

CHUYÊN ĐỀ 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Biết, hiểu công thức, quy tắc tính đạo hàm
- + Nắm vững tính đơn điệu của hàm số.
- + Thấy được mối liên hệ về sự biến thiên của hàm số thông qua đạo hàm của nó
- + Biết quy tắc xét dấu đã học ở lớp 10.
- + Nhận biết được mối liên hệ của hàm số khi biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$ khi biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ hoặc đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

❖ Kỹ năng

- + Biết áp dụng công thức, các quy tắc tính đạo hàm vào các hàm số cơ bản
- + Nhận diện được bảng biến thiên, đồ thị của hàm số đơn điệu trên một khoảng cụ thể.
- + Vẽ được bảng biến thiên, đồ thị các hàm số cơ bản, các hàm chứa trị tuyệt đối.
- + Vận dụng được tính chất của các hàm số trùng phương, hàm số bậc ba, các hàm hữu tỷ vào giải nhanh toán trắc nghiệm.
- + Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$, $y = f(u(x) \pm h(x))$ khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ($y = f'(x)$).

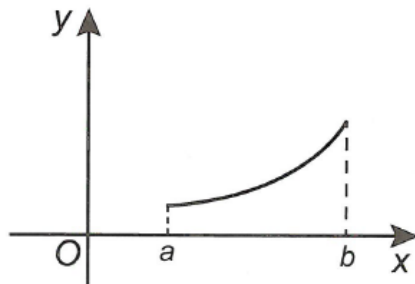
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K .

Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu

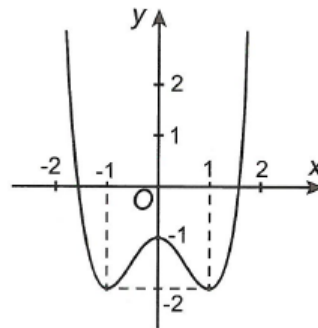
$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$



Hàm số đồng biến

Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



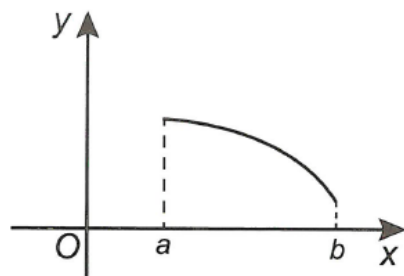
Dựa vào đồ thị ta thấy

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Ta có bảng xét

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Hàm số nghịch biến

Định lý thuận

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Định lý đảo

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

Lưu ý:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng lên từ trái sang phải.

- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng xuống từ trái sang phải.

Xét dấu tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

dấu như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta thấy

Hàm số đồng biến trên các khoảng

$$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right); (1; +\infty)$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Ví dụ 3: Cho hàm số $g(x) = 2x^2 - 5x + 6$.

$$\text{Hàm số có } \begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = -23 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý: Định lý thuận dạng “mở rộng”:

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in K$ và dấu “=” tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên K .

$$(a \neq 0)$$

$$g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases};$$

$$g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases};$$

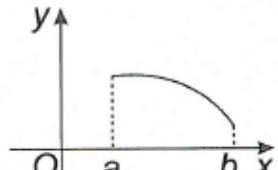
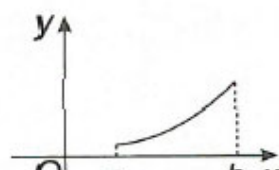
$$g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases};$$

$$g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K .

Hàm số nghịch biến Định lý thuận - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K. Định lý đảo - Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$. Định lý thuận “mở rộng” $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số đồng biến trên K.	Hàm số đồng biến Định lý thuận - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K. Định lý đảo - Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$. Định lý thuận “mở rộng” $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên K.
Đồ thị  <i>Hàm số nghịch biến</i> - Đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải	Đồ thị  <i>Hàm số đồng biến</i> - Đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải
Định nghĩa Hàm số f được gọi là nghịch biến trên K nếu	Định nghĩa Hàm số f được gọi là đồng biến trên K nếu

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số không chứa tham số

Bài toán 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y = f(x)$

Phương pháp giải

Thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D .

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 5. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

Ví dụ: Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x - 2$ đồng biến

trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(5; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$.
C. $(-2; 3)$. D. $(1; 5)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 6x - 5$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{13}{3}$	$\nearrow$	$\frac{19}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.

Chọn D.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		42		10		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, mệnh đề C sai.

Chọn C.

Ví dụ 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ là

A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

D. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-3	-4	-3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng của miền xác định.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in D$ nên hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng của miền xác định.

Chọn D.

Ví dụ 4. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -x^3 - 2x$. B. $y = \frac{x-2}{x-1}$. C. $y = x^4 + 3x^2$. D. $y = x^3 + 3x^2$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = -x^3 - 2x \Rightarrow y' = -3x^2 - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số $y = -x^3 - 2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

Ta có $y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 6. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2-4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			-4		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	4	$\nearrow$
			$-\infty$				

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn D.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = (1 - x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

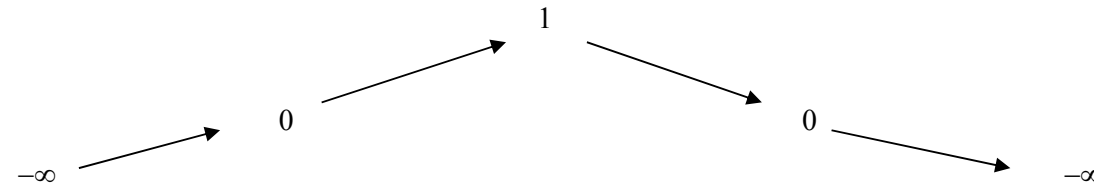
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (1 - x^2)' = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (-2x)$$

Vì $2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của đạo hàm cùng dấu với $(-x)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$									

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn B.

Chú ý: Dấu hiệu mở rộng khi kết luận khoảng đồng biến $(-\infty; 0)$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + 8x + \cos x$. Với hai số thực a, b sao cho $a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(a) = f(b)$.
- B. $f(a) > f(b)$.
- C. $f(a) < f(b)$.
- D. $f(a) \geq f(b)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Chọn C.

Ví dụ 9. Hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = |x^2 - 2x - 3| = \sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2} \Rightarrow y' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 3)}{\sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; y' \text{ không xác định nếu } x = -1; x = 3.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$				
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn D.

Chú ý: - Vì $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên có thể xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{f^2(x)}$ để suy ra kết quả.

$$\text{- Đạo hàm } y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}.$$

Bài toán 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ khi cho hàm số $y = f'(x)$

Phương pháp giải

Thực hiện theo ba bước như sau:

Bước 1. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 3. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

là $f'(x) = x^2(x - 1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0); (1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn A.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 3)$ có tính chất

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3) \text{ và } f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2).$$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1; 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Hướng dẫn giải

Vì $f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2)$ nên $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $(1; 2)$.

Trên các khoảng $(0; 2), (1; 3), (0; 3)$ hàm số $y = f(x)$ thỏa $f'(x) \geq 0$ nhưng $f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2)$ nên $f(x)$ không đồng biến trên các khoảng này.

Chọn B.

Bài toán 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ khi cho bảng biến thiên hoặc đồ thị

Phương pháp giải

Khi cho bảng biến thiên:

- Trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x)$ mang dấu $+$ như sau:

(dương) thì ta kết luận $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

- Trên khoảng $(c; d)$ nếu $f'(x)$ mang dấu – (âm):
thì ta kết luận $f(x)$ nghịch biến trên $(c; d)$.

Khi cho đồ thị:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì hàm số có

đồ thị là đường đi lên từ trái sang phải trên $(a; b)$.

- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì hàm số

có đồ thị là đường đi xuống từ trái sang phải trên

$(a; b)$.

- Trong trường hợp: Hàm số $f(x)$ là hàm hằng

(không đổi) trên $(a; b)$ thì hàm số có đồ thị là

đường song song hoặc trùng với trục Ox trên $(a; b)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y						

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới

đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y' > 0, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow$

hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.

Chọn B.

🚩 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	$f(2)$	$-\infty$

Hỏi bảng biến thiên trên là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 12x$.

B. $y = x^3 - 6x^2 + 12x$.

C. $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

D. $y = -x^2 + 4x - 4$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 12x$

$$y' = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x-2)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ thỏa mãn.}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 12x$

$$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ không thỏa mãn.}$$

Xét hàm số $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$

$$y' = -3x^2 + 8x - 4, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

Xét hàm số $y = -x^2 + 4x - 4$

$y' = -2x + 4, y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất.

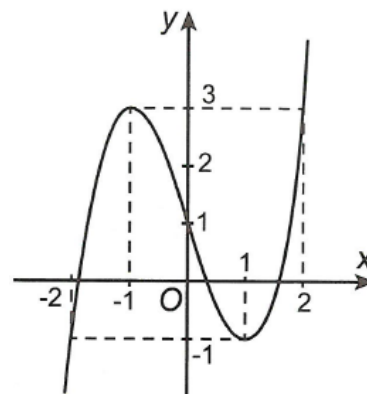
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$ không thỏa mãn.

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng dưới đây nào?

- A. $(-2; 2)$. B. $(0; 2)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

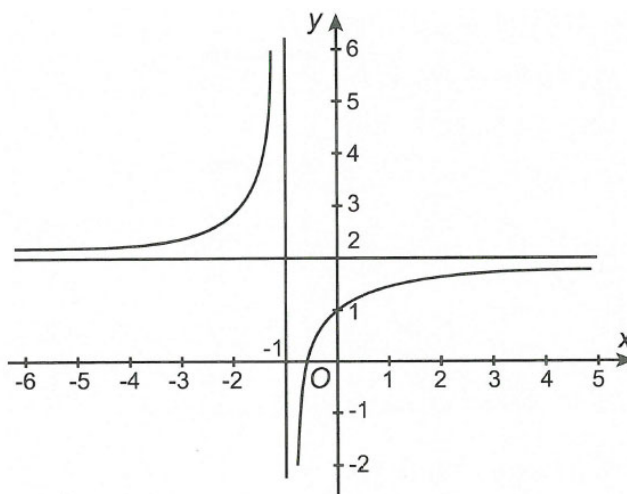
Hướng dẫn giải



- Xét đáp án A, trên khoảng $(-1; 1) \subset (-2; 2)$ đồ thị hướng đi xuống hay hàm nghịch biến trên khoảng đó.
- Xét đáp án B, trên khoảng $(0; 1) \subset (0; 2)$ đồ thị có đoạn hướng đi xuống hay hàm số nghịch biến trên đó.
- Xét đáp án C, trên khoảng $(-1; 1)$ đồ thị có hướng đi xuống hay hàm số nghịch biến trên khoảng đó.
- Xét đáp án D, trên khoảng $(1; 2)$ đồ thị có hướng đi lên hay hàm số đồng biến trên khoảng đó nên chọn.

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Khẳng định đúng là

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-1; +\infty)$ đồ thị hàm số đi lên (theo chiều từ trái qua phải) nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Chọn D.

Chú ý: Kết luận hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng không viết ở dạng $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

 Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Phát biểu nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$, trong đó $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a; b)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

D. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Với mọi $x_1 > x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

B. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

C. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

D. Với mọi $x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Câu 4: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 7: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - x$.

C. $y = x^4 - 1$.

D. $y = x^3 + x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 10: Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(0; 1)$.

Câu 11: Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

B. $y = \sqrt{x+1}$.

C. $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{3x - x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(0; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 13: Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 14: Hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x+2}$ nghịch biến trên các khoảng

A. $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

B. $(-5; -2)$.

C. $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(-1) \geq f(1)$.
- B. $f(-1) = f(1)$.
- C. $f(-1) > f(1)$.
- D. $f(-1) < f(1)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- B. $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- C. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- D. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 20: Cho hàm số có bảng biến thiên sao. Mệnh đề nào đúng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			11		$+\infty$		$+\infty$

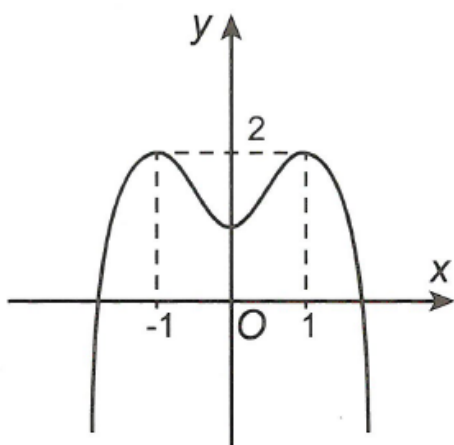
A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (11; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 11)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

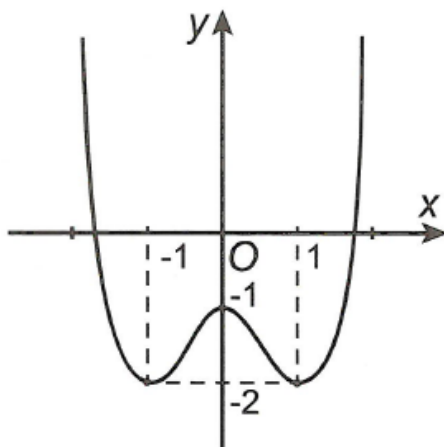
A. $(-1; 1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(0; 1)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-1; 0)$.

Câu 23: Hàm số $y = |x^2 - 4x|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-\infty; 0); (2; 4)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 24: Hàm số $y = |x^3 - 3x + 2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; -2); (-1; 1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-2; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Dạng 2: Các bài toán chứa tham số

Bài toán 1. Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định của nó

Bài toán 1.1. Tìm tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

 Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ (1).

Bước 2. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $a = 0$, thay trực tiếp vào (1) để xét.

Trường hợp 2: $a \neq 0$, tính $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

Ví dụ: Tìm giá trị của m để hàm số

$$y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (m^2 - 2m + 1)x - m$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 4(m-2)x + m^2 - 2m + 1$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 4(m-2)^2 - 3(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 10m + 13 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 2\sqrt{3}$$

Vậy với $m \in [5 - 2\sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3}]$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 2]$ để hàm số $y = x^3 - x^2 + 3mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 20. B. 2. C. 3. D. 23.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 3m$

Hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{9}$$

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 2]$ nên có $m = 1; m = 2$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 1$ ta có $y' = -1 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Với $m = -1$ ta có $y' = -4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

• Với $m \neq \pm 1$ ta có $y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

Từ các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn D.

Dạng 1.2: Tìm tham số để hàm số để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$$\Leftrightarrow ad - bc > 0$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định

$$\Leftrightarrow ad - bc < 0$$

Bước 3. Kết luận.

Ví dụ: Tìm tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương

m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ nghịch biến trên từng

khoảng xác định.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \frac{2+m}{(x+2)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên

từng khoảng xác định thì $2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2$

Mặt khác m là số nguyên dương nên không tồn tại giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó là

A. $m \geq -1$.

B. $m > -1$.

C. $m > 1$.

D. $m \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có $y = \frac{mx+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{m-1}{(x-1)^2}$

Xét $m=1$, hàm số trở thành $y=1$. (hàm hằng)

Xét $m \neq 1$, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Chọn C.

Lưu ý: Với $m=1$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ví dụ 2. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định} \Leftrightarrow y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Chọn B.

