Việc tìm ra đáp án đúng cho bài toán trắc nghiệm là rất khác so với việc trình bày bài giải tự luận. Giải quyết bài toán tự luận, chúng ta phải trình bày lời giải bài toán theo suy luận của mình, sao cho người đọc hiểu đúng, dựa trên nền tảng kiến thức chuẩn mực. Với bài thi toán trắc nghiệm, học sinh không cần trình bày lời giải và có nhiều cách tiếp cận. Không cần xét mọi trường hợp, có thể một vài trường hợp cũng đủ chọn được đáp án vì loại được các khả năng khác. Các suy luận không cần diễn giải, viết ra, chỉ viết ý chính để tìm ra đáp án khi nháp! Sau đây là một hướng tiếp cận như vậy !

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

CHỌN ĐẠI DIỆN GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Nếu bài toán đúng với mọi giá trị $x \in K$ ***thì nó sẽ đúng với một giá trị xác định*** $x_0 \in K$**.**

I. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ

Ví dụ 1. Hàm số $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu với mọi giá trị thực của m. Gọi điểm cực đại và cực tiểu của hàm số lần lượt là x_1, x_2. Khi đó ta có :

A. $|x_1 - x_2| = 2$.   B. $|x_1 - x_2| = m$.   C. $|x_1 - x_2| = 1$.   D. $|x_1 - x_2| = 2m$.

<u>Cách giải thông thường</u>

* $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$;

* $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m+1}{1} \\ x_2 = \dfrac{m-1}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m+1 \\ x_2 = m-1 \end{array}\right. \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2.$$

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

Do bài toán đúng với mọi số thực m nên ta chọn một phần tử đại diện của m, chẳng hạn $m=3$. Khi đó hàm số trở thành $y=\dfrac{x^2-12x+28}{x-3}$;

$$y'=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=4\\x_2=2\end{array}\right.$$

Ta có : $|x_1-x_2|=2$.

Chọn đáp án A.

Lưu ý *: Ta không chọn $m=1$ vì khi đó các đáp án A trùng với D ; B trùng với C. (tương tự cho trường hợp $m=2$)*

Ví dụ 2. Phương trình $x^3-3x=m^2+m$ có ba nghiệm thực khi tham số thực m thỏa mãn :

A. $-2<m<1$. B. $m<1$. C. $-1<m<2$. D. $m>-21$.

Cách giải thông thường 1

Xét hàm số $y=x^3-3x$; $y'=3x^2-3$; $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Phương trình đã cho có 3 nghiệm khi $-2<m^2+m<2\Leftrightarrow-2<m<1$.

Chọn đáp án A.

Cách giải thông thường 2

Ta có $x^3-3x=m^2+m\Leftrightarrow x^3-3x-m^2-m=0$.

Để thỏa mãn bài toán thì đồ thị hàm số $y=x^3-3x-m^2-m$ có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.

$y'=3x^2-3$; $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vậy ta cần có $y(-1).y(1)<0\Leftrightarrow\left(2-m^2-m\right)\left(-2-m^2-m\right)<0$ $\Leftrightarrow-2<m<1$.

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

Nếu $m=-2$ phương trình trở thành :

$$x^3-3x=2\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$Loại trường hợp B, D.

Nếu $m=\dfrac{3}{2}$ phương trình trở thành :

$x^3-3x=\dfrac{15}{4}\Leftrightarrow x^3-3x-\dfrac{15}{4}=0$. (không thỏa)

$\Rightarrow$Loại trường hợp C.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 3. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m<0$ hoặc $m\ge 1$. B. $m\ge 0$. C. $0<m\le 1$. D. $m\le 0$.

Cách giải thông thường

Ta có $y'=mx^2-2mx+2m-1$.

TH1: Nếu $m=0$ thì $y'=-1<0$ thỏa mãn bài toán.

TH2: Nếu $m\ne 0$, để thỏa mãn bài toán ta cần có $\begin{cases}m<0\\m^2-m\left(2m-1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\-m^2+m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

Vậy $m\le 0$, chọn đáp án D.

Cách khác (chọn đại diện)

Nếu $m=0$ hàm số trở thành $y=-x\,;y'=-1<0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp A, C. (do không chứa giá trị $m=0$)

Nếu $m=-3$ hàm số trở thành $y=-x^3+3x^2-7x+9$;

$y'=-3x^2+6x-7<0,\forall x\in\mathbb{R}$ Suy ra $m=-3$ thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp B.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 4. Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y=x^4+\left(m+1\right)x^2+4$ có ba điểm cực trị ?

A. $m > -1$; B. $m \le -1$; C. $m < -1$; D. $m \ge -1$.

Cách giải thông thường

Ta có $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x(2x^2 + m + 1)$.

Để thỏa mãn bài toán thì phương trình $2x^2 + m + 1 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra : $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Chọn đáp án C.

Cách khác (chọn đại diện)

Nếu $m = -1$ hàm số trở thành $y = x^4 + 4$ (hàm số này chỉ có một cực trị). Suy ra $m = -1$ không thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp B, D. (do chứa giá trị $m = -1$, làm hàm số có một cực trị)

Nếu $m = 0$ hàm số trở thành $y = x^4 + x^2 + 4$;

$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra $m = 0$ không thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp A.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 5. Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + m^2$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$?

A. $m \ge \frac{1}{2}$. B. $m \le \frac{1}{2}$. C. $m \le 1$. D. $m \ge 1$.

Cách giải thông thường

Ta có $y' = mx^2 - 2mx + 2m - 1$.

TH1: Nếu $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ thỏa mãn bài toán.

TH2: Nếu $m \ne 0$, ta cần có $y' \le 0, \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 2m - 1 \le 0, \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 2) \le 1, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \le \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in [0;1]$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ trên đoạn $[0;1]$.

$$f'(x) = -\frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} \ ; \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có : $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$; . $f\left(0\right)=1$. Suy ra : $\min\limits_{[0;1]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$.

Để thỏa mãn bài toán ta cần có $m\le\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Nếu $m=0$ hàm số trở thành $y=-x\,;y'=-1<0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp A, D. (do không chứa giá trị $m=0$)

Nếu $m=1$ hàm số trở thành $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+1$;

$y'=x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $m=1$ không thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp C.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \left(a\ne 0\right)$ và có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn khẳng định đúng :

A. $a<0$ và $b\le 0$. B. $a<0$ và $b\ge 0$.

C. $a>0$ và $b\le 0$. D. $a>0$ và $b\ge 0$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Trong khoảng ngoài cùng (khoảng $\left(0;+\infty\right)$) thì $y'>0$ nên $a>0$.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2ax^2+b=0\end{array}\right.$.

Do hàm số có một cực trị nên phương trình $2ax^2 + b = 0$ phải vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$. Ta phải có : $\left[\begin{array}{l} ab > 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$.

Mà $a > 0$ nên $b \geq 0$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Trong khoảng ngoài cùng (khoảng $(0;+\infty)$) thì $y' > 0$ nên $a > 0$. Loại đáp án A, B.

