

BÀI 00. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ

A. Định nghĩa hàm số:

Trong toán học, ta giả sử cho hai tập hợp (tập nguồn và tập đích), mỗi phần tử của tập nguồn ứng với một và chỉ một phần tử thuộc tập đích thì ta có thể coi đó là một hàm số.

$$f : D \rightarrow T \text{ hoặc } f : x \rightarrow f(x) \text{ hoặc } y = f(x)$$

D : là tập xác định (hay miền xác định) của hàm số, với $D \subset \mathbb{R}$. Hiểu là: $\forall x \in D$.

T : là miền giá trị của hàm số. Hiểu là: $\forall y \in T$.

x : gọi là biến độc lập hay còn gọi là đối số.

y : gọi là biến phụ thuộc hay còn gọi là hàm số.

$f(x)$: là giá trị của hàm f tại x .

Xét hàm số: $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$. ứng với $x = 2$ ta tìm được: $y(2) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$.

B. Tập xác định:

Hàm số	Điều kiện có nghĩa
$y = A(x)$ (hàm đa thức) Hàm không mẫu, không căn	$\forall x \in \mathbb{R}$ Tập xác định là $D = \mathbb{R}$
$y = \frac{A(x)}{B(x)}$ (hàm phân thức- hữu tỉ) Hàm có mẫu, không căn	$B(x) \neq 0$ Giả sử tìm được $x \neq \alpha \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$
$y = \sqrt{A(x)}$ (hàm vô tỉ) Hàm có căn ở phía tử	$A(x) \geq 0$ từ đó ta tìm được khoảng (đoạn,...) K cũng chính là tập xác định của hàm số
$y = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$ (hàm vô tỉ) Hàm có căn ở phía mẫu	$B(x) > 0$ từ đó ta tìm được khoảng K cũng chính là tập xác định của hàm số

Chú ý: các hàm trên là đại diện tính tổng quát cho hàm đại số. Ở chương trình phổ thông chúng ta cần nắm 3 loại hàm: hàm đại số; hàm lượng giác; hàm siêu việt –hàm này sẽ đào sâu trong phần sau.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 1: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{9 - x^2}$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$

B. $D = (-3; 3)$

C. $D = [-3; 1] \cup [2; 3)$

D. $D = [-3; 1]$

Câu 2: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)}$

A. $D = (1; +\infty)$

B. $D = (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

C. $D = (-\infty; 1]$

D. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Câu 3: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = x^2 + \frac{3}{1 + \cos 2x}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 4: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

B. $D = [-1; 5]$

C. $D = [-1; 5) \setminus \{4\}$

D. $D = (-1; 5)$

Câu 5: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

A. $D = (0; +\infty)$

B. $D = (-\infty; 0)$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 6: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}{|x| - 1}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$

D. $D = \mathbb{R}$

Câu 7: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \frac{1}{\log|x^2 - 1|}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm\sqrt{2}\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

Câu 8: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \frac{e^x}{e^x + 2}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

B. $D = \mathbb{R}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{e\}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

Câu 9: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \ln(\ln e^x + e^{-\ln x})$

A. $D = \mathbb{R}$

B. $D = (0; +\infty)$

C. $D = \mathbb{R} \setminus [-e; e]$

D. $D = (e; +\infty)$

Câu 10: Tìm miền xác định của các hàm số sau: $y = \frac{2x^2 + 5}{x - \sqrt{x^2 - 9}}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

B. $D = [3; +\infty)$

C. $D = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

D. $D = [-3; 3]$

C. Tính chẵn - lẻ:

Cho hàm số $y = f(x)$.

Nếu $f(-x) = f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn – tính chất là đồ thị đối xứng qua Oy.

Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ – tính chất là đồ thị đối xứng qua O.

Nếu $\begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm không chẵn, không lẻ.

BÀI 01. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Trong giải tích toán học, đạo hàm của một hàm số là sự miêu tả biến thiên của hàm số tại một điểm nào đó. Trong vật lý, đạo hàm biểu diễn vận tốc tức thời của một chất điểm chuyển động hoặc cường độ dòng điện tức thời tại một điểm trên dây dẫn.

A. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 được kí hiệu $f'(x_0)$ (hay $y'(x_0)$), là giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số giữa Δy và Δx tại điểm x_0 khi Δx tiến dần tới 0.

Trong đó:

$\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến số.

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$ gọi là số gia của hàm số.

Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Chú ý:

- Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- $f'(x_0)$ tồn tại khi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, Trong đó $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ được gọi lần lượt là đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái của hàm số tại x_0 .

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 3x - 2$. Tìm số gia của hàm số tại $x = 1$, biết $\Delta x = 3$.

Giải: áp dụng $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f(4) - f(1) = 26 - 4 = 22$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Tìm số gia của hàm số tại $x = 4$, biết $\Delta x = -2$.

Giải: áp dụng $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f(2) - f(4) = -2\sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x + 3}$. Tìm số gia của hàm số tại $x = -2$, biết $\Delta x = 0,21$.

Giải: áp dụng $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f(-2,21) - f(-2) \approx 1,3857042$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$. Tìm số gia của hàm số tại $x = \frac{\pi}{2}$, biết $\Delta x = 0,1$.

Giải: áp dụng $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2} + 0,1\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -2,0863604$.

Ví dụ 5: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ tại $x_0 = 1$. b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ tại $x_0 = 1$. c) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.

Nhận xét: Ta có thể làm theo quy trình sau :

- Gọi Δx là số gia của biến số $\Rightarrow$ số gia của hàm số là $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$.

- Rút gọn tỉ số : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Tính giới hạn : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Vậy: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{const}$

Giải:

a) Cách 1:

Gọi Δx là số gia của biến số

$$\Rightarrow \text{số gia của hàm số là } \Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1) = (\Delta x + 1)^2 + 3(\Delta x + 1) - 1 - 3 = (\Delta x)^2 + 5\Delta x.$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 5$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 5) = 5$$

$$\text{Vậy: } f'(1) = 5$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5$$

$$\text{Vậy: } f'(1) = 5$$

b) Cách 1:

Gọi Δx là số gia của biến số

$$\Rightarrow \text{số gia của hàm số là } \Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1) = \frac{5\Delta x}{\Delta x - 1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{\Delta x - 1} = -5$$

$$\text{Vậy: } f'(1) = -5$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5$$

$$\text{Vậy: } f'(1) = 5$$

c) Gọi Δx là số gia của biến số

$$\Rightarrow \text{số gia của hàm số là } \Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = \frac{-2x_0 \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\sqrt{-(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)} + \sqrt{3x_0 - x_0^2}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0 - \Delta x + 3}{\sqrt{-(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)} + \sqrt{3x_0 - x_0^2}} = \frac{-2x_0 + 3}{2\sqrt{3x_0 - x_0^2}}$$

$$\text{Vậy: } f'(x) = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{3x - x^2}}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

Giải:

$$\bullet f'(1^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-(1+\Delta x)^2} - 1}{\Delta x} = -1.$$

$$\bullet f'(1^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) + 2}{\Delta x} = -1$$

$$\text{Do: } f'(1^-) = f'(1^+) = -1 \Rightarrow f'(1) = -1$$

B. Các quy tắc tính đạo hàm

QUI TẮC			
$y =$		$\Rightarrow y' =$	
$u + v - w$		$u' + v' - w'$	
$k.f(x)$		$k.f'(x)$	
$u.v$		$u'.v + v'.u$	
$u.v.w$		$u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$	
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	
CÔNG THỨC ĐẠO HÀM			
$y =$	$\Rightarrow y' =$	$y =$	$\Rightarrow y' =$
x^n	$n.x^{n-1}$	u^n	$n.u^{n-1}.u'$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n.u'}{u^{n+1}}$
e^x	e^x	e^u	$e^u.u'$
k^x	$k^x.\ln k$	k^u	$k^x.\ln k.u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_k x$	$\frac{1}{x.\ln k}$	$\log_k u$	$\frac{u'}{u.\ln k}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u'.\cos u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u'.\sin u$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
k	0	kx	k
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[k]{x^m}$	$\frac{m}{k}x^{\frac{m}{k}-1}$	$\sqrt[k]{u^m}$	$\frac{m}{k}u^{\frac{m}{k}-1}.u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{ax + b}{cx + d}$	$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$	$\frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$	$\frac{amx^2 + 2anx + bn - cm}{(mx + n)^2}$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của các hàm số dưới đây:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$. b) $y = (x^2 + 1)(2x - 1)$. c) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 1}$.

Giải:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$.

$$\Rightarrow y' = (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)' = (x^3)' + (3x^2)' - (2x)' + (5)' = 3x^2 + 6x - 2$$

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

Vậy: $y' = 3x^2 + 6x - 2$.

b) $y = (x^2 + 1)(2x - 1)$.

$$\Rightarrow y' = (x^2 + 1)'(2x - 1) + (x^2 + 1)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 + 1)$$

Vậy: $y' = 6x^2 - 2x + 2$.

c) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 1}$.

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 2x - 1)'(3x + 1) - (3x + 1)'(x^2 + 2x - 1)}{(3x + 1)^2} = \frac{(2x + 2)(3x + 1) - 3(x^2 + 2x - 1)}{(3x + 1)^2}$$

Vậy: $y' = \frac{3x^2 + 2x + 5}{(3x + 1)^2}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số dưới đây:

a) $y = (4x + 5)^3$.

b) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$.

c) $y = \sin^3(3x^2 + 1)$.

Giải:

a) $y = (4x + 5)^3$.

$$\Rightarrow y' = 3(4x + 5)^2(4x + 5)'$$

Vậy: $y' = 12(4x + 5)^2$.

b) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$.

$$\Rightarrow y' = \frac{(3x^2 - 2x)'}{2\sqrt{3x^2 - 2x}}$$

Vậy: $y' = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$.

c) $y = \sin^3(3x^2 + 1)$.

$$\Rightarrow y' = 3\sin^2(3x^2 + 1)(\sin(3x^2 + 1))' = 3\sin^2(3x^2 + 1)\cos(3x^2 + 1)(3x^2 + 1)'$$

Vậy: $y' = 18x \cdot \sin^2(3x^2 + 1)\cos(3x^2 + 1)$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của các hàm số dưới đây tại $x = 2$

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$.

Giải:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y'(2) = 12$.

b) $y = \sqrt{3x^2 - 2} \Rightarrow y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}} \Rightarrow y'(2) = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Bài tập tư luận nhằm mục đích thuộc công thức

1/ $y = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$	2/ $y = \frac{1}{3}x^3 + 2(1 - 2m)x^2 - 6(m - 1)x + m^2 + 3$
3/ $y = x^4 - 2x^2 + 3$	4/ $y = mx^4 - 2(1 - 3m)x^2 + m(m^2 + 2)$

5/ $y = \frac{2x-1}{x+2}$	6/ $y = \frac{mx-4}{x+m}$
7/ $y = \frac{4-3x}{x+2}$	8/ $y = \frac{mx-2+m}{x-m+1}$
9/ $y = (x+3)(2x^2-1)$	10/ $y = (x^3+4x+3)(2x^2-1)$
11/ $y = (2x^2-1)^5$	12/ $y = (2x^2-1)^3(2x+1)^4$
13/ $y = \sqrt{4x+5}$	14/ $y = \sqrt{4x^3+5x-1}$
15/ $y = (x^2+3x)\sqrt{4x^2+5}$	16/ $y = x + (x^2+3)\sqrt{4-x}$
17/ $y = \sin \sqrt{4x+5}$	18/ $y = \sin^2(3x^2+2x-1)$
19/ $y = \frac{4-3x}{\sqrt{x^3+2}}$	20/ $y = \frac{\sqrt{4-3x}}{5x^2+2}$
21/ $y = (x^2-2x+2)e^x$	22/ $y = e^{-2x} \cdot \sin x$
23/ $y = e^{2x+x^2}$	24/ $y = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - e^x}$
25/ $y = 2^x \cdot e^{\cos x}$	26/ $y = \cos x \cdot e^{\cot x}$
27/ $y = \frac{3^x}{x^2-x+1}$	28/ $y = \ln(2x^2+x+3)$
29/ $y = e^x \cdot \ln(\cos x)$	30/ $y = (2x-1)\ln(3x^2+x)$
31/ $y = \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$	32/ $y = \log_2(\cos x)$

Bài tập bắt buộc

Câu 1: Hàm số $y = \frac{2-x}{x+1}$ có đạo hàm là:

- A. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ B. $y = -\frac{3}{(x+1)^2}$ C. $y = \frac{3}{(x+1)^2}$ D. $y = \frac{2}{(x+2)^2}$

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x^2+1}$ bằng

- A. $\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ B. $\frac{x}{2\sqrt{2x^2+1}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}$ D. $\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$ bằng

- A. $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ B. $\frac{x^2-8x+6}{(x-1)^2}$ C. $\frac{x^2-2x+6}{(x-1)^2}$ D. $\frac{x^2-2x+8}{(x-1)^2}$

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y = 4x^3 - \frac{1}{x} + 3$ bằng

- A. $6x + \frac{1}{x^2}$ B. $6x - \frac{1}{x^2}$ C. $6x^2 + \frac{1}{x^2}$ D. $6x^2 - \frac{1}{x^2}$

Câu 5: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có đạo hàm là:

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

A. $y' = 2\sin 2x$ **B.** $y' = 2\cos 2x$ **C.** $y' = -2\sin 2x$ **D.** $y' = -2\cos 2x$

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)\sqrt{x-2}$ tại $x = 3$ bằng

A. 0 **B.** 5 **C.** 11 **D.** 15

Câu 7: Hàm số $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{4x-1}{3(2x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}}$

B. $y' = \frac{(4x-1)(2x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}}{3}$

C. $y' = -\frac{4x-1}{3(2x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}}$

D. $y' = -\frac{(4x-1)(2x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}}{3}$

Câu 8: Hàm số $y = 2x.e^x + 3\sin 2x$ có đạo hàm là:

A. $y' = e^x(x-1) + \cos 2x$

B. $y' = 2e^x(x+1) + \cos 2x$

C. $y' = 2e^x(x-1) + 6\cos 2x$

D. $y' = 2e^x(x+1) + 6\cos 2x$

Câu 9: Hàm số $y = \frac{x+1}{3^x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^x}$

B. $y' = \frac{1-\ln 3}{3^x}$

C. $y' = \frac{(x-1)\ln 3}{3^x}$

D. $y' = \frac{\ln 3}{3^x}$

Câu 10: Hàm số $y = \ln(x^2 + 3x - 1)$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 3}$

B. $y' = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 1}$

C. $y' = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)^2}$

D. $y' = \frac{x^2 + 3x - 1}{(2x + 3)^2}$

C. Ý nghĩa của đạo hàm

- Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến và $y_0 = f(x_0)$.

- Ý nghĩa vật lý:

- Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $q = q(t)$ là $i(t_0) = q'(t_0)$

Nhận xét: Để viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M , ta cần chú ý sau

- Tiếp tuyến song song $y = ax + b \Rightarrow y'(x_0) = a$
- Tiếp tuyến vuông góc $y = ax + b \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{a}$
- Tiếp tuyến tạo với Ox một góc $\varphi \Rightarrow y'(x_0) = \pm \tan \varphi$
- Tiếp tuyến tạo với $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{y'(x_0) - a}{1 + ay'(x_0)} \right| = \tan \varphi \\ \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \cos \varphi \end{cases}$

Ví dụ : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

- a. Tại điểm $M(2; -2)$
- b. Tại điểm có hoành độ bằng -1 .
- c. Tại điểm có tung độ bằng 2 .
- d. Tại giao điểm với trục tung.
- e. Tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$
- f. Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- g. Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$
- h. Biết cosin của góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

Giải:

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6x$

a/ ta có: $x_0 = 2; y_0 = -2; y'(2) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0(x - 2) \Leftrightarrow y = -2$

b/ ta có: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2; y'(-1) = 9$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 7$

c/ ta có: $y_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

* Với $x_0 = 0; y_0 = 2; y'(0) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 2$.

* Với $x_0 = 3; y_0 = 2; y'(3) = 9$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

d/ ta có: $x_0 = 0; y_0 = 2; y'(0) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 2$.

e/ xét PTHĐGD: $x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2; y'(-1) = 9$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 7$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2; y'(2) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0(x - 2) \Leftrightarrow y = -2$

f/ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$

$$\text{Nên } y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 7$

* Với $x_0 = 3; y_0 = 2$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

g/ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$

$$\text{Nên } y'(x_0) = \frac{-1}{-\frac{1}{45}} = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

* Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 52$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 52 = 45(x - 5) \Leftrightarrow y = 45x - 173$

* Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -52$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 52 = 45(x + 3) \Leftrightarrow y = 45x + 83$

h/ Gọi tiếp tuyến d có hệ số góc $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

$\Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (1; k) \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của d là: $\vec{n}_d = (k; -1)$

Đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0 \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của Δ là: $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$

$$\text{Theo đề ta có } \cos(d; \Delta) = \frac{|k \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)|}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{|4k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot 5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow |4k + 3| = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{24}{7} \end{cases}$$

$$\text{* Với } k = 0 \text{ ta có: } y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 2$.

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0(x - 2) \Leftrightarrow y = -2$

$$\text{* Với } a = -\frac{24}{7} \text{ ta có: } y'(x_0) = -\frac{24}{7} \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7} \Leftrightarrow 21x_0^2 - 42x_0 + 24 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2; y = -2$

D. Vi phân và đạo hàm cấp cao

I. Vi Phân

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x . Khi đó $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số tại điểm x ứng với số gia Δx đã cho.

Kí hiệu: $y = f(x) \Rightarrow dy = d(f(x)) = f'(x)dx$

- Trong phép tính gần đúng, với $|\Delta x|$ khá nhỏ, xét tại điểm x_0 ,

ta có công thức sau: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. Tính vi phân của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ứng với $\Delta x = 0,01$.

Giải: Ta có: $f'(x) = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Vì phân cần tìm: $d\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\Delta x = -0,02$.

Ví dụ 2: Tính vi phân của hàm số: $y = \sqrt{1+2\tan x}$.

Giải: Ta có: $dy = d(\sqrt{1+2\tan x}) = (\sqrt{1+2\tan x})' dx = \frac{2}{\cos^2 x \sqrt{1+2\tan x}} dx$

Ví dụ 3: Tính gần đúng của $\sqrt{16,001}$.

Giải: Ta đặt $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Áp dụng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \Rightarrow \sqrt{16,001} \approx 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,001 \approx 4,000125$

II. Đạo hàm cấp cao

- Đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) của hàm số $y = f(x)$ là $f^{(n)}(x)$ (hay $y^{(n)}(x)$).

Chú ý:

○ Đạo hàm cấp hai: $y^{(2)} = y''$.

○ Đạo hàm cấp ba: $y^{(3)} = y'''$.

○ $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

- Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai: xét một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$.

Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = s''(t_0)$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$. Tính đạo hàm cấp ba của hàm số.

Giải: Ta có: $y' = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 6$.

$$\Rightarrow y'' = 12x^2 + 12x - 8$$

$$\Rightarrow y''' = 24x + 12$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Giải: Ta có: $y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

$$VT = y^3 \cdot y'' + 1 = (\sqrt{x^2+2x})^3 \cdot \left(\frac{-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} \right) + 1 = -1 + 1 = 0 = VP$$

BÀI 02. XÉT ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

THUẦN GIÁO KHOA:

1. Định nghĩa:

Hàm số f đồng biến trên $K \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

Hàm số f nghịch biến trên $K \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

2. Điều kiện cần:

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng I .

a) Nếu f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

b) Nếu f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

3. Điều kiện đủ:

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng I .

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ ($f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm) thì f đồng biến trên I .

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ ($f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm) thì f nghịch biến trên I .

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in I$ thì f không đổi trên I .

Chú ý: Nếu khoảng I được thay bởi **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì f phải liên tục trên đó.

Giả sử: cho hàm số $y = f(x)$.

Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Mệnh đề nào sai?

1. Nếu $\forall x \in D: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D
2. Nếu $\forall x \in D: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên D
3. Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến.
4. Nếu $f'(x) \leq 0$ thì hàm số nghịch biến.
5. Nếu $f'(x) \geq 0$, mà $f'(x) = 0$ có nghiệm hữu hạn thì hàm số đồng biến.
6. Nếu hàm số đồng biến trên D thì $f'(x) > 0$
7. Nếu hàm số đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0$
8. Hàm số đã cho có đạo hàm trên D , nếu $f'(x) < 0, \forall x \in D$ thì hàm số nghịch biến trên D
9. Hàm số nghịch biến trên K khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$
10. Hàm số đồng biến trên K khi và chỉ khi $f'(x) > 0, \forall x \in K$

Xét chiều biến thiên của hàm số

Để xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước như sau:

– Tìm tập xác định của hàm số.

– Tính y' . Tìm các điểm mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại (gọi là các điểm tới hạn)

– Lập bảng xét dấu y' (bảng biến thiên). Từ đó kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Bài 1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = -2x^2 + 4x + 5$

b) $y = \frac{x^2}{4} + x - \frac{5}{4}$

c) $y = x^2 - 4x + 3$

d) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$

e) $y = (4 - x)(x - 1)^2$

f) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

g) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$

h) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

i) $y = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{10}x^2 - 2$

$$k) y = \frac{2x-1}{x+5}$$

$$l) y = \frac{x-1}{2-x}$$

$$m) y = 1 - \frac{1}{1-x}$$

$$n) y = \frac{2x^2+x+26}{x+2}$$

$$o) y = -x+3 - \frac{1}{1-x}$$

$$p) y = \frac{4x^2-15x+9}{3x}$$

Bài 2. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$a) y = -6x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 1$$

$$b) y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

$$c) y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$$d) y = \frac{2x-1}{x^2}$$

$$e) y = \frac{x}{x^2-3x+2}$$

$$f) y = x+3+2\sqrt{2-x}$$

$$g) y = \sqrt{2x-1} - \sqrt{3-x}$$

$$h) y = x\sqrt{2-x^2}$$

$$i) y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$j) y = |2x-x^2|$$

Ghi nhớ nhanh

❖ **Hàm bậc nhất:** $y = ax + b, (a \neq 0)$

CẦN NHỚ	
$a > 0$	thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
$a < 0$	thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

❖ **Hàm bậc hai:** $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0) \rightarrow y' = 2ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$a > 0$	thì hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
$a < 0$	thì hàm số nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

❖ **Hàm bậc ba:** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac$.

$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
---	---

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$	thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ Giả sử $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$	thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(x_1; x_2)$.
$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ Giả sử $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$	thì hàm số nghịch biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(x_1; x_2)$.

❖ **Hàm nhất biến:** $y = \frac{ax+b}{cx+d}, \left(c \neq 0, ad-bc \neq 0, x \neq -\frac{d}{c} \right) \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$ad - bc > 0$	thì hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$
$ad - bc < 0$	thì hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$

❖ **Hàm trùng phương:** $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0) \rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$	thì hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
$\begin{cases} a < 0 \\ ab > 0 \end{cases}$	thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
$\begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases}$	Thì hàm số đồng biến trên $\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$ và $\left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$.
$\begin{cases} a < 0 \\ ab < 0 \end{cases}$	Thì hàm số nghịch biến trên $\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right)$. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$ và $\left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$.

