;4) B(–4;0) C(2;–2) . Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ĐS: $I\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4.Trong mpOxy cho 2 điểm A(–2;–2) và B(5 ;–4) .

a)Tìm điểm C sao cho trọng tâm của tam giác ABC là điểm G(2;0) ĐS:C(3;6)

b)Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ĐS $I\left(\frac{169}{66};\frac{47}{33}\right)$

5.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(0;1) B(3;2) và C(1;5) .Tìm trực tâm H của tam giác ABC .

ĐS: $H\left(\frac{21}{11};\frac{25}{11}\right)$

Bài 5: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3) .Xác định tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.***

Phương Pháp:

–Tính AB ;AC; k =-AB/AC

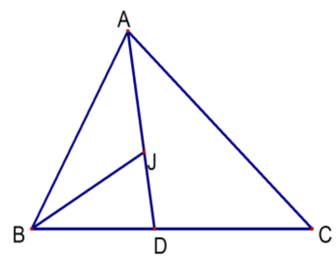
–Gọi D là giao điểm đường phân giác trong của góc A với cạnh BC

=> $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{DC}$ => tọa độ của D.

–Tính BA và BD =k'= –BA/BD

–Gọi J là giao điểm của 2 đường phân giác trong của góc A và góc B

=> $\overrightarrow{JA}=k'\overrightarrow{JD}$ =>tọa độ của J



Thí dụ :Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–2;3) $B\left(\frac{1}{4};0\right)$ và C(2;0)

Tìm tâm J đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

GIẢI

$$AB=\frac{15}{4};AC=5 => k=-\frac{AB}{AC}=-\frac{3}{4}$$

$$\text{Gọi D là giao điểm phân giác trong của góc A và BC} => \overrightarrow{DB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$=>\begin{cases}\frac{1}{4}-x=-\frac{3}{4}(2-x)\\ -y=-\frac{3}{4}(0-y))\end{cases} <=> \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} => D(1;0)$$

$$BA=\frac{15}{4};BD=\frac{3}{4} => k'=-5$$

$$\text{Gọi J là giao điểm phân giác trong của góc B và AD} => \overrightarrow{JA}=-5\overrightarrow{JD}$$

$$=>\begin{cases}-2-x=-5(1-x)\\ 3-y=-5(0-y)\end{cases} => \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases} => J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Bài tập:

1.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(2;6) B(–3;–4) và C(5;0)

a.Chứng minh tam giác ABC vuông .

b.Tìm tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. ĐS : J(2;1)

2. Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1;5) B(–4;–5) và C(4;-1).Tìm tâm J của đương tròn nội tiếp tam giác ABC . ĐS J(1;0)

3. Trong mpOxy cho tam giác ABC với $A\left(\frac{-15}{2};2\right)$ $B(12;15)$ $C(0;-3)$ Tìm tâm J của đương tròn nội tiếp tam giác ABC . ĐS J(-1;2)

Bài 6: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3).Gọi A’ là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC.Tìm A’***

Phương pháp:

Gọi A’(x;y).

$$-\text{Tính } \overrightarrow{AA'}=(x-x_1;y-y_1)\quad ;\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2;y_3-y_2)\quad \overrightarrow{BA'}=(x-x_2;y-y_2)$$

$$-\text{Giải hệ}\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA'}=t\overrightarrow{BC}\end{cases} <=> \begin{cases}(x-x_1)(x_3-x_2)+(y-y_1)(y-y_3)=0\\ x-x_2=t(x_3-x_2)\\ y-y_2=t(y_3-y_2)\end{cases}$$

Tìm x;y theo t ,Thay vào (1) tìm t từ đó=> x và y

Thí dụ :Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1 ; 5) B(3;–1) C(6;0).Tìm chân đường cao B’ kẻ từ B lên CA.