Xét trường hợp C : cho $a = 1$, $b = -2$ và $c = 0$, ta được hàm số

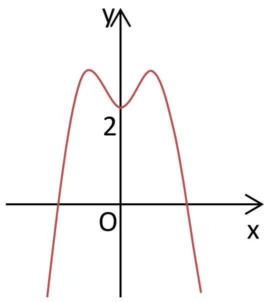
$y = x^4 - 2x^2$;

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số đã cho có ba cực trị. Loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Chọn khẳng định đúng :



A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $x = 0$ thì $c = 2 > 0$.

Nhánh ngoài cùng, bên phải của đồ thị trên đi xuống từ trái qua phải nên $a < 0$. Loại các đáp án A và B.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$.

Do hàm số có ba cực trị nên phương trình $2ax^2 + b = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $x = 0$. Ta phải có : $ab < 0$.

Mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Nhánh ngoài cùng, bên phải của đồ thị trên đi xuống từ trái qua phải nên $a<0$. Loại các đáp án A và B.

Xét trường hợp C : cho $a=-1$, $b=-2$ và $c=2$, ta được hàm số $y=-x^4-2x^2$; $y'=-4x^3-4x=-4x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra, hàm số đã cho có một cực trị. Loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 8. Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. $m>-3$. B. $m>-2$. C. $-3<m<-2$. D. $m\ge -2$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $y'=\dfrac{m+3}{(x+m)^2}$.

Để thỏa mãn bài toán ta cần có $y'>0,\forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{m+3}{(x+m)^2}>0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} m+3>0 \\ -m\notin(2;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ -m\le 2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m\ge -2 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge -2.$$

Chọn đáp án D.

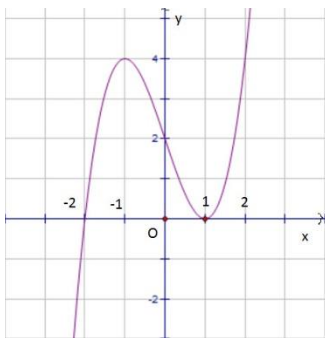
<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Nếu $m=-2$ hàm số trở thành $y=\dfrac{x-3}{x-2}$; $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$. Suy ra $m=-2$ thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp A, B, C. (do không chứa giá trị $m=-2$)

Chọn đáp án D.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2m-6$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt đều có hoành độ lớn hơn -1.



A. $3\le m<5$. B. $3<m<5$.

C. $3\le m\le 5$. D. $3<m\le 5$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Từ đồ thị ta suy ra, giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán là : $\begin{cases} 2m-6>0 \\ 2m-6<4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m>6 \\ 2m<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m<5 \end{cases}$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Nếu $m=3$, đường thẳng $y=2m-6$ trở thành $y=0$. Đường thẳng $y=0$ có một giao điểm với đồ thị (C). Suy ra $m=3$ không thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp A, C. (do chứa giá trị $m=3$)

- Nếu $m=5$, đường thẳng $y=2m-6$ trở thành $y=4$. Đường thẳng $y=4$ có hai giao điểm với đồ thị (C), trong đó có một giao điểm có hoành độ bằng -1. Suy ra $m=5$ không thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại trường hợp D. (do chứa giá trị $m=5$)

Chọn đáp án B.

Ví dụ 10. Các giá trị thực của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ có một điểm cực trị là :

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. B. $(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$. C. $0\le m<1$. D. $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

TH1: Nếu $m=0$ thì $y=-x^2+1$, đồ thị của hàm số này có một điểm cực trị.

TH2: Nếu $m\ne 0$, ta có $y'=4mx^3+2(m-1)x=2x(2mx^2+m-1)$.

Để thỏa mãn bài toán thì phương trình $2mx^2+m-1=0$ phải có một nghiệm $x=0$ hoặc vô nghiệm.

Suy ra : $\left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ m(m-1)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty) \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp trên ta được $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Nếu $m=1$ hàm số trở thành $y = x^4 - 1; y' = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (đồ thị hàm số có một điểm cực trị). Suy ra $m=1$ thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$Loại các đáp án B, C, D.

Chọn đáp án A.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Ví dụ 1. Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \dfrac{7}{12}$. B. $P = \dfrac{1}{12}$. C. $P = 12$. D. $P = \dfrac{12}{7}$

(Câu 42 - Mã đề 101 – THPT QG - 2017)

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có : $P = \log_{ab} x = \dfrac{1}{\log_x ab} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (Chọn đại diện)

Chọn $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = \sqrt[4]{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2$. Khi đó $P = \log_{\left(\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{2}\right)} 2 = \log_{2^{\frac{7}{12}}} 2 = \dfrac{12}{7}$.

(ta có thể dùng máy tính cầm tay để hỗ trợ tính cho nhanh)

Chọn đáp án D.

Ví dụ 2. Cho $a = \log_2 m$ với $m > 0$; $m \ne 1$ và $A = \log_8 (8m)$. Khi đó mối quan hệ giữa A và a là :

A. $A = a(3-a)$. B. $A = \dfrac{3+a}{3}$. C. $A = \dfrac{3-a}{a}$. D. $A = a(3+a)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $A = \log_8(8m) = \log_8 8 + \log_8 m = 1 + \log_{2^3} m = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 m = \dfrac{3 + \log_2 m}{3}$.

Vậy $A = \dfrac{3+a}{a}$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Chọn $m=4$ ta tính $a=\log_2 m=\log_2 4=2$; $A=\log_8(8m)=\log_8 32=\frac{5}{3}$.

Khi thì ta có : A. $A=a(3-a)=2$. B. $A=\frac{3+a}{3}=\frac{5}{3}$.

C. $A=\frac{3-a}{a}=\frac{1}{2}$. D. $A=a(3+a)=10$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1}-\frac{1}{5}>0$.

A. $S=(1;+\infty)$. B. $S=(-1;+\infty)$. C. $S=(-2;+\infty)$. D. $S=(-\infty;-2)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

$5^{x+1}-\frac{1}{5}>0 \Leftrightarrow 5^{x+1}>\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{x+1}>5^{-1} \Leftrightarrow x+1>-1 \Leftrightarrow x>-2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Với $x=0$ thì $5^{0+1}-\frac{1}{5}>0$. suy ra, loại các đáp án A và D.

- Với $x=-1$ thì $5^{-1+1}-\frac{1}{5}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}>0$. suy ra, loại đáp án B.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}} x^2 \ge -1$.

A. $(-\infty;2]$. B. $[-2;2]$. C. $[-2;0)\cup(0;2]$. D. $(0;2]$.

<u>Cách giải thông thường</u>

$$\log_{\frac{1}{4}} x^2 \ge -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ x^2 \le \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ x^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ -2\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;0)\cup(0;2].$$

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Với $x=0$ thì $\log_{\frac{1}{4}} x^2$ không xác định. Suy ra, loại các đáp án A và B.