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = 3x^4 + 4x^2 + 2017$.

B. $y = \frac{7}{8}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$.

C. $y = \frac{2x+5}{3-5x}$.

D. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Hàm số nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; +2)$.

C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-2; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-2; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. Hàm số không có khoảng nghịch biến.

C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 1]$.

C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$ và $[1; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-3; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
- B. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 10. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{-x^2 - x + 5}{x + 2}$ là:

- A. $(-5; +\infty)$.
- B. $(-5; 1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
- D. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 4x + 8}{x - 2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Câu 12. Tìm khoảng đồng biến hàm số $y = (x+3)\sqrt{3-2x-x^2}$?

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-3; 0)$.
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-3; 2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- A. Hàm số đồng biến trong khoảng $(1; 3)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + 4x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

- A. Hàm số có khi đồng biến, có khi nghịch biến.
- B. Hàm số nghịch biến khi $x < 1$.
- C. Hàm số nghịch biến khi $x > 1$.
- D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 17. Khoảng đồng biến của hàm số $y = x \ln x$ là:

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $(0; e)$.
- C. $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$.
- D. $\left(\frac{1}{e^2}; e\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và liên tục $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty$ $y(x_1)$ $y(x_2)$ $+\infty$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(x_1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 19. Bảng biến thiên sau đây ứng với hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y						

A. $y = \frac{1}{x}$.

B. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

C. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và liên tục tại $x = -1$, có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
		0	4	$+\infty$	$-\infty$

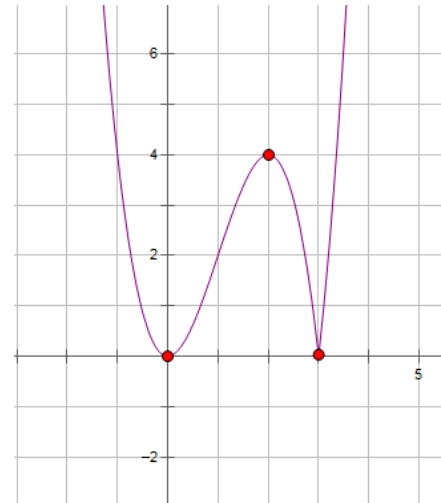
Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 4)$.
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị như hình vẽ bên:

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 4)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.



BÀI 03. XÉT DẤU-GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. XÉT DẤU

• $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	khác dấu với a	0	Cùng dấu với a

• $f(x) = ax^2 + bx + c$

Trường hợp có hai nghiệm phân biệt:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	$\overset{0}{\text{khác dấu với a}}$	$\overset{0}{\text{Cùng dấu với a}}$	

Trường hợp có nghiệm kép:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a

Trường hợp vô nghiệm:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	

Nhận xét: khi làm toán bảng xét dấu được làm ngoài nháp nên ta sẽ vẽ dưới dạng trục.

Ví dụ: giải nhanh các bất phương trình sau:

Bất phương trình:	Nháp trục	Kết luận
$x^2 + 3x + 7 \geq 0$		
$x^2 + 3x + 7 < 0$		
$x^2 + 6x + 9 < 0$		
$x^2 + 6x + 9 \leq 0$		
$x^2 + 6x + 9 > 0$		
$x^2 + 6x + 9 \geq 0$		
$x^2 + 3x - 4 \geq 0$		
$x^2 + 3x - 1 > 0$		

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$		
$x^2 - 5x - 6 < 0$		
$-3x^2 - 5x + 6 \leq 0$		
$(-3x^2 - 5x + 6)(2x - 4)(x - 1) \leq 0$		
$\frac{(x+1)(x^2 + 3x - 4)}{x - 2} \geq 0$		
$\frac{(x-1)(x^2 + 3x - 4)}{x^2 - 4} \leq 0$		
$\frac{(x-1)(x^2 + 3x - 4)(9-x)}{(x^2 - 4)(-x^2 + x - 1)} \geq 0$		

B. GIAO-HỢP NGHIỆM

GIAO: $A \cap B \leftrightarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases}$ (xử lý A xong, rồi mới xử lý B)

HỢP: $A \cup B \leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (xử lý A và B cùng lúc)

Có	Nháp trực	Kết luận
$\begin{cases} x > 2 \\ x \geq 5 \end{cases}$		
$\begin{bmatrix} x > 2 \\ x \geq 5 \end{bmatrix}$		
$\begin{cases} x < 3 \\ x < -6 \end{cases}$		
$\begin{bmatrix} x \leq -6 \\ x \geq 2 \end{bmatrix}$		

$\begin{cases} x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$		
$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 5 \end{cases}$		
$\begin{cases} x > 2 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases}$		
$\begin{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ -1 \leq x < 2 \end{cases}$		
$\begin{cases} \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases} \\ -3 \leq x < 2 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$		

C. TAM THỨC BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG:

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

Biện luận:

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 : \text{vsn} \\ c \neq 0 : \text{vn} \end{array} \right. \\ b \neq 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{array} \right. \\ a \neq 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac, (\Delta' = b'^2 - ac) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \rightarrow \text{vn} \\ \Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \\ \Delta > 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Từ biện luận ấy ta có các trường hợp thường gặp như sau:

(1) vô nghiệm	$\begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
(1) có nghiệm	$\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a = 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
(1) có 1 nghiệm	$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
(1) có đúng 1 nghiệm	$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm phân biệt	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
Chú ý: Trường hợp nào vô lý thì bỏ đi trường hợp đó.	

Ví dụ 1: Cho phương trình sau: $x^2 + 2(m-1)x + 2 - m = 0$ (1). Tìm m để (1):

- a/ vô nghiệm.
- b/ có nghiệm.
- c/ có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Cho phương trình sau: $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 2 - m = 0$ (1). Tìm m để (1):

- a/ vô nghiệm.
- b/ có nghiệm.
- c/ có 1 nghiệm.
- d/ có 2 nghiệm phân biệt.

II. VI-ET $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (1). Giả sử (1) có hai nghiệm là: $x_1; x_2$.

Ta luôn có :
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (\text{điều kiện } S^2 - 4P \geq 0).$$

III. So sánh nghiệm $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (1). Giả sử (1) có hai nghiệm là: $x_1; x_2$.

(1) có hai nghiệm trái dấu	$x_1 < 0 < x_2$	$x_1 \cdot x_2 < 0$
(1) có hai nghiệm cùng dấu	$\begin{cases} 0 < x_1 \leq x_2 \\ x_1 \leq x_2 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm pb cùng dấu	$\begin{cases} 0 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm dương	$0 < x_1 \leq x_2$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm dương pb	$0 < x_1 < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm âm	$x_1 \leq x_2 < 0$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
(1) có hai nghiệm âm pb	$x_1 < x_2 < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Chú ý : so sánh nghiệm với 0

$x_1 < 0 < x_2$	$x_1 \cdot x_2 < 0$
$x_1 \leq 0 \leq x_2$	$x_1 \cdot x_2 \leq 0$
$0 < x_1 \leq x_2$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
$0 < x_1 < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

$0 \leq x_1 < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1.x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
$0 \leq x_1 \leq x_2$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1.x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$
$x_1 \leq x_2 < 0$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 \leq 0$	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 \leq 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1.x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 \leq x_2 \leq 0$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1.x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$

Chú ý : so sánh nghiệm với số bất kỳ

$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$	$(x_1 - \alpha).(x_2 - \alpha) < 0$
$x_1 \leq \alpha \leq x_2$	$x_1 - \alpha \leq 0 \leq x_2 - \alpha$	$(x_1 - \alpha).(x_2 - \alpha) \leq 0$
$\alpha < x_1 \leq x_2$	$0 < x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ X_1.X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases}$
$\alpha < x_1 < x_2$	$0 < x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ X_1.X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases}$
$\alpha \leq x_1 < x_2$	$0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ X_1.X_2 \geq 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases}$

$\alpha \leq x_1 \leq x_2$	$0 \leq x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ X_1.X_2 \geq 0 \\ X_1 + X_2 \geq 0 \end{cases}$
$x_1 \leq x_2 < \alpha$	$x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha < 0$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ X_1.X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 < \alpha$	$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ X_1.X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 \leq \alpha$	$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ X_1.X_2 \geq 0 \\ X_1 + X_2 < 0 \end{cases}$
$x_1 \leq x_2 \leq \alpha$	$x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \leq 0$	$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ X_1.X_2 \geq 0 \\ X_1 + X_2 \leq 0 \end{cases}$
Với $X_1 = x_1 - \alpha$ và $X_2 = x_2 - \alpha$		

Ví dụ : Cho phương trình sau: $x^2 - 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ (1). Tìm m để (1) :

- a/ có hai nghiệm trái dấu.
- b/ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- c/ có hai nghiệm dương.
- d/ có hai nghiệm âm phân biệt.
- e/ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $0 \leq x_1 < x_2$
- f/ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1 \leq x_2 \leq 0$
- g/ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $1 < x_1 \leq x_2$
- h/ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1 < -2 < x_2$

IV. Biểu thức sử dụng vi-et:

- $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right]$
- $D = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow D^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
- $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2}$

Ví dụ : Cho phương trình sau: $x^2 - 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ (1). Tìm m để (1) :

a/ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 4$

b/ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 < 1$

c/ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1 x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 - x_2 = 10$

d/ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $|x_1 - x_2| = 3$

e/ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1 + 2x_2 = 1$

BÀI 04. KHÁI NIỆM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Tìm giá trị lớn nhất-giá trị nhỏ nhất

$y = f(x)$	$y = f(x), \forall x \in [a; b]$
• TXĐ: $D = ???$ - Hàm số liên tục trên D • $y' = f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = ??? \Rightarrow y(x) = ???$ • Tìm giới hạn • BBT • KL Dựa vào BBT để tìm Max - Min	• TXĐ - Hàm số liên tục trên $[a; b]$ • $y' = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \text{ (giả sử } \alpha \in [a; b])$ • $y(\alpha) = ???; y(a) = ???; y(b) = ???$ • KL Số lớn nhất là Max; số nhỏ nhất là Min

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

$D = \mathbb{R}$; Hàm số liên tục trên D

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 10 \\ x = 3 \Rightarrow y = -22 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$$

• BBT

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y		10	-22	
	$-\infty$	CĐ	CT	$+\infty$

Vậy: hàm số không có GTLN và GTNN trên D .

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

• $D = \mathbb{R}$; Hàm số liên tục trên D

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{16} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$$

• BBT

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y		$\frac{5}{16}$	2	
	$+\infty$			$+\infty$

Vậy: GTNN: $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{5}{16}$ khi $x = -\frac{1}{2}$. Hàm số không có GTLN trên D .

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$, $x \in (1; 3]$

$D \in (1; 3]$ (hoặc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ xét $x \in (1; 3]$)

- $y' = \frac{x^2 - 2x - 5}{(x - 1)^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{6}$

- BBT

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{6}$	1	3	$1 + \sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y						

$+\infty \searrow 9$

Vậy: $\min_{x \in (1; 3]} y = 9 \Leftrightarrow x = 3$ và $\max_{x \in (1; 3]} y$ không tồn tại.

❖ **Đối với hs có MXĐ trên đoạn thì ta không dùng đến BBT nữa.**

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2; 3]$

Hàm số liên tục trên $[-2; 3]$

- $y' = 4x^3 - 4x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm 1 \in [-2; 3] \end{cases}$

$y(0) = 5; y(-1) = 4; y(1) = 4; y(-2) = 13; y(3) = 68.$

Vậy: GTLN: $\max_{x \in [-2; 3]} y = 68$ khi $x = 3$ và GTNN: $\min_{x \in [-2; 3]} y = 4$ khi $x = \pm 1$

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$, $x \in [-1; 2]$

Hàm số liên tục trên $[-1; 2]$

- $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = 3 \notin [-1; 2] \end{cases}$

$y(0) = 2; y(1) = 3; y(-1) = -9; y(2) = -6.$

Vậy: $\max_{x \in [-1; 2]} y = 3 \Leftrightarrow x = 1$ và $\min_{x \in [-1; 2]} y = -9 \Leftrightarrow x = -1$

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = \sqrt{4 - x^2}$

- $D \in [-2; 2]$

- $y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y(0) = 2; y(-2) = 0; y(2) = 0.$

Vậy: $\max_{x \in [-2;2]} y = 2 \Leftrightarrow x = 0$ và $\min_{x \in [-2;2]} y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Ví dụ: Tìm GTLN-GTNN của hs: $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

- Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$
- $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}; t \in [-1;1]$
- $y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \notin [-1;1] \end{cases}$

$y(0) = 1; y(-1) = 0; y(1) = \frac{2}{3}.$

Vậy: $\max_{t \in [-1;1]} y = 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $\min_{x \in [-1;1]} y = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài tập bắt buộc

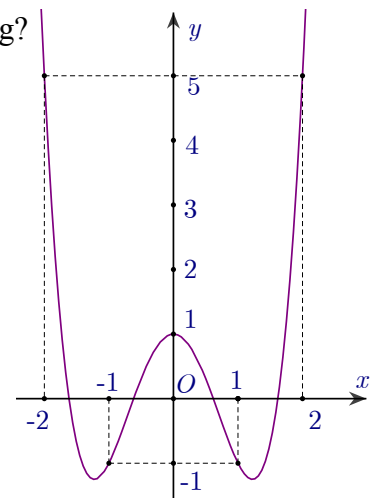
Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-2;3]} y = 108.$ B. $\max_{x \in [-2;3]} y = 13.$
 C. $\max_{x \in [-2;3]} y = 68.$ D. $\max_{x \in [-2;3]} y = 5.$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;2]} y = -9$ khi $x = 1.$
 B. $\min_{x \in [-1;2]} y = -9$ khi $x = 0.$
 C. $\min_{x \in [-1;2]} y = -9$ khi $x = -2.$
 D. $\min_{x \in [-1;2]} y = -9$ khi $x = -1.$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

- A. 5. B. 2.
 C. 1. D. không xác định được.

Câu 4. Cho hàm số $y = \sqrt{2018 - 2017x - 2016x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
 C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
 D. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Tìm M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

- A. $M = 40; m = -41$. B. $M = 15; m = -41$.
C. $M = 40; m = 8$. D. $M = 40; m = -8$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10; 10]$ bằng
A. 152. B. 110. C. 132. D. 72.

Câu 7. Cho hàm số $y = (3 - x)\sqrt{5 - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng nhất?

- A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.
B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \pm 1$.
C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\sqrt{5}$.
D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \pm\sqrt{5}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$.
B. Giá trị lớn nhất của hàm số là $2\sqrt{2}$.
C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.
D. Giá trị lớn nhất của hàm số là $4\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = (x - 6)\sqrt{x^2 + 4}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\max_{x \in \mathbb{R}} y = -3\sqrt{13}$. B. $\max_{x \in \mathbb{R}} y = +\infty$.
C. $\max_{x \in (-\infty; +\infty)} y = -3\sqrt{13}$. D. $\max_{x \in [0; 3]} y = -3\sqrt{13}$.

Câu 10. Đặt M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $M - m = \frac{5}{2}$. B. $M - 2m = 4$.
C. $2M - 3m = \frac{13}{2}$. D. $2M - m = \frac{21}{2}$.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $6\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ bằng

- A. -1. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x, x \in [0; \pi]$?

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 14. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ trên $[0; 2]$ bằng 7

A. $m = \pm 3$. B. $m = \pm 1$. C. $m = \pm \sqrt{7}$. D. $m = \pm \sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng 2 khi

A. $m = \frac{31}{27}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m > \frac{3}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{2x - m}{x + 1}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng -2 khi

A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 17. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là

A. $\frac{\pi}{4} - 1$ và $\sqrt{2}$. B. $\frac{\pi}{4} + 1$ và $\sqrt{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$ và $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\pi}{4}$ và $\sqrt{2} + 1$.

BÀI 05. ĐƠN ĐIỀU MỞ RỘNG

I/ Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập xác định (hay từng khoảng xác định – đối với hàm hữu tỷ):

ĐL1	
$Ax^2 + Bx + C \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \\ C > 0 \\ A > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$	$Ax^2 + Bx + C \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \\ C < 0 \\ A < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

Bài toán 1: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)

Tìm m để hàm số đồng biến trên TXĐ	Tìm m để hàm số nghịch biến trên TXĐ
Bước 1: tập xác định $D = \mathbb{R}$	
Bước 2: tính đạo hàm giả sử có dạng $y' = Ax^2 + Bx + C$	
Bước 3: hàm số đồng biến trên TXĐ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \geq 0, \forall x \in D$	Bước 3: hàm số nghịch biến trên TXĐ $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \leq 0, \forall x \in D$
Từ đó áp dụng ĐL1 vào tìm m rồi kết luận	
Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ luôn đồng biến trên tập xác định.	

- $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 6x + m$

$$\text{Hàm số luôn đồng biến trên TXĐ} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow 9 - 3m \leq 0 \Rightarrow m \geq 3$$

- Vậy: với $m \geq 3$ thì hs luôn đồng biến trên D.

Ví dụ: Định m để hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$ luôn nghịch biến trên tập xác định.

- $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3mx^2 - 2(2m-1)x + m - 2$

$$\text{Hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = -2(2m-1) = 0 \\ m - 2 < 0 \\ 3m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 3m(m-2) \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

- Vậy: với $m = -1$ thì hs luôn đồng biến trên D.

Bài toán 2: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)

Tìm m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.	Tìm m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
Bước 1: tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$	

Bước 2: tính đạo hàm giả sử có dạng $y' = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(mx + n)^2}$	
Bước 3: hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \geq 0, \forall x \in D$	Bước 3: hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C \leq 0, \forall x \in D$
<i>Từ đó áp dụng DL1 vào tìm m rồi kết luận</i>	

Bài toán 3: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)	
Tìm m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.	Tìm m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
Bước 1: tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$	
Bước 2: tính đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$	
Bước 3: hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$	Bước 3: hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$
<i>Từ đó tìm m rồi kết luận</i>	
Ví dụ: Định m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.	

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

- $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$

Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

- Vậy: với $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$ thì hs luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

II/ Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng K cho trước:

Nhắc sơ lại:

So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \end{cases} \qquad \bullet \quad 0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \quad \bullet$$

$$x_1 \leq 0 \leq x_2 \Leftrightarrow P \leq 0$$

So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số α :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \leq \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet x_1 \leq \alpha \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha \leq 0 \leq x_2 - \alpha \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \leq 0$$

ứng dụng max-min vào BPT: $\begin{cases} m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \text{Ming}(x) \\ m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \text{Max}g(x) \end{cases}$

Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ nghịch biến trong $(-1; 1)$

- $D=\mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 6x + m - 1$

Cách 1:

$$\text{Hàm số nghịch biến trong } (-1; 1) \Leftrightarrow y' \leq 0, x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) \leq 0 \\ af(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3-6+m-1) \leq 0 \\ 3(3+6+m-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \leq -8 \end{cases} \Rightarrow m \leq -8$$

- Vậy: $m \leq -8$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

$$\text{Hàm số nghịch biến trong } (-1; 1) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{Hay: } 3x^2 + 6x + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3x^2 - 6x + 1 = g(x), \forall x \in [-1; 1]$$

$$\bullet g'(x) = -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-1; 1]$$

x	-1	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	4	-8

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } m \leq \text{Ming}(x) = -8$$

- Vậy: $m \leq -8$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - (2m^2 + 3m + 2)x$ tăng trên $(2; +\infty)$

- $D=\mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 2(m-1)x - (2m^2 + 3m + 2)$

$$\text{Hàm số tăng trên } (2; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \Delta' > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq m \leq 2 \\ m > -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq 2$$

- Vậy: $-\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ thì hs tăng trên $(2; +\infty)$

III/ Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên độ dài L:

Bài toán 1: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)	
Tìm m để hàm số đồng biến trên đoạn L	Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn L
Bước 1: tập xác định $D = \mathbb{R}$	
Bước 2: tính đạo hàm giả sử có dạng $y' = Ax^2 + Bx + C$	
Bước 3: hàm số đồng biến trên đoạn L $\Leftrightarrow y' \geq 0, x_1 - x_2 = L$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta' > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = L^2 \end{cases}$	Bước 3: hàm số nghịch biến trên đoạn L $\Leftrightarrow y' \leq 0, x_1 - x_2 = L$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta' > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = L^2 \end{cases}$
<i>Từ đó áp dụng vi-et vào tìm m rồi kết luận</i>	
Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng 1.	

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 + 6x + m$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng 1. $\Leftrightarrow y' \leq 0, |x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ S^2 - 4P = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 4 - 4m = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

- Vậy: $m = \frac{3}{4}$ thì hs nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng 1.

BÀI TẬP:

1/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó. đáp số $m \geq 2$

2/ Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. đáp số $m \leq -3$

3/ Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có đồ thị (C_m) .
 Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ đáp số $m \leq 1$

4/ Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$.
 Tìm m để hàm đồng biến trên khoảng $K = (0; +\infty)$. đáp số $m \leq \frac{5}{4}$

5/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + 3(2m-1)x + 1$.
 Tìm m để hàm đồng biến trên khoảng $K = (-\infty; -1)$. đáp số $\frac{-1}{3} \leq m < 1$

6/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 1$ (1) ($m \neq \pm 1$).
 Tìm m để hàm nghịch biến trên khoảng $K = (-\infty; 2)$. đáp số $-1 < m < 1$

7/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x + 6$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

đáp số $m = 0$

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

đáp số $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $[-3; 1]$

đáp số $m \leq -2$

8/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx - 10$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

đáp số $m \leq -4$

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

đáp số $m \leq 0$

c. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$

đáp số $m \leq -4$

d. Xác định m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

đáp số $m = \frac{-3}{4}$

9/ Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 12x - 1$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

đáp số $-6 \leq m \leq 6$

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

đáp số $m \leq 6$

c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$

đáp số $m \leq 6$

d. Xác định m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

đáp số $m \in \phi$

10/ Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$.

a. Xác định m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

đáp số $m \in (-3; 3)$

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

đáp số $m > 3$

c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

đáp số $-3 < m \leq 1$

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định khi

A. $m < -2$ hoặc $m > 2$.

B. $m < -2$.

C. $m > 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Câu 2. Nếu hàm số $y = \frac{2x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m < 2$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

Câu 3. Nếu hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ thì

- A. $-2 < m < -1$. B. $-2 < m \leq -1$. C. $-2 \leq m \leq -1$. D. $-2 \leq m < -1$.

Câu 4. Nếu hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó thì

- A. $m \geq 3$. B. $m > 3$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.

Câu 5. Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \neq -1$. D. $m > 0$.

Câu 6. Nếu hàm số $y = \frac{m+2}{3}x^3 - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó thì

- A. $m \leq -\frac{1}{4}$. B. $-2 < m \leq -\frac{1}{4}$. C. $-2 \leq m \leq -\frac{1}{4}$. D. $m \geq -2$.

Câu 7. Nếu hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó thì

- A. $m \in [-1; 2]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
C. $m \in (-1; 2)$. D. $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 8. Nếu hàm số $y = x + 1 + m\sqrt{x^2 + 1}$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó thì

- A. $|m| \leq 1$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq -1$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 9. Nếu hàm số $y = \frac{-3x^2 + mx - 2}{2x - 1}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó thì

- A. $m > \frac{11}{2}$. B. $m \leq \frac{11}{2}$. C. $m < \frac{11}{2}$. D. $m \geq \frac{11}{2}$.