GIẢI:

Gọi $B'(x;y)$: $\overrightarrow{BB'} = (x-3; y+1)$ $\overrightarrow{CA} = (-5;5)$ $\overrightarrow{AB'} = (x-1; y-5)$

B' là chân đường cao kẻ từ B lên AC $<=> \begin{cases} \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{AB'} = t\overrightarrow{AC} \end{cases} <=> \begin{cases} -5(x-3)+5(y+1) = 0 \\ x-1 = -5t \\ y-5 = 5t \end{cases}$

$$=> \begin{cases} x = 1-5t \\ y = 5+5t \\ -x+y = -4 \end{cases} <=> \begin{cases} t = -\dfrac{4}{5} \\ x = 5 \\ y = 1 \end{cases} => B'(5;1)$$

BÀI TẬP:

1.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(3;–1) B(1;5) và C(6;0) . Gọi A' là chân đường cao kẻ từ A lên BC tìm A' . ĐS:A'(5;1)

2.Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;1) B(–2;4) . Gọi H là hình chiếu của O lên AB . Tìm H . ĐS:H$\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

3.Trong mpOxy cho tam giác BAC với A(3;–4) B(–4;–2) và C(1;3) .Tìm chân đường cao A' của đường cao kẻ từ A lên BC. ĐS:A'$\left(-\dfrac{37}{53};-\dfrac{156}{53}\right)$

Bài 7

Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3),Tính cosA.

Phương pháp :

$-$ Tính $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $-$ Tính AB và AC; Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$-\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$$

Thí dụ : Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(0;3) B(2;2) và C(–6;1).Tínhsố đo của góc A.

$\overrightarrow{AB} = (2;-1) => AB = \sqrt{5}$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-6;-2) => AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12+2 = -10$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{-10}{2.\sqrt{10}.\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} => A = 135^0$$

BÀI TẬP TÍCH VÔ HƯỚNG

1Cho hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{b}$. Chứng minh rằng :

$$\overline{a}.\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$$

2.Cho hai vectơ $\overline{a}$, $\overline{b}$ có $\left|\overline{a}\right| = 5$, $\left|\overline{b}\right| = 12$ và $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = 13$.Tính tích vô hướng $\overline{a}.(\overline{a}+\overline{b})$ và suy ra góc giữa hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{a}+\overline{b}$

3.Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi H là trung điểm BC,tính

a) $\overline{AH}.\overline{BC}$ $\quad$ b) $\overline{AB}.\overline{AC}$ $\quad$ c) $\overline{AC}.\overline{CB}$

4.Cho hình vuông ABCD tâm O,cạnh a.Tính:

a) $\overline{AB}.\overline{AC}$ $\quad$ b) $\overline{OA}.\overline{AC}$ $\quad$ c) $\overline{AC}.\overline{CB}$

5. Tam giác ABC có AC = 9 ,BC = 5 ,C = 90^o ,tính $\overline{AB}.\overline{AC}$

6. Tam giác ABC có AB = 5 ,AC = 4 ,A = 120^o

a)tính $\overline{AB}.\overline{BC}$ $\qquad$ b) Gọi M là trung điểm AC tính $\overline{AC}.\overline{MA}$

7. Tam giác ABC có AB = 5 ,BC = 7 ,CA = 8

a)Tính $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ rồi suy ra giá trị góc A

b)Tính $\overline{CA}\,.\,\overline{CB}$

c)Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho CD = $\frac{1}{3}$CA .Tính $\overline{CD}\,.\,\overline{CB}$

8.Cho hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{b}$ thỏa mãn $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$ và $(\overline{a}, \overline{b}) = 120^o$

Với giá trị nào của m thì hai vectơ $\overline{a} + m\overline{b}$ và $\overline{a} - m\overline{b}$ vuông góc nhau

9. Tam giác ABC có AB = 4 ,AC = 8 và góc A = 60^o .Trên tia AC lấy điểm M và đặt $\overline{AM} = k\overline{AC}$ .Tìm k để BM vuông góc với trung tuyến AD của tam giác ABC

10.Cho tam giác ABC cân đỉnh A, cạnh bên = a và hai trung tuyến BM, CN vuông góc nhau . Tính cosA

