



**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẮC BỘ
LẦN THỨ XII, NĂM 2019**

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC 10

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 20/4/2019

(Đề thi gồm 1 trang)

Câu 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = x + \frac{3}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2\sqrt{2x - 4y + 2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. (4 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại các điểm A, G . Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $H (H \neq E)$. Đường thẳng qua G vuông góc với GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm $K (K \neq G)$, đường thẳng qua G vuông góc với GC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $L (L \neq G)$. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDK, GDL . Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên cạnh BC thì:

- a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định.
- b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương m, n và số nguyên tố p thỏa mãn

$$4m^3 + m^2 + 40m = 2(11p^n - 5).$$

Câu 4. (4 điểm)

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$$

Câu 5. (4 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước 100×100 mà mỗi ô được điền một trong các ký tự A, B, C, D sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của bảng thì số lượng ký tự từng loại đúng bằng 25. Ta gọi hai ô thuộc cùng hàng (không nhất thiết kề nhau) nhưng được điền khác ký tự là “**cặp tốt**”, còn hình chữ nhật có các cạnh song song với cạnh hoặc nằm trên cạnh của bảng và bốn ô vuông đơn vị ở bốn góc của nó được điền đủ bốn ký tự A, B, C, D là “**bảng tốt**”.

- a) Hỏi trong các cách điền ở trên, có bao nhiêu cách điền mà mỗi bảng ô vuông $1 \times 4, 4 \times 1$ và 2×2 đều có chứa đủ các ký tự A, B, C, D ?
- b) Chứng minh rằng với mọi cách điền thỏa mãn đề bài thì trên bảng ô vuông đã cho:
 - i) Luôn có 2 cột của bảng mà từ đó có thể chọn ra được 76 cặp tốt.
 - ii) Luôn có một bảng tốt.

----- **HẾT** -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

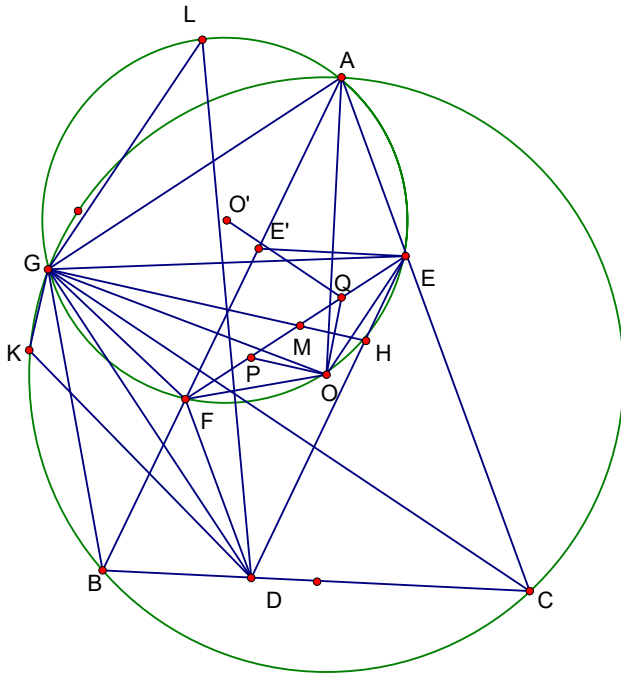
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

KÌ THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DH&ĐBBB NĂM 2019

MÔN: TOÁN 10

ĐÁP ÁN, THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
Câu 1	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = x + \frac{3}{2} & (1) \\ x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2\sqrt{2x - 4y + 2} & (2) \end{cases}$ Nguồn: Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa	4đ
	Điều kiện: $2x - 4y + 2 \geq 0$. Từ phương trình (1), ta có: $2x - 4y + 2 = y^2 + 1 + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2$ $\Leftrightarrow 2x - 4y + 2 = (\sqrt{y^2+1} + y)^2.$	0,5
	Thay vào phương trình (2) và chú ý rằng $\sqrt{y^2+1} + y > 0$. Lúc này ta được $x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2(\sqrt{y^2+1} + y) \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 2(\sqrt{y^2+1} + y)$ $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{y^2+1} + y \quad (3)$	1,0
	Đặt $u = \frac{x-1}{2}$. Từ (3) cho ta $\Leftrightarrow u + \sqrt{u^2+1} = \sqrt{y^2+1} + y$ $\Leftrightarrow u - y + \sqrt{u^2+1} - \sqrt{y^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow u - y + \frac{(u-y)(u+y)}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{y^2+1}} = 0$ $\Leftrightarrow (u-y) \left(1 + \frac{u+y}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right) = 0 \quad (4)$	1,0
	Do $1 + \frac{u+y}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{y^2+1}} = \frac{(\sqrt{u^2+1} + u) + (\sqrt{y^2+1} + y)}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{y^2+1}} > 0$ Nên từ (4) cho ta $u = y$, hay $\frac{x-1}{2} = y \Rightarrow x = 2y + 1$.	0,5
	Thay vào phương trình (1) ta được $(y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = 2y + \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow (\sqrt{y^2+1} + y)^2 = 4$ $\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} + y = 2 \text{ (do } \sqrt{y^2+1} + y > 0 \text{)}. \text{ Tìm được } y = \frac{3}{4}, x = \frac{5}{2}.$ Kết luận: Hệ có đúng một nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{4}\right)$	1,0

Câu2	Cho tam giác ABC có $AB = AC$, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại các điểm A, G. Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $H (H \neq E)$. Đường thẳng qua G vuông góc với GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm $K (K \neq G)$, đường thẳng qua G vuông góc với GC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $L (L \neq G)$. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDK, GDL. Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên cạnh BC thì: a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định. b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định. Nguồn: Chuyên Vĩnh Phúc	4,0
		
	a) Gọi O, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, AEF. Gọi E' là điểm đối xứng với E qua đường thẳng AO. Khi đó $EE' \parallel BC$ vì cùng vuông góc với AO suy ra tứ giác $BDEE'$ là hình bình hành suy ra $DE = BE'$, kết hợp với $DE = AF$ ta được $BF = AE$ (Có thể không cần dựng điểm E', dễ thấy tam giác BFD cân tại F và có tứ giác $AEDF$ là hình bình hành, nên ta có $BF = DF = AE$)	0,5
	Suy ra $\triangle OAE' = \triangle OBF \Rightarrow OE = OF$. Kết hợp với OA là phân giác của góc $\widehat{EAF} \Rightarrow O \in (AEF)$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định	1,0

	A, O .	
	b) Dễ thấy tam giác FBD cân tại F suy ra $FB = FD$, $\widehat{GBF} = \frac{1}{2}\widehat{GOA} = \frac{1}{2}\widehat{GFA} \Rightarrow \Delta FGB$ cân tại F suy ra $FB = FG$. Từ đó suy ra F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DGB. Chứng minh tương tự ta được E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DGC. Từ đó EF là trung trực của GD, kết hợp với AG vuông góc với GD suy ra $EF \parallel AG$. $\widehat{FHD} = \widehat{EAF} = \widehat{EDF} \Rightarrow \Delta FHD$ cân tại F suy ra $FH = FD \Rightarrow H \in (GDB)$.	1,0
	P là giao điểm của đường thẳng qua O song song với GH và EF, Q là giao điểm của đường thẳng qua O' song song với GC và EF. E là tâm đường tròn (GDC) và O là tâm đường tròn ngoại tiếp (AGC) suy ra $OE \perp GC$, kết hợp với GC vuông góc với GL suy ra GL song song OE. Do đó $OE \perp O'Q \Rightarrow QE = QO(1)$. Tương tự ta được $PO = PF(2)$.	1,0
	Mặt khác $OE = OF$, kết hợp với (1) và (2) ta được $\Delta QOE = \Delta POF \Rightarrow OP = OQ \Rightarrow OO'$ là trung trực của PQ, kết hợp với OO' là trung trực của GA nên tứ giác AQPG là hình thang cân hay nó nội tiếp suy ra (GPQ) luôn đi qua điểm A cố định.	0,5
Câu 3	Tìm các số nguyên dương m, n và số nguyên tố p thỏa mãn $4m^3 + m^2 + 40m = 2(11p^n - 5).$ Nguồn: Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định	4,0
	PT $\Leftrightarrow (4m+1)(m^2+10) = 22p^n$	0,5
	TH1: $n = 1$, thử trực tiếp với $m = 1, 2, 3, 4, 5$ đều không thỏa mãn Với $m > 5 \Rightarrow 4m+1 > 22, m^2+10 > 22$. Do đó $4m+1 \nmid p, m^2+10 \nmid p$: vô lý do $n = 1$.	0,5
	TH2: $n > 1$, thử trực tiếp với $m = 1, 2, 3, 4, 5$ đều không thỏa mãn Với $m > 5 \Rightarrow 4m+1 > 22, m^2+10 > 22$. Do đó $4m+1 \nmid p, m^2+10 \nmid p$ Suy ra $\begin{cases} 4m+1 = 11^x \cdot p^a \\ m^2+10 = 2 \cdot 11^y \cdot p^b \end{cases} (x, y \in \{0, 1\}, x+y=1, a, b \in \mathbb{N}^*)$ Dễ thấy $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có $m^2+10 > 4m+1$	1,0
	+) Nếu $b \geq a$ thì $11(m^2+10) \equiv 0 \pmod{4m+1} \Rightarrow 11m^2 \equiv -110 \pmod{4m+1}$ $11 \cdot 16m^2 \equiv -1760 \pmod{4m+1} \Rightarrow 11 \equiv -1760 \pmod{4m+1}$ (do $16m^2 \equiv 1 \pmod{4m+1}$) $\Rightarrow 1771 \equiv 0 \pmod{4m+1}$	1,0