Câu 10. Nếu hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ thì

- A. $m > -1$. B. $m \leq -1$. C. $m < -1$. D. $m \geq -1$.

Câu 11. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ nghịch biến trong khoảng $(-1; 1)$ khi

- A. $m > -8$. B. $m \leq -8$. C. $m < -8$. D. $m \geq -8$.

Câu 12. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi

- A. $m > -3$. B. $m \leq -3$. C. $m < -3$. D. $m \geq -3$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của m để hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 14. Hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x - 2017$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi

- A. $m \in \left(\frac{9}{13}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{9}{13}\right]$. C. $m \in \left(-\infty; \frac{9}{13}\right)$. D. $m \in \left[\frac{9}{13}; +\infty\right)$.

Câu 15. Hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - (2m^2 + 3m + 2)x$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi

$$\begin{array}{llll} \text{A. } -\frac{3}{2} \leq m \leq 2. & \text{B. } m \geq -\frac{3}{2}. & \text{C. } m \leq 2. & \text{D. } \begin{cases} m \leq -\frac{3}{2} \\ m \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

Câu 16. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1 khi

$$\begin{array}{llll} \text{A. } m \in (3; +\infty). & \text{B. } m \in \left(-\infty; \frac{9}{4}\right]. & \text{C. } m \in \left(\frac{9}{4}; 3\right). & \text{D. } m \in \left[\frac{9}{4}; +\infty\right). \end{array}$$

Câu 17. Tồn tại hai giá trị m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+36)x - 5$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$ khi đó tổng hai giá trị m bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 3. & \text{B. } 2. & \text{C. } 1. & \text{D. } 0. \end{array}$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- C. $f(x)$ là hàm số không đơn điệu.
- D. $f(x)$ là hàm số hằng.

Câu 19. Hàm số $y = \sin x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

$$\begin{array}{llll} \text{A. } m \geq 1. & \text{B. } m \in \mathbb{R}. & \text{C. } m \leq -1. & \text{D. } -1 < m < 1. \end{array}$$

Câu 20. Hàm số $y = A \sin x + B \cos x + 2x$, (A, B là các tham số) đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

$$\begin{array}{ll} \text{A. } A^2 + B^2 = 4. & \text{B. } A^2 + B^2 > 4. \\ \text{C. } A^2 + B^2 \leq 4. & \text{D. } A^2 + B^2 < 4. \end{array}$$

Câu 21. Xét ba hàm số:

$$\begin{array}{lll} \text{I. } y = \frac{x+2}{x+1}; & \text{II. } y = \frac{-x^2+x+6}{x-2}; & \text{III. } y = \tan x \end{array}$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định là:

- A. Chỉ I và II.
- B. Chỉ II và III.
- C. Chỉ I và III.
- D. Cả I, II, III.

Câu 22. Xét ba hàm số:

$$\begin{array}{lll} \text{I. } f(x) = x|x|; & \text{II. } g(x) = \frac{1}{|x|}; & \text{III. } h(x) = x^2 - 2|x| \end{array}$$

Hàm số nào đồng biến trên đoạn $[1, 2]$?

- A. Chỉ I và II.
- B. Chỉ II và III.
- C. Chỉ I và III.
- D. Cả I, II, III.

Câu 23. Cho ba hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{I. } f(x) = \sqrt{x^2} \text{ với } x \in \mathbb{R}; & \text{II. } g(x) = x^3 \text{ với } x \in \mathbb{R}; & \text{III. } h(x) = x|x| \text{ với } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Hàm số nào đơn điệu trên tập xác định của nó?

- A. Chỉ I và II.
- B. Chỉ II và III.
- C. Chỉ I và III.
- D. Cả I, II, III.

Câu 24. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

$$\begin{array}{llll} \text{A. } m < -3. & \text{B. } m \leq -3. & \text{C. } m \leq 1. & \text{D. } m < 1. \end{array}$$

Câu 25. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-3 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = -6$. B. $m = -5$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Câu 27. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. Không có m .

Câu 28. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \leq 12$. C. $m \geq 0$. D. $m \geq 12$.

Câu 29. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

- A. $m \in [-5; 2)$. B. $m \in (-\infty; 2]$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -5)$.

Câu 30. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- A. $m \in (-2; 2)$. B. $m \in [-2; -1]$. C. $m \in (-2; -1]$. D. $m \in [-2; 2]$.

Câu 31. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 7mx^2 + 14x - m + 2$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

- A. $m < -\frac{14}{15}$. B. $m \leq -\frac{14}{15}$. C. $-2 \leq m \leq -\frac{14}{15}$. D. $m \geq -\frac{14}{15}$.

Câu 32. Tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Khi đó $q + p$ bằng

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

Câu 33. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = m \cos x + x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $|m| \leq 1$. B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \geq 1$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 34. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$. B. $m \in [2; +\infty)$. C. $m \in (3; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Câu 35. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $1 \leq m < 2$. B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$. C. $m \geq 2$. D. $m \leq 0$.

Câu 36. Tìm tất cả giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \leq 1$. B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases}$. C. $m < 1$. D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m < 1 \end{cases}$.

BÀI 06. TIỆM CẬN

ĐỊNH NGHĨA:

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

- Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \end{cases}$$

Chú ý

- Đồ thị hàm hằng và hàm đa thức không có tiệm cận.
- Điều kiện cần đồ thị hàm số dạng $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (kể cả hàm căn thức) nếu
 - $Q(x)$ có nghiệm là x_0 mà x_0 không phải là nghiệm của $P(x)$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng.
 - $Q(x)$ vô nghiệm thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
 - Bậc $P(x) \leq$ bậc $Q(x)$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận xiên.
 - Bậc $P(x) =$ bậc $Q(x) + 1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên mà không có tiệm cận ngang.
 - Bậc $P(x) >$ bậc $Q(x) + 1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận cong (toán cao cấp).
 - Một đồ thị hàm số có thể có nhiều đường tiệm cận đứng, ngang (hay xiên), chỉ cần thỏa mãn được định nghĩa SGK hiện hành.

Ví Dụ : Tìm các đường tiệm cận của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+2}{x-1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0;$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0$$

$\Rightarrow y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên

c) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1 \Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow$ không có tiệm cận xiên.

Nhắc tí xúu về bấm máy tìm giới hạn

Câu 1: Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = +\infty$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = -\infty$

Câu 2: Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = 2$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{5}{2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{3}{2}$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = 1$

Câu 3: Tính $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$.

A. $I = \frac{1}{6}$

B. $I = +\infty$

C. $I = \frac{1}{4}$

D. $I = -\infty$

Câu 4: Chọn khẳng định **sai** ?

A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{2017}+3x+2}{2x^2} = 3$

B. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+4}{x-1} = +\infty$

D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = +\infty$

Câu 5: Chọn khẳng định **sai** ?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-x+1} = \frac{1}{2}$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2} = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2} = \frac{2}{3}$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \frac{1}{2}$

PHƯƠNG PHÁP TÌM CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Liệt kê các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số (nếu có).		
HÀM SỐ	ĐÁP ÁN	GHI NHẬN
1/ $y = 1$		
2/ $y = 2x - 3$		
3/ $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$		
4/ $y = \frac{3}{x-1}$		
5/ $y = \frac{3}{x^2-4}$		
6/ $y = \frac{3x-1}{x-4}$		
7/ $y = \frac{2-3x}{5x+4}$		
8/ $y = \frac{3x^2-1}{x-1}$		
9/ $y = \frac{3x^2-1}{x^2-1}$		
10/ $y = \frac{3x^8-4x^5-1}{6x^8+1}$		
11/ $y = \frac{3x^2-4x-1}{2x-4}$		
12/ $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$		
13/ $y = \frac{x^3-1}{x^2-1}$		
14/ $y = \frac{x-1}{x^2-1}$		
15/ $y = \frac{x-1}{(x^2-1)^2}$		
16/ $y = \frac{ x }{x}$		

17/ $y = \frac{ x^2 - 1 }{x - 1}$		
18/ $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$		
19/ $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$		
20/ $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$		
21/ $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$		
22/ $y = \frac{5x-1}{\sqrt{3x^2-1}}$		
23/ $y = \frac{\sqrt[3]{3x^6-1}}{\sqrt{2x^2+5}}$		
24/ $y = \sqrt{x^2+3x-1}$		
25/ $y = x+1-\sqrt{x^2+3x-1}$		
26/ $y = x-1+\frac{\sin x}{x}$		

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x+3}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 2. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+1}{x^2-4x+3}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 3. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
 D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Tìm khẳng định đúng:

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm ngang là $y = -1$ và $y = 1$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm ngang là $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{|x|}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = 0$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$ và hai tiệm cận ngang $y = -1$ và $y = 1$.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = -1$ và $y = 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = -1$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và hai tiệm cận ngang $y = -1$ và $y = 1$.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = -1$ và $y = 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ (Cm). Kết luận nào sau đây đúng nhất:

- A. Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- B. Khi $m \neq 2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận.
- C. Với mọi m thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.
- D. Khi $m \neq \pm 2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{2x(x - 1)}$ (C). Kết luận nào sau đây đúng nhất:

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{x - 2m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua $A(4; -2017)$. Khi đó:

- A. $m = 2$.
- B. $m = -2$.
- C. $m = \sqrt{2} + 2$.
- D. $m = \sqrt{2} - 2$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m-1)x + 2 - 3m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. vô số.

Câu 13. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 14. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 15. Số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{3} - 2 + \frac{\sin x}{x}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 16. Gọi $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ thì :

- A. $a + b = -2$. B. $a + b = 1$.
C. $a + b = -1$. D. $a + b = 2$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị thực nào của m để thỏa yêu cầu đề bài.
B. $m < 0$.
C. $m = 0$.
D. $m > 0$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng?

- A. Không có giá trị thực nào của m để thỏa yêu cầu đề bài.
B. $m < 0$.
C. $m = 0$.
D. $m > 0$.

Câu 19. Tồn tại hai giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng, khi đó tổng hai giá trị m đó bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 20. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(m-2017)x^2+1}}{x-2017}$ có hai tiệm cận ngang thì

- A. $m \geq 2017$. B. $m > 2017$.
C. $m \neq 2017$. D. $m < 2017$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Nếu đường tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1; 2)$ và đồng thời điểm $B(2; 1)$ thuộc (C). Khi đó $m + n$ bằng

- A. -1. B. 1. C. -3. D. 3.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{mx-1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) không có tiệm cận đứng.

- A. $m = \{0; \pm 1\}$. B. $m = -1$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 1$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) có hai đường tiệm cận ngang.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m = 1$. C. $m = \{0; 1\}$. D. $m = 0$.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + mx}{x - 1}$ có đồ thị (C). Nếu đồ thị (C) có tiệm cận đứng thì

- A. $m \neq 0$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \neq -1$. D. $m \neq 1$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (2m + 3)x + 2(m - 1)}{x - 2}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) không có tiệm cận đứng.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{3}{4x^2 + 2(2m + 3)x + m^2 - 1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) có đúng hai đường tiệm cận đứng.

- A. $m < -\frac{13}{12}$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m > -\frac{13}{12}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) có đúng hai đường tiệm cận đứng.

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \setminus \{-3; 1\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) có đường tiệm cận ngang.

- A. $0 < m < 1$. B. $m = -1$. C. $m > 1$. D. $m = 1$.

BÀI 07. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC TRONG TÂM

1/ Định nghĩa: Cho hàm số: $y = f(x)$ liên tục trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Khi đó:

- ❖ Nếu $f(x) < f(x_0)$ với $x \neq x_0, x \in (a, b)$ ta nói hàm số đạt cực đại tại x_0 .
 - Giá trị cực đại là $y_{CD} = f(x_0)$.
 - Điểm $M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số f .
- ❖ Nếu $f(x) > f(x_0)$ với $x \neq x_0, x \in (a, b)$ ta nói hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
 - Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = f(x_0)$.

- Điểm $M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số f .

❖ Hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 gọi là đạt cực trị tại x_0 .

2/ Định lí Fermat: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lí 1: Cho hàm số: $y = f(x)$ có đạo hàm trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$:

- ❖ Nếu khi x đi qua x_0 mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm thì hàm số đạt cực đại tại x_0
- ❖ Nếu khi x đi qua x_0 mà đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

Định lí 2: Cho hàm số: $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục tại x_0 , $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$:

- ❖ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .
- ❖ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Chú ý:

- ❖ Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị tại các điểm cực trị song song với Ox.
- ❖ Nếu $f''(x_0) = 0$ thì không thể áp dụng định lí 2, khi đó phải vẽ BBT để kiểm chứng.
- ❖ Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 , mà $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định được gọi là điểm tới hạn.

B. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.

Phương pháp chung: lập BBT để kết luận.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số:

HÀM SỐ	GHI KẾT QUẢ	PHƯƠNG PHÁP
1/ $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$		
2/ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$		
3/ $y = x^4 - 2x^2 - 1$		
4/ $y = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$		
5/ $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$		
6/ $y = \sqrt{4 - x^2}$		
7/ $y = x\sqrt{4 - x}$		

❖ MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC BA:

I/ Điều kiện để hàm số BẬC 3 có cực trị

Bài toán: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)

Hàm số có cực đại cực tiểu

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Hàm số có cực trị	$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm đơn $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
Hàm số không có cực trị	$\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}$ thì hàm số nhận x_0 làm cực trị	
Nếu $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số nhận x_0 làm cực đại	
Nếu $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số nhận x_0 làm cực tiểu	
<u>Ví dụ:</u> CMR hs $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ sau luôn có cực đại, cực tiểu	

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0$

$\Delta' = 9m^2 - 9m^2 + 9 > 0 \Rightarrow$ hs sau luôn có cực đại, cực tiểu. đpcm.

Ví dụ: CMR hs $y = \frac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$ sau luôn có cực đại, cực tiểu

- $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

- $y' = \frac{x^2 - 2mx - m^2(m^2 - 1) - (-m^4 + 1)}{(x - m)^2} = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$

Cho $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$\Delta' = m^2 - m^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ hs sau luôn có cực đại, cực tiểu. đpcm.

Ví dụ: Tìm m để hs $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3(m + 2)x^2 + 6x + m$

hs có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 9 - 3m(m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3m^2 - 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

- Vậy: $\begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$ thì hs có cực đại, cực tiểu.

Ví dụ: Tìm m để hs $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị

- $D = \mathbb{R}$

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

hs có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm đơn.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 1$$

- Vậy: $-3 < m < 1$ thì hs có cực trị.

Ví dụ: Tìm m để hs $y = \frac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ không có cực trị

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $y' = \frac{x^2 - 2x - m - 2}{(x - 1)^2}$

hs không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow 1 + m + 2 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$

- Vậy: $m \leq -3$ thì hs không có cực trị.

Ví dụ: Tìm m để hs $y = mx^3 + 3x^2 + 3x + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3mx^2 + 6x + 3$

- $y'' = 6mx + 6$

hs đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3$

- Vậy: $m = -3$ thì hs đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ: Tìm a, b để hs $y = ax^3 + bx^2 + x$ đạt cực đại tại $x = 1$ và cực tiểu tại $x = 2$.

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3ax^2 + 2bx + 1$

- $y'' = 6ax + 2b$

hs đạt cực đại tại $x = 1$ và cực tiểu tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \\ y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$

- Vậy: $a = \frac{1}{6}; b = -\frac{3}{4}$ thì hs đạt cực đại tại $x = 1$ và cực tiểu tại $x = 2$.

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. CRM hàm số luôn có cực đại, cực tiểu

2/ Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (2m - 1)x^2 + (m - 9)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. (Đs: $m = 1$)

3/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. (Đs: $m = 2$)

II/ Điều kiện để hàm số BẬC 3 có cực trị và thỏa mãn vi-et:

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \leq 2$.

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm pb là x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ Pt $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 .

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{cases} \quad (1)$$

- Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1 x_2 = 3$. Khi đó

$$|x_1 - x_2| \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m là $\begin{cases} -3 \leq m < -1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} < m \leq 1 \end{cases}$

- Vậy: $\begin{cases} -3 \leq m < -1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} < m \leq 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự

1/ Cho $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Xác định m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2

sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

$$\text{Đs: } \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{3 + \sqrt{93}}{8} \end{cases}$$

2/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$, với m là tham số thực.

Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \geq 8$.

$$\text{Đs: } \begin{cases} m \leq \frac{1 - \sqrt{65}}{2} \\ m \geq \frac{1 + \sqrt{65}}{2} \end{cases}$$

3/ Cho $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2$

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 77$.

$$\text{Đs: } m = \left\{ -15; -\frac{299}{25} \right\}$$

4/ Cho $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 4x_2 = 0$.

$$\text{Đs: } m = \pm \frac{9}{2}$$

5/ Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 3mx + 4$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2

sao cho $\frac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} = 2$.

$$\text{Đs: } m = -4$$

6/ Cho $y = -x^3 + (m+1)x^2 - 2(m-2)x - 4$

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $P = \left| x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

III/ Điều kiện để hàm số BẬC 3 có cực trị và sử dụng lý thuyết so sánh nghiệm:

Ví dụ: Cho $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$. Tìm m để hàm số có hoành độ cực trị trái dấu nhau. (hay $x_1 < 0 < x_2$)

- $D = \mathbb{R}$
 - $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$
- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0$
- $\Delta' = 9m^2 - 9m^2 + 9 > 0 \Rightarrow$ hs sau luôn có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2
- Hàm số có cực trị trái dấu nhau $\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$
 - Vậy $-1 < m < 1$ thì hàm số có cực trị trái dấu nhau.

Ví dụ: Cho $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1$.

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < 2 < x_2$

- $D = \mathbb{R}$
 - $y' = x^2 + 2(m-2)x + 5m+4$
- Hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ } x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < 0 < x_2 - 2 \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$$

$$\text{Với } x_1; x_2 \text{ là nghiệm pt } y' = 0, \text{ theo vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = 5m+4 \end{cases}$$

$$\text{nên có: } 5m+4+2 \cdot 2(m-2)+4 < 0 \Leftrightarrow m < 0$$

so lại điều kiện (1) ta thấy $m < 0$ thỏa

- Vậy $m < 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ: Cho $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m+2$.

Tìm m để hàm số có ít nhất một điểm cực trị có hoành độ thuộc khoảng $(-2; 0)$.

- $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m$

Hàm số có ít nhất một cực trị thuộc $(-2; 0) \Leftrightarrow y' = g(x) = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt thỏa } \begin{cases} -2 < x_1 < x_2 < 0 \\ -2 < x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 \leq -2 < x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } -2 < x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{7} < m < -1 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } -2 < x_1 < 0 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \leq 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \Leftrightarrow m \geq 2 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } x_1 \leq -2 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq -1 \\ x_1 x_2 > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : tóm lại } \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases} \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (m là tham số) (1).

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

$$\text{đáp số } \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$$

2/ Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m - 2)x^2 + (m - 1)x + 2$ (Cm).

Tìm m để hàm số có cực đại tại x_1 , cực tiểu tại x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$.

$$\text{đáp số } \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{4}{3}$$

3/ Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m + 4)x^2 + (2m + 5)x + 1$

Tìm m để hàm số

a/ có hoành độ hai cực trị lớn hơn -1

$$\text{đáp số } \begin{cases} -\frac{10}{3} < m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

b/ có đúng một hoành độ lớn hơn -1

$$\text{đáp số } m \leq -\frac{10}{3}$$

c/ có ít nhất một hoành độ cực trị lớn hơn $3/2$.

$$\text{đáp số } \begin{cases} m < -\frac{5}{2} \\ m > 2 \end{cases}$$

d/ có hai hoành độ cực trị nhỏ hơn 4.

$$\text{đáp số } \begin{cases} m < -2 \\ 2 < m < \frac{5}{2} \end{cases}$$

e/ có một hoành độ cực trị trong khoảng $(3;5)$

$$\text{đáp số } 2 < m < \frac{10}{3}$$

f/ không có cực trị

$$\text{đáp số } -2 \leq m \leq 2$$

4/ Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$

Tìm m để hàm số có hoành độ cực trị:

a/ trong khoảng $(-\infty; 1)$

$$\text{đáp số } 1 < m < 2$$

b/ trong khoảng $(1; +\infty)$

c/ $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < 1 < x_2$

$$\text{đáp số } 1 < m < 2$$

d/ $x_1; x_2$ sao cho $1 < x_1 < x_2$

$$\text{đáp số } m > 2$$

IV/ Điều kiện để hàm số BẬC 3 có cực trị và so sánh cực trị với trục tọa độ:

Hai điểm cực trị

Nằm về hai phía Ox khi $y_1 y_2 < 0$ hoặc $y=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Nằm cùng phía Ox khi $y_1 y_2 > 0$ hoặc $y=0$ có 1 nghiệm phân biệt.

Nằm về hai phía Oy khi $x_1 x_2 < 0$

Nằm cùng phía Oy khi $x_1 x_2 > 0$

Nằm phía trên trục hoành khi $\begin{cases} y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases}$

Nằm phía dưới trục hoành khi $\begin{cases} y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases}$

Trong đó 1 điểm tiếp xúc trục hoành khi $y_1 y_2 = 0$

Cách đều Ox khi $d(A; Ox) = d(B; Ox)$

Cách đều Oy khi $d(A; Oy) = d(B; Oy)$

Đối xứng O khi O trung điểm AB

Cách đều O khi $OA = OB$

Với A, B là hai điểm cực trị

Bài tập luyện

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

1/ Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ. đáp số

$$m = \pm \frac{1}{2}$$

2/ Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành. $m < 3$

3/ Cho hàm số $y = -x^3 + (2m + 1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung. $1 < m < 2$

4/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - 3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung. $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

Chú ý thêm:

Nếu $y' = ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ theo m (nghĩa là delta đẹp)

Lưu ý: dạng này phải biết hình giải tích (vecto)

Ví dụ: Cho $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để hàm số

a/ có hoành độ cực trị $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < 2 < x_2$

b/ có hoành độ cực trị $x_1; x_2$ sao cho $x_1^2 - 3x_2 = 1$

c/ có đồ thị đạt hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$

d/ có đồ thị đạt hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

- $D=R$
- $y' = 6x^2 - 6(m + 1)x + 6m$

Hàm số đạt cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2)$

a/ hoành độ cực trị: $x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow m > 2$

$$b/ \text{hoành độ cực trị: } x_1^2 - 3x_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3m = 1 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

$$c/ \overrightarrow{AB} = (m - 1; 3m^2 - m^3 - 3m + 1) \Rightarrow AB = \sqrt{(m - 1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$d/ \overrightarrow{OA} = (1; m^3 + 3m - 1), \overrightarrow{OB} = (m; 3m^2)$$

$$\text{Tam giác OAB vuông tại O. } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m + 3m^2(m^3 + 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3m^4 + 9m^2 - 3m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1).

Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ O

tạo thành một tam giác vuông tại O .

$$\text{đáp số } \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

2/ Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O .

$$m = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

3/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) tiếp xúc với đường tròn (S) có phương trình $(x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$.

$$m = \left\{ 2; -\frac{4}{3} \right\}$$

4/ Cho hàm số $y = x^3 + 3(m + 1)x^2 + 3m(m + 2)x + m^3 + 3m^2$ (C_m).

Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là không đổi.

$$AB = 2\sqrt{5}$$

5/ Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$ (1). Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC vuông tại C , với $C(4; 0)$.

$$m = -1$$

6/ Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1). Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $AOB = 120^\circ$.

$$m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

7/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực đại, cực tiểu là A và B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 7, với điểm $C(-2; 4)$.

$$m = \{-2; 3\}$$

8/ Cho hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C)

Tìm m để hàm số có hai cực trị là A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

$$m = -\frac{1}{2}$$

9/ Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 3(m - 3)x^2 + 11 - 3m$ (C_m). Tìm m để (C_m) có hai điểm cực trị M_1, M_2 sao cho các điểm M_1, M_2 và $B(0; -1)$ thẳng hàng.

$$m = 4$$

V/ Điều kiện để hàm số BẬC 3 có cực trị và sử dụng phương trình đường thẳng qua 2 cực trị đó:

ứng dụng đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Để viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu, ta có thể sử dụng phương pháp tách

đạo hàm.

– Phân tích $y = f'(x).q(x) + h(x)$.

– Suy ra $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2)$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu là: $y = h(x)$.

Chú ý: $y - \frac{1}{18a} y' \cdot y''$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số đạt cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(2 + \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow y_1 = y(x_1) = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_1 + 2 + \frac{m}{3}; y_2 = y(x_2) = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_2 + 2 + \frac{m}{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + 2 + \frac{m}{3}$

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1)

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

ĐS: $y = 2x - m^2 + m$

Chúng ta biết đt qua hai điểm cực trị có dạng $d: y = \alpha x + \beta$ (xuất hiện các dạng liên quan đến đt)

$d // \Delta: y = \alpha x + b \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta \neq b \end{cases}$

$d \perp \Delta: y = \alpha x + b \Leftrightarrow \alpha \cdot a = -1$

$d \equiv \Delta: y = \alpha x + b \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \end{cases}$

$d \cap \Delta$ một góc $\varphi \Leftrightarrow \cos(d, \Delta) = |\cos(u_d; u_\Delta)| = \cos \varphi$

A, B đối xứng qua $\Delta: y = \alpha x + b \Leftrightarrow \begin{cases} d \perp \Delta \\ M \in \Delta \end{cases}$ với M là trung điểm AB

Chú ý lúc đó $A(x_1; \alpha x_1 + \beta), B(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ nên trở về bài toán tọa độ

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1).

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$.

- $D=\mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số đạt cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Ta có: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$

$\Rightarrow$ đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$

nên Δ có hệ số góc $k_1 = \frac{2}{3}m - 2$.

d: $x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow$ d có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{2}$

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có $d \perp \Delta$

$\Rightarrow k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}m - 2\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$

Với $m = 0$ thì đồ thị có hai điểm cực trị là $(0; 0)$ và $(2; -4)$, nên trung điểm của chúng là $I(1; -2)$. Ta thấy $I \in d$, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.

Vậy: $m = 0$ là giá trị cần tìm

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$ (C_m)

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

đáp số $m = 1$

2/ Tìm m để hàm số $f(x) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có đường thẳng đi qua CĐ, CT song song với đường thẳng $y = -2x + 1$

đáp số $m = 3 \pm \sqrt{2}$

3/ Tìm m để hàm số $f(x) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có cực đại và cực tiểu nằm trên đường thẳng $y = -4x$

đáp số $m = 1$

4/ Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 7$

5/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m).

Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

6/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng

d: $x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45^\circ$.

$m = -\frac{1}{2}$

7/ Cho hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 9x + 2m$ (1), với m là tham số thực.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi

qua hai điểm cực trị bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

$m = \pm 1$

8/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (1).

Tìm m để hàm số (1) có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một tam giác cân.

$$m = -\frac{3}{2}$$

❖ MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG CỰC TRỊ CỦA HÀM TRÙNG PHƯƠNG:

I/ Điều kiện để hàm số trùng phương có cực trị

Bài toán: $y = ax^4 + bx^2 + c$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(ax^2 + b)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \alpha \end{cases}$ (với $\alpha = -\frac{b}{a}$).

Hàm số có một cực trị	$\Leftrightarrow \alpha \leq 0$
Hàm số có ba cực trị	$\Leftrightarrow \alpha > 0$
Hàm số có 1 cực đại	$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \alpha \leq 0 \\ a > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$
Hàm số có 1 cực tiểu	$\Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \alpha \leq 0 \\ A < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
Hàm số có 1 cực đại, hai cực tiểu	$\Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ a > 0 \end{cases}$
Hàm số có 2 cực đại, một cực tiểu	$\Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

Ví dụ: Tìm m để hs $y = x^4 - (1-2m)x^2 + m - 5$ có 3 cực trị

• $D = \mathbb{R}$

• $y = 4x^3 - 2(1-2m)x = 2x(2x^2 - 1 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1-2m}{2} \end{cases}$.hs có 3 cực trị

$\Leftrightarrow \frac{1-2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

• Vậy: $m < \frac{1}{2}$ thì hs có 3 cực trị.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$.

Tìm m để đồ thị (C) có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}$

Khoảng cách giữa các điểm cực tiêu: $d = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \min d = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

II/ Điều kiện để hàm số trùng phương có cực trị và thỏa tính chất cho trước

$y = ax^4 + bx^2 + c$ (giả sử trong đó có chứa tham số m)

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(ax^2 + b)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \alpha \end{cases}$ (với $\alpha = -\frac{b}{a}$).

Đồ thị hàm trùng phương có 3 điểm cực trị thì: $A(0; c), B(-\sqrt{\alpha}; a\alpha^2 + b\alpha + c), C(\sqrt{\alpha}; a\alpha^2 + b\alpha + c)$

Luôn có A thuộc trục Oy, tam giác ABC luôn cân tại A.

(Các câu hỏi thường xoay quanh vấn đề hình giải tích Oxy.)

Tam giác ABC cân và có cạnh bên bằng n lần cạnh đáy.	$\Leftrightarrow AB = nBC$
Tam giác ABC nhận M làm trọng tâm.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_M \\ y_A + y_B + y_C = 3y_M \end{cases}$
Tam giác ABC nhận M làm trực tâm.	$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in Oy \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$
Tam giác ABC vuông cân.	$\Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
Tam giác ABC đều	$\Leftrightarrow AB = BC$
Tam giác ABC có góc φ , (với $\varphi > 90^\circ$)	$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \cos\varphi$
Tam giác ABC có diện tích S	$\frac{1}{2}AH \cdot BC = S$ (với H là trung điểm BC).
Tam giác ABC nội tiếp đường tròn có R	Cách 1: $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$ Cách 2: $\begin{cases} I(0; a) \in Oy \\ IA = IB = IC = R \end{cases}$
Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn có r	Cách 1: $AH \cdot BC = (AB + AC + BC) \cdot r$ Cách 2: $\begin{cases} I(0; a) \in Oy \\ d(I; AB) = d(I; AC) = d(I; BC) = r \end{cases}$
Tam giác ABOC là hình bình hành (hình thoi)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ (với m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên.

• $D = \mathbb{R}$

• Ta có: $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x$; cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{3m+1}{2} \end{cases}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$ (*).

Gọi ba điểm cực trị là: $A(0; -3); B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right); C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$

$\triangle ABC$ luôn cân tại A

$BC = \frac{2}{3}AB \Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$, thỏa (*).

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m).

Tìm các giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

$m = 1$

2/ Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m)

Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

$m = 2 - \sqrt[3]{3}$

3/ Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C_m).

Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích $S = 32\sqrt{2}$.

$m = 2$

4/ Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m).

Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120° .

$m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

5/ Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m).

Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

$\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

6/ Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ (C_m). Tìm các giá trị của m để (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

$m = 1$

7/ Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

$m = 0$

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ có điểm cực đại

- A. $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$. B. $(3; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 2. Giá trị cực đại của hàm số $y = (x - 2)^3 - 3x + 4$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. -4.

Câu 3. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ đạt cực đại tại

- A. -3. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2, y_{CT} = -7$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1, y_{CD} = \frac{13}{2}$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -7$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{13}{2}, y_{CT} = -1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
B. Đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị.
C. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại.

Câu 6. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
B. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
C. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{2x - 4}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
B. Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.
C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 8. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
B. Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.
C. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{4 - |x|}{4 + |x|}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
- B. Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.
- C. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.
- D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 10. Cho hàm số $y = |x+3| + \frac{1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có điểm cực trị nào.
- B. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.
- C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.
- D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại.

Câu 11. Cho hàm số $y = 2\sin 2x - 3$. Đồ thị hàm số nhận điểm nào dưới đây là điểm cực tiểu ?

- A. $M\left(\frac{\pi}{4}; -1\right)$.
- B. $N\left(\frac{5\pi}{4}; -1\right)$.
- C. $P\left(\frac{3\pi}{4}; -5\right)$.
- D. $Q\left(\frac{9\pi}{4}; -5\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$. Các điểm dưới đây điểm nào là điểm cực đại của đồ thị hàm số trên?

- A. $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{9}{2}\right)$.
- B. $N\left(\pi; \frac{9}{2}\right)$.
- C. $P\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\right)$.
- D. $Q\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và liên tục R, có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
		0	4	$-\infty$	$-\infty$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị nào.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại.

Câu 14. Hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị khi

- A. $m \in (-3; +\infty)$.
- B. $m \in (-\infty; 1)$.
- C. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$.
- D. $m \in (-3; 1)$.

Câu 15. Hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu khi

- A. $m \in (-3; +\infty)$.
- B. $m \in (-\infty; 1)$.
- C. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$.
- D. $m \in (-3; 1)$.

Câu 16. Nếu hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-4)x + m$ có cực trị thì

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$.
C. $m \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. D. $m \in (1; 5)$.

Câu 17. Nếu hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị thì

- A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$.
C. $0 < m < \frac{1}{4}$. D. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

Câu 18. Nếu đồ thị hàm số $y = 2016x^4 + 2017mx^2 - 2018$ có ba điểm cực trị thì

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m > -\frac{8064}{6051}$. D. $m < -\frac{8064}{6051}$.

Câu 19. Nếu đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị thì

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 1$. C. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 20. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại thì

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 21. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = \{1; 2\}$. D. $m \in (1; 2)$.

Câu 22. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2m-1)x^2 + (m-9)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = \{1; 2\}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 23. Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{m + x}$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 0 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 24. Hàm số $y = \frac{mx^2 + nx + m.n}{mx + n}$ đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 4$ khi đó:

- A. $m + n = 6$. B. $m + n = 4$.
C. $m + n = 2$. D. $m + n = 0$.

Câu 25. Hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$. Tìm tất cả giá trị m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và

khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$?

- A. $m = 1$. B. $m = \{1; 2\}$. C. $m \geq 0$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 26. Tồn tại hai giá trị m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Khi đó tổng hai giá trị m đó bằng

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. -1 .

Câu 27. Tồn tại hai giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ có hai điểm cực trị A, B sao

cho $OA^2 + OB^2 = 120$, với O là gốc tọa độ. Khi đó tích hai giá trị m đó bằng

A. $\frac{52}{9}$.

B. $-\frac{52}{9}$.

C. $\frac{26}{9}$.

D. $-\frac{26}{9}$.

Câu 28. Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có hai cực trị trái dấu khi

A. $|m| \leq 1$.

B. $|m| > 1$.

C. $|m| < 1$.

D. $|m| \geq 1$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía với trục hoành?

A. 0 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 3 .

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?

A. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

C. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

D. $m \in (-\infty; 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 31. Nếu đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có tất cả các điểm cực trị thuộc các trục tọa độ thì

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup \{2\}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có đồ thị (C). Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của (C) có dạng:

A. $y = -2x - 2$.

B. $y = -2x + 2$.

C. $y = 2x - 2$.

D. $y = 2x + 2$.

Câu 32'. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị là

A. $y = \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$.

B. $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$.

C. $y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$.

D. $y = -\left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(2 + \frac{m}{3}\right)$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x + 3$ khi

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $x + 8y - 74 = 0$ khi

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Câu 35. Tồn tại hai giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 9x + 2m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB bằng $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. Khi đó tổng hai giá trị m bằng

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 36. Nếu đồ thị hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có điểm cực đại và cực tiểu sao cho hoành độ là các số dương thì

- A. $-3 < m < -2$. B. $-3 \leq m \leq -2$.
C. $m > -3$. D. $\begin{cases} m < -3 \\ m > -2 \end{cases}$.

Câu 37. Có hai giá trị của m để hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + (1-m)x + 3m - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 mà $|x_1 - x_2| = 2$. Tổng hai số đó là:

- A. -3 . B. -1 . C. -5 . D. -7 .

Câu 38. Nếu hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = \frac{1}{3}$ thì

- A. $m = \frac{3 \pm \sqrt{93}}{8}$. B. $m = \frac{3 + \sqrt{93}}{8}$.
C. $m = \frac{3 - \sqrt{93}}{8}$. D. $m < -1$.

Câu 39. Nếu hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \geq 8$ thì

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$.
B. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{2}\right]$.
C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$.
D. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$.

Câu 40. Nếu hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$ đạt cực trị tại x_1, x_2 với $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2}$ thì

- A. $m = \frac{\sqrt{14}}{2}$. B. $m = -\frac{\sqrt{14}}{2}$.
C. $m = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$. D. $\sqrt{3} < m < 2$.

Câu 41. Nếu hàm số $y = \frac{x^2 + m(x+1)}{x+2}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 0$ thì

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu 42. Nếu hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$ thì

- A. $m = 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 43. Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ có ít nhất một điểm cực trị sao cho hoành độ thuộc khoảng $(-2; 0)$ thì

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{7}\right]$. B. $m \in \left[-\frac{10}{7}; +\infty\right)$.
C. $m = -\frac{10}{7}$. D. $0 < m < \frac{10}{7}$.

Câu 44. Tồn tại hai giá trị m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 4x_2 = 0$ khi đó tổng hai giá trị m đó bằng:

- A. 0. B. 9. C. -9. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

- A. $m = 2 - \sqrt{2}$. B. $m = 2 \pm \sqrt{2}$.
C. $m = 2 + \sqrt{2}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị sao cho ba điểm đó lập thành tam giác vuông cân?

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = \{-1; 0\}$. D. $m = (-1; 0)$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên?

- A. $m = \frac{5}{3}$. B. $m = -\frac{1}{3}$. C. $m = -\frac{5}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác sao cho chu vi bằng $4(1 + \sqrt{65})$

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông?

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 50. Tồn tại hai giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân, khi đó tích hai giá trị m đó bằng

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

Câu 51. Tồn tại hai giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m(m-1)x^2 + m + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân, khi đó tổng hai giá trị m đó bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\sqrt{5}$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng 120° ?

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. C. $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận gốc tọa độ là trực tâm?

- A. $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 1 + \sqrt{5}$. D. $m = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4mx^2 - 4m$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $H\left(0; \frac{31}{4}\right)$ là trực tâm?

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 2$. C. $m = \sqrt{3}$. D. $m = 3$.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + 6 - \frac{m^2}{2}$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng 32.

- A. $m = -8$. B. $m = -4$. C. $m = -32$. D. $m = -16$.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + 6 - \frac{m^2}{2}$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho ABOC là hình bình hành, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung.

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -\sqrt{6}$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $m = \sqrt[3]{2}$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính bằng 1.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
C. $m = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right\}$. D. $m = \left\{ 0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right\}$.

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 60. Cho hàm số $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 61. Cho hàm số $y = -\sqrt[5]{x^4}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 62. Cho hàm số $y = (2x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 - 1)^2$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 9. C. 5. D. 7.

Câu 63. Cho hàm số $y = e^{ax} \cdot \sin x, (0 < x < \pi)$. Hàm số đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{4}$, thế thì hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là:

- A. $\frac{3\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = x - e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Tại $x = 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu.
B. Tại $x = 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại.
C. Tại $x = 0$ thì $f(x)$ không xác định.
D. Tại $x = 0$ thì $f(x)$ không đạt cực trị.

Câu 65. Cho hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Tại $x = e$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu.
B. Tại $x = e$ thì $f(x)$ đạt cực đại.
C. Tại $x = e$ thì $f(x)$ không xác định.
D. Tại $x = e$ thì $f(x)$ không đạt cực trị.

Câu 66. Giả sử hàm số $y = a \sin 2x + b \cos 3x - 2x, \forall x \in (0; 2\pi)$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \pi$. Khi đó

giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ bằng

- A. 3. B. -1. C. 1. D. -3.

PHỤ LỤC: GHI NHỚ CỰC TRỊ HÀM TRỪNG PHƯƠNG

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$

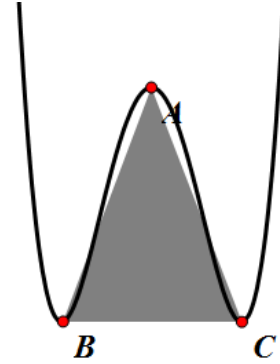
Nếu

Hàm số có 1 cực trị $\rightarrow ab \geq 0$

Hàm số có 3 cực trị $\rightarrow ab < 0$

Hàm số có 1 cực tiểu $\rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

Hàm số có 1 cực đại $\rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ab \leq 0 \end{cases}$



- (Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$)

Gọi $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

(A thuộc trục Oy, tam giác ABC luôn cân tại A).

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Nhớ: } \left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right) \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} AB &= AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}} \\ \overrightarrow{BC} &= \left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right) \rightarrow BC = \sqrt{-\frac{2b}{a}} \end{aligned} \end{aligned}$$

❖ Nếu tam giác ABC vuông tại A $\rightarrow 8a + b^3 = 0$

❖ Nếu tam giác ABC đều $\rightarrow 24a + b^3 = 0$

❖ Nếu tam giác ABC có góc $BAC = \alpha \rightarrow \sqrt{\frac{8a}{8a - b^3}} = \sin \frac{\alpha}{2}$

❖ Nếu tam giác ABC có góc $BAC = 120^\circ \rightarrow 3b^2 + 8a = 0$

❖ Nếu tam giác ABC có diện tích S $\rightarrow -\frac{b^5}{32a^3} = S^2$

❖ Nếu tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn có bán kính R $\rightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$

- ❖ Nếu tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn có bán kính $r \rightarrow r = \frac{\left| \frac{b^2}{4a} \right|}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{8a}} + 1}$
- ❖ Nếu ABOC là hình thoi $\rightarrow b^2 = 2ac$
- ❖ Nếu tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm $\rightarrow b^2 - 6ac = 0$
- ❖ Nếu tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trực tâm $\rightarrow b^3 - 8a(1 + bc) = 0$
- ❖ Nếu tam giác ABC có trọng tâm G $\rightarrow G\left(0; \frac{6ac - b^2}{6a}\right)$
- ❖ Nếu tam giác ABC có trực tâm H $\rightarrow H\left(0; \frac{4abc - 8a - b^3}{4ab}\right)$

BÀI 08. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG VỀ MỘT ĐỒ THỊ:

	$y = f(x)$
Bước 1: Tìm tập xác định	TXĐ: $D = ???$
Bước 2: Tính đạo hàm cấp 1 (và tìm các điểm dừng)	$y' = f'(x)$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = ? \Rightarrow y(x) = ?$
Bước 3: Tìm giới hạn và tiệm cận (nếu có)	
Bước 4: Bảng biến thiên và nhận xét	
Bước 5: Tìm các điểm đặc biệt	
Bước 6: đồ thị	

A. DẠNG HÀM BẬC HAI:

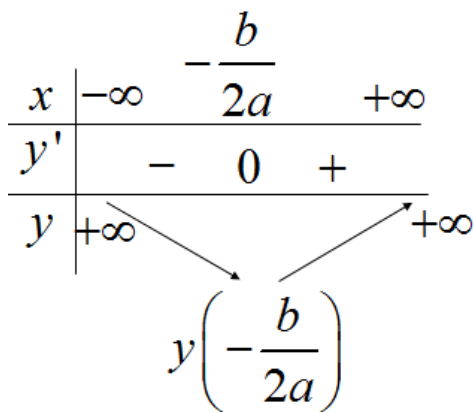
Hàm số: $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

-Tập xác định $D = \mathbb{R}$

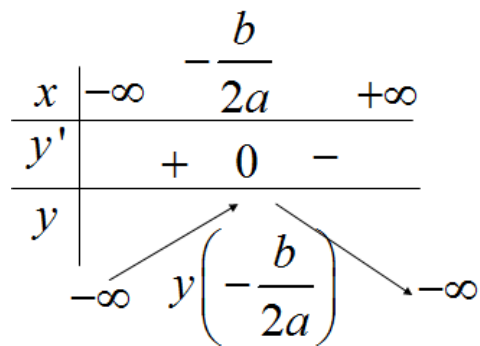
-Đây là một Parabol có đỉnh là $S\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

-Đồ thị luôn đối xứng qua đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$

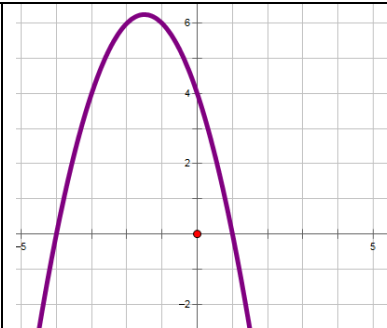
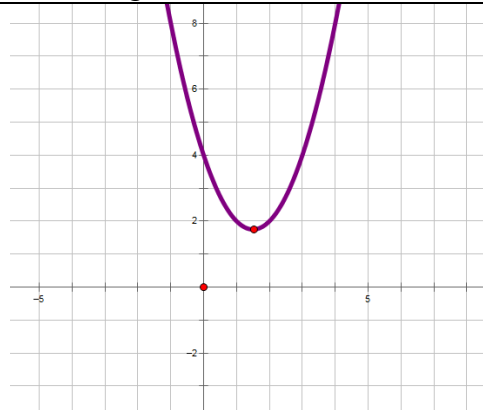
Trường hợp : $a > 0$



Trường hợp : $a < 0$



Hình dáng đồ thị



B. DẠNG HÀM BẬC BA:

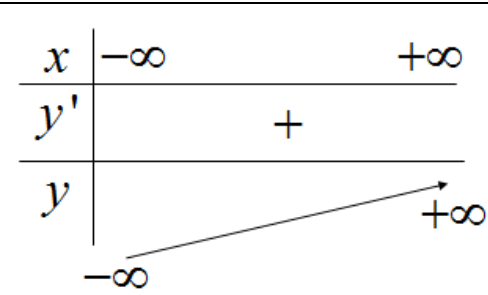
Hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

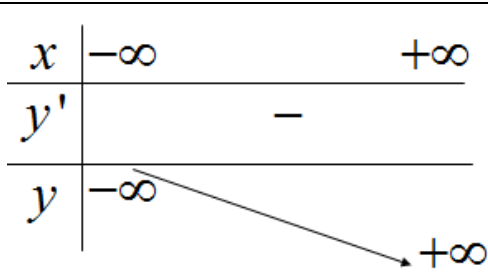
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$; cho $y' = 0$. Xét $\Delta' = b^2 - 3ac$

Trường hợp $\Delta' < 0 \rightarrow y' = 0$ vô nghiệm.