11. Tam giác ABC có AB = 6,AC = 8,BC = 11

a)Tính $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$

b)Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 2.Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho AN = 4.Tính $\overline{AM}\,.\,\overline{AN}$

12.Cho O là trung điểm AB,M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng :

$\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = OM^2 - OA^2$

13.Cho hình vuông ABCD tâm O, M là điểm thuộc cạnh BC.Tính $\overline{MA}\,.\,\overline{AB}$ và $\overline{MO}\,.\,\overline{AB}$

14.Cho tứ giác ABCD , I là trung điểm BC, chứng minh rằng :

a) $\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = IA^2 - IB^2$

b) $\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

c) $\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2)$

15.Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

16.Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a,b,c. Gọi G là trọng tâm,hãy tính:

a) $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ b) $\overline{GA}\,.\,\overline{GB}$ c) $\overline{GA}\,.\,\overline{GB} + \overline{GB}\,.\,\overline{GC} + \overline{GC}\,.\,\overline{GA}$

d) Chứng minh rằng : $\overline{BC}\,.\,\overline{CA} + \overline{CA}\,.\,\overline{AB} + \overline{AB}\,.\,\overline{BC} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

e)Tính AG theo a ,b ,c

17.Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng :

$$\overline{BC}\,.\,\overline{AD} + \overline{CA}\,.\,\overline{BE} + \overline{AB}\,.\,\overline{CF} = 0$$

18.Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R.Gọi M, N là hai điểm trên (O) và I = AM∩BN. Chứng minh rằng :

a) $\overline{AI}\,.\,\overline{AM} = \overline{AI}\,.\,\overline{AB}$

b) $\overline{BI}\,.\,\overline{BN} = \overline{BI}\,.\,\overline{BA}$

c) $\overline{AI}\,.\,\overline{AM} + \overline{BI}\,.\,\overline{BN} = 4R^2$

19.Cho 4 điểm A,B,C,D tuỳ ý

a) Chứng minh rằng : $\overline{AB}\,.\,\overline{CD} + \overline{AC}\,.\,\overline{DB} + \overline{AD}\,.\,\overline{BC} = 0$

b)Từ đó chứng minh rằng trong một tam giác,ba đường cao đồng qui

20.Cho tam giác ABC cân tại A.Gọi H là trung điểm của BC,và D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM ⊥BD

21.Cho hình vuông ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm BC và CD. Chứng minh rằng : AN ⊥ DM

22.Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AK và DC . Chứng minh rằng : $BM \perp MN$

23.Cho hình thang ABCD vuông tại A và B. AB = h, cạnh đáy AD = a, BC = b Tìm điều kiện giữa a ,b ,h để

a) $AC \perp BD$ b) $IA \perp IB$ với I là trung điểm CD

24.Cho tam giác ABC có AB = 3 ;AC = 6 và $A = 45^o$. Gọi L là chân đường phân giác trong của góc A

a)Tính $\overline{AB} . \overline{AC}$

b)Tính $\overline{AL}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ độ dài của AL

c)M là điểm trên cạnh AC sao cho AM = x. Tìm x để $AL \perp BM$

25.Cho tam giác ABC có AB = 2a ,AC = a và $A = 120^o$

a) Tính BC và $\overline{BA} . \overline{BC}$

b)Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho BN = x. Tính $\overline{AN}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$,x

c)Tìm x để $AN \perp BM$

26.Cho tứ giác ABCD,chứng minh rằng:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\overline{AC} . \overline{DB}$$

27.Cho tam giác ABC có H là trực tâm và M là trung điểm của BC

Chứng minh rằng : $\overline{MH} . \overline{MA} = \frac{1}{4} BC^2$

28.Cho tứ giác ABCD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H ,K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO; I và J là trung điểm của AD và BC.