	Mà $4m + 1 \equiv 1 \pmod{4}, 1771 = 7.11.23$ $\Rightarrow \begin{cases} 4m + 1 = 77 \\ 4m + 1 = 161 \\ 4m + 1 = 253 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 19 \\ m = 40 \\ m = 63 \end{cases}$ Thử lại đều không thỏa mãn	
	+) Nếu $b < a$ thì $y = 1, x = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 4m + 1 = p^a \\ m^2 + 10 = 2.11.p^b \end{cases}$ Do $\begin{cases} p \mid 4m + 1 \\ p \mid m^2 + 10 \end{cases} \Rightarrow p \mid 4(m^2 + 10) - m(4m + 1) = 40 - m$ $\Rightarrow p \mid (4m - 160) \Rightarrow p \mid 161 \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 23 \end{cases}$	0,5
	+ Nếu $p = 23$ thì do $22.23^b > 23^a \Rightarrow 22 > 23^{a-b}$: vô lý do $a - b \in \mathbb{N}^*$ + Nếu $p = 7$ thì do $22.7^b > 7^a \Rightarrow 22 > 7^{a-b} \Rightarrow a - b = 1$ Khi đó ta có $\Rightarrow \begin{cases} 4m + 1 = 7^{b+1} \\ m^2 + 10 = 22.7^b \end{cases} \Rightarrow m = 12$ Thay vào phương trình ban đầu tìm được $n = 3$. Vậy $(m, n, p) = (12, 3, 7)$.	0,5
Câu 4	Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$ Nguồn: Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình	4,0
	$\sum_{cyc} \frac{a(a-2b+c)}{ab+1} = \sum_{cyc} \frac{a^2+1+ac+1-2(ab+1)}{ab+1} = \sum_{cyc} \frac{a^2+1}{ab+1} + \sum_{cyc} \frac{ac+1}{ab+1} - 6$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta có: $\sum_{cyc} \frac{ac+1}{ab+1} \geq 3 \sqrt[3]{\prod_{cyc} \frac{ac+1}{ab+1}} = 3 \quad (1)$	1,0
	Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swcharz ta có: $(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$	1,0

