

CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1&2. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT

I. KHÁI NIỆM VỀ SỐ PHỨC

1. Số phức

Định nghĩa

Cho số phức z có dạng: $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$, trong đó a gọi là phần thực của z , b gọi là phần ảo của z , i gọi là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2 = -1$.

Đặc biệt:

Tập hợp các số phức, kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Số phức z là số thực nếu $b = 0$.

Số phức z là số thuần ảo nếu $a = 0$.

Số phức $z = 0 + 0i = 0$ vừa là số thực, vừa là số ảo (còn gọi là số thuần ảo).

Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức z , kí hiệu $\bar{z}$, là $\bar{z} = a - bi$.

Môđun của số phức

Môđun của số phức z , kí hiệu là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Định nghĩa

Hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ được gọi là bằng

Bài tập:

+) $z = 5 - \frac{2}{7}i \in \mathbb{C}$;

+) $z = -\sqrt{2} + \pi i \in \mathbb{C}$;

+) $z = \frac{4}{3}i, w = \cos \frac{\pi}{12}i, u = -i, \dots$ là các số thuần ảo.

Bài tập

+) Số phức $z = 5 - \frac{2}{7}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z} = 5 + \frac{2}{7}i$;

+) Số phức $z = \frac{4}{3}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z} = -\frac{4}{3}i$.

Nhận xét: Mỗi số thực có số phức liên hợp là chính nó.

Bài tập:

Số phức $z = 5 - \frac{2}{7}i$ có môđun

$$|z| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{1229}}{7}$$

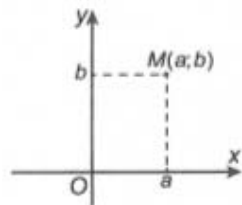
Bài tập:

Số phức $z = a + bi$ bằng 0 khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

3. Biểu diễn hình học của số phức

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Ngược lại, mỗi điểm $M(a; b)$ biểu diễn duy nhất một số phức là $z = a + bi$.



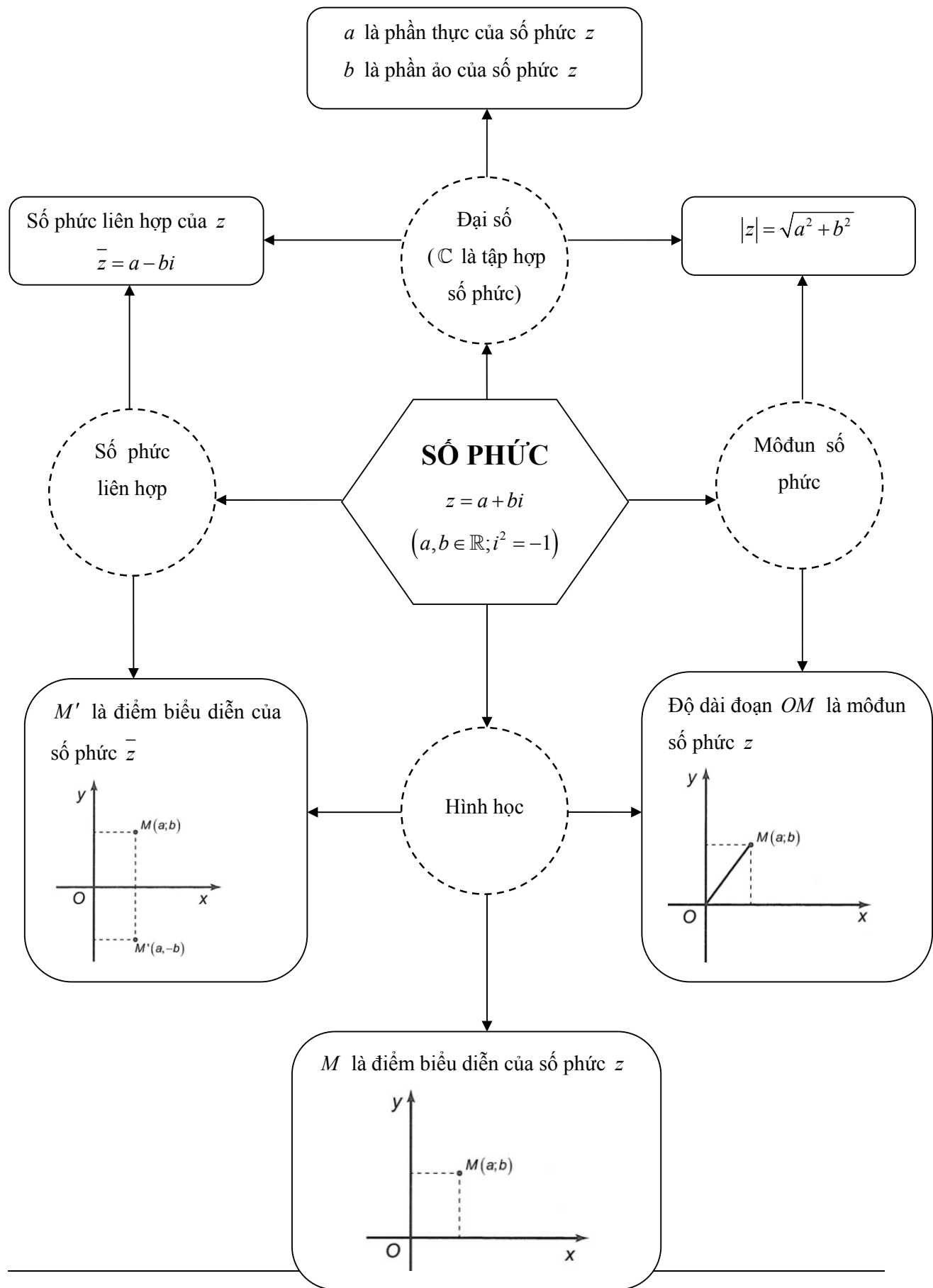
hay $z = 0$.