Bài toán 1.3: Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng xác định

Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức

Ví dụ: Tìm các giá trị của m để hàm số

Điều kiện cần để $y = (x-a)^{2m+1} \cdot g(x)$ ($m \in \mathbb{N}$)

$y = x^3(x^3 - 2mx + m^2 - m - 6)$ không đổi dấu khi đi

không đổi dấu khi x đi qua a là $g(a) = 0$.

qua $x = 0$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và

$$\min_K f(x) = A.$$

Khi đó bất phương trình $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \leq A$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và

$$\max_K f(x) = B.$$

Khi đó bất phương trình $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \geq B$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 2mx + m^2 - m - 6$$

Để hàm số không đổi dấu khi đi qua $x=0$ thì

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } m = -2 \text{ thì } y = x^4(x^2 + 4) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow m = -2$ là một giá trị cần tìm.

$$\text{Với } m = 3 \text{ thì } y = x^4(x^2 - 6).$$

Khi đó hàm số chỉ đổi dấu khi x qua $\sqrt{6}$ và $-\sqrt{6}$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số

$$y = x^9 + (3m^2 - m)x^6 + (m^3 - 3m^2 + 2m)x^4 + 2019 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 9x^8 + 5(3m^2 - m)x^4 + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)x^3$$

$$\Rightarrow y' = x^3 [9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)] = x^3 \cdot g(x)$$

$$\text{với } g(x) = 9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m).$$

$$\text{Nếu } g(0) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

thì y' sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x=0 \Rightarrow$ hàm số sẽ có khoảng đồng biến và nghịch biến. Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là $g(0) = 0$

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = 0$ có $y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 1$ có $y' = x^4(9x^4 + 10) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 2$ có $y' = x^4(9x^4 + 50) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy với $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn A.

Lưu ý: Nếu $g(0) \neq 0$ thì y' luôn đổi dấu khi x qua 0, do đó nếu $g(x) = 0$ vô nghiệm thì sẽ luôn có một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.

Ví dụ 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -m^2x^5 - mx^3 - (m^2 - m - 20)x^2 + 2019$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. -4.

B. 1.

C. -1.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5m^2x^4 - 3mx^2 - 2(m^2 - m - 20)x \\ &= x[-5m^2x^3 - 3mx - 2(m^2 - m - 20)] = x.g(x). \end{aligned}$$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Nếu $x = 0$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x = 0$, lúc đó điều kiện (*) không được thỏa mãn.

Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x = 0$ là nghiệm của

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 5 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = -4$ thì $f'(x) = -80x^4 + 12x^2 = x^2(12 - 80x^2)$, do đó $m = -4$ không thỏa mãn.

+ Với $m = 5$ thì $f'(x) = -125x^4 - 15x^2 = -x^2(125x^2 + 15) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó $m = 5$ thỏa mãn.

Vậy $S = \{5\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 5.

Chọn D.

Lưu ý: $f'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm của phương trình $12 - 80x^2 = 0$.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$

Theo yêu cầu bài toán $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	-1		

Vậy $m \leq -1$ mà $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2018 giá trị nguyên.

Chọn A.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

C. $m \geq \sqrt{2}$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m$

Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x \leq m, \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm $f(x) = \sin x - \cos x$ trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

Chọn C.

Dạng 2: Xét tính đơn điệu của hàm số trên khoảng $(\alpha; \beta)$ cho trước

Bài toán 2.1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng cho trước

Phương pháp giải

Sử dụng kiến thức.

Giả sử phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Khi đó

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

$$\alpha \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < x_2 \leq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\beta \\ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ: Tìm giá trị m để hàm số $y = x^3 + x^2 - mx + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 2x - m$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

Để hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 2 < 3 \leq x_2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 3f(2) \leq 0 \\ 3f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3m > 0 \\ 3(16 - m) \leq 0 \\ 3(33 - m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 33$$

Vậy với $m \geq 33$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 2$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lý)}.$$

- Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m+1) - 2(2m+1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \quad m \in (-\infty; 1]$$

Chọn B.

Lưu ý: - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì sẽ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = y'$ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Ví dụ 2. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là

A. $m \geq \frac{12}{7}$.

B. $m < \frac{12}{7}$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m > \frac{7}{12}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m+3 = g(x)$.

Do y là hàm số bậc ba với hệ số $a < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 3) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot g(0) \leq 0 \\ -1 \cdot g(3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \geq 0 \\ 7m-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Chọn A.

Bài toán 2.2: Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng k

 **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x; m) = 3ax^2 + 2bx + c$

Ví dụ: Tìm các giá trị m để hàm số

Bước 2. Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có

$y = -x^3 + 2x^2 + 2mx - 1$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3. Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2$

Bước 4. Giải các điều kiện để suy ra giá trị m cần tìm.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 4x + 2m$

Vì $a = -3 < 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên một đoạn khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 4 + 6m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$$

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \\ x_1 x_2 = -\frac{2m}{3} \end{cases}$

Để hàm số đã cho đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{9} + \frac{8m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}$$

Từ (1) và (2) suy ra $m = \frac{5}{6}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Các giá trị thực của tham số m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 là

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 0$.

D. $m > -\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $|x_2 - x_1| > 1$.

Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 3m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{3} \end{cases}$

$$\text{Với } |x_2 - x_1| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$$

Kết hợp, ta được $m > -\frac{5}{4}$

Chọn D.

Ví dụ 2. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m > 6$.

B. $m \in (0; 6)$.

C. $m < 0$.

D. $m < 0; m > 6$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > 3$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2 - m \\ |-1 - (2 - m)| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ |m - 3| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}.$$

Chọn D.

Bài toán 2.3: Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$ cho trước

 Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Hàm số xác định trên

$$(\alpha; \beta) \Leftrightarrow -\frac{d}{c} \neq (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases}$$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

$$\Leftrightarrow ad - bc > 0.$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định

$$\Leftrightarrow ad - bc < 0$$

Bước 3. Kết luận

Ví dụ: Tìm các giá trị m nguyên để hàm số

$$y = \frac{3x+m}{x-m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (3; +\infty).$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \leq 3$. (*)

$$\text{Ta có } y' = \frac{-4m}{(x-m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $-4m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $m \in (0; 3]$.

Mà m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 3.

C. vô số.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4m\}$

Để hàm số xác định trên $(2; +\infty)$ thì $-4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Ta có $y' = \frac{4m-3}{(x+4m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

Vậy có một số nguyên $m = 0$ thỏa mãn.

Chọn A

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

Ta có $y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -10) \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giảiTập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(m - x)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m \notin (-3; 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = 1$.Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Chọn C.****Bài toán 2.4:** Tìm tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng (đoạn) D . **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x)$

Bước 2. Chuyển về bài toán tìm tham số về một bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$.

Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$, Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

Ví dụ: Tìm các giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + x$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

Hướng dẫn giảiTa có $y' = 4x^3 + 4mx + 1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 4mx + 1 \geq 0, \forall x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{4x^3 + 1}{4x}, \forall x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \left(-x^2 - \frac{1}{4x} \right) = -\frac{33}{8}$$

Mà m nguyên âm nên $m \in \{-1; -2; -3; -4\}$ Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-1; -2; -3; -4\}$. **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x = x(-4x^2 + 4m-6)$

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi $y' \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 4m - 6 \leq 0; \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2}, \forall x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \left(x^2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

Kết hợp với m nguyên không âm suy ra $m \in \{0; 1; 2\}$

Vậy có ba giá trị nguyên không âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Hàm số luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = \frac{3(x^5 - 1)}{x^3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	5
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

$$(1) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$$

Mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-2; -1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}(8m^3 - 1)x^4 - 2x^3 + (2m - 7)x^2 - 12x + 2018$ với m là tham số. Số các giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ là

- A. 2016. B. 2019. C. 2010. D. 2015.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow (2mx)^3 + 2(2mx) \geq (x + 2)^3 + 2(x + 2) \quad (*), \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

Xét $f(t) = t^3 + 2t; f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $2mx \geq x + 2, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right] \Leftrightarrow m \leq \frac{x+2}{2x}, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]} \frac{x+2}{2x} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2}.$$

Do m nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2015 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn D.

