

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-m}{x-1}$, (m là tham số thực) có đồ thị (C_m) .

1. Tìm tất cả các giá trị của m để $\max_{[-1;0]} f(x) + \min_{[-1;0]} f(x) = 3$.

2. Với $m = 0$, tìm tất cả các điểm M trên (C_0) sao cho tiếp tuyến tại M với (C_0) cắt hai đường tiệm cận của (C_0) tại A và B thỏa mãn ΔIAB cân, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 2: (6,0 điểm)

1. Giải phương trình: $2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos 4x + \sin 2x + 1 = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ \frac{x^2}{\sqrt{y+1}} + \left(\sqrt{(x+1)(y+1)} + 5\right)\sqrt{x+6} = x^2 + 4x + 9 \quad (2) \end{cases}$$

3. Cho tập $T = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi H là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc T . Chọn ngẫu nhiên một số thuộc H . Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

Câu 3: (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và CD . Gọi H là giao điểm của BN và AM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HDN biết phương trình đường thẳng $BN: 2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Câu 4: (4,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm AB . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $\tan(\angle SH, (SCD))$.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho hai đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 - cx - b$ và $Q(x) = x^3 + cx^2 - bx - a$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Chứng minh rằng $G(x) = P(x) - Q(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a \geq b \geq c$.

Câu 6: (2,0 điểm)

Giả sử phương trình $x^3 - 3x^2 + ax - b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có 3 nghiệm thực dương. Gọi các

nghiệm này là x_1, x_2, x_3 . Đặt $u_n = \frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-m}{x-1}$, (m là tham số thực) có đồ thị (C_m) .

1. Tìm tất cả các giá trị của m để $\max_{[-1;0]} f(x) + \min_{[-1;0]} f(x) = 3$.

2. Với $m = 0$, tìm tất cả các điểm M trên (C_0) sao cho tiếp tuyến tại M với (C_0) cắt hai đường tiệm cận của (C_0) tại A và B thỏa mãn ΔIAB cân, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Lời giải

1. Có $f'(x) = \frac{m-1}{(x-1)^2}$.

+ Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \forall x \in [-1;0] \Rightarrow \max_{[-1;0]} f(x) + \min_{[-1;0]} f(x) = 2$ (không thỏa mãn).

+ Với $m \neq 1$, hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $[-1;0]$, do đó:

$$\max_{[-1;0]} f(x) + \min_{[-1;0]} f(x) = 3 \Leftrightarrow f(-1) + f(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Vậy $m = \frac{5}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C_0) . Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của (C_0) là $I(1;1)$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0}{x_0-1}\right)$, $x_0 \neq 1$.

Có $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_0) tại M có dạng $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến tại M cắt đường tiệm cận đứng tại $A\left(1; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$, cắt đường tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1;1)$.

Có $IA = \frac{2}{|x_0-1|}$, $IB = 2|x_0-1|$.

Tam giác IAB là tam giác vuông tại I , do đó tam giác IAB cân khi và chỉ khi $IA = IB$.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{|x_0-1|} = 2|x_0-1| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0;0) \\ M(2;2) \end{cases}.$$

Vậy $M(0;0)$ hoặc $M(2;2)$.

Câu 2:

1. Giải phương trình: $2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos 4x + \sin 2x + 1 = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x + \sin 2x + 1 = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x + 1 = 2 \sin x + 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 2 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos x - 1) + \sin x (\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ \frac{x^2}{\sqrt{y+1}} + (\sqrt{(x+1)(y+1)} + 5)\sqrt{x+6} = x^2 + 4x + 9 \end{cases} \quad (2)$$

Lời giải

Điều kiện: $x, y > -1$.

Ta có: $x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+1)\sqrt{y+1} + \sqrt{y+1}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = (\sqrt{y+1})^3 + (\sqrt{y+1}).$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}). \text{ Xét } f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t.$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1} \text{ thay vào (2) ta được:}$$

$$(2) \Rightarrow x\sqrt{x+1} + (x+5)\sqrt{x+6} = x^2 + 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x+1} - 2) + 2x + (x+5)(\sqrt{x+6} - 3) + 3(x+5) = x^2 + 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x+1}-2) + (x+5)(\sqrt{x+6}-3) = x^2 - x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{(x+5)(x-3)}{\sqrt{x+6}+3} = (x-3)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ (TM)} \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - x - 2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm vì } \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x+5}{\sqrt{x+6}+3} - x - 2 < 0, \forall x > -1).$$

Vậy nghiệm $S = \{3\}$.

3. Cho tập $T = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi H là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc T . Chọn ngẫu nhiên một số thuộc H . Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

Lời giải

- Số các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau thuộc T là: $A_5^3 = 60$ số.

- Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau thuộc T là: $A_5^4 = 120$ số.

- Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau thuộc T là: $5! = 120$ số.

Do đó: tập H có số phần tử là: $60 + 120 + 120 = 300$ (phần tử).

Suy ra: $n(\Omega) = 300$.

- Gọi A là biến cố: “chọn được số từ H có tổng các chữ số bằng 10”.

Các số có 3 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 10 chỉ được lập từ các bộ số: $(1; 4; 5)$ và $(2; 3; 5)$, số các số loại này là: $2.3! = 12$ số.

Các số có 4 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 10 chỉ được lập từ bộ số $(1; 2; 3; 4)$, số các số loại này là: $4! = 24$ số.

Do đó: $n(A) = 12 + 24 = 36$.

Vậy xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và CD . Gọi H là giao điểm của BN và AM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HDN biết phương trình đường thẳng $BN: 2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Lời giải

Xét $\triangle ABM = \triangle BCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle MAB = \angle NBC$, từ đó suy ra $BN \perp AM$.

Đường thẳng AM qua A và vuông góc với BN nên có phương trình $x - 2y + 5 = 0$.

$$BN \cap AM = H \Rightarrow H\left(\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right).$$

Ta có $\triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle BMH \Rightarrow AH = 2HB \Rightarrow AB = 4$.

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{(x_B + 1)^2 + (y_B - 2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \text{ (TM)} \\ x_B = \frac{7}{5} \text{ (KTM)} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow B(3; 2).$$

Gọi P là trung điểm $AH \Rightarrow P\left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Tứ giác $ADNH$ nội tiếp đường tròn đường kính AN , I là trung điểm AN .

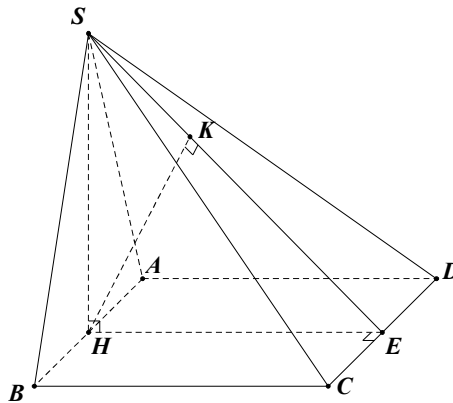
Tọa độ N là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow N(1; 6).$

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HN} \Rightarrow I(0; 4).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác HDN có tâm $I(0; 4)$, bán kính $IN = \sqrt{5}$, vậy phương trình đường tròn là $x^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm AB . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $\tan(\angle SH, (SCD))$.

Lời giải



Từ giả thiết, ta có $SH \perp (ABCD)$.

Vì $\triangle SAB$ đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow HE \perp CD$.

Từ H kẻ $HK \perp SE$ tại K .

Ta có $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow CD \perp HK$.

Mặt khác $\begin{cases} HK \perp SE \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD)$.

Như vậy $(SH, (SCD)) = (SH, SK) = \widehat{HSK} < 90^\circ$ (do $\triangle SHK$ vuông tại K).

Xét tam giác SHE , ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SHK vuông tại K : $SK = \sqrt{SH^2 - HK^2} = \frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

Như vậy $\tan(SH, (SCD)) = \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hai đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 - cx - b$ và $Q(x) = x^3 + cx^2 - bx - a$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Chứng minh rằng $G(x) = P(x) - Q(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a \geq b \geq c$.

Lời giải

Ta có $G(x) = P(x) - Q(x) = (a-1)x^3 + (b-c)x^2 + (b-c)x + a-b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đề ý thấy $G(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $a-1 > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$ nên tồn tại $x_0 < 0$: $G(x_0) < 0$ suy ra vô lý tương tự nếu $a-1 < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = -\infty$ nên tồn tại $x_0 > 0$: $G(x_0) < 0$ suy ra vô lý.

Xét trường hợp $a=1$ suy ra $G(x) = (b-c)x^2 + (b-c)x + a-b$ lập luận tương tự ta cũng có $b-c \geq 0$.

+ Nếu $b=c$ suy ra $G(x) = a-b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$.

+ Nếu $b > c$. Khi đó $G(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (b-c)^2 - 4(b-c)(a-b) \leq 0$.

$$\Leftrightarrow (b-c)(b-c-4a+4b) \leq 0 \Rightarrow b-c-4a+4b \leq 0.$$

$$\Rightarrow 4a \geq b-c+4b \Rightarrow 4a \geq 4b \Rightarrow a \geq b.$$

Vậy ta luôn có $G(x) = P(x) - Q(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a \geq b \geq c$.

Câu 6: Giả sử phương trình $x^3 - 3x^2 + ax - b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có 3 nghiệm thực dương. Gọi các

nghiệm này là x_1, x_2, x_3 . Đặt $u_n = \frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm a, b để $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < \sqrt{n^2 + 2021}$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh (u_n) là dãy giảm.

$$\text{Thật vậy : } u_n - u_{n+1} = \frac{(x_1^n + x_2^n + x_3^n)(x_1^{n+2} + x_1^{n+2} + x_1^{n+2}) - (x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})^2}{(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})(x_1^{n+2} + x_1^{n+2} + x_1^{n+2})}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức BCS : } (x_1^n + x_2^n + x_3^n)(x_1^{n+2} + x_1^{n+2} + x_1^{n+2}) \geq (x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})^2.$$

Do đó : $u_n - u_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy giảm.

$$\text{Ta có : } 9 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 3a \Rightarrow a \leq 3 \quad (1).$$

Vì (u_n) là dãy giảm $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \geq \frac{n}{u_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot n = \frac{9-2a}{3} \cdot n.$$

$$\text{Do đó : } \frac{9-2a}{3} \cdot n < \sqrt{n^2 + 2021} \Leftrightarrow \frac{9-2a}{3} < \frac{\sqrt{n^2 + 2021}}{n} \Leftrightarrow \frac{9-2a}{3} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2021}}{n} = 1.$$

$$\Rightarrow a \geq 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) : $a = 3$.

Với $a = 3$ ta được : $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, suy ra : $b = 1$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy $a = 3, b = 1$ thỏa yêu cầu bài ra.

 HẾT