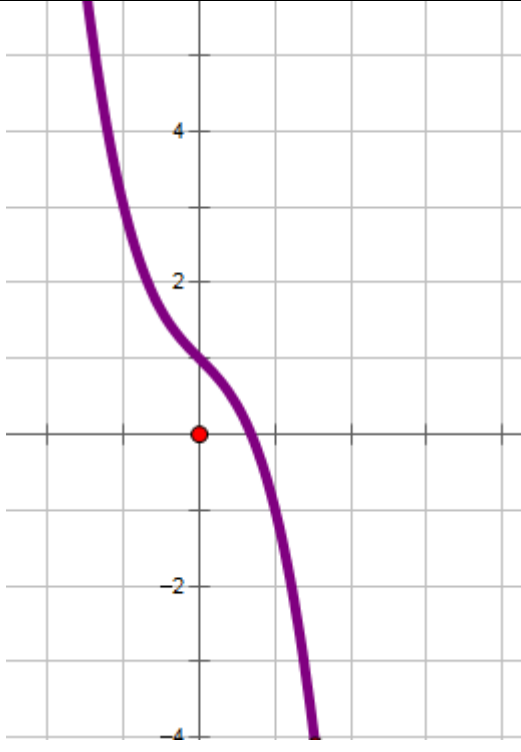
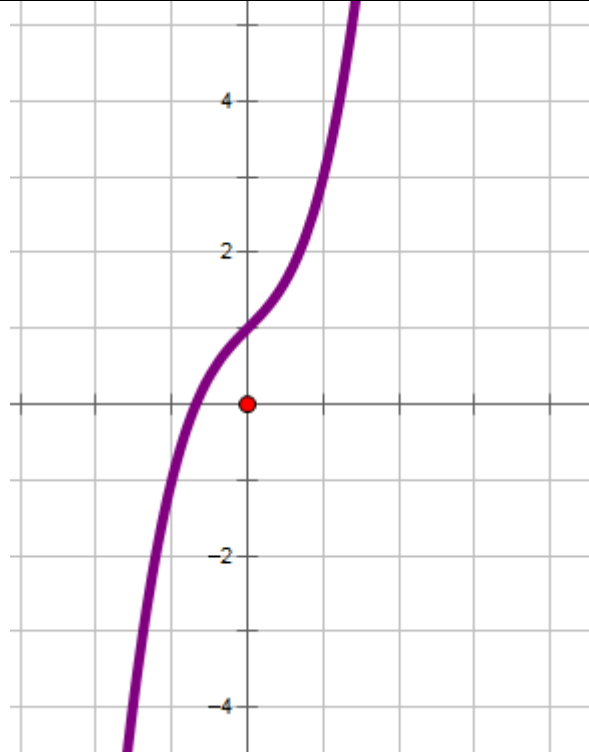
$a > 0$



$a < 0$

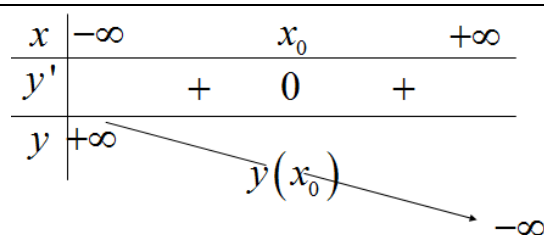


Hình dáng đồ thị

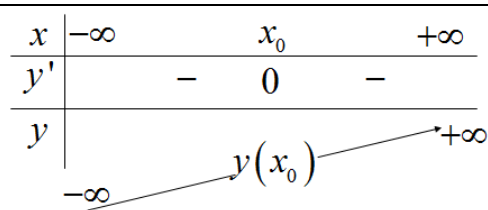


Trường hợp $\Delta' = 0 \rightarrow y' = 0$ có nghiệm kép (giả sử là x_0).

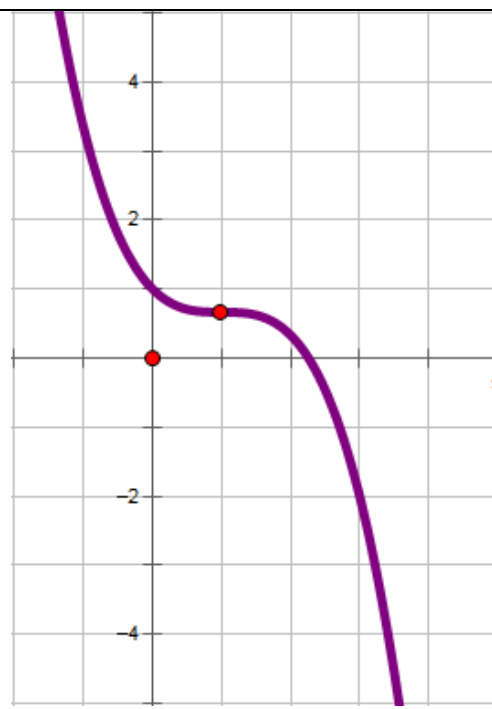
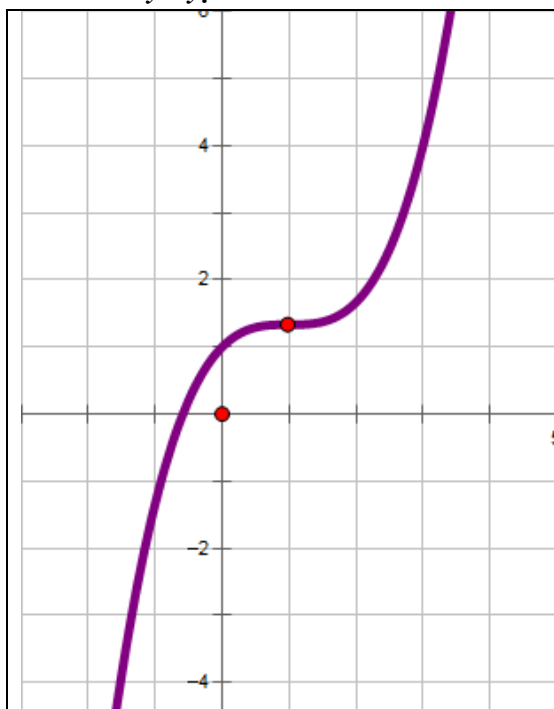
$a > 0$



$a < 0$



Hình dáng đồ thị



Trường hợp $\Delta' > 0 \rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt (giả sử là $x_1 < x_2$).

$a > 0$

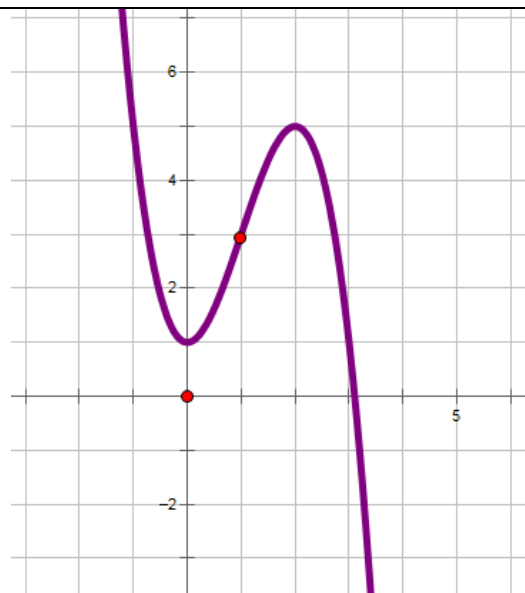
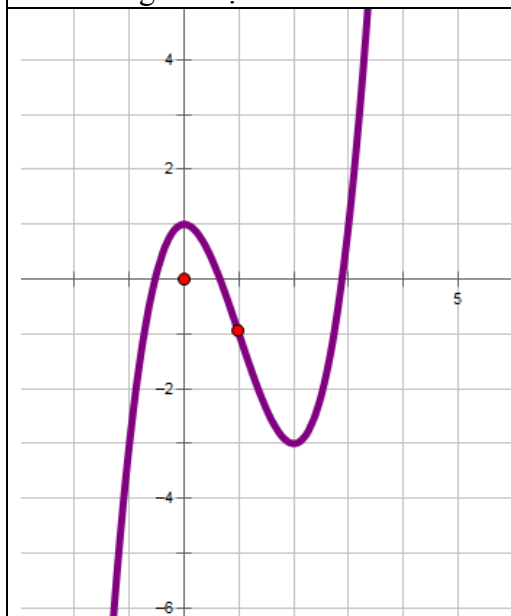
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					
		$y(x_1)$	$y(x_2)$		

$a < 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$				$-\infty$

$y(x_1)$ $y(x_2)$

Hình dáng đồ thị



C. DẠNG HÀM TRÙNG PHƯƠNG:

Hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4ax^3 + 2bx$; cho $y' = 0$. Xét tích của a.b

Trường hợp $ab \geq 0 \rightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm là $x = 0$.

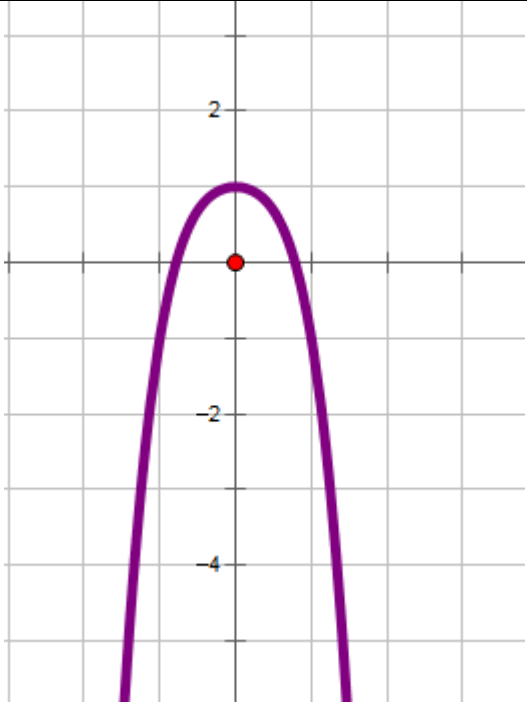
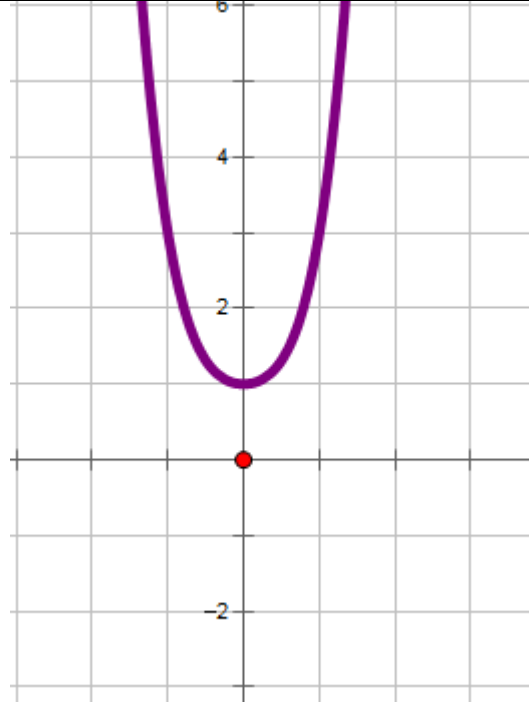
$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	c	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	c	$-\infty$

Hình dáng đồ thị



Trường hợp $ab < 0 \rightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0, x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}, x = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

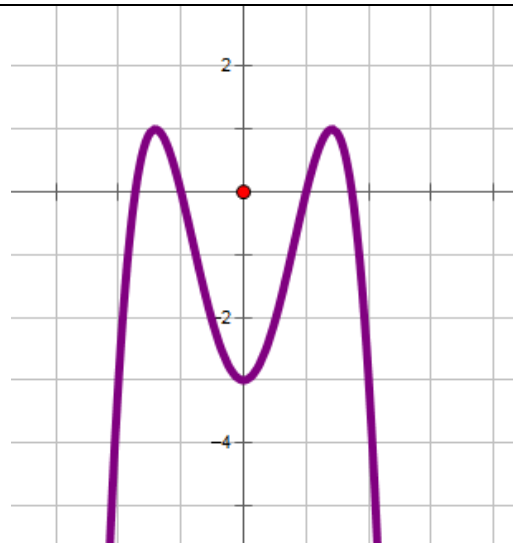
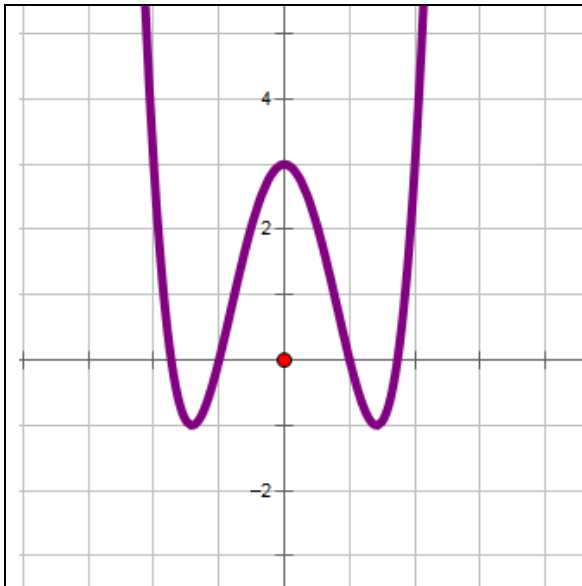
$a > 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$y\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	c	$y\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$y\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	c	$y\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$-\infty$

Hình dáng đồ thị



D. DẠNG HÀM NHẤT BIẾN:

Hàm số: $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (a \neq 0, ad - bc \neq 0)$

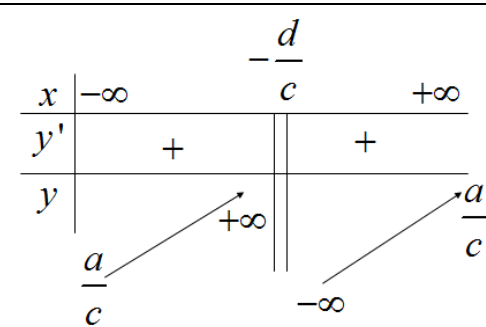
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Đồ thị có tiệm cận đứng là: $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.

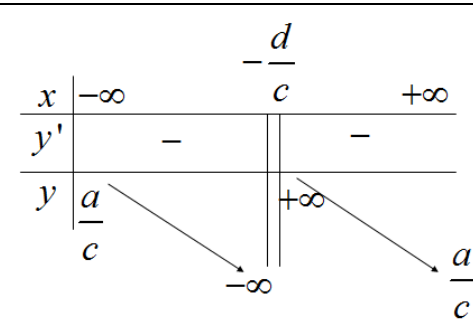
$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$; Xét $ad - bc$

Trường hợp

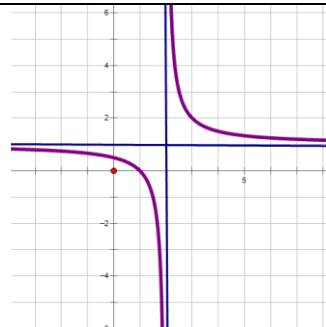
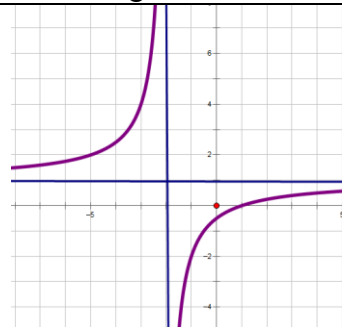
$ad - bc > 0 \rightarrow y' > 0$



$ad - bc < 0 \rightarrow y' < 0$



Hình dáng đồ thị



1/ khảo sát $y = -x^3 + 3x - 2$

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = -3x^2 + 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$

• **BBT**

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	0	$-\infty$	

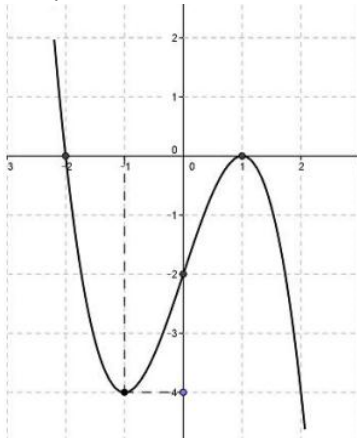
Hàm số đồng biến trên khoảng: $(-1; 1)$; nghịch biến trên các khoảng: $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y = 0$ và cực tiểu tại $x = -1, y = -4$

Đồ thị nhận điểm $I(0; -2)$ làm tâm đối xứng.

• cho $x = 2 \Rightarrow y = -4; x = -2 \Rightarrow y = 0$

• đồ thị



2/ khảo sát $y = x^3 - 3x^2 + 2$

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$

• **BBT**

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

$\nearrow$
 CD

$\nwarrow$
 $C'D'$

$\nearrow$

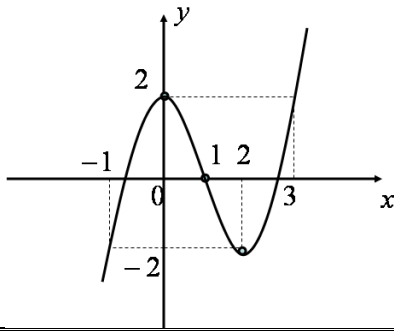
Hàm số đồng biến trên khoảng: $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên các khoảng: $(0; 2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y = 2$ và cực tiểu tại $x = 2, y = -2$

Đồ thị nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.

• cho $x = -1 \Rightarrow y = -2; x = 3 \Rightarrow y = 2$

• đồ thị



3/ khảo sát $y = x^3 + 3x + 2$

- $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 0 (vn)$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$

• **BBT**

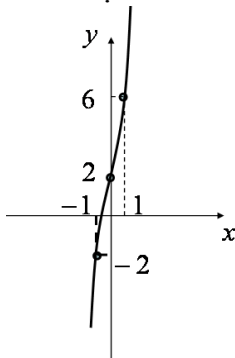
x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng: $(-\infty; +\infty)$

Hàm số không có cực trị

Đồ thị nhận điểm $I(0; 2)$ làm tâm đối xứng.

- cho $x = 1 \Rightarrow y = 6; x = -1 \Rightarrow y = -2$
- đồ thị



4/ khảo sát $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

- $D = \mathbb{R}$
- $y' = -3x^2 + 6x - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$

• **BBT**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	-
y	$+\infty$	-2	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng: $(-\infty; +\infty)$

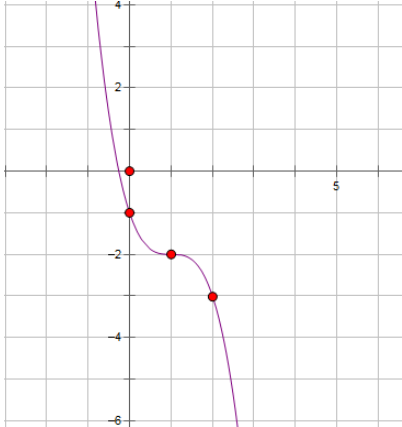
Hàm số không có cực trị

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

Đồ thị nhận điểm $I(1; -2)$ làm tâm đối xứng.

• cho $x = 0 \Rightarrow y = -1; x = 2 \Rightarrow y = -3$

• đồ thị



5/ khảo sát $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

• $D = \mathbb{R}$

• $y' = -4x^3 + 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

• BBT

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$\xrightarrow{2} CD$	$\xrightarrow{1} CT$	$\xrightarrow{2} CD$	$-\infty$

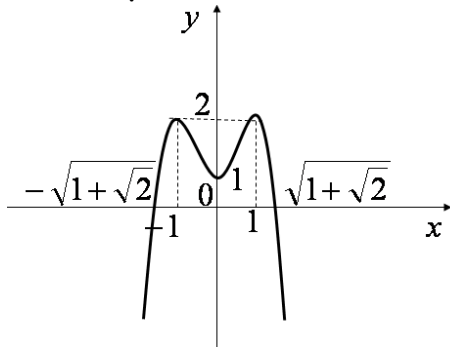
• Vậy: hs tăng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. Hs giảm $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Hs đạt cực đại tại $(-1; 2)$ và $(1; 2)$, cực tiểu tại $(0; 1)$.

Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

• Cho $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + \sqrt{2} \\ x^2 = 1 - \sqrt{2} (L) \end{cases} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

• Đồ thị:



6/ khảo sát $y = \frac{x+1}{x-1}$

• $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$.

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- $x=1$ là đường tiệm cận đứng vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$
- $y=1$ là đường tiệm cận ngang vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$
- BBT

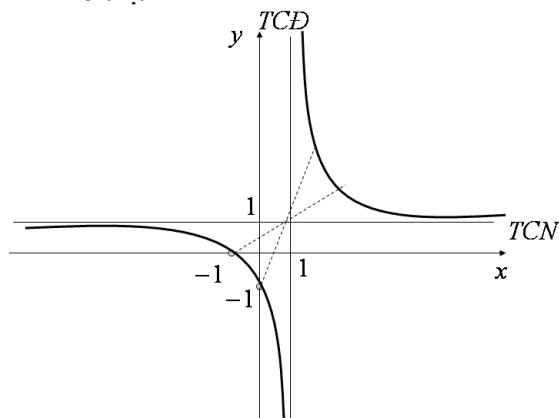
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	1	$-\infty$	$+\infty$

Vậy: hs giảm trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hs không có cực trị

Đồ thị nhận $I(1; 1)$ làm tâm đối xứng.