Ví dụ 4. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $m \in (-3; 1] \cup [2; +\infty)$. B. $m \in (-3; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -3)$. D. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Khi đó $y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{2} \right\}.$$

Vì hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. Khi và chỉ khi hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Hàm số $y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2} > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6 > 0 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3)$$

Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1.

B. 3.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x) = x^3 - mx + 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ g(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ x^3 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2, \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; +\infty)} (3x^2), \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq \min_{[1; +\infty)} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right), \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Chọn B.

Lưu ý: Vì $y = |g(x)| = \sqrt{g^2(x)}$ nên ta có thể chuyển bài toán về xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{g^2(x)}$.

- Tính đạo hàm $y' = \frac{g'(x) \cdot g(x)}{\sqrt{g^2(x)}}$.

- Hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với $\forall x \in [\alpha; +\infty)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 6. B. 4. C. 7. D. 5.

Câu 2: Tập hợp tất cả các số thực m để hàm số $y = x^3 + 5x^2 - 4mx - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. $\left(-\frac{25}{12}; +\infty\right)$. B. $\left[-\frac{25}{12}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{25}{12}\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{25}{12}\right]$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (4m-8)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 9. B. 7. C. Vô số. D. 8.

Câu 4: Số giá trị m nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. 4035. B. 4037. C. 4036. D. 4034.

Câu 5: Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ trên các khoảng xác định là

- A. $m \leq 2$. B. $m > 2$. C. $m \geq 2$. D. $m < 2$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{9x+m}{mx+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 5. B. Vô số. C. 7. D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 9: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số

$f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. -2 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m+1)\sin x - 3\cos x - 5x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2018; 2018)$ để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3.

B. 4.

C. 4014.

D. 218.

Câu 12: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{x^{2019}}{2019} - \frac{1}{2017x^{2017}} - mx + 2018$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định là

A. 2018.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 13: Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

A. $m > 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m < 1$.

D. $m \geq 1$.

Câu 14: Tập hợp các giá trị m để hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên $(-3; 0)$ là

A. $\left[\frac{-1}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left(\frac{-1}{3}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{-1}{3}\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Câu 15: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $[-1; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right]$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m^2 + 3m + 3)x^2 + 3(m^2 + 1)^2x + m + 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. S là tập hợp con của tập hợp nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-3; 2)$.

Câu 17: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8.

B. 13.

C. 17.

D. 9.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D.

Câu 19: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tổng T của các phần tử trong S là

A. $T = -6$.

B. $T = -5$.

C. $T = -9$.

D. $T = -10$.

Câu 20: Gọi S là tổng các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x - m^2}{x - m - 4}$ đồng biến trên khoảng $(2021; +\infty)$. Giá trị của S bằng

A. 2935144.

B. 2035145.

C. 2035146.

D. 2035143.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 10}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 9.

Câu 22: Các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$ là

A. $m < 2$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 23: Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $m < 2$.

B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m \leq 0$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \frac{1 - 2 \sin x}{2 \sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. 1.

B. 9.

C. 10.

D. 18.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 3) \sin x - \tan x$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. Vô số.

Câu 27: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2 + m|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên $m \in [-2019; 2020]$ sao cho hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$. Số các phần tử của S bằng

A. 2021.

B. 2022.

C. 2023.

D. 4040.

Dạng 3: Hàm ẩn liên quan đến sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

Bài toán 1. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết bảng biến thiên của hàm số m



Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$,

$$y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$$

$$y' = u'(x) \cdot f'(u(x)), \quad y' = u'(x) \cdot f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ bảng biến thiên xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn

$$y' \geq 0, y' \leq 0$$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

Ví dụ: Cho hàm số m xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;1)$. B. $(-2;0)$.

C. $(-1;3)$. D. $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$y = f(1-x) \Leftrightarrow y' = -f'(1-x)$$

Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến

$$\Leftrightarrow -f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = f(1-x)$ có nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;1)$, nên hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

Chọn B.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$.

B. $(-3;-2)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-2;0)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 + 2x)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$2x+2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x^2+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Chọn C.

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

- Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \geq 0$ với $y' = (2x+2)f'(x^2 + 2x)$ (giải bất phương trình tích)

Chú ý:

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$ thì $f(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = a$.

- Bảng xét dấu $g'(x)$ chính là bảng xét dấu của tích $(2x+2)f'(x^2 + 2x)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Hàm số $y = g(x) = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 - 3f'(2-x)$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq f'(2-x) \quad (1).$$

Nhận xét:

• Xét $(2; +\infty)$

Với $x = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 12 \leq f'(-1) = 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(0; 2)$

Với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(-\infty; -2)$

Với $x = -4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 5 \leq f'(6) < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét $(-2; 1)$ thỏa mãn (1) vì

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ f'(2-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 2-x \leq -1 \\ 1 \leq 2-x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Chọn A.

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

- Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \leq 0$.

Với dạng toán này cần tìm những giá trị của x sao cho $\begin{cases} f'(2-x) \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Dạng 2: Tìm khoảng đồng, biến nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ khi biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$

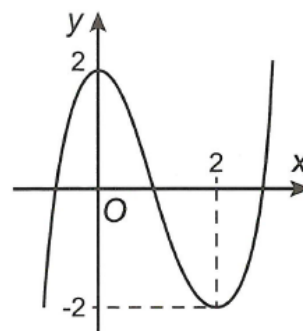
Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$, **Ví dụ:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng

Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm số $y = f(x)$ hoặc (nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$).

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y' \geq 0, y' \leq 0$.

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$



- A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(-1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = -f(x)$ có $y' = -f'(x)$.

Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0.$$

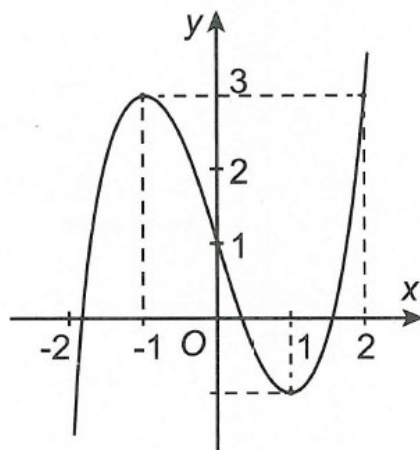
Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [0; 2]$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1; 0)$.

B. $(-8; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$ có $y' = g'(x) = 2f'(2x-1)$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = 2f'(2x-1) \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Cách 2: Hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị, hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(1; -1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$y = g(x) = f(2x-1) = (2x-1)^3 - 3(2x-1) + 1;$$

$$y' = g'(x) = 6(2x-1)^2 - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Chọn D.

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm $y = f(x)$. và hàm $y = f(2x-1) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

Chú ý:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(mx+n)$:

Đồng biến trên $\left(\frac{a-n}{m}; \frac{b-n}{m}\right)$ nếu $m > 0$.

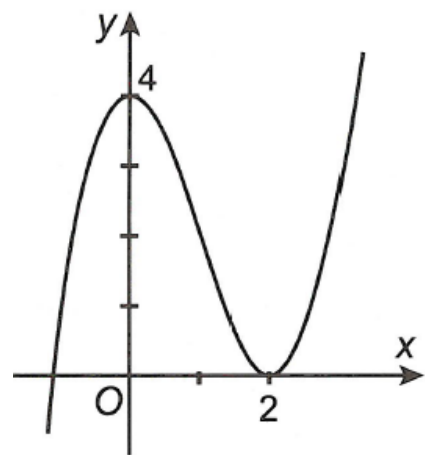
Nghịch biến trên $\left(\frac{b-n}{m}; \frac{a-n}{m}\right)$ nếu $m < 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

có đồ thị như hình bên. Đặt $y = g(x) = f(x^2 + x + 2)$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
- B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
- C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.



Hướng dẫn giải

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình vẽ.