- Với $x=-2$ thì $\log_{\frac{1}{4}}(-2)^2=\log_{4^{-1}}4=-1$. suy ra, loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\left(a^3b^6\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}^6$, với a,b là các số thực dương. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $P=a^{13}b^{21}$. B. $P=a^{13}b^{\frac{21}{4}}$. C. $P=a^5b^{\frac{21}{3}}$. D. $P=a^{21}b^{13}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có : $P=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\left(a^3b^6\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}^6$

$$=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\left(a^2b^4\right)\right]\right\}^6=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{2-\frac{1}{3}}b^{4-\frac{1}{2}}\right]\right\}^6$$

$$=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{2-\frac{1}{3}}b^{4-\frac{1}{2}}\right]\right\}^6=\left\{a^{\frac{1}{2}}\left[a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{2}}\right]\right\}^6=\left\{a^{\frac{13}{6}}b^{\frac{7}{2}}\right\}^6=a^{13}b^{21}.$$

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Sau khi rút gọn thì được kết quả đúng với mọi a,b là các số thực dương nên ta có thể chọn đại diện.

- Chọn $a=1$; $b=2$ thì

$$P=\left\{1^{\frac{1}{2}}\left[1^{-\frac{1}{3}}2^{-\frac{1}{2}}\left(1^32^6\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}^6=\left[2^{-\frac{1}{2}}\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}\right]^6=\left[2^{-\frac{1}{2}}.2^4\right]^6=2^{21}.$$

(có thể dùng máy tính để tính giá trị của P)

- Thế $a=1$; $b=2$ vào các đáp án thì chỉ có đáp án A thỏa mãn.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 6. Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3 b$.   B. $\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a+2\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3 |b|$.   D. $\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_3 a-2\log_3 |b|$.

Cách giải thông thường

Ta có : $\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(3a^3\right)-\log_3 b^2$

$$=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b^2=1+3\log_3 a-2\log_3 |b|.$$

Chọn đáp án C.

Cách khác (chọn đại diện)

Sau khi biến đổi thì được kết quả đúng với mọi a là số thực dương và b là số thực khác 0, nên ta có thể chọn đại diện.

- Chọn $b=-1$ thì các biểu thức bên vế phải của đáp án A và B đều không xác định nên loại các đáp án A, B.

- Chọn $a=3;b=1$ thì ở đáp án C ta có $\begin{cases} VT=\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(\dfrac{3.3^3}{1^2}\right)=4 \\ VP=\log_3\left(3.3^3\right)-\log_3 1^2=4 \end{cases}$

(thỏa mãn) ;

ở đáp án D ta có $\begin{cases} VT=\log_3\left(\dfrac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(\dfrac{3.3^3}{1^2}\right)=4 \\ VP=\dfrac{1}{3}\log_3\left(3.3^3\right)-\log_3 1^2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ (không thỏa mãn nên loại đáp án D).

Chọn đáp án C.

Ví dụ 7. Cho $x=\lg\left(a^2-ab+b^2\right)^{2018}$; $y=\lg a^{2018}-\lg\dfrac{1}{b^{2018}}$ (với a và b là các số thực dương). Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $x\le y$.   B. $x<y$.   C. $x\ge y$.   D. $x>y$.

Cách giải thông thường

Ta có : $x=\lg\left(a^2-ab+b^2\right)^{2018}=2018\lg\left(a^2-ab+b^2\right)$;

$$y=\lg a^{2018}-\lg\dfrac{1}{b^{2018}}=2018\lg a-\lg b^{-2018}=2018\left(\lg a+\lg b\right)$$

$= 2018\lg\left(ab\right)$.

Xét hiệu $x - y = 2018\lg\left(ab\right) - 2018\lg\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$= 2018\left[\lg\left(a^2 - ab + b^2\right) - \lg\left(ab\right)\right]$

$= 2018\left[\lg\left(a^2 - ab + b^2\right) - \lg\left(ab\right)\right]$. (1)

Lại có : $\left(a^2 - ab + b^2\right) - ab = \left(a - b\right)^2 \ge 0$ nên $a^2 - ab + b^2 \ge ab > 0$ (do $a, b > 0$)

.

$\Rightarrow \lg\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge \lg\left(ab\right)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x \ge y$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Bất đẳng thức đúng với các số thực dương a và b bất kỳ nên ta có thể chọn đại diện.

- Chọn $a = 2$; $b = 1$ thì

$$x - y = \lg 3^{2018} - \left(\lg 2^{2018} - \lg\frac{1}{1^{2018}}\right) = \lg 3^{2018} - \lg 2^{2018} > 0.$$

Suy ra $x > y$, loại các đáp án A, B.

- Chọn $a = b = 1$ thì $x = y = 0$, loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 8. Hàm số $y = \frac{2}{x+1} + \ln\left(x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $\left(1;+\infty\right)$. B. $\left(-1;+\infty\right)$. C. $\left(-1;1\right)$. D. $\left[-1;+\infty\right)$.

<u>Cách giải thông thường 1</u>

Tập xác định : $\left(-1;+\infty\right)$.

Ta có $y' = \frac{-2}{\left(x+1\right)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{\left(x+1\right)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\left(x+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y			$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A.

Cách giải thông thường 2

Tập xác định : $(-1;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

- Với $x=-1$ thì hàm số không xác định nên loại các đáp án D.

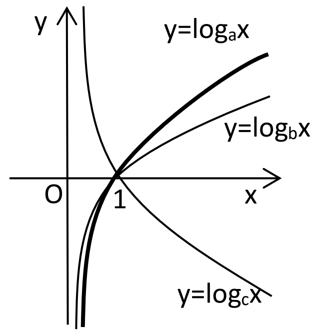
Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$.

- Giá trị $y'(0) = -1 < 0$, loại đáp án C, B.

Chọn đáp án A.

***Lưu ý** : Các bạn có thể dùng máy tính cầm tay để tính đạo hàm của hàm số đã cho tại $x=0$.*

Ví dụ 9. Cho a,b,c là các số thực dương và khác 1. Đồ thị của hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng ?



A. $a<b<c$. B. $b<c<a$.

C. $c<a<b$. D. $c<b<a$.

Cách giải thông thường

Đồ thị của hàm số $y=log_c x$ có hướng đi xuống từ trái qua phải nên hàm số $y=log_c x$ nghịch biến trên khoảng xác định của nó. Ngược lại, đồ thị của các hàm số $y=log_a x$ và $y=log_b x$ có hướng đi lên từ trái qua phải nên hàm số $y=log_a x$ và $y=log_b x$ đồng biến trên khoảng xác định của nó. Suy ra $c<a$ và $c<b$.

Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị của hai hàm số $y=log_a x$ và $y=log_b x$ tại các điểm có tọa độ lần lượt là a và b. Do đó, $a<b$.

Vậy $c<a<b$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Với $x=5$ thì $log_c 5<0$ nên $0<c<1$ và $log_a 5>0; log_b 5>0$ nên $a>1; b>1$.

- Với $x=5; a=3; b=4$ thì $log_3 5-log_4 5>0$ (đúng) nên $a<b$.

Vậy $c<a<b$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 10. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0<a<b<1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\log_b a>\log_a b$. B. $\log_b a<\log_a b$. C. $\log_b a<0$. D. $\log_a b>1$.

<u>Cách giải thông thường 1</u>

Ta có $\log_b a>\log_a b \Leftrightarrow \log_b a-\log_a b>0 \Leftrightarrow \log_b a-\dfrac{1}{\log_b a}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\log_b a)^2-1}{\log_b a}>0$. (đúng vì từ $0<a<b<1$ suy ra $\log_b a>\log_b b=1$)

Chọn đáp án A.

<u>Cách giải thông thường 2</u>

Từ $0<a<b<1$ suy ra $\log_b a>\log_b b$ hay $\log_b a>1$ và $\log_a a>\log_a b$ hay $1>\log_a b$. Do đó, ta loại các đáp án B, C, D.

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Chọn $a=\dfrac{1}{4}; b=\dfrac{1}{2}$ thì ta được : $\log_a b=\log_{2^{-2}} 2^{-1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ loại đáp án D.

$\log_b a=\log_{2^{-1}} 2^{-2}=2 \Rightarrow$ loại đáp án C.

Và ta cũng có $\log_b a>\log_a b$ nên loại đáp án B.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 11. Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x.\sqrt[5]{x^3}}}$, với $x>0$ là số thực dương. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $P=x^{\frac{14}{15}}$. B. $P=x^{\frac{13}{15}}$. C. $P=x^{\frac{16}{15}}$. D. $P=x^{\frac{24}{15}}$.

Cách giải thông thường

Ta có $P=\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x.\sqrt[5]{x^3}}}=\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x.x^{\frac{3}{5}}}}=\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^{\frac{8}{5}}}}=\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{4}{5}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{14}{5}}}=x^{\frac{14}{15}}$.

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

Sau khi rút gọn thì được kết quả đúng với mọi $x>0$ là các số thực dương nên ta có thể chọn đại diện.

- Chọn $x=2$ thì $P\approx 1{,}9$. (dùng máy tính để tính giá trị của P)
- Thế $x=2$ vào các đáp án thì chỉ có đáp án A thỏa mãn.

Chọn đáp án A.

**** Lưu ý*** *: Các bạn kết hợp thủ thuật khi dùng máy tính cầm tay thì giải quyết bài toán rất nhanh.*

Ví dụ 12. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{1+\sqrt{2x}}-3^{x+1}\le x^2-2x$ là :

A. $S=(0;+\infty)$. B. $S=[2;+\infty)$. C. $S=[0;2]$. D. $S=[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Cách giải thông thường

Ta có : $3^{1+\sqrt{2x}}-3^{x+1}\le x^2-2x \Leftrightarrow 3^{1+\sqrt{2x}}+2x\le 3^{1+x}+x^2$.

Xét hàm số $f(t)=3^{1+t}+t^2,\ t\ge 0$; $f'(t)=3^{1+t}\ln 3+2t>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra, $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà theo (*) ta có $f\left(\sqrt{2x}\right)\le f(x)$ nên $\sqrt{2x}\le x$ $\begin{cases}2x\le x^2\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Chọn đáp án D.

Cách khác (chọn đại diện)

- Với $x=0$ thì $3^{1+0}-3^{0+1}\le 0-0$ (đúng). suy ra, loại các đáp án A và B.
- Với $x=8$ thì $3^{1+4}-3^{8+1}\le 8^2-2.8$ (đúng). suy ra, loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 13 . Cho $x>1$; a,b,c là các số dương khác 1 và $\log_c x<\log_b x<0<\log_a x$. Chọn khẳng định đúng :

A. $a<b<c$. B. $c<b<a$. C. $b<a<c$. D. $b<c<a$.

Cách giải thông thường

Ta có $x>1$, mà $\log_a x>0\Leftrightarrow \log_a x>\log_a 1$ nên suy ra : $a>1$.

$\log_b x<0\Leftrightarrow \log_b x<\log_b 1$ nên suy ra : $0<b<1$.

$$\log_c x < 0 \Leftrightarrow \log_c x < \log_c 1 \text{ nên suy ra : } \quad 0 < c < 1.$$

Suy ra : $a > b$; $a > c$. (*)

Lại có : $\log_c x < \log_b x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_x c} < \dfrac{1}{\log_x b} \Leftrightarrow \dfrac{\log_x b - \log_x c}{\log_x c.\log_x b} < 0$.

Vì $\log_x b < \log_x 1 = 0$ và $\log_x c < \log_x 1 = 0$ nên suy ra :

$\log_x b - \log_x c < 0 \Leftrightarrow \log_x b < \log_x c \Leftrightarrow b < c$. (do $x > 1$) (**)

Từ (*) và (**) ta được : $b < c < a$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

- Chọn $x = 2$ và $c = 2^{-1}$; $b = 2^{-2}$; $a = 2$ thì

$$\log_c x = -1 < \log_b x = -\frac{1}{2} < 0 < \log_a x = 1.$$

Rõ ràng rằng $b = 2^{-2} = \dfrac{1}{4} < c = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} < a = 2$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 14 . Cho $x = t^{\frac{1}{t-1}}, y = t^{\frac{t}{t-1}}$ với $t > 0, t \neq 1$. Giữa x và y có hệ thức liên hệ nào sau đây ?

A. $y^x = x^y$. B. $x^x = y^y$. C. $y^x = x^{\frac{1}{y}}$. D. $y^{\frac{1}{x}} = x^y$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t^{\frac{t}{t-1}}}{t^{\frac{1}{t-1}}} = t^{\frac{t}{t-1}-\frac{1}{t-1}} = t$; $y = t^{\frac{t}{t-1}} = \left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)^t = x^t$.

Suy ra : $y = x^t \Leftrightarrow y = x^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow y^x = \left(x^{\frac{y}{x}}\right)^x \Leftrightarrow y^x = x^y$.

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Chọn $t = 2$ thì $x = 2, y = 4$. Khi đó ta có :

A. $4^2 = 2^4$.

(Đúng nhưng ta chưa chọn được đáp án này vì còn trường hợp đáp án khác cũng đúng !)

B. $2^2 = 4^4$. (Sai)

C. $4^2 = 2^{\frac{1}{4}}$. (Sai)

D. $4^{\frac{1}{2}} = 2^4$. (Sai)

Chọn đáp án A.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Ví dụ 1. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

(Câu 25 - Mã đề 101 – THPT QG - 2017)

<u>Cách giải thông thường 1</u>

Ta xét $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$.

Đổi cận :

x	0	2
t	0	6

Tađược : $I = \frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3}.12 = 4$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách giải thông thường 2</u>

Ta có $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d(3x) = \frac{1}{3}\int_0^6 f(t)d(t) = \frac{1}{3}.12 = 4$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn đại diện: $f(x) = 2$ thỏa mãn $\int_0^6 2dx = 2x\Big|_0^6 = 2.6 - 2.0 = 12$.

$\Rightarrow I = \int_0^2 2dx = 2x\Big|_0^2 = 2.2 - 2.0 = 4$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

B. $I=-6$. B. $I=0$. C. $I=-2$. D. $I=6$.

(Đề tham khảo lần 3 của Bộ GD&ĐT)

Cách giải thông thường

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[\sqrt{2+2\cos 2x}-f\left(-x\right)\right]dx$

$$=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}dx-\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)dx=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)d\left(-x\right).$$

Đặt $t=-x$ và đổi cận, ta được :

$$I=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f\left(t\right)dt$$

$$=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx-\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx-I$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx=-\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx$$

$$=-\sin x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-\sin x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$$

Chọn đáp án D.

Cách khác (chọn đại diện)

Ta có $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}=\sqrt{4\cos^2 x}=2\left|\cos x\right|$. (*)

Có vô số hàm f thỏa mãn (*), ta chọn đại diện như sau :

$$f(x) = |\cos x| \quad ; \quad f(-x) = |\cos(-x)| = |\cos x|.$$

$\Rightarrow I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = 6$. *(máy tính casio cũng phải mất nhiều thời gian để cho ra kết quả!)*

Chọn đáp án D.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 3 - 2\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{2} + 2$. B. $I = \frac{3\pi}{2} - 2$. C. $I = \frac{\pi - 1}{3}$. D. $I = \frac{\pi + 1}{2}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3 - 2\cos x - f(-x)\right] dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x) dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) d(-x)$$

Đặt $t = -x$ và đổi cận, ta được : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x) dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x) dx - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3-2\cos x\right)dx = \frac{1}{2}\left(3x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2.$$

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Ta có $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=3-2\cos x$. (*)

Ta chọn đại diện như sau : $f\left(x\right)=\frac{3}{2}-\cos x$; $f\left(-x\right)=\frac{3}{2}-\cos\left(-x\right)=\frac{3}{2}-\cos x$, thỏa mãn giả thiết $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=3-2\cos x$.

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\cos x\right)dx = \left(\frac{3}{2}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2.$$

(có thể dùng máy tính casio để có kết quả rồi so sánh với đáp án !)

Chọn đáp án B.

Ví dụ 4. Cho hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Khi đó, hiệu số $F\left(1\right)-F\left(2\right)$ bằng

A. $\int_1^2 f\left(x\right)dx$. B. $\int_2^1 F\left(x\right)dx$. C. $\int_1^2 f\left(x\right)d\left(-x\right)$. D. $-\int_2^1 F\left(x\right)dx$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $F\left(1\right)-F\left(2\right)=F\left(x\right)\Big|_2^1=\int_2^1 f\left(x\right)dx=-\int_1^2 f\left(x\right)dx=\int_1^2 f\left(x\right)d\left(-x\right)$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn $F\left(x\right)=x \Rightarrow f\left(x\right)=1$.

Ta được $F\left(1\right)-F\left(2\right)=1-2=-1$.

$I_1=\int_1^2 f\left(x\right)dx=\int_1^2 dx=2-1=1$. Loại đáp án A.

$I_2=\int_2^1 F\left(x\right)dx=\int_2^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_2^1=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$. Loại đáp án B.

$I_3 = \int_1^2 f(x)d(-x) = \int_1^2 d(-x) = -(2-1) = -1$. Thỏa mãn bài toán.

$I_4 = -\int_2^1 F(x)dx = -\int_2^1 xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_2^1 = -\left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}$. Loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Lưu ý: *cách chọn đại diện nhìn trình bày có vẽ dài, nhưng trên thực tế, chúng ta nhẩm rất nhanh.*

Ví dụ 5. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $f(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó $I = \int_{-1}^0 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. $I = 1$. B. $I = 0$. C. $I = -2$. D. $I = 2$.

Cách giải thông thường

Ta có $I = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$; Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = -1 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $I = -\int_1^0 f(-t)dt = \int_0^1 f(-t)dt = -\int_0^1 f(t)dt = -2$.

Chọn đáp án C.

Cách khác (chọn đại diện)

Ta chọn $f(x) = 4x$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 4xdx = 2x^2\Big|_0^1 = 2$ và $f(x) = 4x$ là hàm số lẻ.

Khi đó $I = \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 4xdx = 2x^2\Big|_{-1}^0 = -2$.

Chọn đáp án C.

IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC

Ví dụ 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$:

A. *1*. B. *2* . C. *3*. D. *4*.

Cách giải thông thường

Gọi $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$, ta có :

- $|z_1| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$; $|z_2| = 1 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 1$; (*)
- $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 3$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = 3$.

Kết hợp với (*) ta được : $2ac + 2bd = 1$.

Lại có : $|z_1 - z_2| = |(a-c) + (b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

$$= \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2} = \sqrt{2 - (2ac + 2bd)} = \sqrt{2-1} = 1.$$

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

Ta sẽ chọn hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn giả thiết của bài toán là : $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Khi đó $|z_1 - z_2| = \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = |i| = 1$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1-i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 2\sqrt{2}$. B. $r = 4$. C. $r = \sqrt{2}$. D. $r = 2$.

Cách giải thông thường 1

Ta có : $w = (1-i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{w-i}{1-i} \Leftrightarrow z - 2 = \frac{w-i}{1-i} - 2 \Leftrightarrow z - 2 = \frac{w+i-2}{1-i}$.

$\Rightarrow |z-2| = \left|\frac{w+i-2}{1-i}\right| \Leftrightarrow |z-2| = \frac{|w+i-2|}{|1-i|} \Leftrightarrow |w+i-2| = |z-2|.|1-i|$

$\Leftrightarrow |w+i-2| = 2\sqrt{2}$.

Bán kính r của đường tròn cần tìm là $r = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A.

Cách giải thông thường 2

Ta có : $w = (1-i)z + i \Leftrightarrow w = (1-i)z - 2(1-i) + 2 - i$

$\Leftrightarrow w = (1-i)(z-2) + 2 - i \Leftrightarrow w - 2 + i = (1-i)(z-2)$

$\Rightarrow |w-2+i| = |(1-i)(z-2)| \Leftrightarrow |w-2+i| = |1-i|.|z-2| \Leftrightarrow |w+i-2| = 2\sqrt{2}$.

Bán kính r của đường tròn cần tìm là $r = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn giả thiết của bài toán là :

$z_1 = 2+2i \quad \Rightarrow w_1 = (1-i)(2+2i)+i = 4+i$, với điểm biểu diễn của w_1 là $M_1(4;1)$.

$z_2 = 2-2i \quad \Rightarrow w_2 = (1-i)(2-2i)+i = -3i$, với điểm biểu diễn của w_2 là $M_2(0;-3)$.

$z_3 = 2-2i \quad \Rightarrow w_3 = (1-i)4+i = 4-3i$, với điểm biểu diễn của w_3 là $M_3(4;-3)$.

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1-i)z+i$ là đường tròn (C) nên các điểm M_1, M_2, M_3 đều thuộc (C).

Gọi $(C): x^2+y^2+ax+by+c=0$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a+b+c=-17 \\ -3b+c=-9 \\ 4a-3b+c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

Khi đó, bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{2^2+1^2+3} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 3. Cho z là số phức và $\dfrac{1}{|z|-z}$ là số phức có phần thực bằng 4. Tính $|z|$.

A. $|z| = 4$. B. $|z| = \dfrac{1}{4}$. C. $|z| = \dfrac{1}{8}$. D. $|z| = \dfrac{1}{2}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $w = \dfrac{1}{|z|-z}$ là số phức có phần thực bằng 4 nên suy ra: $w+\overline{w} = 8$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|z|-z}+\frac{1}{|z|-\overline{z}} = 8 \Leftrightarrow \frac{|z|-\overline{z}+|z|-z}{|z|^2-|z|.\overline{z}-|z|.z+z.\overline{z}} = 8 \Leftrightarrow \frac{|z|-\overline{z}+|z|-z}{2|z|^2-|z|.\overline{z}-|z|.z} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|z|-\overline{z}-z}{|z|\left(2|z|-\overline{z}-z\right)} = 8 \Rightarrow |z| = \frac{1}{8}. \qquad \left(2|z|-\overline{z}-z \neq 0\right)$$

Lưu ý : $2|z|-\overline{z}-z = 0 \Leftrightarrow 2|z| = \overline{z}+z$. Đặt $z = a+bi, (a,b \in \mathbb{R})$ ta có

$$2\sqrt{a^2+b^2} = 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a^2 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}.$$

Khi đó z là số thực không âm nên $|z|-z=0$, vi phạm điều kiện của biểu thức $\frac{1}{|z|-z}$.

Chọn đáp án C.

Cách khác (chọn đại diện)

Ta chọn một số phức z thỏa mãn $\frac{1}{|z|-z}$ là số phức có phần thực bằng 4.

Dễ thấy $z=-\frac{1}{8}$. Khi đó $|z|=\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z|+z=0$. Khi đó :

A. z là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0.

B. $|z|=1$.

C. Phần thực của z là số âm.

D. z là số thuần ảo.

Cách giải thông thường

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó ta có : $|a+bi|+a+bi=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}+a+bi=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a=0\\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=-a\\ b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=a^2\\ b=0\\ a\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ a\le 0\end{cases}.$$

Vậy z là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0.

Chọn đáp án A.

Cách khác (chọn đại diện)

Ta chọn số phức z thỏa mãn $|z|+z=0$ rồi kiểm tra các đáp án.

Chọn $z=0$ thỏa mãn $|z|+z=0$ thì loại đáp án B, C, D.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 5. Tìm tất cả cá giá trị thực của tham số m để số phức $z=\frac{m+i}{m-i}$ có phần thực dương.

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$.

B. $m>1$.

C. $-1<m<1$.

D. $m>0$.

Cách giải thông thường

Ta có $z=\frac{m+i}{m-i}=\frac{(m+i)(m+i)}{(m-i)(m+i)}=\frac{m^2-1+2mi}{m^2+1}=\frac{m^2-1}{m^2+1}+\frac{2m}{m^2+1}.i$.

Để số phức $z=\frac{m+i}{m-i}$ có phần thực dương thì $m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$.

Chọn đáp án A.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Chọn $m=0$ thì $z=\frac{0+i}{0-i}=-1$ (không thỏa mãn bài toán) nên ta loại đáp án C.

Chọn $m=1$ thì $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$ (không thỏa mãn bài toán) nên loại đáp án D.

Chọn $m=-2$ thì $z=\frac{-2+i}{-2-i}=\frac{(-2+i)^2}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ (thỏa mãn bài toán) nên loại đáp án B.

Chọn đáp án A.

<u>Lưu ý</u> : *Ta nên sử dụng máy tính cầm tay để tính z, giúp tăng tốc độ xử lý bài toán.*

Ví dụ 6. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2|=|i-z|$ là đường thẳng có phương trình :

A. $2x+4y+13=0$. B. $4x+2y+3=0$.

C. $-2x+4y-13=0$. D. $4x-2y+3=0$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó ta có $|z+2|=|i-z|\Leftrightarrow|x+yi+2|=|i-(x+yi)|$

$\Leftrightarrow|x+2+yi|=|-x+(1-y)i|\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2=x^2+1-2y+y^2\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn số phức $z=-1+\frac{1}{2}i$ thỏa mãn $|z+2|=|i-z|$, điểm biểu diễn của z là $M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Ta kiểm tra các đáp án trên thì chỉ đường thẳng ở đáp án B đi qua M.

Chọn đáp án B.

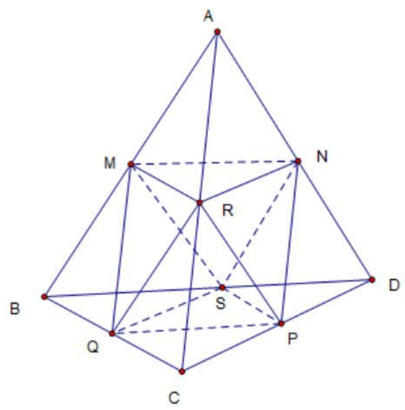
V. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Ví dụ 11. Cho khối tứ diện có thể tích bằng (V). Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. B. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. C. $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$. D. $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

(Đề tham khảo lần 3 của Bộ GD&ĐT)

Cách giải thông thường



Ta có $\frac{V_{AMRN}}{V}=\frac{AM.AR.AN}{AB.AC.AD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{AMRN}=\frac{1}{8}V$

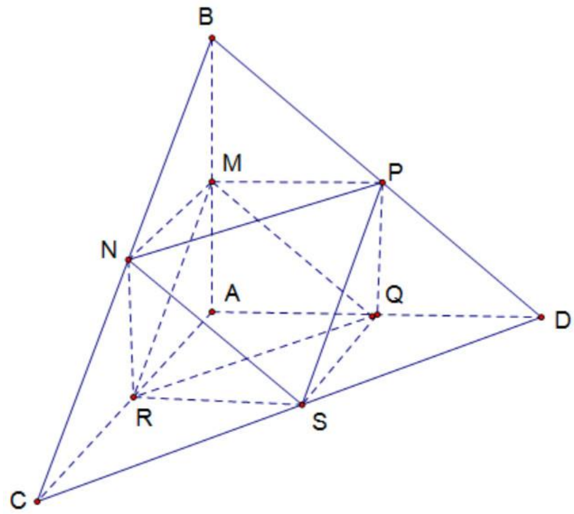
Tương tự ta cũng có :

$V_{BMQS}=\frac{1}{8}V$; $V_{CPQR}=\frac{1}{8}V$; $V_{DNPS}=\frac{1}{8}V$

$V'=V-\left(4.\frac{1}{8}V\right)=\frac{1}{2}V\Rightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A.

Cách giải khác (chọn đại diện)



Ta xét trong trường hợp riêng là khối tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và đều có độ dài bằng 2, khi đó ta có :

$V=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.AC.AD\right).AB=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.2.2\right).2=\frac{4}{3}$;

$V'=V-4\left[\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.AQ.AR\right).AM\right]=\frac{4}{3}-4\left[\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.1.1\right).1\right]=\frac{2}{3}$

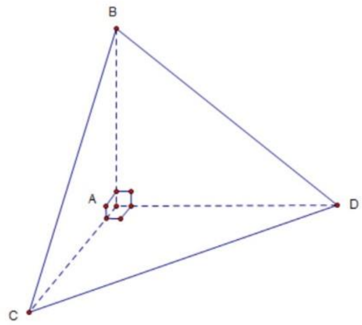
$\Rightarrow\frac{V'}{V}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 10. Cho khối tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc và có thể tích bằng V. Gọi S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác ABC, ACD, ADB. Khi đó, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

A. $V=\dfrac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{6}$. B. $V=\dfrac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{3}$. C. $V=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{6}$. D. $V=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