- Cho $x=0 \Rightarrow y=-1$; $y=0 \Rightarrow x=-1$
- Đồ thị:



❖ PHIẾU 1:

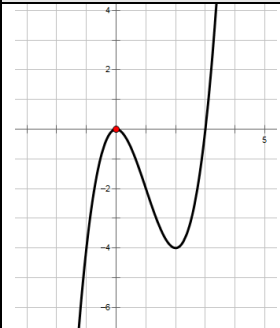
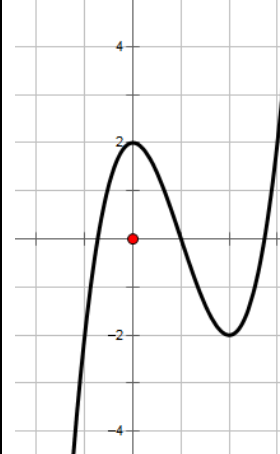
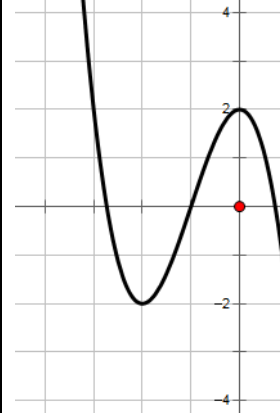
Vẽ nhanh đồ thị:	Hình vẽ	Ghi chú
1/ $y = -x^3 + 3x - 2$		
2/ $y = x^3 - 3x^2 + 2$		

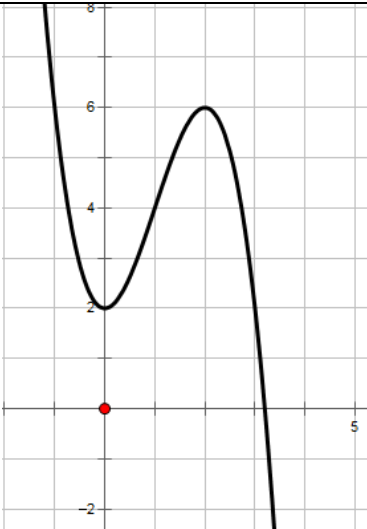
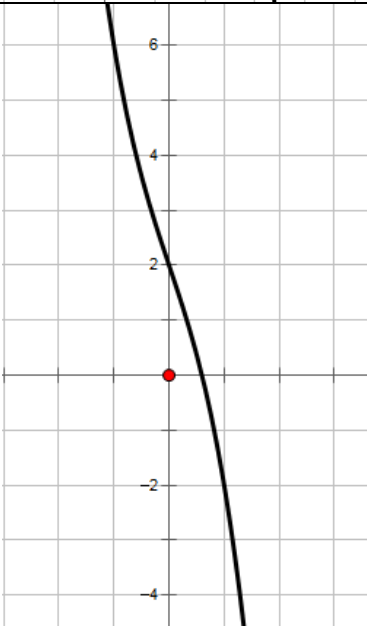
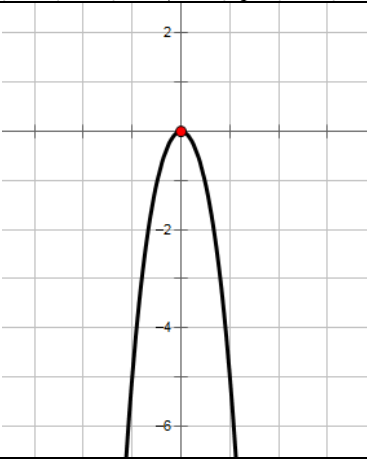
3/ $y = x^3 + 3x + 2$		
4/ $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$		
5/ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$		
6/ $y = \frac{x+1}{x-1}$		
7/ $y = x^4 - 4x^2 + 1$		

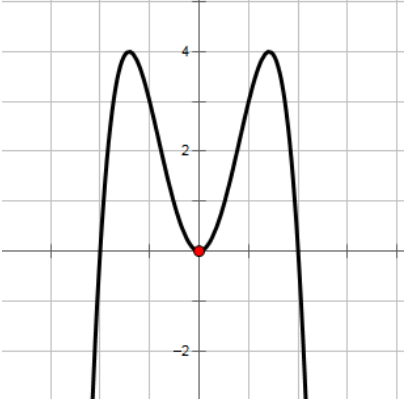
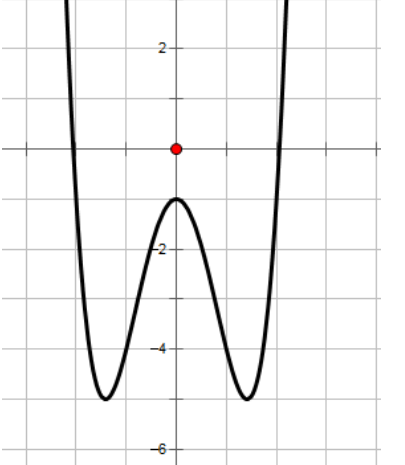
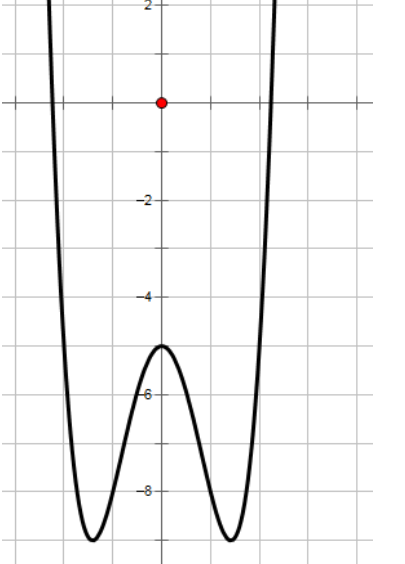
8/ $y = \frac{1-2x}{1+2x}$		

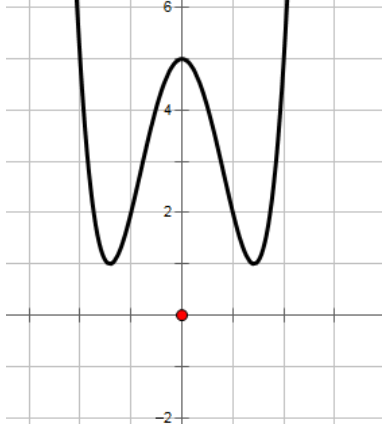
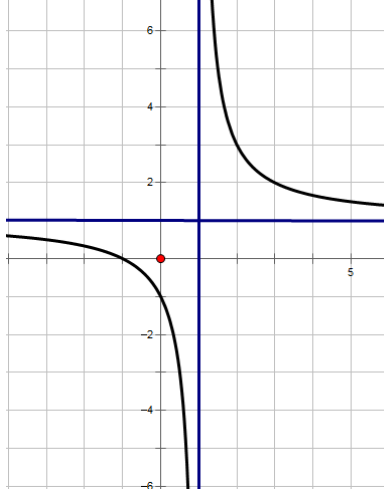
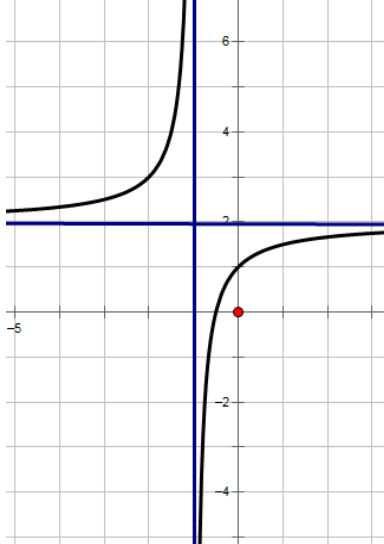
PHIẾU 2:

TẬP ĐỌC THÔNG TIN TỪ ĐỒ THỊ

Đồ thị	Thông tin	Nhận xét
		
		
		

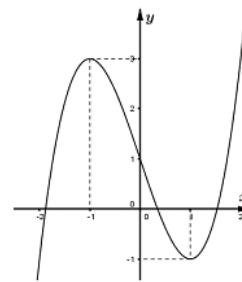
		
		
		

Bài tập bắt buộc

Câu 1: Chọn hàm số có đồ thị như hình vẽ bên:

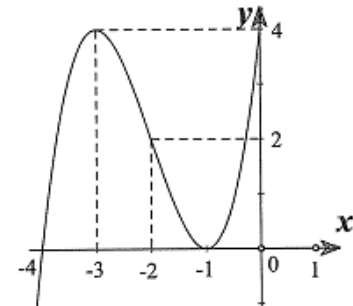
- A. $y = x^3 - 3x + 1$
- B. $y = -x^3 - 3x + 1$
- C. $y = x^3 + 3x + 1$
- D. $y = -x^3 + 3x + 1$



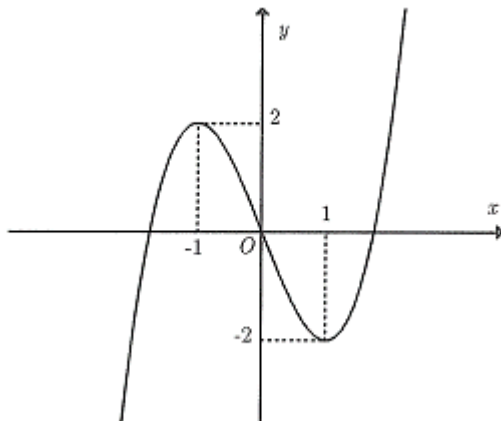
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ có đồ thị như hình vẽ:

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$
- B. $y = x^3 + 3x^2 + 2$
- C. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$
- D. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$



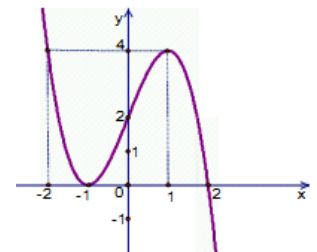
Câu 3: Đồ thị trong hình là của hàm số nào:



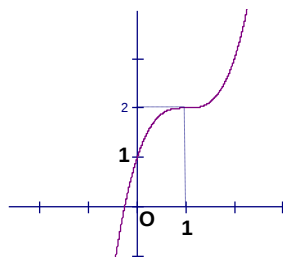
- A. $y = x^3 - 3x$
- B. $y = -x^3 + 3x$
- C. $y = -x^4 + 2x^2$
- D. $y = x^4 - 2x^2$

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x + 2$
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$
- C. $y = x^4 - x^2 + 1$
- D. $y = x^3 - 3x + 1$



Câu 5: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



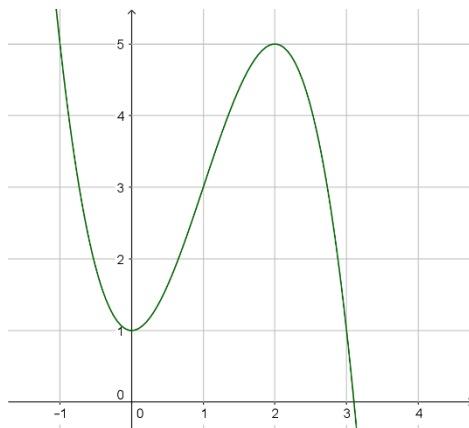
A. $y = x^3 - 3x + 1.$

B. $y = x^3 + 3x^2 + 1.$

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 1.$

Câu 6: Cho hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:



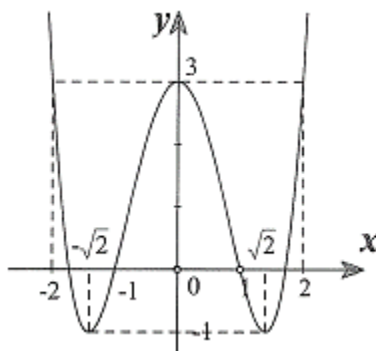
A. $a > 0, b > 0, d = 1.$

B. $a < 0, b < 0, c = 0.$

C. $a < 0, b < 0, d = 1.$

D. $a < 0, b > 0, c = 0.$

Câu 7: Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y = (x^2 + 2)^2 - 1$

B. $y = (x^2 - 2)^2 - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

D. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$

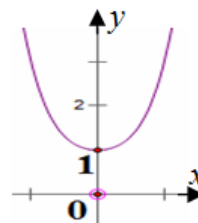
Câu 8: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^4 + x^2 + 1.$

B. $y = -x^4 + x^2 + 1.$

C. $y = x^3 + 3x^2 + 1.$

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1.$



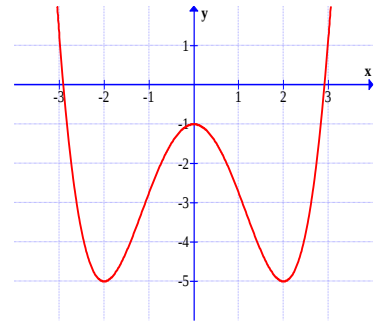
Câu 9: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây?

A. $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 3.$

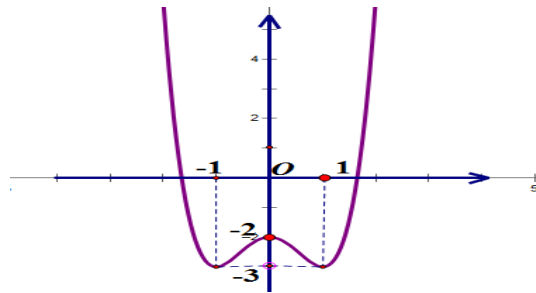
B. $y = -\frac{x^4}{4} + x^2 - 1.$

C. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 1.$

D. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 1.$



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khi đó điểm cực đại của đồ thị hàm số là



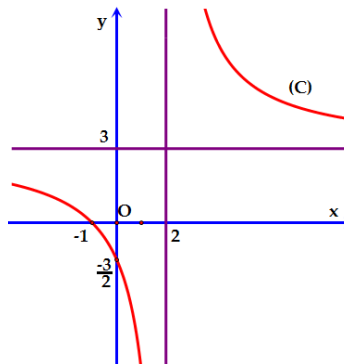
A. $M(0; -2).$

B. $N(-1; -3); P(1; 3).$

C. $x = 0.$

D. $x = \pm 1.$

Câu 11: Đồ thị hàm số tương ứng với hình bên là:



A. $y = \frac{3(x+1)}{x-2}.$

B. $y = \frac{3(x-1)}{x-2}.$

C. $y = \frac{2(x-1)}{x-2}.$

D. $y = \frac{2(x+1)}{x-2}.$

Câu 12: Đồ thị hàm số nào sau đây luôn nằm dưới trục hoành

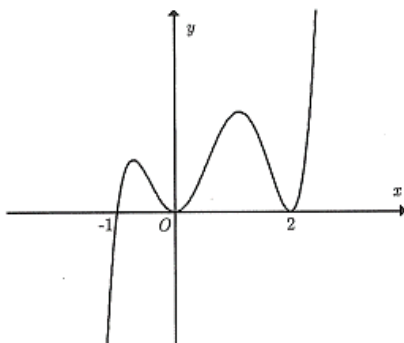
A. $y = x^4 + 3x^2 - 1$

B. $y = -x^3 - 2x^2 + x - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$

Câu 13: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:



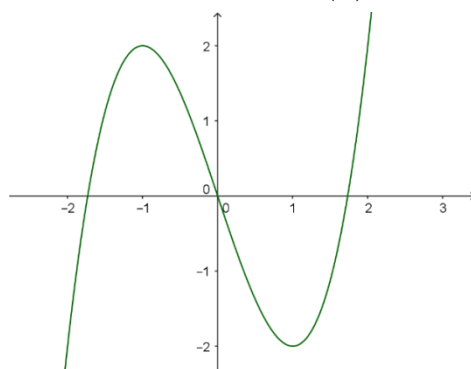
A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

BÀI 09. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CƠ SỞ:

1. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (y_0 = f(x_0))$$

2. Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (*)$$

Nghiệm của hệ (*) là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

3. Nếu $(C_1): y = px + q$ và $(C_2): y = ax^2 + bx + c$ thì

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG TIẾP TUYẾN:

I/ Sử dụng pp viết tiếp tuyến tại điểm M

Tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ luôn có dạng $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Chú ý: nếu

Tiếp tuyến song song $y = ax + b \Rightarrow y'(x_0) = a$

Tiếp tuyến vuông góc $y = ax + b \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{a}$

Tiếp tuyến tạo với Ox một góc $\varphi \Rightarrow y'(x_0) = \pm \tan \varphi$

Tiếp tuyến tạo với $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{y'(x_0) - a}{1 + ay'(x_0)} \right| = \tan \varphi \\ \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \cos \varphi \end{cases}$

Ví dụ: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Hay $x + (x_0 - 1)^2 y - 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$ (d)

Khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến (d) bằng $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 2x_0|}{\sqrt{1 + (x_0 - 1)^4}} = \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc

Với $x_0 = 0$ tiếp tuyến cần tìm là: $x + y - 1 = 0$

Với $x_0 = 2$ tiếp tuyến cần tìm là: $x + y - 5 = 0$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x+1}$ (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng 1.

b. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành 1 tam giác cân.

a. Gọi $M \in \left(x_0 - \frac{1}{2}; \frac{3}{4x_0} - \frac{1}{2}\right) \in (C)$. Tiếp tuyến tại M có dạng:

$$d: y = \frac{-3}{4x_0^2}(x - x_0) + \frac{3}{4x_0} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{4x_0^2}x + \frac{3}{2x_0} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Giả sử } A = d \cap Ox; B = d \cap Oy \text{ suy ra: } A\left(\frac{2x_0(x_0-3)}{3}; 0\right); B\left(0; \frac{3-x_0}{x_0}\right)$$

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{2}{3}(3-x_0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3-x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: } y = \frac{-3}{40-12\sqrt{6}}x + \frac{4-\sqrt{6}}{20} \text{ hay } y = \frac{-3}{40+12\sqrt{6}}x - \frac{4+\sqrt{6}}{20}$$

b. Tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm 1$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm

$$\text{- Nếu } k = -1 \Rightarrow \frac{-3}{(2x_0+1)^2} = -1 \Rightarrow 2x_0+1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Với } x_0 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra tiếp tuyến là: } y = -x - 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Với } x_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra tiếp tuyến là: } y = -x - 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{- Nếu } k = 1 \Rightarrow \frac{-3}{(2x_0+1)^2} = 1 \Rightarrow (2x_0+1)^2 = -3 \text{ (PTVN): Vô nghiệm}$$

$$\text{Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là: } y = -x - 1 - \sqrt{3}; y = -x - 1 + \sqrt{3}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = 3x - x^3$ (C). Tìm trên đường thẳng (d): $y = -x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- Gọi $M(m; -m) \in d$. PT đường thẳng $\square$ qua M có dạng: $y = k(x-m) - m$.

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \text{hệ PT sau có nghiệm: } \begin{cases} 3x - x^3 = k(x - m) - m & (1) \\ 3 - 3x^2 = k & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 2x^3 - 3mx^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2x^3}{3x^2 - 4} \quad (**)$$

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow (**)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 4}. \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 24x^2}{(3x^2 - 4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào BBT, (**) có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}. \text{ Vậy: } M(-2; 2) \text{ hoặc } M(2; -2).$$

II/ Sự tiếp xúc của hai đồ thị và tiếp tuyến đi qua một điểm:

Cho $y = f(x)$ có đồ thị (C), $y = g(x)$ có đồ thị (C_1)

$$\text{Khi đó, (C) và } (C_1) \text{ tiếp xúc } \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ví dụ: Cho hàm $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ (C). Tìm phương trình các đường thẳng qua $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị của hàm số.

Đường thẳng (d) qua A và có hệ số góc k:

$$y = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4$$

$$(d) \text{ tiếp xúc (C)} \Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 & (1) \\ 6x^2 - 6x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Thay (2) vào (1):

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(8x^2 - 17x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow k = 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow k = 12 \\ x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = -\frac{21}{32} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng qua A và tiếp xúc với (C) là:

$$y=4 \text{ hoặc } y=12x-15 \text{ hoặc } y=-\frac{21}{32}+\frac{645}{128}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-6;5)$.

Phương trình đường thẳng đi qua $A(-6;5)$ là (d): $y = k(x+6)+5$.

(d) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} k(x+6)+5 = \frac{x+2}{x-2} \\ k = -\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{(x-2)^2} \cdot (x+6)+5 = \frac{x+2}{x-2} \\ k = -\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x+6)+5(x-2)^2 = (x+2)(x-2) \\ k = -\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x=0 \\ k = -\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; k=-1 \\ x=6; k=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra có 2 tiếp tuyến là : $(d_1): y = -x-1$; $(d_2): y = -\frac{x}{4}+\frac{7}{2}$

Ví dụ: Xác định m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ tiếp xúc với trục hoành.

Đồ thị tiếp xúc với trục hoành: $y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - m + 1 = 0 \quad (1) \\ x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m = 0 \quad (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow m = 3x^2 - 4x + 1 \text{ thay vào (2) ta được: } 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

* Với $x=1 \Rightarrow m=0$

* Với $x=\frac{1}{2} \Rightarrow m=-\frac{1}{4}$

Vậy $m=0; m=-\frac{1}{4}$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8. $M(-1; -4)$

2/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$. $A(3;1), B(-1;-3)$

3/ Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ (C). Tìm tất cả các giá trị k, để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2011 \cdot OB$. $k = \frac{9}{2}; k = 6039$

4/ Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1) (m là tham số).

Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ góc α , biết

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

$$m \leq -\frac{1}{4} \text{ hoặc } m \geq \frac{1}{2}$$

5/ Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d) :

$$x + 2y - 3 = 0.$$

$$m < 0 \text{ hay } m > \frac{2}{3}.$$

6/ Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ (C_m).

Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm M có hoành độ $x = -1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

$$m = 2$$

7/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tìm trên đường thẳng $d: y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) .

$$(-1; 4); \left(-\frac{2}{3}; 4\right); (2; 4).$$

8/ Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C_m). Tìm m để từ điểm $M(1; 2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến

với (C_m) .

$$\begin{cases} A \in O_x \\ B \in O_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}$$

9/ Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C). Tìm trên đường thẳng $(d): y = 2$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C) .

$$\begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

10/ Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (1), m là tham số. Gọi A là một điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4}; 1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A là lớn nhất

.

$$m = 1.$$

12/ Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

13/ Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết khoảng cách từ điểm $I(1; 2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

14/ Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

15/ Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết rằng tiếp tuyến cách đều hai

điểm $A(2; 4), B(-4; -2)$.

16/ Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$. Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị

(C). d là khoảng cách từ I đến Δ . Tìm giá trị lớn nhất của d . $\sqrt{2}$

17/ Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$. Chứng minh rằng với mọi m , đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất. $m = -1$

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm M có hoành độ bằng -1 thì tung độ đó bằng

- A. 4. B. 3. C. -3 . D. -4 .

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm M có hoành độ bằng -1 thì hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng

- A. 9. B. 3. C. -3 . D. -9 .

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm M có hoành độ bằng 2 thì phương trình tiếp tuyến đó có dạng

- A. $y = 9x + 21$. B. $y = 24x - 27$. C. $y = -9x + 39$. D. $y = -24x + 69$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm M có tung hoành độ bằng 1 thì tồn tại hai phương trình tiếp tuyến với (C) trong đó là $y = 1$. Tìm phương trình tiếp tuyến còn lại?

- A. $y = 9x + 28$. B. $y = 9x + 1$. C. $y = 9x - 28$. D. $y = 9x - 1$.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 2016 - 2017x$ thì hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng

- A. 2016. B. 2017. C. -2016 . D. -2017 .

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ có đồ thị là (C). Nếu phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 6y + 2017 = 0$ thì phương trình tiếp tuyến đó có dạng

- A. $y = -6x - 10$. B. $y = -6x + 10$. C. $y = 6x + 10$. D. $y = 6x - 10$.

Câu 7. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ tồn tại một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hỏi hệ số góc đó bằng bao nhiêu?

- A. -24 . B. -12 . C. -9 . D. -6 .

Câu 8. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C). Tồn tại ba tiếp tuyến với của (C) là các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$. Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là các hệ số góc của tiếp tuyến nói trên. Đặt biểu thức

$P = k_1 + k_2 + k_3$, khi đó giá trị P bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{405}{32}$. B. $P = -\frac{405}{32}$. C. $P = \frac{363}{32}$. D. $P = -\frac{363}{32}$.

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ $x = 1$, có phương trình là

A. $2x - y + 3 = 0$. B. $2x - y - 3 = 0$. C. $x - 2y - 3 = 0$. D. $x - 2y + 3 = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(2; 5)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến (C)?