Nhận xét $A(0;4)$ và $M(2;0)$ là hai điểm cực trị của hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{cases}$$

Tìm được hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$

Ta có $y = g(x) = (x^2 + x + 2)^3 - 3(x^2 + x + 2)^2 + 4$

$$y' = g'(x) = (2x+1) \left[3(x^2+x+2)^2 - 6(x^2+x+2) \right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$.

Chọn C.

Lưu ý: - Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm $y = f(x)$ và hàm $y = f(x^2+x+2) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

- Có thể sử dụng $y' = (2x+1) \cdot f'(x^2+x+2)$

$$y' = 0$$

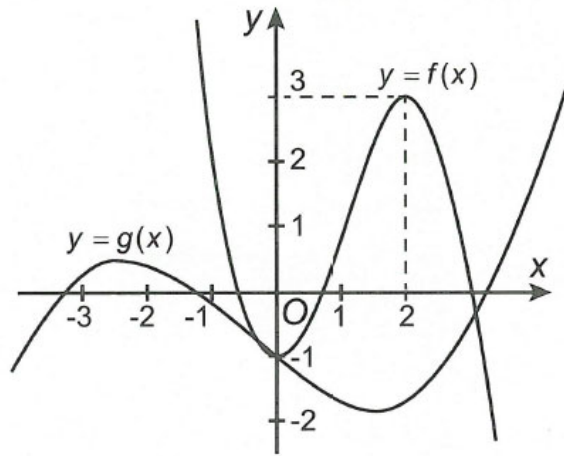
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x+2=0 \\ x^2+x+2=2 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = -f(mx+1)$, $m > 0$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 3. Giá trị m là

- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải



Hàm số $y = g(x) = -f(mx+1)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3 nên $g'(x) = -mf'(mx+1) \leq 0 \Leftrightarrow f'(mx+1) \geq 0$ trên một khoảng có độ dài bằng 3.

$$\text{Ta có } f'(mx+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1=0 \\ mx+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{m} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $f'(mx+1)$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$	
$f'(mx+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$f'(mx+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{m}; \frac{1}{m} \right]$$

$$\text{Yêu cầu của bài toán } \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

Chọn C.

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = f(mx+1)$ kết hợp với phần nhận xét ở ví dụ 1 cho kết quả.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \rightarrow$ Hàm số $y = -f(mx+1)$ nghịch biến trên $\left(\frac{0-1}{m}; \frac{2-1}{m} \right)$ có độ dài bằng $\frac{2}{m} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

Bài toán 3: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$

 **Phương pháp giải**

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$,

$$y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$$

$$y' = u'(x)f'(u(x)), y' = u'(x).f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

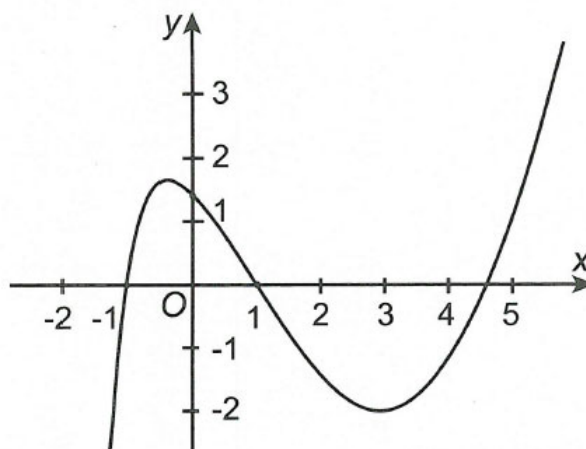
Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn

$$y' \geq 0, y' \leq 0$$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,

$$y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x) = 2x.f'(x^2)$

$$\text{Để } g \text{ nghịch biến thì } g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2) > 0 \end{cases}$$

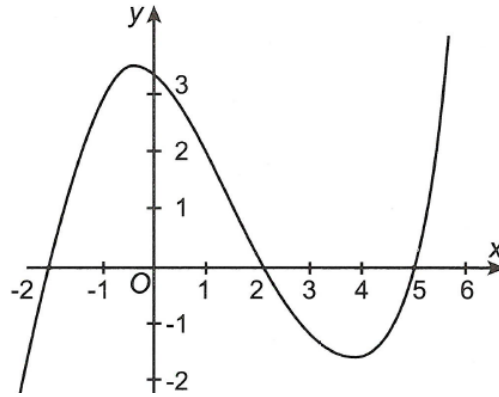
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x^2 < 1 \vee 4 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$; $(-1; 0)$ và $(1; 2)$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị (C): $y = f'(x); f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$ (1)

Mà $g'(x) = -2 \cdot f'(3-2x)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty; -1)$.

Chọn A.

Lưu ý: Thông qua đồ thị hàm số $y = f'(x) \rightarrow$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 5 \leq x \end{cases}.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 2 \leq 5 \leq x \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' = -2f'(3-2x) \leq 0$.

Chú ý:

Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành $\rightarrow$ chọn hàm cụ thể thỏa mãn

$$y = f'(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$$

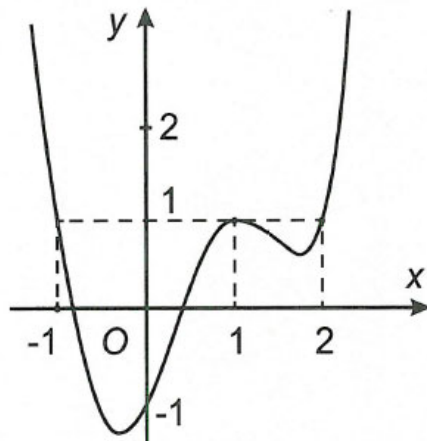
$$\rightarrow y' = -2f'(3-2x).$$

Lập bảng xét dấu.

$\rightarrow$ Kết luận.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018} \text{ trên khoảng nào dưới đây?}$$



- A. $(2;3)$. B. $(0;1)$. C. $(-1;0)$. D. $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x) = f'(x-1) - 1$

$$\text{Do đó } y' > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

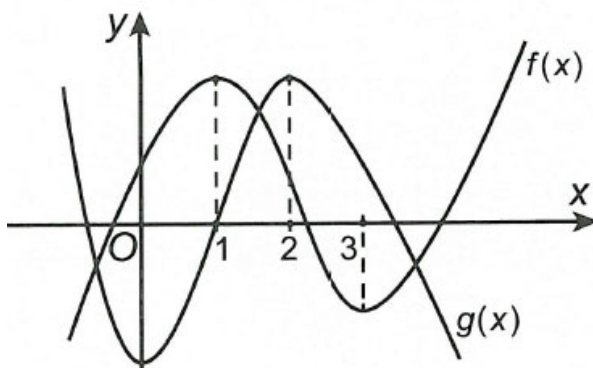
Chọn C.

Nhận xét: Hàm số $g(x)$ có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x), \text{ ta có } f'(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Ví dụ 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng hai hàm số $f(2x-1)$ và $g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến $(m;n)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng



- A. 0. B. -2. C. -4. D. 3.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

Hàm số $y = f(2x-1)$ có $y' = 2f'(2x-1)$

Với $y' < 0 \Leftrightarrow 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

Hàm số $y = g(ax+b)$ có đạo hàm $y' = a.g'(ax+b)$

$$y' = a.g'(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0 \\ ax+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} \\ x = \frac{2-b}{a} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right); \left(\frac{2-b}{a}; +\infty\right)$ (không thỏa mãn).

$$\text{Nếu } a < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2-b}{a}; -\frac{b}{a}\right)$

$$\text{Do hàm số có cùng khoảng nghịch biến là } (1; 2) \text{ nên } \begin{cases} \frac{2-b}{a} = 1 \\ -\frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = -1 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Vậy $4a+b = -4$.

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây.

Hàm số $y = f(2x-2)$ nghịch biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- A. $(-1; 1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 4)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(1; 2)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\nearrow$ 3 $\searrow$ -3 $\nearrow$ 3 $\nearrow$ $+\infty$				

Hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(2; 2018)$. B. $(-2019; -2)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Đặt $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 C. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(0; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$?