<u>Cách giải thông thường</u>



Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{AD.AC}{2}.AB=\dfrac{AB.AC.AD}{6}$

Mặt khác :

$$\sqrt{S_1S_2S_3}=\sqrt{\frac{AB.AC}{2}.\frac{AB.AD}{2}\frac{AD.AC}{2}}=\frac{AB.AC.AD}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra : $6V_{ABCD}=2\sqrt{2}.\sqrt{S_1S_2S_3}\Leftrightarrow V_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách giải khác</u> (chọn đại diện)

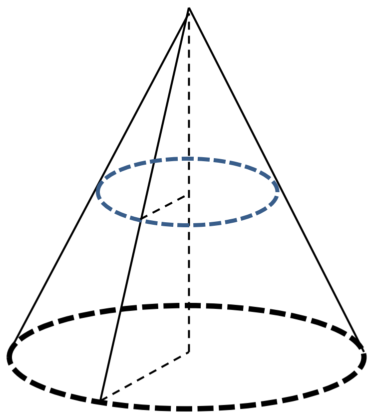
Ta chọn $AB=AC=AD=2$ thì $V_{ABCD}=\dfrac{4}{3}$; $S_1S_2S_3=8$. So sánh các đáp án thì chỉ đáp án D thỏa mãn $V=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 3. Cắt khối nón bằng một mặt phẳng đi qua trung điểm của đường cao của khối nón, ta được một khối nón nhỏ. Tỉ số thể tích giữa khối nón nhỏ và khối nón đã cho bằng :

A. $\dfrac{3}{8}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{1}{8}$. D. $\dfrac{5}{8}$.

<u>Cách giải thông thường</u>



Xét khối nón lớn có chiều cao h, bán kính đường tròn đáy là r.

- Thể tích khối nón lớn là : $V_1=\dfrac{1}{3}h\pi r^2$.

- Thể tích khối nón nhỏ là :

$$V_2=\frac{1}{3}\frac{h}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{1}{24}h\pi r^2.$$

Suy ra : $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\frac{1}{24}h\pi r^2}{\frac{1}{3}h\pi r^2}=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C.

Cách giải khác (chọn đại diện)

Xét khối nón lớn có chiều cao h, bán kính đường tròn đáy là r. Chọn $h = r = 2$.

- Thể tích khối nón lớn là : $V_1 = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{8\pi}{3}$.

- Thể tích khối nón nhỏ là : $V_2 = \frac{1}{3}\frac{h}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án C.

Nhận xét: *Về bản chất thì hai cách gần như nhau, thế nhưng nhờ việc chọn $h = r = 2$ mà ta nhẩm dễ hơn là để dạng tổng quát là h và r.*

Ví dụ 12. Tính theo a thể tích V của khối lập phương ABCD.A’B’C’D’ biết $AC' = a$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. B. $V = 3\sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{27}$.

Cách giải thông thường

Gọi x là cạnh của hình lập phương ABCD.A’B’C’D’, ta có : $\sqrt{3x^2} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lập phương ABCD.A’B’C’D’ là : $V = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Chọn đáp án A.

Cách giải khác (chọn đại diện)

Xét riêng trường hợp hình lập phương có cạnh bằng 1 thì $a = AC' = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Khi đó thể tích khối lập phương bằng 1 nên đáp án A thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A.

VI. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(0;-1;2), B(3;0;1), C(2;3;0)$ và hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 3 = 0$; $(Q): 2x - y - z + 3 = 0$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Khi đó có mặt phẳng (α) đi qua H và chứa đường thẳng Δ có phương trình là :

A. $7x+19y+10z+4=0$. B. $7x+19y+10z-30=0$.

C. $10x+7y+19z-30=0$. D. $10x+7y+19z-4=0$.

Cách giải thông thường

Gọi $H(x;y;z)$, ta có : $\overrightarrow{AH}=(x;y+1;z-2)$; $\overrightarrow{BH}=(x-3;y;z-1)$; $\overrightarrow{AB}=(3;1;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(2;4;-2)$; $\overrightarrow{BC}=(-1;3;-1)$; $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;10)$.

Do H là trực tâm của tam giác ABC nên ta được :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+3(y+1)-(z-2)=0\\ 2(x-3)+4y-2(z-1)=0\\ 2x+4(y+1)+10(z-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y-z=-5\\ 2x+4y-2z=4\\ 2x+4y+10z=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{5}\\ y=\dfrac{-1}{5}\\ z=1\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5};1\right).$$

Do Δ là giao tuyến của (P) và (Q) nên $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;3;-5)$;

Một điểm thuộc Δ là một nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}x+2y+z-3=0\\ 2x-y-z+3=0\end{cases}$.

Ta chọn $y=0\Rightarrow\begin{cases}x+z=3\\ 2x-z=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ z=3\end{cases}$. Vậy điểm $M(0;0;3)\in\Delta$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là : $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Mặt phẳng (α) qua $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5};1\right)$, chứa Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=\left[\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{MH}\right]=(-7;-19;-10)$.

$\Rightarrow(\alpha):7x+19y+10z-30=0$.

Chọn đáp án B.

Cách khác (chọn đại diện)

Mặt phẳng (α) đi qua điểm H và chứa đường thẳng Δ nên (α) đi qua mọi điểm thuộc đường thẳng Δ. Một điểm thuộc Δ là một nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}x+2y+z-3=0\\ 2x-y-z+3=0\end{cases}$. Ta chọn $y=0\Rightarrow\begin{cases}x+z=3\\ 2x-z=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ z=3\end{cases}$.

Vậy điểm $M(0;0;3)\in\Delta$.

Trong các đáp án trên chỉ có đáp án B là thỏa mãn $M(0;0;3)\in(\alpha)$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x=z$; $(Q): 2x-y+z=0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có véctơ chỉ phương là :

A. $\vec{n}=(1;0;-1)$. B. $\vec{n}=(1;3;1)$. C. $\vec{n}=(1;-3;1)$. D. $\vec{n}=(2;1;-1)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $\vec{n}_P=(1;0;-1)$; $\vec{n}_Q=(2;-1;1)$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có véctơ chỉ phương là : $\vec{u}=\vec{n}_Q\wedge\vec{n}_P=(1;3;1)$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách khác</u> (chọn đại diện)

Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng Δ. Một điểm thuộc Δ là một nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}2x-y+z=0\\ x=z\end{cases}$.

Chọn $x=y=z=0 \Rightarrow O(0;0;0)\in\Delta$.

Chọn $x=z=1\Rightarrow y=3 \Rightarrow M(1;3;1)\in\Delta$.

Một véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(1;3;1)$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2my-mz-1=0$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\\ z=2\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Với mọi giá trị thực của tham số m thỏa mãn $m\neq-\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (α) tại điểm M có tọa độ là :

A. $\left(\frac{3}{1+2m};\frac{2}{1+2m};2\right)$. B. $\left(\frac{4m+3}{1+2m};\frac{2m}{1+2m};2\right)$.

C. $\left(\frac{4m+1}{1+2m};\frac{2m}{1+2m};2\right)$. D. $\left(\frac{4m-1}{1+2m};\frac{2m}{1+2m};2\right)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta tìm giao điểm M, xét phương trình :

$(2+t)+2m.(1+t)-m.2-1=0 \Leftrightarrow (1+2m)t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{1+2m}$.(do $m\neq-\frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2-\dfrac{1}{1+2m}\\ y=1-\dfrac{1}{1+2m}\\ z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+4m}{1+2m}\\ y=\dfrac{2m}{1+2m}\\ z=2\end{cases}.$$

Vậy $M\left(\dfrac{4m+1}{1+2m};\dfrac{2m}{1+2m};2\right)$.