A. 1. B. 2. C. 3. D. Không có tiếp tuyến.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Từ điểm $M \in Oy$ có tung độ m kẻ được hai tiếp tuyến đến (H) thì giá trị m là:

A. $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. C. $m < -1$. D. $m < -2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(2; m)$ có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) thì giá trị m là:

A. $m \in (-\infty; 2)$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in (3; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x \ln x$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng $y = -\frac{1}{2}x + 3$ thì $x_0 + y_0$ bằng

A. $2e$. B. $3e$. C. $4e$. D. $5e$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ có đồ thị (C). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực tiểu của (C) song song với đường thẳng $x = 1$.
 B. Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực tiểu của (C) song song với trục hoành.
 C. Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực tiểu của (C) có hệ số góc dương.
 D. Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực tiểu của (C) có hệ số góc bằng 1.

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại giao điểm của nó với trục tung là:

A. $y = -3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 16. Tìm những điểm M thuộc đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 - 2$ biết hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng 9 ?

A. $M(1; -6), M(-3; -2)$. B. $M(-1; -6), M(3; -2)$.
 C. $M(-1; -6), M(-3; -2)$. D. $M(1; 6), M(3; 2)$.

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $f''(x_0) = 0$ là:

A. $y = -x + 1$. B. $y = -3x + 3$. C. $y = -x - 1$. D. $y = -3x - 3$.

BÀI 10. TƯƠNG GIAO

A. LÝ THUYẾT CƠ SỞ:

Cho hai đồ thị (C_1) : $y = f(x)$ và (C_2) : $y = g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Ví dụ: Biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

$$y = \frac{x+1}{x-1} \text{ (C)} \text{ và } y = m - x \text{ (d)}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+1}{x-1} = m - x \quad (x \neq 1) \Leftrightarrow x+1 = mx - m - x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - mx + m + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = m^2 - 4m - 4 \text{ (do pt(*) luôn không nhận } x=1 \text{ làm nghiệm)}$$

Biện luận:

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } m > 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \text{(C) và d có hai điểm chung.}$$

$$* \Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } m = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \text{(C) và d có một điểm chung.}$$

$$* \Delta < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \text{(C) và d không có điểm chung.}$$

Ví dụ: Tìm m để đồ thị hàm số (C) $y = x^3 + mx + 5$ cắt đường thẳng

d: $y = 6x + m$ tại ba điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $x^3 + mx + 5 = 6x + m$ (*)

$$\Leftrightarrow x^3 + (m-6)x + 5 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + m - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + m - 5 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 21 - 4m > 0 \\ 1^2 + 1 + m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m < \frac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases} \text{ đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt.}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) .

Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2, \quad t \geq 0$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \quad (**)$$

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 > 0 \\ 3m+1 > 0 \\ 3m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m)

Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- PT hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành: $x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - \frac{2}{x} (x \neq 0)$

Xét hàm số: $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-3	$-\infty$

Dựa vào BBT suy ra:

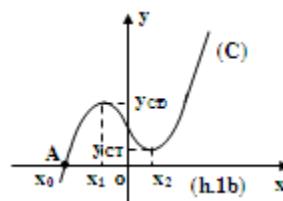
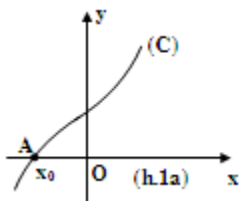
Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG SỰ TƯƠNG GIAO:

I/ Sử dụng cực trị vào sự tương giao

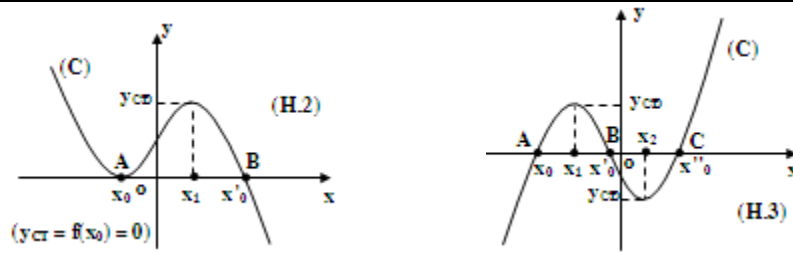
1. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 1 điểm chung duy nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ không có cực trị} \\ f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất}$$



2. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 2 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow (C) \text{ tiếp xúc với Ox} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm}$$

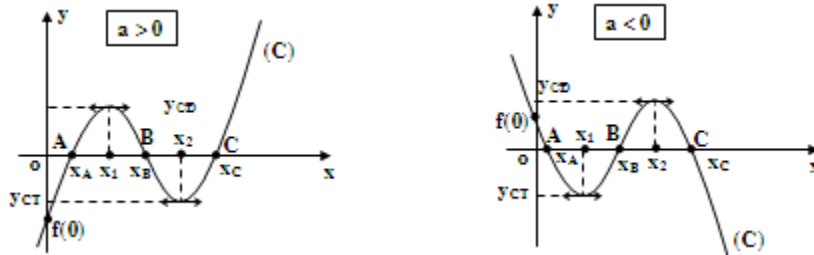


3. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 3 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt}$$

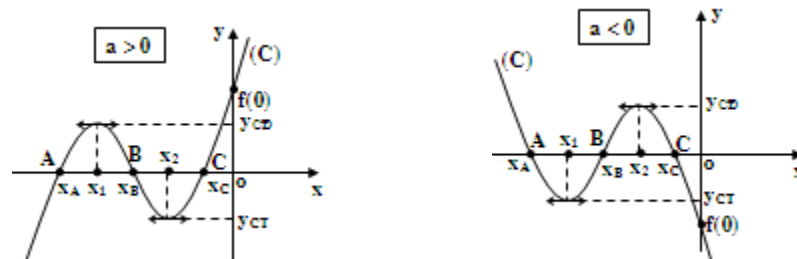
4. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} > 0, x_{CT} > 0 \\ a \cdot f(0) < 0 \text{ (hay } ad < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.}$$



5. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} < 0, x_{CT} < 0 \\ a \cdot f(0) > 0 \text{ (hay } ad > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm âm phân biệt.}$$



Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 + 2m$ (C_m) (m là tham số).

Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m)$
- + Khi $m = 0$ thì $y' = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ thỏa yêu cầu bài toán.

+ Khi $m \neq 0$ thì (1) có 2 cực trị $x_1 = 0, x_2 = \frac{2m}{3}$. Do đó đồ thị cắt Ox tại duy nhất 1 điểm khi

$$f(x_1).f(x_2) > 0 \Leftrightarrow 2m\left(2m - \frac{4m^3}{27}\right) > 0 \Leftrightarrow 4m^2\left(1 - \frac{2m^2}{27}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Kết luận: khi $m \in \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ thì đồ thị (Cm) cắt Ox tại duy nhất một điểm.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$ (m là tham số) (1).

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

$$\text{Đồ thị (1) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0, x_{CT} > 0 \\ a.y(0) < 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$+ y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) \quad + \Delta_{y'} = 9(m^2 - m^2 + 1) = 9 > 0, \forall m \quad + y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 = x_{CD} \\ x = m + 1 = x_{CT} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$$

II/ Hai đường cong cắt nhau thỏa một tính chất nào đó

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Xác định m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB = 3\sqrt{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x-3}{x-2} = x + m \quad (x \neq 2) \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x + 2 - 2m = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 2m + 1 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$$

Với $m \neq 1$, đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; x_A + m)$ và $B(x_B; x_B + m)$.

Ta có x_A và x_B là nghiệm của phương trình (*) nên theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A \cdot x_B = 2 - 2m \end{cases}$

$$\text{Theo đề ta có } AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(x_B - x_A)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B]} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2[(3-m)^2 - 4(2-2m)]} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 4m + 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 2 = 18 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (n) \\ m = -4 & (n) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$; $m = -4$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (2m-1)x + 3(m+1)$. Xác định m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là:

$$x^3 - (m+3)x^2 + (2m-1)x + 3(m+1) = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - (m+4)x + 3m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - (m+4)x + 3m+3 = 0 \quad (**) \end{cases}$$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm âm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \\ (-1)^2 - (m+4)(-1) + 3m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ 3m+3 > 0 \\ m+1 < 0 \\ 4m+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -1 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C). Chứng minh rằng với $k > -3$ thì đường thẳng d đi qua $I(1; 2)$ có hệ số góc k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của AB.

Đường thẳng d có phương trình: $y - 2 = k(x - 1)$ hay $y = kx + 2 - k$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + 2 - k \quad (*) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 - k = 0 \quad (**) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 3 + k > 0 \\ -3 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -3$$

Suy ra với $k > -3$ đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B. (1)

Gọi $A(x_A; kx_A + 2 - k)$, $B(x_B; kx_B + 2 - k)$, $I(1; 2)$ là ba giao điểm của (C) và d , trong đó x_A, x_B là hai

nghiệm của phương trình $(**)$, nên theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A x_B = -2 - k \end{cases}$

Ta thấy: $\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{k(x_A + x_B) + 4 - 2k}{2} = \frac{k \cdot 2 + 4 - 2k}{2} = 2 \end{cases}$ suy ra I là trung điểm của AB. (Đpcm)

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \quad (*) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (**) \end{cases}$$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt .

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm âm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ 1^2 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (a)$$

Gọi $x_3 = 1$; x_1, x_2 là hai nghiệm của pt (**)

Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -m$ nên $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 < 3 \Leftrightarrow m < 1 \quad (b)$

Tổng hợp các điều kiện (a) và (b) ta được các giá trị cần tìm của m là: $-\frac{1}{4} < m < 0$; $0 < m < 1$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Pt hoành độ giao điểm : $\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k - 1)x + 2k = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3 - 2\sqrt{3} \\ k > 3 + 2\sqrt{3} \\ k \neq 0 \end{cases} \quad (a)$$

Gọi $A(x_A; kx_A + 2k + 1)$, $B(x_B; kx_B + 2k + 1)$ là giao điểm của (C) và d, trong đó x_A, x_B là hai nghiệm của

phương trình (**), nên theo vi-et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = \frac{1-3k}{k} \\ x_A x_B = 2 \end{cases}$

Khoảng cách từ A và B đến Ox bằng nhau $d(A, Ox) = d(B, Oy)$

$$\Leftrightarrow |kx_A + 2k + 1| = |kx_B + 2k + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} kx_A = kx_B \text{ (loại)} \\ k(x_A + x_B) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \left(\frac{1-3k}{k} \right) + 4k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \text{ (thỏa đk (a))}.$$

Vậy $k = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.
Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• Hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - 3mx^2 + 9x - 7 = 0 \quad (1)$

Gọi hoành độ các giao điểm lần lượt là $x_1; x_2; x_3$ ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$

Để $x_1; x_2; x_3$ lập thành cấp số cộng thì $x_2 = m$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\Rightarrow -2m^3 + 9m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \end{cases} \text{ Thử lại ta có } m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - mx$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực.

Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d :

$$x^3 - 3mx^2 - mx = x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3mx^2 - (m+1)x - 2 = 0$$

Giả sử (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ lần lượt lập thành cấp số nhân. Khi đó ta có:

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -m-1 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_2^3 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{2} \text{ nên ta có: } -m-1 = 4 + \sqrt[3]{2} \cdot 3m \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$$

Thử lại $m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$, thay vào tính nghiệm thấy thỏa mãn.

$$\text{Vậy: } m = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}.$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ có đồ thị là (C_m) .

Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Với (*), gọi $t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của $f(t) = 0$, khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là:

$$x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ lập thành cấp số cộng} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

$$\Leftrightarrow m+1+|m| = 9(m+1-|m|) \Leftrightarrow 5|m| = 4(m+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = 4m+4 \\ -5m = 4m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (thỏa (*))}$$

Bài tập tương tự

1/ Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho $AB = \sqrt{5}$.

$$m = 10; m = -2$$

2/ Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Tìm các giá trị của tham số k sao cho đường thẳng $(d): y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

$$k = -3$$

3/ Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m + 2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

$$m = 1$$

4/ Cho hàm $y = \frac{x+2}{2x-2}$. Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$$OA^2 + OB^2 = \frac{37}{2}.$$

$$m = -\frac{5}{2}; m = 2$$

5/ Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O .

$$m = -2.$$

6/ Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng $(d): y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác IMN bằng 4 (I là tâm đối xứng của (C)).

$$m = 3; m = -1$$

7/ Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực.

Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

$$m = 1$$

8/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

$$\Leftrightarrow |m| > 1$$

9/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-2) - 2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2; -2), B, D$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến tại B và D với đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$m = -1$$

10/ Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số).

Cho đường thẳng $(d): y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$A(0; 4), B, C$ sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$$

11/ Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C) . Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0)$ với hệ số góc k ($k \in \mathbb{R}$). Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

$$k = 1$$

12/ Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ (m là tham số) (1)

Tìm m để đường thẳng $d: y = 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(0; 1), B, C$ sao cho các tiếp

tuyến của đồ thị hàm số (1) tại B và C vuông góc với nhau.

$$m = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8}$$

Bài tập bắt buộc

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C). Đường thẳng $y = 3$ cắt (C) tại mấy điểm?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Không cắt.

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ với trục hoành là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 3. Các điểm dưới đây điểm nào là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ với đường thẳng $y = 9x - 25$?

- A. $M(-3; -52)$. B. $M(-3; -42)$. C. $M(3; -52)$. D. $M(3; -42)$.

Câu 4. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số $y = x(3-x)^2$ cắt đường thẳng $y = mx$ tại ba điểm phân biệt?

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + (m-2)x + 2m$ có đồ thị (C). Biết khi (C) cắt trục Ox có một hoành độ nguyên mà ta có thể tính được đó là:

- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ có đồ thị (C). Nếu đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm khác nhau thì giá trị của m phải là:

- A. $-2 < m < 2$. B. $-1 < m < 2$.
C. $-2 < m < -1$. D. $\begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 2 \end{cases}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m$ có đồ thị (C). Nếu đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành thì giá trị của m phải là:

- A. $m = 0$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = \pm 3$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Tồn tại các giá trị nguyên của m để đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 9. Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có một điểm cực tiểu $(0; -2)$ và cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = \pm 1$ thì đồ thị (C) có dạng:

- A. $y = x^4 + 3x^2 - 4$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
C. $y = x^4 + x^2 - 2$. D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Câu 11. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có các hoành độ đối xứng nhau qua gốc tọa độ, khi đó

- A. $m > 1$. B. $m > -\frac{1}{2}$.
C. $m > 0$. D. $-1 < m < 0$.

Câu 12. Nếu đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ tại bốn điểm phân biệt thì

- A. $m > -\frac{9}{4}$. B. $m < -\frac{9}{4}$.
C. $-\frac{9}{4} < m < 4$. D. $-4 < m < -\frac{9}{4}$.

Câu 13. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt thì giá trị thực của m phải bằng

- A. $m = 0$.
B. $m = 1$.
C. $m = 2$.
D. $m = \{0; 2\}$.

Câu 14. Trong các đồ thị của hàm số dưới đây, đồ thị nào cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

- A. $y = \frac{3-2x}{x+1}$.
B. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.
C. $y = \frac{3x+4}{x-1}$.
D. $y = \frac{2x-3}{3x-1}$.

Câu 15. Đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

- A. $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.
B. $m \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.
D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 16. Đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

- A. $m \in (2; 6)$.
B. $m \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.
C. $m \in (6; +\infty)$.
D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 17. Đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ cắt đường thẳng $y = mx + 1$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (H), khi đó

- A. $m \in (0; 1)$.
B. $m \in (-\infty; 2)$.
C. $m \in (1; +\infty)$.
D. $m \in (2; 3)$.

Câu 18. Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2m$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất thì

- A. $m \in \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$.
B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$.
D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 19. Nếu đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì

- A. $m \in \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \setminus \{0\}$.
D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 20. Đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = mx + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $A(0; 1)$ và B là trung điểm của AC, khi đó

- A. $m = \frac{9}{2}$.
B. $m = 4$.
C. $m = 3$.
D. $m = 1$.

Câu 21. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m - 6$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$, khi đó:

- A. $m = 2$.
 B. $m = -\frac{2}{3}$.
 C. $m = \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$.
 D. $m = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 22. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, khi đó:

- A. $m = 11$.
 B. $m = -9$.
 C. $m = 9$.
 D. $m = -11$.

Câu 23. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(-2; 2)$ và có hệ số góc k .

Tìm tất cả các giá trị thực của k để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt.

- A. $m \in (0; 12) \setminus \{-1\}$.
 B. $m \in (-\infty; 0) \cup (12; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; 0)$.
 D. $m \in (12; +\infty)$.

Câu 24. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(-2; 2)$ và có hệ số góc k .

Tìm tất cả các giá trị thực của k để (C) cắt d tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị (C).

- A. $m \in (0; 12) \setminus \{-1\}$.
 B. $m \in (-\infty; 0) \cup (12; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; 0)$.
 D. $m \in (12; +\infty)$.

Câu 25. Tồn tại hai giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$ cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$. Khi đó tổng hai giá trị của m bằng

- A. -8 .
 B. -6 .
 C. 6 .
 D. -8 .

Câu 26. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt M, N với độ dài đoạn MN ngắn nhất thì

- A. $m = 0$.
 B. $m = 1$.
 C. $m = 2$.
 D. $m = 3$.

Câu 27. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(-1; 0)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C) cắt d tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC nhận điểm $G\left(\frac{5}{3}; 2\right)$ làm trọng tâm, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = \frac{5}{3}$.
 B. $m = \frac{4}{3}$.
 C. $m = \frac{3}{5}$.
 D. $m = \frac{3}{4}$.

Câu 28. Tồn tại hai giá trị thực của m để đồ thị (C) $y = (2-m)x^3 - 6mx^2 + 9(2-m)x - 2$ cắt đường tiệm cận ngang của (H) $y = \frac{1-2x}{x-3}$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho diện tích của tam giác OBC bằng $\sqrt{13}$, với O là gốc tọa độ và $A(0; -2)$. Tổng hai giá trị thực của m đó bằng

- A. $\frac{196}{13}$.
 B. $\frac{13}{196}$.
 C. $\frac{209}{14}$.
 D. $\frac{14}{209}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ có đồ thị (C). Bốn giá trị m liệt kê dưới đây có một giá trị m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân. Giá trị m đó là

- A. $m = \frac{13}{9}$. B. $m = 3$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 30. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt M, N . Nếu đoạn MN ngắn nhất thì độ dài đoạn MN bằng

- A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. 3. D. 4.

Câu 31. Giá trị m bằng bao nhiêu để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác AOB vuông tại O , với O là gốc tọa độ?

- A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

BÀI 11. SỬ DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH

A. SỬ DỤNG ĐÚNG ĐỒ THỊ (C):

Cho hàm số $y = f(x)$ (C)

Phương trình: $g(x, m) = 0 (*) \Leftrightarrow f(x) = A(m) \rightarrow \begin{cases} y = f(x) & (C) \\ y = A(m) & (d) \end{cases}$

Số nghiệm PT (*) là số giao điểm của đồ thị (C) và (d).

Chú ý: so sánh $A(m)$ với tung độ cực trị.

Ví dụ: Cho hs $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C).

a/ khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b/ biện luận số nghiệm phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2 = m$.

c/ Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- BBT

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			CD		CT		

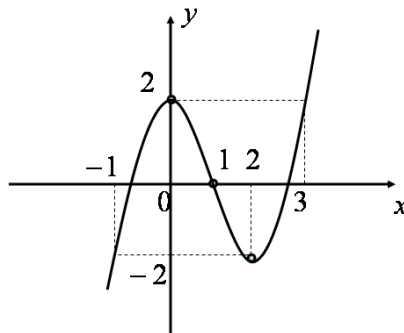
- Nhận xét: hs tăng trên các khoảng: $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Hs giảm trên khoảng $(0; 2)$.

Hs đạt cực đại tại $(0; 2)$, cực tiểu tại $(2; -2)$.

- $y'' = 6x - 6$. Cho $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$. Vậy hs nhận điểm uốn $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.

- Cho $x = -1 \Rightarrow y = -2; x = 3 \Rightarrow y = 2$

- Đồ thị:



b) $x^3 - 3x^2 + 2 = m (*) \Rightarrow y = m$ (D)

số nghiệm PT(*) là số giao điểm của đường thẳng (D) cắt (C)

dựa vào đồ thị (C),

biện luận:

- $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow (D) \text{ cắt } (C) \text{ tại 1 điểm} \Rightarrow \text{pt } (*) \text{ có 1 nghiệm.}$
- $\begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow (D) \text{ cắt } (C) \text{ tại 2 điểm} \Rightarrow \text{pt } (*) \text{ có 2 nghiệm (1 kép, 1 đơn).}$
- $-2 < m < 2 \Rightarrow (D) \text{ cắt } (C) \text{ tại 3 điểm} \Rightarrow \text{pt } (*) \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$

c) $x^3 - 3x^2 + 3 = m (*) \Rightarrow y = m - 1 (D)$

số nghiệm PT(*) là số giao điểm của đường thẳng (D) cắt (C)

dựa vào đồ thị (C), PT(*) có ba nghiệm phân biệt khi (D) cắt (C) tại 3 giao điểm.

$\Leftrightarrow -2 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 3$

B. SỬ DỤNG ĐỒ THỊ (C) BIẾN ĐỔI BỞI GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI:

Cho hàm số $y = f(x) (C)$

• $y = |f(x)| (C') = \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{if } f(x) < 0 \end{cases}$

Đồ thị (C') gồm hai phần:

Phần 1: phần đồ thị (C) trên Ox

Phần 2: phần đối xứng của đồ thị (C) dưới Ox qua Ox.

• $y = f(|x|) (C') = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị (C') gồm hai phần:

Phần 1: phần đồ thị (C) bên phải Oy

Phần 2: phần đối xứng của đồ thị (C) bên phải Oy qua Oy.

• $y = \frac{ax+b}{|cx+d|} (C') = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & \text{if } x \geq -\frac{d}{c} \\ -\frac{ax+b}{cx+d} & \text{if } x < -\frac{d}{c} \end{cases}$

Đồ thị (C') gồm hai phần:

Phần 1: phần đồ thị (C) bên phải tiệm cận đứng.

Phần 2: phần đối xứng của đồ thị (C) bên phải tiệm cận đứng qua tiệm cận đứng.

Ví dụ: Cho hs $y = x^3 - 3x^2 + 2 (C)$.

a/ khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b/ Tìm m để phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

c/ Tìm m để phương trình $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

a/ tương tự trên phần A.

b/ $|x^3 - 3x^2 + 2| = m (*)$

$y = |x^3 - 3x^2 + 2| = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2; & (x^3 - 3x^2 + 2 \geq 0) \\ -x^3 + 3x^2 - 2; & (x^3 - 3x^2 + 2 < 0) \end{cases} (C')$

Đồ thị (C') gồm hai phần:

Phần 1: phần đồ thị (C) trên Ox

Phần 2: phần đối xứng của đồ thị (C) dưới Ox qua Ox.

Dựa vào (C'), PT(*) có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 2$

c) $|x|^3 - 3x^2 + 2 = m$ (*)

$$y = |x|^3 - 3x^2 + 2 = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2; (x \geq 0) \\ -x^3 - 3x^2 + 2; (x < 0) \end{cases} \quad (C')$$

Đồ thị (C') gồm hai phần:

Phần 1: phần đồ thị (C) bên phải Oy

Phần 2: phần đối xứng của đồ thị (C) bên phải Oy qua Oy.