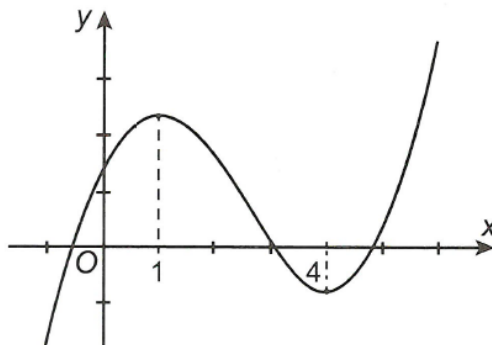
A. 2017.

B. 2018.

C. 2016.

D. 2015.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x - 2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha$ là



A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị dưới đây. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2})$

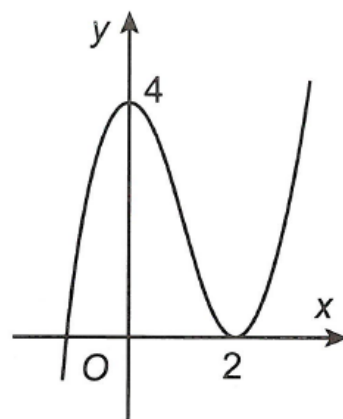
Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.



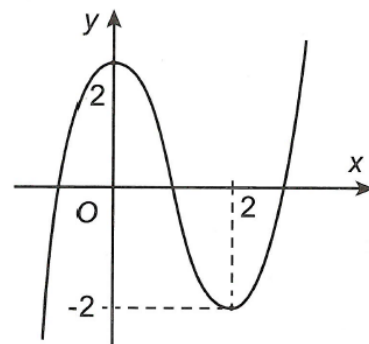
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hàm số $y = -2019f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-1; 1)$.



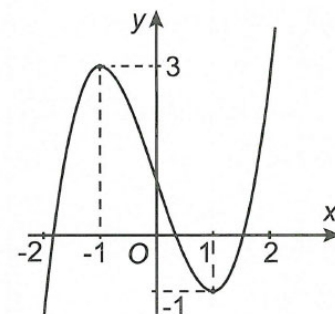
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 + x + m)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ là

A. 0.

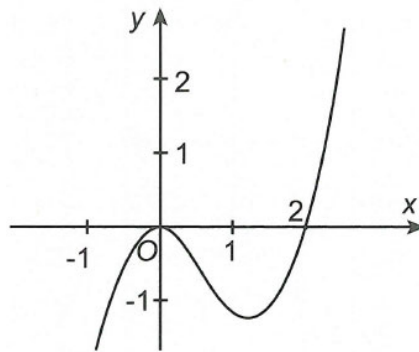
B. 1.

C. 2.

D. 3.

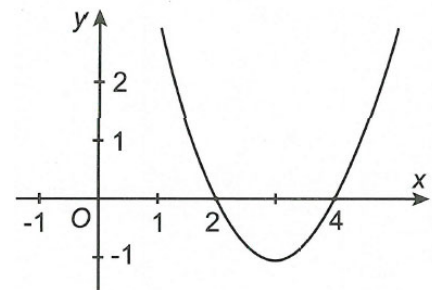


Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x) = f(x^2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?



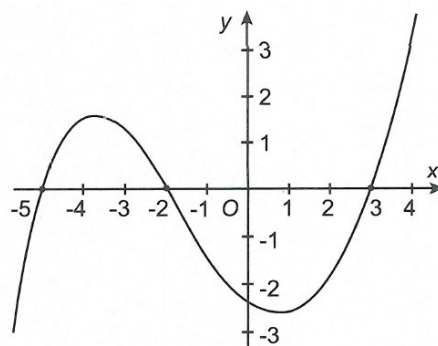
- A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $(1; 2)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1 + x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



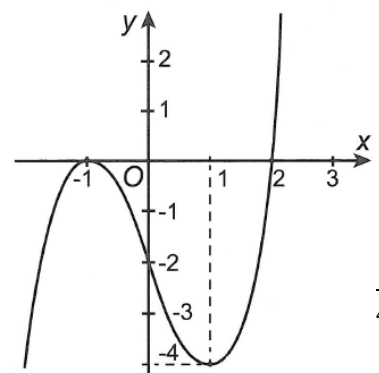
- A. $(\sqrt{3}; +\infty)$.
B. $(-\sqrt{3}; -1)$.
C. $(1; \sqrt{3})$.
D. $(0; 1)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng trong các khoảng sau đây?



- A. $(-\infty; -3)$. B. $(-5; -2)$.
C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham



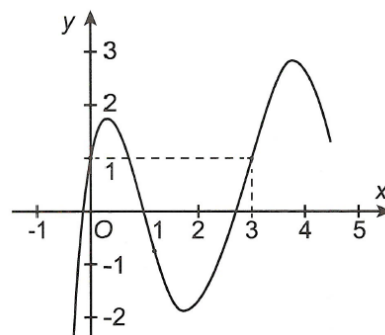
số m thỏa mãn $m \in (-2019; 2019)$ sao cho hàm số $g(x) = f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Số phần tử của tập S là

- A. 2017.
- B. 2019.
- C. 2015.
- D. 2021.

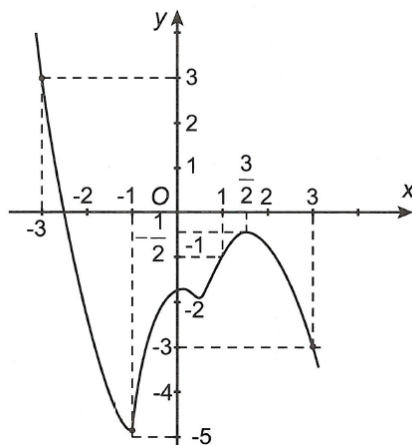
Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$.

Hàm số $g(x) = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-3; -2)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(-1; 0)$.
- D. $(0; 2)$.



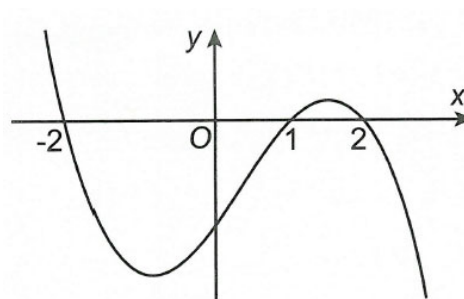
Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng



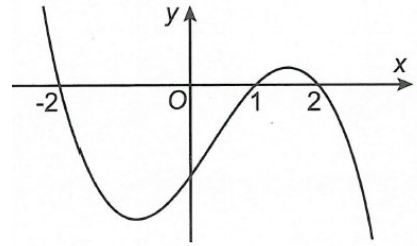
- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.
- B. $(-2; 0)$.
- C. $(-3; 1)$.
- D. $(1; 3)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(-2) = f(2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(-2; -1)$.
- D. $(1; 2)$.