Chọn đáp án C.

Cách khác (chọn đại diện)

Bài toán đúng với mọi giá trị thực của m thỏa mãn $m\neq-\dfrac{1}{2}$ nên ta có thể xét một trường hợp riêng.

Chọn $m=0\ \Rightarrow\ (\alpha):x-1=0$.

Ta xét phương trình $(2+t)-1=0\Leftrightarrow t=-1$, suy ra $M(1;0;2)$.

Thế $m=0$ vào các đáp án đã cho thì chỉ đáp án C thỏa mãn. (cho ra tọa độ $M(1;0;2)$)

Chọn đáp án C.

VII. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Ví dụ 1. Công thức nào sau đây không phải là công thức tính diện tích tam giác chính xác?

A. $S=\dfrac{abc}{2R}$; B. $S=\Pr$;

C. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; D. $S=\dfrac{1}{2}a.h_a$.

Cách giải thông thường

Nhớ công thức đúng $S=\dfrac{abc}{4R}$.

Vậy chọn đáp án A.

Cách giải khác (chọn đại diện)

Trong trường hợp chỉ nhớ công thức $S=\dfrac{1}{2}a.h_a$, ta có thể xác thực như sau:

Xét trường hợp tam giác vuông ba cạnh 3; 4; 5 thì $S=\dfrac{3.4}{2}=6$; $p=\dfrac{3+4+5}{2}=6$ và $R=\dfrac{5}{2}$. Thế vào ba công thức A, C, D (dùng máy tính cho nhanh) thì A không thỏa mãn.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 2. Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu C_n^k và xác định bởi công thức $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $(k,n\in\mathbb{N};\ 1\le k\le n)$. Trong các công thức sau, công thức nào **sai** ?

A. $C_n^k=C_n^{n-k}$.

B. $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$.

C. $C_n^k=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

D. $nC_n^k=kC_{n-1}^{k-1}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Nhớ công thức đúng cơ bản $C_n^k=C_n^{n-k}$; $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$. Loại đáp án A và B.

Ta có $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)!}{k.(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$

$$=\frac{n}{k}.\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}.$$ Loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

<u>Cách giải khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn trường hợp riêng $n=7;k=3$ và dùng máy tính cầm tay để kiểm tra các công thức, công thức nào sai thì chọn.

Ta có $C_7^3=C_7^{7-3}=35$; $C_{7+1}^3=C_7^3+C_7^{3-1}=56$; $C_7^3=\dfrac{7}{3}C_{7-1}^{3-1}=35$ (Công thức ở đáp án A, B, C đúng trong trường hợp này) ; $7C_7^3=245\ne 3C_{7-1}^{3-1}=45$. (Công thức ở đáp án D sai)

Chọn đáp án D.

Ví dụ 3. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số tăng ?

A. Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{n}$.

B. Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$.

C. Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+3}{3n+2}$.

D. Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$.

Cách giải thông thường

+ Với đáp án A, xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0.$$

Dãy số (u_n) giảm. Loại đáp án A.

+ Với đáp án B, xét thương :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}}=\frac{n+2}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n+1}=\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{0+1}\right)=\frac{2}{3}<1.$$

Dãy số (u_n) giảm. Loại đáp án B.

+ Với đáp án C, xét hiệu :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+2}-\frac{2n+3}{3n+2}=\frac{2n+5}{3n+5}-\frac{2n+3}{3n+2}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}(3n+5)-\frac{1}{3}}{3n+5}-\frac{\frac{2}{3}(3n+2)+\frac{5}{3}}{3n+2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}.\frac{1}{3n+5}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}.\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3n+5}-\frac{5}{3}.\frac{1}{3n+2}<0.$$

Dãy số (u_n) giảm. Loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

Cách giải khác (chọn đại diện)

Ta chọn với $n=1; n=2$ và dùng máy tính cầm tay để kiểm tra.

+ Với đáp án A, xét hiệu $u_2-u_1=\frac{3}{2}-\frac{2}{1}=-\frac{1}{2}<0$. Loại đáp án A.

+ Với đáp án B, xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3}{3^2}}{\frac{2}{3^1}}=\frac{3}{3^2}.\frac{3^1}{2}=\frac{1}{2}<1$. Loại đáp án B.

+ Với đáp án C, xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\frac{7}{8}-\frac{5}{5}=-\frac{1}{8}<0$. Loại đáp án C.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 4. Biểu thức rút gọn của biểu thức lượng giác $P=\frac{(\cos 2x-2)\tan x}{1+2\sin^2 x}$ là :

A. $1+\sin x$. B. $-\tan x$. C. $2-\tan x$. D. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Cách giải thông thường

Ta có : $P=\frac{(\cos 2x-2)\tan x}{1+2\sin^2 x}=\frac{(1-2\sin^2 x-2)\tan x}{1+2\sin^2 x}$

$=\frac{-(1+2\sin^2 x)\tan x}{1+2\sin^2 x}=-\tan x$.

Chọn đáp án B.

Cách giải khác (chọn đại diện)

Ta chọn với $x=0$ để kiểm tra các đáp án.

Giá trị của P tại $x=0$ là $P=\frac{(\cos 0-2).\tan 0}{1+2\sin^2 0}=0$.

+ Với đáp án A, ta có $1+\sin 0=1\neq 0$. Loại đáp án A.

+ Với đáp án B, ta có $-\tan 0=0$. Đáp án B đúng trong trường hợp này.

+ Với đáp án C, ta có $2-\tan 0=2\neq 0$. Loại đáp án C.

+ Với đáp án D, ta có $\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$. Loại đáp án D.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=\frac{9^x}{3+9^x}, x\in\mathbb{R}$. Nếu $a+b=3$ thì $f(a)+f(b-2)$ có giá trị bằng :

A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $f\left(a\right)=\dfrac{9^a}{3+9^a}$;

$$f\left(b-2\right)=f\left(1-a\right)=\frac{9^{1-a}}{3+9^{1-a}}=\frac{9^a.9^{1-a}}{9^a\left(3+9^{1-a}\right)}=\frac{9}{3.9^a+9}=\frac{3}{9^a+3}.$$

Suy ra : $f\left(a\right)+f\left(b-2\right)=\dfrac{9^a}{3+9^a}+\dfrac{3}{3+9^a}=1.$

Chọn đáp án A.

<u>Cách giải khác</u> (chọn đại diện)

Ta chọn với $a=0;b=3$ thỏa mãn giả thiết $a+b=3$.

Khi đó $f\left(a\right)+f\left(b-2\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)=f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{12}=1.$

Chọn đáp án A.

Sài gòn, năm 2017

Tác giả: Trần Tuấn Anh
Mail: TranTuanAnh858@gmail.com