Dựa vào (C'), PT(*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > 2 \end{cases}$

C. SỬ DỤNG ĐỒ THỊ (C) BIẾN ĐỔI BỞI ĐIỀU KIỆN ĐƯỢC SINH RA DO ĐẶT ẨN PHỤ:

Cho hàm số $y = f(x)$ (C)

Nếu đặt $t = \begin{cases} \sin x; \cos x \rightarrow |t| \leq 1 \\ \sin^2 x; \cos^2 x \rightarrow t \in [0; 1] \\ a^x \rightarrow t \in (0; +\infty) \end{cases}$

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0 \text{ với } x \in [0; \pi].$$

1. Tự làm nào (Thầy tin đến giờ này thì các em đã làm được, Thầy tin các em)

2. Xét phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$ (1)

Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) có dạng: $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ (2)

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [-1; 1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình

(1) và (2) bằng nhau.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)

Gọi (C₁): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1; 1]$ và (D): $y = 1 - m$.

Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C₁) và (D).

Đồ thị (C₁) giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \leq t \leq 1$.

Dựa vào đồ thị (C₁) ta có kết luận sau:

- $m > \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho vô nghiệm.
- $m = \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm.

- $1 \leq m < \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 4 nghiệm.
- $0 < m < 1$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm.
- $m = 0$: Phương trình đã cho có 1 nghiệm.
- $m < 0$: Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập tương tự

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

- a) $y = x^3 - 3x + 1$; $x^3 - 3x + 1 - m = 0$ b) $y = -x^3 + 3x - 1$; $x^3 - 3x + m + 1 = 0$
 c) $y = x^3 - 3x + 1$; $x^3 - 3x - m^2 - 2m - 2 = 0$ d) $y = -x^3 + 3x - 1$; $x^3 - 3x + m + 4 = 0$
 e) $y = -\frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2$; $x^4 - 4x^2 - 4 + 2m = 0$ f) $y = x^4 - 2x^2 + 2$; $x^4 - 2x^2 - m + 2 = 0$
 g) (C): $y = x^3 - 3x^2 + 6$; (T): $y = |x^3 - 3x^2 + 6|$; $|x^3 - 3x^2 + 6| - m + 3 = 0$

Bài 2. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
 b) Biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = 3^k$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
 b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{|x|+1}{|x|-1} = m$.

Bài 4. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
 b) Tìm m để phương trình sau có đúng 8 nghiệm thực phân biệt: $|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}| = m^2 - m + \frac{1}{2}$.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (1)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
 b) Định m để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:

$$|x|^3 - 3|x| = m^3 - 3m$$

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y = 0$.
 c) Dùng đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình:

$$3x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$$

Bài tập bắt buộc (VỀ BBT VÀ ĐỒ THỊ)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định, liên tục $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số không có GTLN và GTNN.
- C. Đồ thị hàm số có một cực trị.
- D. Hàm số có đạo hàm tại x_0 .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'		+	0
y			+

$y(x_0)$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định, liên tục $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $[x_1; x_2]$.
- B. Hàm số không có GTLN và GTNN.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có hai cực trị.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	-	0	+	0
y	$+\infty$			$-\infty$

$y(x_1)$ $y(x_2)$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định, liên tục $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số không có GTNN.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$		$+\infty$

c

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $(-\infty; 3)$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(0; 4)$.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.
- D. Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	-		+	0	-
y	$+\infty$		0	4	$+\infty$

$-\infty$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Giáo trình tư duy luyện thi 2018 - Phần khảo sát hàm số

- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		+	0	-
y	3		$+\infty$	0	$+\infty$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $[2;5]$ và có bảng biến thiên sau:

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\max_{x \in [2;5]} f(x) = 3$.
 B. $\max_{x \in [2;3]} f(x) = 1$.
 C. $\min_{x \in [3;5]} f(x) = -1$.
 D. $\max_{x \in [2;5]} f(x) = -1$.

x	2	3	4	5
y'		+	0	+
y	-3	1	3	-1

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		+	0	-
y	3		$+\infty$	0	$+\infty$

Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.
 B. Phương trình $f(x) = 3$ vô nghiệm .
 C. Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt khi $\begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$.
 D. Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2017$ tại một giao điểm duy nhất.

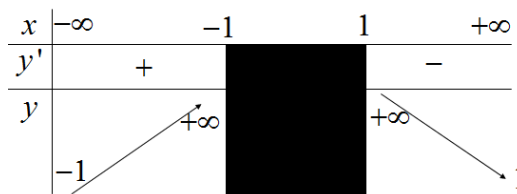
Câu 8. Bảng biến thiên bên là của một trong bốn hàm số được liệt kê bên dưới. Hãy tìm hàm số đó?

- A. $y = x \ln 2 + 2017$.
 B. $y = -2016x^2 - 2017x - 2018$.
 C. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.
 D. $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$.

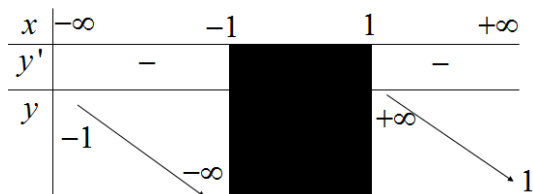
x	$-\infty$	$+\infty$
y'	-	
y	$-\infty$	$+\infty$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$. Hãy tìm bảng biến thiên của hàm số đã cho? (phần tô đen là không xác định).

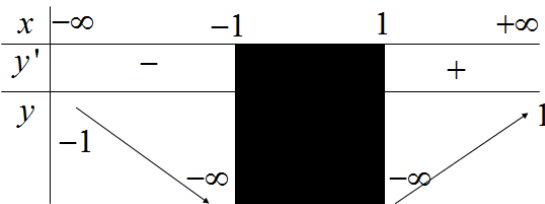
A.



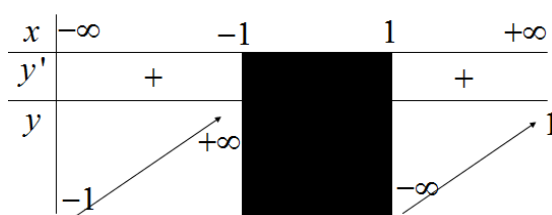
B.



C.

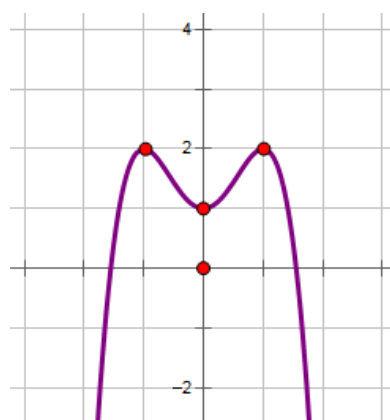
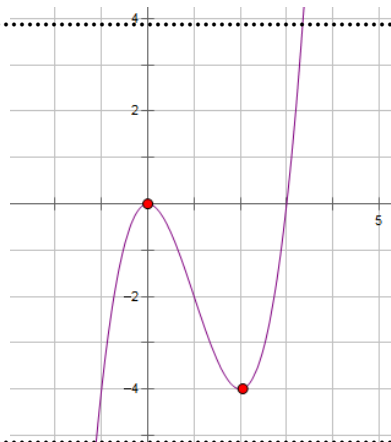


D.



Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 B. $y = x^3 + 3x^2$.
 C. $y = x^3 - 3x^2$.
 D. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.



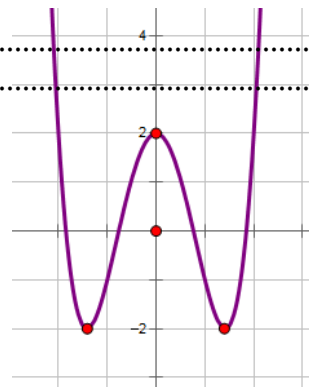
Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
 C. $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$.
 D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình.

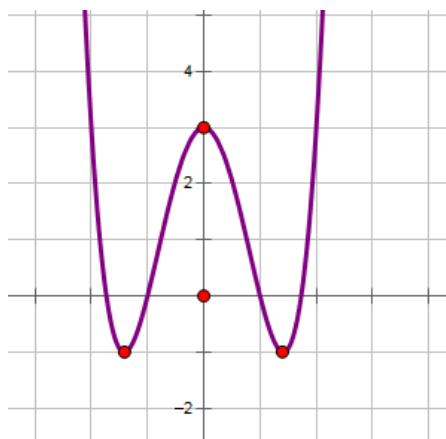
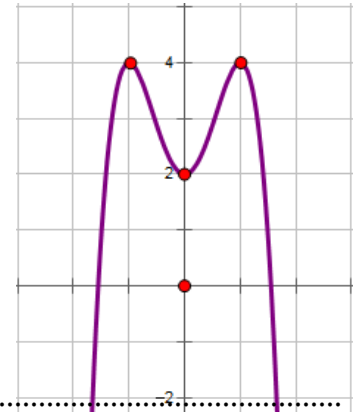
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;5)$.
 B. Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
 D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2 .



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f(x)$ là đường cong trong hình. Khi đó phương trình $f(x) = m+1$ có bốn nghiệm phân biệt khi

- A. $2 < m < 4$.
- B. $1 < m < 3$.
- C. $2 \leq m \leq 4$.
- D. $1 \leq m \leq 3$.

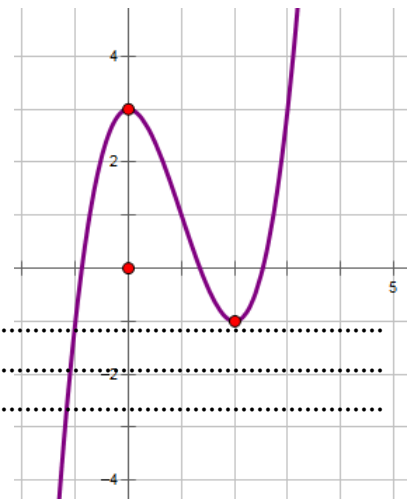


Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f(x)$ là đường cong trong hình. Khi đó phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi

- A. $m = 1$.
- B. $m \geq 1$.
- C. $m > 1$.
- D. $0 < m < 3$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f(x)$ là đường cong trong hình. Khi đó phương trình $f(|x|) = m-1$ có 4 nghiệm phân biệt khi

- A. $-1 < m < 3$.
- B. $-1 < m < 4$.
- C. $0 < m < 1$.
- D. $0 < m < 4$.



BÀI 12. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA (C)

A. ĐIỂM CÓ TỌA ĐỘ NGUYÊN:

Cho hàm số $y = f(x)$ (C) (hàm nhất biến)

Tìm M thuộc (C) sao cho M có tọa độ nguyên.

$$y = f(x) \text{ (C)} = \alpha + \frac{\beta}{A(x)} \rightarrow \beta: A(x)$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) .

Tìm điểm M thuộc (C), sao cho M có tọa độ nguyên đồng thời hoành độ dương.

- $D=R$

Ta có: $y = 1 - \frac{4}{x+1}$

Gọi $M\left(x_0; 1 - \frac{4}{x_0+1}\right) \in (C)$. Tọa độ M nguyên dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z}^* \\ 1 - \frac{4}{x_0+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z}^* \\ 4:(x_0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z}^* \\ \begin{cases} x_0+1 = \pm 1 \\ x_0+1 = \pm 2 \\ x_0+1 = \pm 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(1; -1), M(3; 0)$ thỏa mãn bài toán.

B. CẶP ĐIỂM ĐỐI XỨNG:

Tìm cặp điểm trên đồ thị (C): $y = f(x)$ đối xứng qua đường thẳng d: $y = ax + b$

A, B đối xứng nhau qua d $\Leftrightarrow$ d là trung trực của đoạn AB

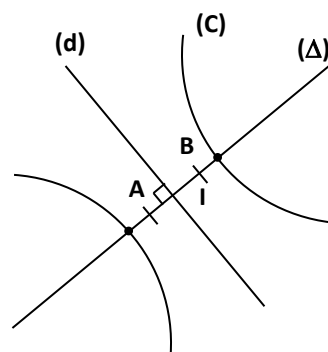
- Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d: $y = ax + b$ có dạng:

$$\Delta: y = -\frac{1}{a}x + m$$

- Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C):

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \quad (1)$$

- Tìm điều kiện của m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Khi đó x_A, x_B là các nghiệm của (1).
- Tìm tọa độ trung điểm I của AB.
- Từ điều kiện: A, B đối xứng qua d $\Leftrightarrow I \in d$, ta tìm được m $\Rightarrow x_A, x_B \Rightarrow y_A, y_B \Rightarrow A, B$.



Chú ý: • A, B đối xứng nhau qua trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$

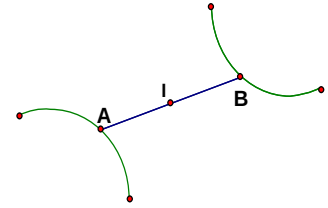
- A, B đối xứng nhau qua trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$
- A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A + y_B = 2b \end{cases}$
- A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ y_A = y_B \end{cases}$

Tìm cặp điểm trên đồ thị (C): $y = f(x)$ đối xứng qua điểm $I(a; b)$

A, B đối xứng nhau qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB.

- Phương trình đường thẳng d qua I(a; b), có hệ số góc k có dạng: $y = k(x - a) + b$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$f(x) = k(x - a) + b \quad (1)$$
- Tìm điều kiện để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. khi đó x_A, x_B là 2 nghiệm của (1).
- Từ điều kiện: A, B đối xứng qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB, ta tìm được k $\Rightarrow x_A, x_B$.



Chú ý: A, B đối xứng qua gốc tọa độ O $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$

Ví dụ: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C).

Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d: $2x - y + 2 = 0$.

- Gọi $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d

I là trung điểm của AB nên $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, ta có $I \in d$

$$\text{Có: } \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(-x_1^3 + 3x_1 + 2) + (-x_2^3 + 3x_2 + 2)}{2} = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + 2$$

$$\Rightarrow -(x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + 3(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Lại có: $MN \perp d \Rightarrow (x_2 - x_1) \cdot 1 + (y_2 - y_1) \cdot 2 = 0$

$$\Rightarrow 7(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{7}{2}$$

$$\text{- Xét } x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}; x_2 = \mp\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\text{- Xét } \begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = \frac{9}{4} \\ x_1x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; 2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; 2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$.

Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

- Hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2) \in (C)$ đối xứng nhau qua Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ -\frac{x_1^3}{3} + x_1^2 + 3x_1 - \frac{11}{3} = -\frac{x_2^3}{3} + x_2^2 + 3x_2 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3; \frac{16}{3}\right), N\left(-3; \frac{16}{3}\right)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$.

Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3; 0)$ và $N(-1; -1)$.

- $\overline{MN} = (2; -1) \Rightarrow$ Phương trình MN: $x + 2y + 3 = 0$.

Phương trình đường thẳng (d) $\perp$ MN có dạng: $y = 2x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x-4}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 4 = 0 \quad (x \neq -1) \quad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m - 32 > 0 \quad (2)$

Khi đó $A(x_1; 2x_1 + m), B(x_2; 2x_2 + m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của AB là $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; x_1+x_2+m\right) \equiv I\left(-\frac{m}{4}; \frac{m}{2}\right)$ (theo định lý Vi-et)

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow I \in MN \Leftrightarrow m = -4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; -4), B(2; 0)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C).

Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm $M(-1; 3)$.

- Gọi $A(x_0; y_0), B$ là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1; 3) \Rightarrow B(-2-x_0; 6-y_0)$

$$A, B \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 \\ 6 - y_0 = -(-2-x_0)^3 + 3(-2-x_0) + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 - (-2-x_0)^3 + 3(-2-x_0) + 2 \Leftrightarrow 6x_0^2 + 12x_0 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $(-1; 0)$ và $(-1; 6)$

C. ĐIỂM – TRỤC ĐỐI XỨNG:

Đối xứng tâm (đối xứng điểm)

$y=f(x)$ (C) nếu ta dời trục Oxy $\rightarrow$ IXY theo $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ được $Y=f(X)$ là hs lẻ $\Rightarrow I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của (C).

Đối xứng trục

tương tự như trên $\Rightarrow Y=f(X)$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ (C) nhận $y=...$ làm trục đối xứng.

Ví dụ: CM hs $y = x^3 + 3x^2 - 1$ nhận $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng.

Dời trục tọa độ Oxy thành IXY. Ta có: $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow Y + 1 = (X - 1)^3 + 3(X - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 3(X^2 - 2X + 1) - 2$$

$$\Leftrightarrow Y = X^3 - 3X = f(X)$$

• $f(-X) = -X^3 + 3X = -f(X)$ hs lẻ $\Rightarrow$ đồ thị của hàm số trên nhận $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng.

D. ĐIỂM CỐ ĐỊNH:

Cho hàm số $y = f(x, m)$ (C_m)

Tìm điểm cố định M mà (C_m) luôn đi qua khi m thay đổi.

$$\begin{cases} M(x_0; y_0) \in (C_m) \\ y_0 = f(x_0, m) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Am + B = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \\ Am^2 + Bm + C = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - m + 2$ (C).

Tìm điểm cố định trên đồ thị hàm số với $\forall m$

• Gọi $A(x_0; y_0) \in (C)$

$$\Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + mx_0 - m + 2 \Leftrightarrow (x_0 - 1)m + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 - y_0 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Theo YCBT } \Leftrightarrow (*) \text{ có vô số nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy: $A(1;0)$ là điểm cố định trên (C) với $\forall m$

E. ĐIỂM THỎA TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ ĐÃ HỌC:

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$.

Giả sử $A(a; a^3 - 3a^2 + 1)$, $B(b; b^3 - 3b^2 + 1)$ thuộc (C), với $a \neq b$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0 \\ \Leftrightarrow a+b-2=0 \Leftrightarrow b=2-a. \text{ Vì } a \neq b \text{ nên } a \neq 2-a \Leftrightarrow a \neq 1$$

$$\text{Ta có: } AB = \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - 3b^2 + 1 - a^3 + 3a^2 - 1)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - a^3 - 3(b^2 - a^2))^2} \\ = \sqrt{(b-a)^2 + [(b-a)^3 + 3ab(b-a) - 3(b-a)(b+a)]^2} \\ = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2 [(b-a)^2 + 3ab - 3.2]^2} \\ = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2 [(b+a)^2 - ab - 6]^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2 (-2-ab)^2} \\ AB^2 = (b-a)^2 [1 + (-2-ab)^2] = (2-2a)^2 [1 + (a^2 - 2a - 2)^2] \\ = 4(a-1)^2 [1 + [(a-1)^2 - 3]^2] = 4(a-1)^2 [(a-1)^4 - 6(a-1)^2 + 10] \\ = 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2$$

$$\text{Mà } AB = 4\sqrt{2} \text{ nên } 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^6 - 6(a-1)^4 + 10(a-1)^2 - 8 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = (a-1)^2, t > 0$. Khi đó (*) trở thành:

$$t^3 - 6t^2 + 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = -1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

Vậy 2 điểm thỏa mãn YCBT là: $A(3;1), B(-1;-3)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C).

Tìm trên đường thẳng (d): $y = 2$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- Gọi $M(m; 2) \in (d)$.

PT đường thẳng Δ đi qua điểm M và có hệ số góc k có dạng: $y = k(x-m) + 2$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \text{hệ PT sau có nghiệm} \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2 = k(x-m) + 2 & (1) \\ -3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Thay (2) và (1) ta được: } 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)[2x^2 - (3m-1)x + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = 2x^2 - (3m-1)x + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) $\Leftrightarrow$ hệ (*) có 3 nghiệm x phân biệt

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy từ các điểm $M(m; 2) \in (d): y = 2$ với $\begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{5}{3} \\ m \neq 2 \end{cases}$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

Ví dụ: Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

• Lấy điểm $M\left(m; 2 + \frac{1}{m-2}\right) \in (C)$. Ta có: $y'(m) = -\frac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y = -\frac{1}{(m-2)^2}(x-m) + 2 + \frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2; 2 + \frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2; 2)$

Ta có: $AB^2 = 4\left[(m-2)^2 + \frac{1}{(m-2)^2}\right] \geq 8$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=1 \end{cases}$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3; 3)$ hoặc $M(1; 1)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C).

Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng -9.

• Giao điểm 2 tiệm cận là $I(-1; 2)$.

Gọi $M\left(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}\right) \in (C) \Rightarrow k_{IM} = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0+1)^2}$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}$

+ YCBT $\Leftrightarrow k_M \cdot k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm M thỏa mãn: $M(0; -3)$ và $M(-2; 5)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C).

Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

• Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$, ($x_0 \neq -1$) thì $y_0 = \frac{2x_0+1}{x_0+1} = 2 - \frac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCD và TCN thì:

$$MA = |x_0 + 1|, MB = |y_0 - 2| = \left| \frac{1}{x_0 + 1} \right|$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $MA + MB \geq 2\sqrt{MA \cdot MB} = 2\sqrt{|x_0 + 1| \cdot \left| \frac{1}{x_0 + 1} \right|} = 2$

$\Rightarrow MA + MB$ nhỏ nhất bằng 2 khi $|x_0 + 1| = \frac{1}{|x_0 + 1|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là $(0; 1)$ và $(-2; 3)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x-2}$ (C).

Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

- Gọi $M(x; y) \in (C)$ và cách đều 2 tiệm cận $x = 2$ và $y = 3$.

$$\text{Ta có: } |x-2| = |y-3| \Leftrightarrow |x-2| = \left| \frac{3x-4}{x-2} - 3 \right| \Leftrightarrow |x-2| = \left| \frac{x}{x-2} \right| \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = \pm(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn đề bài là : $M_1(1; 1)$ và $M_2(4; 6)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

- Giả sử $M\left(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$. PTTT Δ của (C) tại M là:

$$y - 2 + \frac{3}{x_0+1} = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) \Leftrightarrow 3(x - x_0) - (x_0+1)^2(y - 2) - 3(x_0+1) = 0$$

Khoảng cách từ $I(-1; 2)$ tới tiếp tuyến Δ là:

$$d = \frac{|3(-1-x_0) - 3(x_0+1)|}{\sqrt{9 + (x_0+1)^4}} = \frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9 + (x_0+1)^4}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2}}.$$

$$\text{Theo BĐT Cô-si: } \frac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2 \geq 2\sqrt{9} = 6 \Rightarrow d \leq \sqrt{6}.$$

$$\text{Khoảng cách } d \text{ lớn nhất bằng } \sqrt{6} \text{ khi } \frac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$ hoặc $M(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$.

Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tiệm cận đứng $x = -1$.

Giả sử $A\left(-1-a; 1+\frac{4}{a}\right), B\left(-1+b; 1-\frac{4}{b}\right)$ (với $a > 0, b > 0$) là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C)

$$AB^2 = (a+b)^2 + 16\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2 \left[1 + \frac{16}{a^2b^2}\right] \geq 4ab \left[1 + \frac{16}{a^2b^2}\right] = 4ab + \frac{64}{ab} \geq 32$$

$$AB \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4ab = \frac{16}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{4}$$

Khi đó: $A(-1-\sqrt[4]{4}; 1+\sqrt[4]{64}), B(-1+\sqrt[4]{4}; 1-\sqrt[4]{64})$.