	Thiết lập các bất đẳng thức tương tự ta suy ra: $\prod_{cyc} (a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq \prod_{cyc} (ab + 1)^2 \Rightarrow$ $\left(\prod_{cyc} (a^2 + 1)\right)^2 \geq \left(\prod_{cyc} (ab + 1)\right)^2 \Rightarrow \left(\prod_{cyc} (a^2 + 1)\right) \geq \left(\prod_{cyc} (ab + 1)\right)$ $\Rightarrow \prod_{cyc} \frac{a^2 + 1}{ab + 1} \geq 1$																	
	Áp dụng bất đẳng thức AM –GM ta lại có $\sum_{cyc} \frac{a^2 + 1}{ab + 1} \geq 3\sqrt[3]{\prod_{cyc} \frac{a^2 + 1}{ab + 1}} \geq 3 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$	1,0																
Câu 5	Cho bảng ô vuông kích thước 100×100 mà mỗi ô được điền một trong các ký tự A, B, C, D sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của bảng thì số lượng ký tự từng loại đúng bằng 25. Ta gọi hai ô thuộc cùng hàng (không nhất thiết kề nhau) nhưng được điền khác ký tự là “cặp tốt”, còn hình chữ nhật có các cạnh song song với cạnh của bảng và bốn đỉnh của nó được điền đủ bốn ký tự A, B, C, D là “bảng tốt”. a) Hỏi trong các cách điền ở trên, có bao nhiêu cách điền mà mỗi bảng ô vuông $1 \times 4, 4 \times 1$ và 2×2 đều có chứa đủ các ký tự A, B, C, D? b) Chứng minh rằng với mọi cách điền thỏa mãn đề bài thì trên bảng ô vuông đã cho: i) Luôn có 2 cột của bảng mà từ đó có thể chọn ra được 76 cặp tốt. ii) Luôn có một bảng tốt. Nguồn: Chuyên Lào Cai	4,0																
	a) Không mất tính tổng quát, giả sử rằng 4 ô đầu tiên của cột 1 được điền A, B, C, D. Khi đó, ô thứ hai của cột 2 phải điền D vì nó thuộc hai hình vuông 2×2 đã chứa sẵn A, B, C. Do đó, ta điền tiếp được cột 2 theo thứ tự là C, D, A, B. Cứ như thế, ta điền tiếp cho cột 3, 4. <table><tr><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>C</td></tr><tr><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td></tr><tr><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td></tr></table>	A	C	A	C	B	D	B	D	C	A	C	A	D	B	D	B	1,0
A	C	A	C															
B	D	B	D															
C	A	C	A															
D	B	D	B															
	Tuy nhiên, ta thấy các hàng khi đó không thỏa mãn vì chỉ chứa hai loại ký tự. Vậy nên không có cách điền nào thỏa mãn điều kiện đã nêu.	1,0																
	b) i. <u>Tồn tại hai cột</u>. Giả sử phản chứng rằng mỗi cặp cột tùy ý đều có ít nhất 25 cặp ô cùng ký tự. Cố định cột 1, xét 99 cột còn lại. Gọi T là số bộ (a, b) trong đó cột $a \geq 2$ có ô thứ b từ trên xuống là cùng ký tự. Theo giả sử trên thì $T \geq 99 \cdot 25$.	1,0																

	Mặt khác, theo giả thiết thì $T = 100 \cdot 24$ (tính theo hàng). Suy ra $100 \cdot 24 \geq 99 \cdot 25$, điều vô lý này chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai, tức là luôn chọn được hai cột thỏa mãn đề bài.	
	ii. <u>Tồn tại bảng tốt.</u> Giả sử phản chứng rằng không có 2 hàng, 2 cột nào cắt nhau tạo thành hình chữ nhật thỏa mãn. Xét 2 cột đã chọn được ở trên, giả sử đã có cặp $(A, B), (A, C)$ thì sẽ không có (C, D) và (B, D). Ta có hai khả năng: - Nếu có (A, D) thì không có (B, C), khi đó mỗi cặp trong 76 cặp đều có ký tự A; trong khi số lần ký tự A xuất hiện trên đó tối đa là 50, vô lý. - Nếu có (B, C) thì không có (A, D); khi đó, trên 76 cặp sẽ có $76 \cdot 2 = 152$ số lần xuất hiện của ký tự A, B, C, trong khi đó số lần xuất hiện ký tự A, B, C tối đa trong 76 cặp trên là 150, cũng vô lý. Từ đây ta có đpcm.	1,0

Chú ý khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tô chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.
2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,5 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.
3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong tổ chấm và ghi vào biên bản.

===== HẾT =====