Nhận xét:

+) $OM = |z|$;

+) Nếu z_1, z_2 có các điểm biểu diễn lần lượt là M_1, M_2 thì $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

1. Phép cộng số phức

Định nghĩa

Tổng của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$

là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

Tính chất

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có:

Tính chất kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$;

Tính chất giao hoán: $z + z' = z' + z$;

Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z = z$;

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

2. Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$:

$$z - z' = z + (-z') = (a - a') + (b - b')i.$$

3. Phép nhân số phức

Định nghĩa

Tích của hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là

số phức $zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$.

Tính chất

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có:

- Tính chất giao hoán: $zz' = z'z$;
- Tính chất kết hợp: $(zz')z'' = z(z'z'')$;
- Nhân với 1: $1.z = z.1 = z$;
- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

4. Phép chia cho số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z \neq 0$ kí hiệu là z^{-1} , là số phức

$$\text{thỏa mãn } zz^{-1} = 1, \text{ hay } z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0,

Bài tập:

$$(5 + 4i) + (3 - 2i) = 8 + 2i.$$

Bài tập:

$$z = 5 - \frac{2}{7}i \text{ có số đối là } -z = -5 + \frac{2}{7}i.$$

Bài tập:

$$(5 + 4i) - (3 - 2i) = 2 + 6i.$$

Bài tập:

$$(5 + 4i)(3 - 2i) = (15 + 8) + (12 - 10)i = 23 + 2i.$$

Chú ý:

• Ta có thể thực hiện phép cộng và phép nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

◦ Các hằng đẳng thức của các số thực cũng đúng đối với các số phức.

$$\text{Bài tập: } z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z - 2i)(z + 2i).$$

Bài tập:

$z = 3 - 2i$ có số phức nghịch đảo là

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{13} \cdot (3 + 2i) = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

Bài tập:

kí hiệu là $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$.

$$\frac{5+4i}{3-2i} = \frac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{7+22i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{22}{13}i.$$

**CÁC
PHÉP TOÁN
VỚI SỐ PHỨC**

Phép cộng số phức

Tổng của hai số phức $z = a + bi$

và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

ĐA

Tính chất phép cộng số phức

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'');$$

$$z + z' = z' + z;$$

$$z + 0 = 0 + z = z;$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z = a + bi$

và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) là số

phức $z - z' = (a - a') + (b - b')i$.

Phép nhân số phức

Tích của hai số phức $z = a + bi$

và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) là số

phức $zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$.

Tính chất phép nhân số phức

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có

$$zz' = z'z;$$

$$(zz')z'' = z(z'z'');$$

$$1.z = z.1 = z;$$

$$z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

Phép chia số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z \neq 0$ kí hiệu là z^{-1} là số phức thỏa mãn $zz^{-1} = 1$ hay $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Thương của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$, kí hiệu là $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện các phép toán của số phức, tìm phần thực phần ảo

1. Phương pháp giải

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$, Bài tập:

trong đó $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Khi đó:

Hai số phức $z_1 = 3 - 7i, z_2 = 4 + 3i$ có

$$\bullet \quad z + z' = a + a' + (b + b')i;$$

$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (-7 + 3)i = 7 - 4i;$$

$$\bullet \quad z - z' = (a - a') + (b - b')i;$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 4) + (-7 - 3)i = -1 - 10i;$$

$$\bullet \quad zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i;$$

$$z_1 z_2 = (3 \cdot 4 - (-7) \cdot 3) + (3 \cdot 3 + 4 \cdot (-7))i = 33 - 19i;$$

$$\bullet \quad \frac{z'}{z} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 7i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = -\frac{9}{25} - \frac{37}{25}i.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các số phức z thỏa mãn $2z - 3(1 + i) = iz + 7 - 3i$ là

A. $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.$

B. $z = 4 - 2i.$

C. $z = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i.$

D. $z = 4 + 2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } 2z - 3(1 + i) = iz + 7 - 3i \Leftrightarrow (2 - i)z = 10 \Leftrightarrow z = \frac{10}{2 - i} \Leftrightarrow z = 4 + 2i.$$

Bài tập 2: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Giá trị của $S = a - 3b$ là

A. $S = -\frac{7}{3}.$

B. $S = 3.$

C. $S = -3.$

D. $S = \frac{7}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } z + 1 + 3i - |z|i = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 3.$$

Bài tập 3. Tính $C = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức của cấp số nhân:

Ta có:

$$C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20} = u_1 \cdot \frac{1-q^{21}}{1-q}$$
$$= 1 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i}.$$

Ta có:

$$(1+i)^2 = 2i$$
$$\Rightarrow (1+i)^{21} = (1+i)^{20} \cdot (1+i) = (2i)^{10} \cdot (1+i) = -2^{10}(1+i) = -2^{10} - i \cdot 2^{10}$$

$$\text{Do đó: } C = \frac{1 + 2^{10} + i \cdot 2^{10}}{-i} = -2^{10} + (1 + 2^{10})i.$$

Bài tập 4. Tính tổng $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2012i^{2012}$.

A. $-1006 + 1006i$

B. $1006 + 1006i$

C. $-1006 - 1006i$

D. $1006 - 1006i$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1.

$$\text{Ta có } iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2012i^{2013}$$

$$\Rightarrow S - iS = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} - 2012i^{2013}$$

Dãy số $i, i^2, i^3, \dots, i^{2012}$ là một cấp số nhân có công bội $q = i$ và có 2012 số hạng, suy ra:

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} = i \cdot \frac{1-i^{2012}}{1-i} = 0$$

$$\text{Do đó: } S - iS = -2012i^{2013} = -2012i \Rightarrow S = \frac{-2012i}{1-i} = 1006 - 1006i$$

Cách 2. Dãy số $1, x, x^2, \dots, x^{2012}$ là một cấp số nhân gồm 2013 số hạng và có công bội bằng x .

$$\text{Xét } x \neq 1, x \neq 0 \text{ ta có: } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2012} = \frac{1-x^{2013}}{1-x} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2012x^{2011} = \frac{2012 \cdot x^{2013} - 2013x^{2012} + 1}{(1-x)^2} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) cho x ta được:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2012x^{2012} = \frac{2012 \cdot x^{2014} - 2013x^{2013} + x}{(1-x)^2} \quad (3)$$

Thay $x = i$ vào (3) ta được:

$$S = i + 2i^2 + 3i^2 + \dots + 2012i^{2012} = \frac{2012i^{2014} - 2013i^{2013} + i}{(1-i)^2}$$

$$\text{Với } i^{2014} = -1, i^{2013} = i$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-2012 - 2012i}{-2i} = 1006 - 1006i.$$

Bài tập 5. Cho α, β hai số phức liên hiệp thỏa mãn $\frac{\alpha}{\beta^2} \in \mathbb{R}$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$. Tính $|\alpha|$.

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. 2

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0$.

$$\text{Vì } |\alpha - \beta| = 2\sqrt{3} \text{ nên } |2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}.$$

Do α, β hai số phức liên hợp nên $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$, mà $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha^3}{(\alpha\beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó $\alpha^3 \in \mathbb{R}$. Nhưng ta có

$$\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i \text{ nên } \alpha^3 \in \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1.$$

$$\text{Vậy } |\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Bài tập 6. Tìm c biết a, b và c các số nguyên dương thỏa mãn: $c = (a + bi)^3 - 107i$.

A. 400

B. 312

C. 198

D. 123

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3 - 107)$. Nên c là số nguyên dương thì

$$3a^2b - b^3 - 107 = 0. \text{ Hay } b(3a^2 - b^2) = 107.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

$$\blacksquare \quad b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{11450}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại).}$$

$$\blacksquare \quad b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \text{ (thỏa mãn). Vậy nên } c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 1^2 = 198.$$

Bài tập 7. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{z}{z+n} = 4i$. Tìm n.

A. $n = 14$

B. $n = 149$

C. 697

D. 789

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + 164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{x+164i}{x+164i+n} = 4i \Leftrightarrow x+164i = -656 + 4(x+n)i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -656 \\ x+n = 41 \end{cases} \Rightarrow n = 697.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Bài tập 8. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i}$. Tìm mô đun của số phức $\bar{z} + iz$

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 5

D. $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

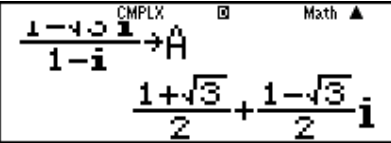
Từ $\frac{\bar{z}}{z}$ ta phải suy ra được z và thay vào biểu thức $\bar{z} + iz$ rồi tìm mô đun:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Suy ra: } z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow iz = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Do đó: } \bar{z} + iz = 1 + i \Rightarrow |\bar{z} + iz| = \sqrt{2}.$$

Dùng MTCT:

Bước 1: Lưu $\frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} \rightarrow A$	
Bước 2: Tính $ A + iA $	

Lời bình: Nhận thấy rằng với số phức $z = a + bi$ bất kì ta đều có $z + i\bar{z} = (1+i)(a+b)$ hay

$\frac{z + i\bar{z}}{1+i} = a + b \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$. Về phương diện hình học thì $\frac{z + i\bar{z}}{1+i}$ luôn nằm trên trục Ox khi biểu diễn trong mặt phẳng phức.

Bài tập 9. Tìm số thực m biết: $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ và $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ (trong đó i là đơn vị ảo)

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$

Định hướng: Quan sát thấy z cho ở dạng thương hai số phức. Vì vậy cần phải đơn giản z bằng cách nhân liên hệ ở mẫu. Từ $z \Rightarrow \bar{z}$. Thay z và $\bar{z}$ vào $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ ta tìm được m

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{(i-m)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2)^2+4m^2} = \frac{-m(1-m^2)+2m+i(1-m^2+2m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{m(1+m^2)+i(1+m^2)}{(1+m^2)^2} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2}$$

Như vậy:

$$z\bar{z} = \frac{2-m}{2} \Rightarrow \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow \frac{1}{1+m^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow m^3-2m^2+m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

Bài tập 10. Tìm phần thực của số phức: $z=(1+i)^n, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:
 $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$.

A. 6

B. -8

C. 8

D. 9

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $n > 3, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Phương trình } \log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9)=3$$

$$(n-3)(n+9)=4^3 \Leftrightarrow n^2+6n-9=0 \Leftrightarrow n=7(\text{do: } n > 3)$$

$$z=(1+i)^7=(1+i) \cdot \left[(1+i)^2\right]^3=(1+i) \cdot (2i)^3=(1+i) \cdot (-8i)=8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Bài tập 11. Cho số phức $z = \frac{m+3i}{1-i} (m \in \mathbb{R})$. Tìm m , biết số phức $w = z^2$ có môđun bằng 9.

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$w = z^2 = \frac{m^2 - 9 + 6mi}{-2i} = -3m + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)i \quad |w| = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9m^2 + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)^2} = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + 18m^2 + 81} = 9 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 18 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \pm 3$

Bài tập 12. Cho số phức $z = \frac{i - m}{1 - m(m - 2i)}$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn

tại m để $|z - 1| \geq k$

A. $k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

B. $k = \frac{\sqrt{5} + 2}{2}$

C. $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

D. $k = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z = \frac{i - m}{-i^2 + mi - m^2} = \frac{-1}{i - m} \Rightarrow z - 1 = \frac{1 - m + i}{m - i}$

$$|z - 1| = \frac{|1 - m + i|}{|m - i|} = \sqrt{\frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}} \Rightarrow |z - 1| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1} \geq k^2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}$

Ta có: $f'(m) = \frac{2(m^2 - m + 1)}{(m^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min f(m) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \text{Yêu cầu bài toán } k^2 \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ là giá trị phải tìm.

Dạng 2. Tìm số phức liên hợp, tính môđun số phức

1. Phương pháp giải

• Số phức $z = a + bi$ có $\bar{z} = a - bi$ và **Bài tập:** Số phức liên hợp của số phức

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$z = (2 - 3i)(3 + 2i) \text{ là}$$

Chú ý: Nếu $z = a + bi$ thì A. $\bar{z} = 12 - 5i$. B. $\bar{z} = -12 + 5i$.

$$z + \bar{z} = 2a; z.\bar{z} = a^2 + b^2.$$

$$\text{C. } \bar{z} = -12 - 5i.$$

$$\text{D. } \bar{z} = 12 + 5i.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } z = (2 - 3i)(3 + 2i) = 6 - 5i - 6i^2 = 12 - 5i$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 12 + 5i.$$

Chọn D.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là các số thực thỏa mãn

$$a + bi + 2i(a - bi) + 4 = i, \text{ với } i \text{ là đơn vị ảo. Môđun của } \omega = 1 + z + z^2 \text{ là}$$

$$\text{A. } |\omega| = \sqrt{229}.$$

$$\text{B. } |\omega| = \sqrt{13}.$$

$$\text{C. } |\omega| = 229.$$

$$\text{D. } |\omega| = 13.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } a + bi + 2i(a - bi) + 4 = i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -4 \\ b + 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Suy ra } z = 2 - 3i.$$

$$\text{Do đó } \omega = 1 + z + z^2 = -2 - 15i. \text{ Vậy } |\omega| = \sqrt{(-2)^2 + (-15)^2} = \sqrt{229}$$

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i}$. Môđun của số phức $w = i.\bar{z} + z$ là

$$\text{A. } |w| = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{B. } |w| = \sqrt{2}.$$

$$\text{C. } |w| = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{D. } |w| = 2\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} = -1 + 2i.$$

$$\Rightarrow z = -1 - 2i \Rightarrow w = i.(-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -3 - 3i.$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Bài tập 3: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$.

Giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$ là

$$\text{A. } P = 2.$$

$$\text{B. } P = \sqrt{3}.$$

$$\text{C. } P = 3.$$

$$\text{D. } P = 1.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Đặt } z_1 = a_1 + b_1i; a_1, b_1 \in \mathbb{R}, z_2 = a_2 + b_2i; a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \text{ và } |z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1.a_2 + b_1.b_2 = \frac{-1}{4}.$$

Ta có: $2z_1 + z_2 = 2a_1 + a_2 + (2b_1 + b_2)i$

$$\Rightarrow |2z_1 + z_2| = \sqrt{(2a_1 + a_2)^2 + (2b_1 + b_2)^2} = 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{4}(a_2^2 + b_2^2) + (a_1a_2 + b_1b_2)}$$

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Dạng 3. Bài toán liên quan đến điểm biểu diễn số phức

Bài tập 1: Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4 - 3i, (1 + 2i)i, \frac{1}{i}$. Số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành là

A. $z = -6 - 4i$.

B. $z = -6 + 3i$.

C. $z = 6 - 5i$.

D. $z = 4 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

A là điểm biểu diễn của số phức $4 - 3i$ nên $A(4; -3)$.

B là điểm biểu diễn của số phức $(1 + 2i)i = -2 + i$ nên $B(-2; 1)$.

C là điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{i} = -i$ nên $C(0; -1)$.

Điều kiện để $ABCD$ là hình bình hành là $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_C + x_A - x_B = 6 \\ y_D = y_C + y_A - y_B = -5 \end{cases} \Rightarrow D(6; -5) \Rightarrow z = 6 - 5i.$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức $z_1 = 2 - i, z_2 = -1 + 6i, z_3 = 8 + i$. Số phức z_4 có điểm biểu diễn hình học là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z_4 = 3 - 2i$.

B. $|z_4| = 5$.

C. $(z_4)^2 = 13 + 12i$.

D. $\overline{z_4} = 3 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $A(2; -1), B(-1; 6), C(8; 1)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\Rightarrow G(3; 2) \Leftrightarrow z_4 = 3 + 2i \Rightarrow \overline{z_4} = 3 - 2i.$$

Bài tập 3: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = 5$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích S của ΔOAB (với O là gốc tọa độ) là

A. $S = 5\sqrt{2}$.

B. $S = 6$.

C. $S = \frac{25}{2}$.

D. $S = 12$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Ta có: $|z_1| = OA = 3$, $|z_2| = OB = 4$, $|z_1 - z_2| = AB = 5$ $\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O (vì $OA^2 + OB^2 = AB^2$)

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Dạng 4. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước**Bài tập 1:** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1.$$

Do đó $z = 1 + i$ nên có một số phức thỏa mãn.**Bài tập 2:** Có bao nhiêu số phức z thỏa điều kiện $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Ta có: $|z \cdot \bar{z} + z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 + z = 2 \Leftrightarrow |z + 4| = 2.$

Suy ra điểm M biểu diễn số phức z là giao của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$

và $(C_2): (x+4)^2 + y^2 = 4.$

Vì $I_1 I_2 = R_1 + R_2$ (I_1, I_2 là tâm của các đường tròn $(C_1), (C_2)$) nên (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.Suy ra: Có một số phức z thỏa mãn yêu cầu.**Bài tập 3:** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Nhận xét: Từ giả thiết, ứng với mỗi $|z|$ cho ta duy nhất một số phức z .

Đặt $|z| = a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$$|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$$

$$\Leftrightarrow a(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$$

$$\Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + ai - 2i$$

$$\Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + (a - 2)i$$

$$\Leftrightarrow |(a - 7 + i)||z| = |6a + (a - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow [(a - 7)^2 + 1]a^2 = 36a^2 + (a - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 14a^3 + 13a^2 + 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 13a^2 + 4) = 0.$$

Hàm số $f(a) = a^3 - 13a^2$ ($a \geq 0$) có bảng biến thiên:

a	0	$\frac{26}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	0	$-\frac{8788}{27}$	$+\infty$

Đường thẳng $y = -4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3 - 13a^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1) \neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào giả thiết ta được 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa

$$|z - (2m - 1) - i| = 10 \text{ và } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|?$$

A. 40.

B. 41.

C. 165.

D. 164.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có: } |z - (2m - 1) - i| = 10 \Leftrightarrow |z - (2m - 1) - i|^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow [x - (2m - 1)]^2 + (y - 1)^2 = 100.$$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(2m - 1; 1)$, bán kính $R = 10$.

$$\text{Lại có } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)i|^2 = |(x - 2) + (3 - y)i|^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 2)^2 + (3 - y)^2 \Leftrightarrow 2x + 8y - 11 = 0.$$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z cũng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + 8y - 11 = 0$

Có đúng hai số phức z thỏa mãn nếu đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

$$\text{Tức là } d(I, \Delta) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m-1)+8-11|}{\sqrt{2^2+8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5-20\sqrt{17}}{4} < m < \frac{5+20\sqrt{17}}{4}.$$

Vậy có 41 giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Hỏi có bao nhiêu số z mà $z = \frac{z_1}{z_2} = a+bi$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z_1 = x + yi, z_2 = c + di (x, y, c, d \in \mathbb{R})$. Ta có:

$$|z_1| = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9;$$

$$|z_2| = 4 \Rightarrow c^2 + d^2 = 16;$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \Rightarrow x^2 + y^2 + c^2 + d^2 - 2xc - 2yd = 37 \Leftrightarrow xc + yd = -6.$$

Lại có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + yi}{c + di} = \frac{xc + yd}{c^2 + d^2} + \frac{yc - xd}{c^2 + d^2}i = -\frac{3}{8} + bi. \text{ Suy ra } a = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Mà } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - a^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn.

Bài tập 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Để thấy $m > 0$.

Đặt $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2 \end{cases}$$

Phương trình $a^2 + b^2 = 1$ là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

Phương trình $(a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2$ là đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, bán kính $R = m$.

Có duy nhất số phức thỏa mãn đề bài

$$\Leftrightarrow \text{Hệ phương trình } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = m^2 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$\Leftrightarrow$ Hai đường tròn này tiếp xúc với nhau

$$\Leftrightarrow OI = |m \pm 1| \Leftrightarrow |m \pm 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } m > 0).$$

Vậy, có hai số thực thỏa mãn.

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z \cdot \bar{z}} \right| = \frac{|(a + bi)^2 + (a - bi)^2|}{|z|^2} = |2a^2 - 2b^2| = 1.$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ |2a^2 - 2b^2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{4} \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } (a; b) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(-\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Vậy có 8 cặp số $(a; b)$ do đó có 8 số phức thỏa mãn.

Dạng 5: Bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức

1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa, tính chất hình học đã biết.

Bài tập:

Cho trước các điểm cố định $I, F_1, F_2; F_1F_2 = 2c (c > 0)$

Trên mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MI = R (R > 0)$ là đường tròn tâm I bán kính R .

biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 5i| = 4$ là đường tròn tâm

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $IF_1 = IF_2$, bán kính $R = 2$.

$$MF_1 + MF_2 = 2a (a > c)$$

là elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 = MF_2$ là đường

trung trực của đoạn thẳng F_1F_2 .

2. Bài tập

Bài tập 1: Xét các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, có tâm $I(a;b)$ và bán kính R . Giá trị $a+b+R$ bằng

- A. 6. B. 4. C. 12. D. 24.

Chú ý:

Trong mặt phẳng Oxy ,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ là}$$

phương trình đường tròn

có tâm $I(a;b)$ và bán

kính $R > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Vì $(z-6)(8+\bar{z}i) = [(x-6) + yi][(y+8) + xi]$ là số thực nên

$$x(x-6) + y(y+8) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I(3;-4)$, bán kính $R = 5$.

Vậy $a+b+R = 4$.

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 10$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- A. Một parabol.
B. Một đường tròn.
C. Một elip.
D. Một hypebol.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thì $|z-3| + |z+3| = 10 \Leftrightarrow |(x-3) + yi| + |(x+3) + yi| = 10 (*)$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $F_1(3;0), F_2(-3;0)$. Dễ thấy $F_1F_2 = 6 = 2c$

Khi đó: $|z-3| + |z+3| = 10 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 = 2a$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 , độ dài trục lớn là $2a = 10$

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 10$ và $w = (6+8i)\bar{z} + (1-2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là

- A. $I(-3;-4)$. B. $I(3;4)$. C. $I(1;-2)$. D. $I(6;8)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có

$$w = (6 + 8i)\bar{z} + (1 - 2i)^2$$

$$\Leftrightarrow w - (-3 - 4i) = (6 + 8i)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = \sqrt{6^2 + 8^2} |\bar{z}|$$

$$\Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = 10.10 \Leftrightarrow |w - (-3 - 4i)| = 100$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(-3; -4)$.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z

thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |\bar{z} + 1 + 2i|$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x - 2y + 1 = 0$. B. $x + 2y = 0$.
C. $x - 2y = 0$. D. $x + 2y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta có: $|z - 1 + 2i| = |\bar{z} + 1 + 2i|$

$$\Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = |x - yi + 1 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 2)i| = |(x + 1) + (2 - y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (2 - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x - 2y = 0$.

Bài tập 5. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện $|2 + z| = |i - z|$ là

- A. Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$ B. Đường thẳng $4x - 2y + 3 = 0$
A. Đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$ D. Đường thẳng $x + 9y - 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức

Ta có $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường thẳng $4x+2y+3=0$

Cách 2. $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |z-(-2)|=|i-z| (*)$

Đặt $z=x+yi; (x,y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức, Điểm A biểu diễn số -2 tức $A(-2;0)$ và điểm B biểu diễn số phức i tức $B(0;1)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA=MB$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AB:
 $4x+2y+3=0$.

Bài tập 6. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2i|=\overline{|z+1-i|}$ là

A. Đường thẳng $x+y+3=0$

B. Đường thẳng $x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y+3=0$

D. Đường thẳng $x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi (x,y \in \mathbb{R})$, điểm $M(x;y)$ biểu diễn z . Theo bài ra ta có:

$$|x+(y+2)i|=|(x+1)-(y+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4y+4=2x+2y+2 \Leftrightarrow x-y-1=0$$

Suy ra M thuộc đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Bài tập 7. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$ là

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

A. Đường elip

D. Đường Parabol

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nhận thấy $5|1+i|=5\sqrt{2}=|1-7i|$

Ta có $5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$

$$\Leftrightarrow \left| 5(1-i) \right| \cdot \left| z + \frac{3-2i}{5+5i} \right| = \left| 1-7i \right| \cdot \left| z + \frac{i}{1-7i} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| z + \frac{3-2i}{5+5i} \right| = \left| z + \frac{i}{1-7i} \right| \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{10} - \frac{1}{2}i \right| = \left| z - \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i \right|$$

Vậy tập hợp M là đường trung trực AB, với $A\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{50}; \frac{1}{50}\right)$.

Bài tập 8. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + \bar{z} + 3| = 4$ là

A. Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{7}{2}$

B. Hai đường thẳng $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{7}{2}$

A. Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$

D. Hai đường thẳng $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$|z + \bar{z} + 3| = 4 \Leftrightarrow |x + yi + x - yi + 3| = 4 \Leftrightarrow |2x + 3| = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{7}{2}$ song song với trục tung.

Bài tập 9. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$ là

A. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

B. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

A. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

D. Hai đường thẳng $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\begin{aligned}
|z - \bar{z} + 1 - i| = 2 &\Leftrightarrow |x + yi - x + yi + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 - (2y - 1)i| = 2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 + (2y - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ song song với trục hoành.

Bài tập 10. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z + 1| = |z - \bar{z} - 2|$ là

- A. Hai đường thẳng $x = 0, y = 0$.
 B. Hai đường thẳng $x = 0, y = -2$.
 C. Hai đường thẳng $x = 0, x = -2$.
 D. Hai đường thẳng $x = 2, y = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned}
\text{Gọi } M(x; y) \text{ là điểm biểu diễn số phức } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \text{ thỏa } 2|z + 1| &= |z - \bar{z} - 2| \\
&\Leftrightarrow 2|x + yi + 1| = |x + yi - (x - yi) - 2| \Leftrightarrow 2|x + 1 + yi| = |-2 + 2yi| \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2y)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường thẳng $x = 0, x = -2$.

Bài tập 11. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + i| = 2$ là

- A. Đường thẳng $x - y - 2 = 0$
 B. Đường tròn $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 C. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$
 D. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ thức: $|z - 1 + i| = 2$ Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Bài tập 12. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{z}{z-1}\right|=3$ là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y - \frac{9}{8} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

D. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính

$$R = \frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$. Ta có

$$\left|\frac{z}{z-1}\right|=3 \Leftrightarrow |z|=3|z-1| \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{3}{8}$.

Bài tập 13. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$ là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{3} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

D. $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$

$$\Leftrightarrow |(x+3)+(y-2)i| = |(2x+1)+(2y-2)i| \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (2x+1)^2 + (2y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$

Suy ra: Tập hợp các điểm biểu diễn z là phương trình đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0.$$

Bài tập 14. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$ là

A. Đường tròn $x^2 + (y + 1)^2 = 2$

B. Đường tròn $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

C. Đường tròn $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Suy ra } |z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow |(1 + i)z| = |(1 + i)(x + yi)| = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2}$$

$$\text{Nên } |z - i| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $x^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Bài tập 15. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

B. Đường elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thức: $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 4)^2} = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0; 4); F_2(0; -4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Bài tập 16. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=5$ là

A. Đường tròn

B. Đường elip

C. Đường parabol

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2|+|z+2|=5$

$$\Leftrightarrow |(x-2) + yi| + |(x+2) + yi| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 5 \quad (1)$$

$$\text{Xét } A(2;0); B(-2;0); I(x;y) \Rightarrow IA + IB = 5$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z chính là tập hợp các điểm I thỏa mãn $IA + IB = 5$, đó chính là một elip có tiêu cự $c = \frac{AB}{2} = 2; a = \frac{IA + IB}{2} = \frac{5}{2}$

Bài tập 17. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z| > |z-2|$ là

A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung

B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung

C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành

D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thực: $|2+z| > |z-2| \quad (1)$. Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $(3) \Leftrightarrow 8x > 0$

Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (1) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức các điểm (x, y) mà $x > 0$

Bài tập 18. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 \leq |z+1-i| \leq 2$ là

A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 2

B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 1

D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I(1;-1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Hướng dẫn giải

Chọn 18 B

Xét hệ thực: $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ (2). Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$

Vậy tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (2) là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Bài tập 19. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z+i}{z+i}$ là số thực.

A. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ

B. Tập hợp điểm là trục hoành

C. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

D. Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi $A(0;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\frac{z+i}{z+i} = \frac{x+(y+1)(1-y) + [x(y+1) - x(1-y)]i}{x^2 + (1-y)^2}$

$\frac{z+i}{z+i}$ là số thực $\Leftrightarrow x(y+1) - x(1-y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$.

Mặt khác: $x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ cả mặt phẳng phức bỏ đi điểm $(0;1)$

Tóm lại: $ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (x,y) \neq (0;1) \end{cases}$. Vậy các điểm của mặt phẳng phức cần tìm gồm hai trục tọa

độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

Bài tập 14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$

D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có:

$$u = \frac{z+2+3i}{z-i} = \frac{[x+2+(y+3)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$$u \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ (x,y) \neq (0;1) \\ (x,y) \neq (-2;-3) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Bài tập 21. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|x| + |y| = 1$ là

A. Ba cạnh của tam giác

B. Bốn cạnh của hình vuông

C. Bốn cạnh của hình chữ nhật

D. Bốn cạnh của hình thoi

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.

$$\text{Ta có: } |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y = 1 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x + y = 1 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \\ -x - y = 1 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là 4 cạnh của hình vuông.

Bài tập 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa

mãn $\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$

B. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$ trừ đi hai điểm $(-1; 0)$.

C. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$

D. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$ trừ đi hai điểm $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Giả sử $z = x + yi$ và điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có: } \frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} = \frac{2|z|^2 + z + \bar{z} + i(z + \bar{z}) + 2i}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} = \frac{2(x^2 + y^2) + 2x + 2(x+1)i}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2) + 2x = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ bỏ đi điểm $(-1; 0)$.

Bài tập 23. Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức $w = iz + 1$,

biết z là số phức thỏa mãn: $\left|(\bar{z} - 2i + 1)^3\right| = 8$.

A. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

B. Đường tròn (C): $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 2$

C. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

D. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $|z^3| = |z|^3$ nên $\left|(\bar{z} - 2i + 1)^3\right| = 2^3 \Leftrightarrow \left|\bar{z} - 2i + 1\right| = 2 \quad (*)$

Đặt $w = x + yi$

Ta lại có $w = iz + 1 \Leftrightarrow z = i - iw \Rightarrow \bar{z} = -i + i\bar{w}$. (*) trở thành:

$$\left|i\bar{w} - 3i + 1\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2 + (x-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (y+1)^2 + (x-3)^2 = 4$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn w trên mặt phẳng phức là đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Bài tập 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn:

$w = \bar{z} + 2 + i$, biết z là số phức thỏa $|z - 1 + 2i| = 1$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{2}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 2$

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 1$

D. Đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số w trên hệ trục Oxy.

$$\bar{z} = w - 2 - i = x - 2 + (y - 1)i \Rightarrow z = x - 2 + (1 - y)i$$

$$|z - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |x - 3 + (3 - y)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức

$w = (1 - 2i)z + 3$ biết z là số phức thỏa mãn: $|z + 2| = 5$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 5$

C. Đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết: $|z+2|=5 \Leftrightarrow \left| \frac{a-1+(b-4)i}{1-2i} \right| = 5 \Leftrightarrow |a-1+(b-4)i| = 5|1-2i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-4)^2} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-4)^2 = 125$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

Bài tập 26. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = (1-i\sqrt{3})z - 2$ với $|z+1| \leq 2$.

A. Hình tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R = 4$.

B. Đường tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R = 4$.

C. Hình tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $R = 5$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử ta có
$$\begin{cases} z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Khi đó:

$$z' = (1-i\sqrt{3})z - 2 \Leftrightarrow x + yi = (1-i\sqrt{3})(a + bi) - 2 \Leftrightarrow x + yi = a + b\sqrt{3} - 2 + (b - a\sqrt{3})i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b\sqrt{3} - 2 \\ y = b - a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - y\sqrt{3} + 2}{4} \\ b = \frac{\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$|z+1| \leq 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x-y\sqrt{3}+2}{4} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}}{4} \right)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (x-y\sqrt{3}+6)^2 + (\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3})^2 \leq 64 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 24x - 8\sqrt{3}y - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

Bài tập 27. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức $w = (1+i\sqrt{3})z+2$ biết rằng số phức z thỏa mãn $|z-1| \leq 2$.

A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$

C. Đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

D. Hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) và $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z-1| \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 \leq 4$ (*)

Từ

$$w = (1+i\sqrt{3})z+2 \Rightarrow x+yi = (1+i\sqrt{3})(a+bi)+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = a-1-b\sqrt{3} \\ y-\sqrt{3} = \sqrt{3}(a-1)+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \left[(a-1)^2 + b^2 \right] \leq 16 \text{ (Do *)}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Bài tập 28. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = 2z + 3 - i$ với $|3z+i|^2 \leq z\bar{z} + 9$.

A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$

C. Đường tròn tâm $I(3;\sqrt{3})$ bán kính $R=4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3;-\frac{7}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{73}}{4}$

Giải

Chọn D

Giả sử ta có
$$\begin{cases} z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Khi đó $z' = 2x + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x-3}{2} \\ b = \frac{y+1}{2} \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9 \Leftrightarrow 9a^2 + (3b + 1)^2 \leq a^2 + b^2 + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 3b - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + \frac{3}{2}(y+1) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \leq \frac{73}{16}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I\left(3;-\frac{7}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{73}}{4}$

Bài tập 29. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$.

B. $r=5$.

C. $r=20$.

D. $r=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi = (3+4i)z + i &\Leftrightarrow z = \frac{a + (b-1)i}{3+4i} = \frac{[a + (b-1)i](3-4i)}{9-16i^2} \\ &= \frac{3a+4b-4}{25} + \frac{(3b-4a-3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2 + (3b-4a-3)^2}}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a+4b-4)^2 + (3b-4a-3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có $a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$