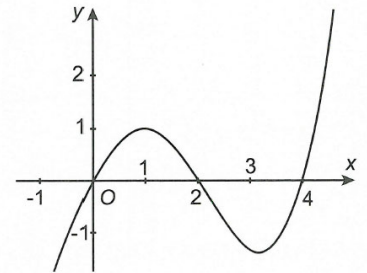


Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên và $f(2) = f(-2) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



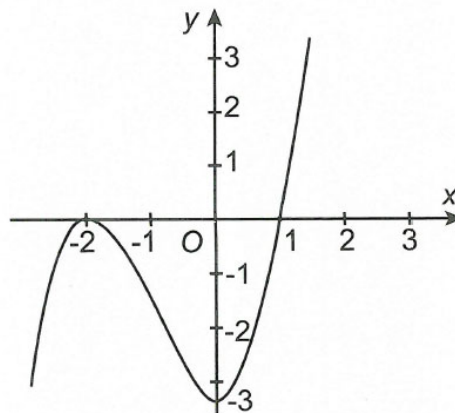
- A. $(-2; 2)$. B. $(1; 2)$.
C. $(2; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(2-x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



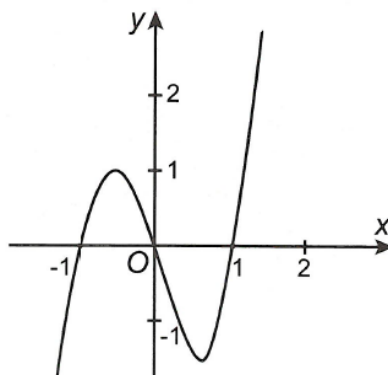
- A. $(-2; 4)$. B. $(-1; 3)$.
C. $(-2; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



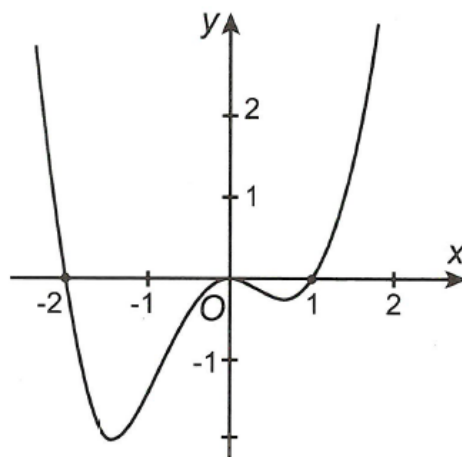
- A. $(-\infty; 8)$. B. $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(\frac{-4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. D. $(-8; 10)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

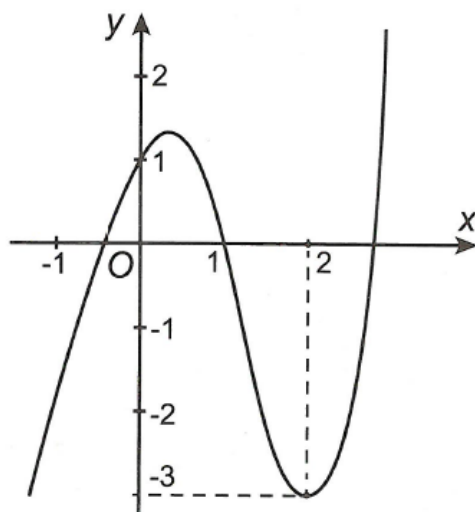
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $g(x) = f(x+1) + f(2-x) - x^2 + 6x - 3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây?

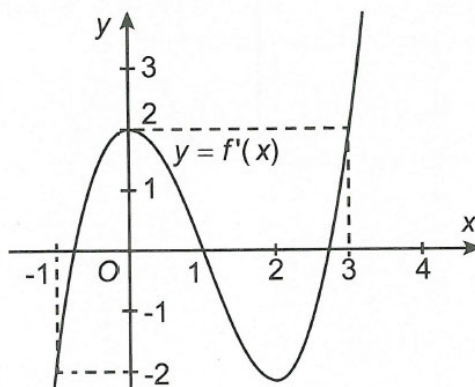
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; 2)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là



- A. $m > 4$. B. $m \leq 4$. C. $m \geq 4$. D. $0 < m < 4$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 11. C. 14. D. 20.

Dạng 4: Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình

Bài toán 1. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình

Phương pháp giải

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D$ mà $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Nhận xét: $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$. Do đó phương

trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm

Ví dụ: Giải phương trình

$$x^3 + x = (3x-1)\sqrt{3x-2}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$

$$\text{Ta có } x^3 + x = (3x-1)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x = (\sqrt{3x-1})^3 + \sqrt{3x-2}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \geq 0$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{Do đó } f(x) = f(\sqrt{3x-2}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 1$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Biết phương trình $27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x-1}$ có một nghiệm thực dương $x = \frac{a}{b} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{d}}$ với

b, c, d là các số nguyên tố. Khẳng định đúng là

- A. $6(a+d) = b+c+1$. B. $6(a+d) = b+c-1$.
C. $5(a+d) = b+c-1$. D. $5(a+d) = b+c+1$.

Hướng dẫn giải

Phương trình

$$27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x-1} \Leftrightarrow (3x)^3 + 3x = (26x-1) + \sqrt[3]{26x-1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1): $f(3x) = f(\sqrt[3]{26x-1}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{26x-1} \Leftrightarrow 27x^3 - 26x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 \\ x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}} \end{cases} \text{ là nghiệm có dạng đã cho}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = 23, d = 3$$

$$\Rightarrow 6(a+d) = b+c-1.$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Biết phương trình $8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = (10x+1)\sqrt{10x-1}$ có một nghiệm thực dương

$x = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và a, c là các số nguyên tố cùng nhau.

Khẳng định đúng là

A. $2(a+c) = b+3.$

B. $4(a+c) = b-3.$

C. $2(a+c) = b-3.$

D. $4(a+c) = b+3.$

Hướng dẫn giải

Nhận xét:

- Vế trái là đa thức bậc ba, vế phải chứa căn bậc hai nên ta biến đổi để xuất hiện $(\sqrt{10x-1})^3$. Ta có

$$(10x+1)\sqrt{10x-1} = [(10x-1)+2]\sqrt{10x-1} = (\sqrt{10x-1})^3 + 2\sqrt{10x-1}$$

Khi đó phương trình có dạng $(ax+b)^3 + 2(ax+b) = (\sqrt{10x-1})^3 + 2\sqrt{10x-1}$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{10}$

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 2(2x-1) = (\sqrt{10x-1})^3 + 2\sqrt{10x-1} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x-1) = f(\sqrt{10x-1}) \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{10x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = 10x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 7x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{41}}{4}$$

$$\Rightarrow a=7, b=41, c=4 \Rightarrow 4(a+c)=b+3.$$

Chọn D.

Ví dụ 3. Biết phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \frac{1}{x+2}$, có một nghiệm thực $x = \frac{a+\sqrt{b}}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và c là số

nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $2ac = b+1$.

B. $ac = b-2$.

C. $2ac = b-1$.

D. $ac = b+2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -13 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1}-2(x+2)=\sqrt[3]{2x+1}-3$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1} = (\sqrt[3]{2x+1})^3 + \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}) \quad (1)$$

với $f(t) = t^3 + t$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 1, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^6 = (\sqrt[3]{2x+1})^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1, b=5, c=2 \Rightarrow 2ac = b-1.$$

Chọn C.

Bài toán 2: Ứng dụng tính đơn điệu vào giải bất phương trình

 **Phương pháp giải**

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D: f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$.

Với mọi $u, v \in D: f(u) \leq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$.



Với mọi u ,

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

$$f(m^2 + 2m) < f(3).$$

Hướng dẫn giải

Vì $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(m^2 + 2m) < f(3)$ khi và chỉ khi

$$m^2 + 2m < 3 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Vậy $m \in (-3; 1)$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$ là

A. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Chọn B.

Ví dụ 2. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Tổng $a + b$ có giá trị bằng

A. -2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \forall x \in (-2; 4)$, do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$

So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 4] \Rightarrow a + b = 5$.

Chọn C.

Dạng 2: Bài toán ứng dụng tính đơn điệu vào bài toán tìm điều kiện để phương trình có nghiệm

 Phương pháp giải

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có **Ví dụ:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + x$. Có bao nhiêu
mìn $f(x) = A$, $\max_D = B$ thì phương trình giá trị nguyên của tham số m để phương trình
 $f(x) = g(m)$ có nghiệm thuộc tập hợp $f(f(x)) = x + 2^m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$?

$D \Leftrightarrow A \leq g(m) \leq B$.

A. 3.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Hàm số

$$f(x) = x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x) = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$\forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 10$$

Xét phương trình

$$f(f(x)) = x + 2^m \Leftrightarrow [f(x)]^3 + f(x) = x + 2^m$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^3 + x^3 = 2^m \quad (1)$$

$$\text{Xét } \forall x \in [1; 2]; 2^3 + 1^3 \leq [f(x)]^3 + x^3 \leq 10^3 + 2^3$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq [f(x)]^3 + x^3 \leq 1008$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 9 \leq 2^m \leq 1008 \Rightarrow 2^4 2^m \leq 2^{10}$$

$$\Rightarrow m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$ là

A. 6.

B. 9.

C. 21.

D. 22.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow \begin{cases} t = f(x) \\ f(t) = x \end{cases} \Rightarrow f(t) + t = f(x) + x. \quad (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u = u^3 + 2u - 2^m$ có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m. \quad (2)$$

Phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow 1^3 \leq 2^m \leq 4^3 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Tổng các giá trị là $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow f(x) = t^3 - m$, kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3 \quad (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 = u^5 + 4u^3 - 4m$

$\Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 > 0, \forall u \in [1; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến đoạn $[1; 2]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x^3 - m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m \quad (2)$

Với $x \in [1; 2], 3 \leq x^5 + 2x^3 \leq 48$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm trên đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Chọn B.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m+2}\sqrt{m+2\sin x} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\sin x \geq 0$.

Ta có $\sqrt{m+2}\sqrt{m+2\sin x} = \sin x \Leftrightarrow m+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x$.

$$\Leftrightarrow m+2\sin x+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x+2\sin x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t$

$f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2\sin x}) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2\sin x} = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = m$$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [0; 1]$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2t = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 - 2t, t \in [0; 1]$

Ta có $g'(t) = 2t - 2; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

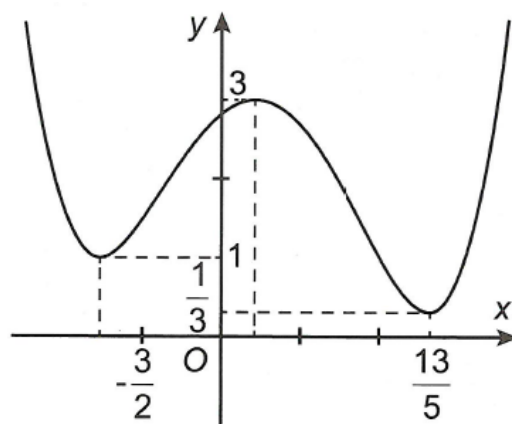
Suy ra $\max_{[0;1]} g(t) = 0; \min_{[0;1]} g(t) = -1$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 0$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0; m = -1$.

Chọn D.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\frac{9m^3 + m}{\sqrt{3f^2(x) + 8}} = f^2(x) + 3$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 27m^3 + 3m = (3f^2(x) + 9)\sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow (3m)^3 + 3m = \left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right)^3 + \sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow g(3m) = g\left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{3f^2(x) + 8} = 3m \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \geq \sqrt{8} \\ f^2(x) = \frac{9m^2 - 8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (2) \\ f(x) = -\sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ thì phương trình (3) vô nghiệm (vì $f(x) > 0, \forall x$)

Do đó để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có ba nghiệm phân biệt hay

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 3 \\ \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{35}}{5} \\ m = \frac{\sqrt{11}}{3} \end{cases}.$$

Chọn B.

 Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Biết nghiệm nhỏ nhất của phương trình $3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$ có dạng $x_0 = \frac{a - \sqrt{c}}{b}$

$(a, b, c \in \mathbb{N}^*)$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^3 + c^4$ là

- A. $S = 2428$. B. $S = 2432$. C. $S = 2418$. D. $S = 2453$.

Câu 2: Số nghiệm thực của phương trình $3(2x - 3)\sqrt{3x - 5} = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 3$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3: Biết phương trình $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{2x+3}-3} = \frac{1}{x+3}$ có một nghiệm dạng $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c} > 0$ với $a, c \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên tố. Tổng $P = a + b + c$ bằng

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 2.

Câu 4: Biết phương trình $(2x+1)\left(2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$ có nghiệm duy nhất là a.

Khi đó

- A. $1 < a < 2$. B. $0 < a < 1$. C. $-2 < a < -1$. D. $-1 < a < 0$.

Câu 5: Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 1}$ có tập nghiệm $(a; b]$. Hiệu $b - a$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. -1.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $(x-1)\left(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6}\right) \leq x+6$ có dạng $[a; b]$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình

$$(x+9)\left[\sqrt{(x+9)^2 + 3} + 1\right] + x\left(\sqrt{x^2 + 3} + 1\right) > 0?$$

- A. 4041. B. 2024. C. 2026. D. 2025.

Câu 8: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(x+1)^3 + 3 - m = 3\sqrt[3]{3x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tổng các phần tử của tập S là

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 5.

Câu 9: Tập các giá trị của m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 3(5 - m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là $S = (a; b]$. Giá trị của biểu thức $T = 5a + 8b$ là

- A. $T = 18$. B. $T = 43$. C. $T = 30$. D. $T = 31$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sin^6 x + 6\sin^4 x - m^3 \sin^3 x + (15 - 3m^2)\sin^2 x - 6m \sin x + 10 = 0$$
 vô nghiệm?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. Vô số.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m} + \sqrt{2019m + x^2} = x^2$ có nghiệm?

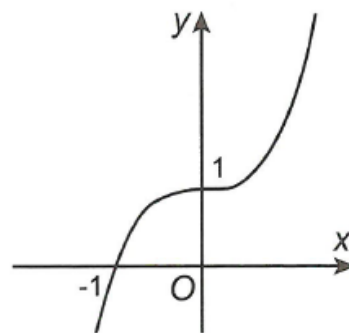
- A. 1. B. 0. C. Vô số. D. 2.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin x$ có nghiệm?

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

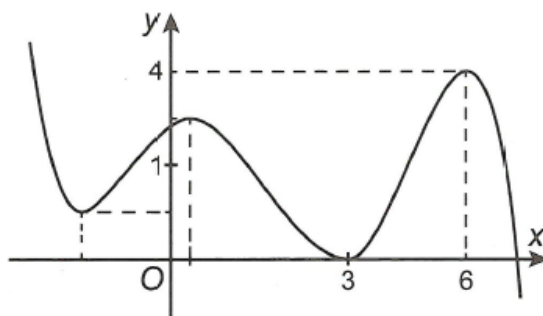
- A. 5.
B. 2.
C. 4.
D. 6.



Câu 14: Cho phương trình $\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3$ có 3 nghiệm phân biệt là

- A. $m = \frac{\pm\sqrt{37}}{2}$. B. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $m = \frac{\sqrt{37}}{2}$. D. $m = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$.

ĐÁP ÁN

DẠNG 1. Xét tính đơn điệu của hàm số không chứa tham số

1-D	2-C	3-D	4-B	5-C	6-B	7-B	8-D	9-C	10-B
11-A	12-A	13-B	14-A	15-A	16-D	17-D	18-D	19-A	20-D
21-B	22-D	23-B	24-D						

DẠNG 2. Các bài toán chứa tham số

1-C	2-D	3-A	4-A	5-D	6-C	7-A	8-D	9-C	10-D
11-A	12-C	13-D	14-A	15-D	16-A	17-A	18-D	19-D	20-D
21-C	22-C	23-B	24-C	25-A	26-A	27-C			

DẠNG 3. Hàm ẩn liên quan đến sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

1-C	2-B	3-B	4-A	5-B	6-A	7-C	8-D	9-C	10-A
11-B	12-C	13-C	14-C	15-C	16-C	17-B	18-D	19-C	20-D
21-A	22-B	23-C	24-C	25-C					

DẠNG 4. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình

1-B	2-C	3-C	4-D	5-A	6-D	7-D	8-C	9-C	10-A
11-A	12-A	13-D	14-C	15-C					