Chứng minh rằng $HK \perp IJ$

28.Cho đường tròn (O;R) và hai dây cung AA’ ,BB’ vuông góc nhau tại S. Gọi M là trung điểm của AB. chứng minh rằng: $SM \perp A'B'$

29.Cho tam giác ABC. Tìm quĩ tích những điểm M thoả mãn :

a) $\overline{AM} . \overline{AB} = \overline{AC} . \overline{AB}$

b) $MA^2 + \overline{MA} . \overline{MB} + \overline{MA} . \overline{MC} = 0$

c) $MA^2 = \overline{MC} . \overline{MA}$

d) $(\overline{MA} + \overline{MB}).(\overline{MA} + \overline{MC}) = 0$

e) $(\overline{MA} - \overline{MB}).(2\overline{MB} - \overline{MC}) = 0$

30.Cho điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng Δ, H là hình chiếu của A trên Δ.Với mỗi điểm M trên Δ, ta lấy điểm N trên tia AM sao cho $\overline{AN} . \overline{AM} = AH^2$. Tìm quĩ tích các điểm N

31.Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M,gọi P là trung điểm đoạn thẳng AD.

Chứng minh rằng $MP \perp BC \Leftrightarrow \overline{MA} . \overline{MC} = \overline{MB} . \overline{MD}$

33.Cho hình vuông ABCD,điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$

N là trung điểm đoạn thẳng DC,chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân

34.Cho AA’ là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng $2\,\overline{MA} . \overline{MO} = MA(MA - MA')$

35.Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M sao cho các góc AMB ,BMC ,CMA đều bằng 120^o .Các đường thẳng AM ,BM ,CM cắt đường tròn (O) lần lượt tại A’ ,B’ ,C’. Chứng minh rằng:

MA + MB + MC = MA’ + MB’ + MC’

37.Cho hình chữ nhật ABCD tâm O, M là điểm tuỳ ý,chứng minh rằng :

a) $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$

b) $\overline{MA} . \overline{MC} = \overline{MB} . \overline{MD}$

c) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

d) $MA^2 + \overline{MB}.\overline{MD} = 2\overline{MA}.\overline{MO}$

38.Cho tam giác ABC và các hình vuông ABED, ACHI ,BCGH

Chứng minh rằng :

a) $(\overline{AD} + \overline{BF}).\overline{AC} = 0$

b) $(\overline{AD} + \overline{BF} + \overline{CH}).\overline{AC} = 0$

c) $\overline{AD} + \overline{BF} + \overline{CH} = \overline{0}$

d) $\overline{AE} + \overline{BG} + \overline{CI} = \overline{0}$

39.Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho CM = 2BM, N là điểm trên cạnh AB sao cho BN = 2AN

a) Tính vectơ $\overline{AM}$ và $\overline{CN}$ theo hai vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$

b)Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c sao cho AM ⊥ CN

40.a)Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm (O,R). M là một điểm tuỳ ý trên đường tròn . Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

b) Tổng quát bài toán trên cho một đa giác đều n cạnh

45.Cho tam giác ABC có AB = AC = 5 , góc BAC = 120^o nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi D là trung điểm AB và E là trọng tâm của tam giác ADC

a)Tính $\overline{AB}.\overline{AC}$

b)AH là đường cao của tam giác ABC.Tính $\overline{AH}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$

c)Chứng minh rằng IE ⊥ CD

49.Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(– 1;1) ,B(1;3) ,C(1;– 1)

Chứng minh rằng: tam giác ABC vuông cân tại A

50 .Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(2;4) ,B(– 3;1) ,C(3;– 1)

a)Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

b)Kẻ đường cao AH .Tìm tọa độ chân đường cao H

51.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A,B,C,D với A(– 1;1) ,B(0;2) ,C(3;1) và D(0;– 2). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD là hình thang cân

52.Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm A,B,C với A(– 1;– 1) ,B(3;1) ,C(6;0)

a)Chứng minh rằng: 3 điểm A ,B ,C tạo thành một tam giác

b)Tính góc B của tam giác ABC

54.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A(3;4) ,B(4;1) ,C(2;– 3) ,D(– 1;6). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn

55.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A(– 8;0) ,B(0;4) ,C(2;0) ,D(– 3;– 5). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn