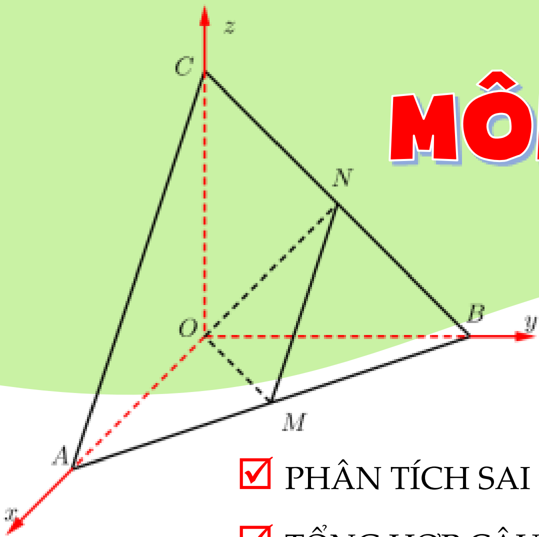
TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA

ĐOÀN VĂN BỘ (CHỦ BIÊN) – HUỲNH ANH KIỆT

NHỮNG CÂU HỎI NÂNG CAO

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

MÔN TOÁN



- ☑ PHÂN TÍCH SAI LẦM
- ☑ TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO

Hướng dẫn giải chi tiết

HCM, 5-2017, LƯU HÀNH NỘI BỘ

Giấy A5

TÀI LIỆU ÔN THI THPT QUỐC GIA

ĐOÀN VĂN BỘ (CHỦ BIÊN) – HUỲNH ANH KIỆT

NHỮNG CÂU HỎI NÂNG CAO

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

MÔN TOÁN

☑ PHÂN TÍCH SAI LẦM

☑ TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO
Hướng dẫn giải chi tiế

HCM, 5-2017, LƯU HÀNH NỘI BỘ

LỜI NÓI ĐẦU

Ở bất kì hình thức thi nào trong một cuộc thi nào thì cũng có những sai lầm mà học sinh vấp phải và cũng có những bài toán khó ở trong đề thi. Năm 2016 trở về trước, với hình thức thi tự luận thì các câu hỏi khó thường rơi vào hình học giải tích trong mặt phẳng, phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và các bài toán liên quan đến bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Và bắt đầu năm 2017, Bộ Giáo dục và Đào tạo đổi từ hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm khách quan thì cũng không tránh khỏi là không ra những câu hỏi khó. Đặc biệt là những lỗi sai cơ bản của học sinh, nhằm đánh giá đúng năng lực của học sinh. Dựa trên vấn đề đó, chúng tôi biên soạn ra cuốn sách *"Những câu hỏi nâng cao rèn luyện kĩ năng giải toán môn toán"* với mong muốn giúp cho các bạn học sinh có thêm nguồn tư liệu tham khảo, trau dồi kiến thức để có thể thi tốt kì thi Trung học Phổ thông Quốc gia và đạt được ước mơ vào ngôi trường Đại học mà mình mong muốn.

Cuốn sách này gồm có các phần sau:

PHẦN I: PHÂN TÍCH SAI LẦM QUA NHỮNG BÀI TOÁN CỤ THỂ

PHẦN II: TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO

Chuyên đề 1: Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan

Chuyên đề 2: Mũ – logarit

Chuyên đề 3: Tích phân

Chuyên đề 4: Số phức

Chuyên đề 5: Hình học không gian

Chuyên đề 6: Phương pháp tọa độ trong không gian

PHẦN III: MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Cuốn sách này được chúng tôi biên soạn dựa trên các bài toán trong các đề thi thử trên cả nước, từ các nhóm học tập trên facebook. Trong mỗi bài toán, chúng tôi luôn đưa ra những hướng dẫn giải chi tiết. Thêm vào đó, những bài tập nào có kiến thức mới thì chúng tôi cũng có đưa vào, tuy nhiên do thời gian hạn hẹp nên chúng tôi cũng không có viết thêm lý thuyết được nhiều. Chúng tôi đưa những kiến thức mới, nằm ngoài sách giáo khoa nhằm giúp các bạn học sinh có những kiến thức mới, vận dụng nhanh chóng vào các câu hỏi nâng cao. Qua đó cũng giúp các bạn học sinh có cái nhìn mới về Toán học. Các kiến thức mới này nằm ngoài chương trình học của các bạn học sinh nên có thể rất bỡ ngỡ với. Các bạn học sinh có thể đọc và tự chứng minh để kiểm chứng những kiến thức mới đó. Ngoài ra, chúng tôi còn thêm những bài tập tương tự sau những bài tập hướng dẫn giải. Tuy nhiên, cũng chỉ là một chút ít trong số những bài tập mà chúng tôi có phân tích và hướng dẫn.

Vì chúng tôi còn là sinh viên nên còn phải học trên ghế nhà trường. Do đó thời gian biên soạn của chúng tôi có hạn. Vì vậy, nội dung của cuốn sách này có thể còn có những khuyết điểm và chưa được phong phú cho lắm. Với tinh thần ham học hỏi, chúng tôi luôn mong nhận được sự đóng góp từ quý bạn đọc để một ngày nào đó cuốn sách này có thể hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, chúc các bạn học sinh có thể thi tốt kì thi Trung học Phổ thông Quốc gia.

Các tác giả

Đoàn Văn Bộ - Huỳnh Anh Kiệt
(*Sinh viên Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*)

Mọi sự đóng góp vui lòng gửi về[1]:

Facebook: **https://www.facebook.com/dvboo**
Gmail: **K40.101.183@hcmup.edu.vn**

[1] Học sinh muốn tệp pdf đầy đủ vui lòng nhắn tin qua facebook hoặc gmail. Vì một số lí do nên không đăng bản đầy đủ.

MỤC LỤC

PHẦN I: PHÂN TÍCH SAI LẦM QUA NHỮNG BÀI TOÁN CỤ THỂ

Câu 1.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in \left(a;b\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$.

B. $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Leftrightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$

C. $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(a;b\right)$ $\Leftrightarrow f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in \left(a;b\right)$.

D. $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right) \Leftrightarrow f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in \left(a;b\right)$.

Giải:

Với câu này, chắc hẳn nhiều học sinh hoang mang, không biết chọn đáp án A hay C. Với câu hỏi như thế này, nếu không nắm vững lý thuyết thì sẽ không trả lời đúng câu này.

Học sinh quen làm với hàm bậc ba, trùng phương hay bậc hai trên bậc nhất thì học sinh sẽ chọn ngay đáp án C. Bởi vì với lý luận mà học sinh hay làm bài tập là: *"Hàm số đồng biến trên $\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi $f'\left(x\right) \geq 0, \forall x \in \left(a;b\right)$"*.

Sai lầm của học sinh khi chọn đáp án C là ngộ nhận những kiến thức của bài tập mà học sinh hay làm.

Đáp án D sai vì nếu $f'\left(x\right) < 0, \forall x \in \left(a;b\right)$ thì $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(a;b\right)$.

Đáp án B sai vì nếu hàm số $f'\left(x\right)$ có thể không xác định tại *a*, *b* nhưng vẫn đồng biến trên $\left[a;b\right]$. Ví dụ xét hàm

$$f\left(x\right)=\sqrt{x},x\in\left[0;1\right] \text{ có } f'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Rõ ràng $f'\left(x\right)$ không xác định tại $x=0$ nhưng hàm số vẫn đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

Đáp án C sai vì thiếu $f'\left(x\right)=0$ tồn tại hữu hạn điểm. Mặt khác nếu xét $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}=0\Leftrightarrow ad-bc=0$ và suy ra hàm phân thức đó là hàm hằng. Dẫn đến không thỏa mãn với yêu cầu.

Đáp án A đúng vì theo định lý SGK cơ bản 12 trang 6.

Câu 2.

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. Xét các mệnh đề sau:

(1) Hàm số luôn nghịch biến trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$.

(2) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=1$; một tiệm cận ngang là $y=3$.

(3) Hàm số đã cho không có cực trị.

(4) Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(3;1\right)$ của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.

Chọn các mệnh đề đúng.

A. (1),(3), (4) **B.** (3), (4) **C.** (2), (3),(4) **D.** (1), (4)

Giải:

Sai lầm thường gặp:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2} > 0, \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ hoặc $(-\infty;3) \cup (3;+\infty)$

Suy ra (1) đúng.

Tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 1$. Suy ra (2) sai.

Mệnh đề (3) đúng.

Đến đây học sinh chọn ngay đáp án A. Mà đáp án A sai.

Phân tích sai lầm: Học sinh nhớ định nghĩa đồng biến (nghịch biến) trên khoảng nhưng lại không biết đến rằng mình không có học định nghĩa trên hai khoảng hợp nhau. Học sinh ngộ nhận rằng nghịch biến trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$ thì gộp thành $(-\infty;3) \cup (3;+\infty)$ hoặc $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ và dẫn đến nói câu này đúng. Như vậy, học sinh cần phải nhớ rõ rằng, chỉ học định nghĩa đồng biến (nghịch biến) trên khoảng, đoạn, nửa đoạn; không có trên những khoảng hợp nhau.

Mệnh đề (1) sai (giải thích ở trên). Sửa lại: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Mệnh đề (2) sai.

Mệnh đề (3) đúng. Hàm bậc nhất trên bậc nhất không có điểm cực trị.

Mệnh đề (4) đúng vì giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Vậy đáp án B.

Câu 3.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=12$. Có bao nhiêu mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Giải:

Gọi $O(0;0;0)$ và $R=2\sqrt{3}$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Vì $(Q)//(P)$ nên $(Q): x+y+z+D=0$ (*).

Vì (Q) tiếp xúc với (S) nên $d(O;(Q))=R$.

$$\Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=2\sqrt{3}\ (1)$$

Đến đây học sinh kết luận ngay là có 2 mặt phẳng.

Ngoài ra nếu làm tiếp thì $|D|=6 \Leftrightarrow D=\pm 6$ (2).

Học sinh cũng kết luận có hai mặt phẳng cần tìm.

Như vậy, nếu học sinh nào chọn C thì sai.

Phân tích sai lầm: Học sinh thấy $|A|=B$ với $B>0$ thì sẽ tồn tại hai giá trị của A thỏa mãn điều đó nên kết luận liền. Tuy nhiên với (2), học sinh cũng sai. Lỗi sai ở (1) và (2) là học sinh quên đặt điều kiện của D ở (*) nên dẫn đến không loại đáp án. Ở (1) học sinh ngộ ngay sẽ có hai giá trị D thỏa mãn.

Do $(Q)//(P)$ nên $D\neq -6$. Vậy đáp án B.

Câu 4.

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Cực đại của hàm số bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

Giải:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên, thấy ngay được cực đại của hàm số. Tuy nhiên nếu không hiểu rõ các khái niệm về vấn đề này thì sẽ mắc sai lầm câu này và phân vân giữa đáp án A, C.

Ở đáp án A, đó là điểm cực đại chứ không phải cực đại của hàm số.

Nhắc lại khái niệm: "*Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì x_0 được gọi là* ***điểm cực đại (cực tiểu)*** *của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là* ***giá trị cực đại (cực tiểu)*** *của hàm số còn gọi tắt là* ***cực đại (cực tiểu)***". Nắm vững khái niệm này thì có thể chọn đáp án câu này đúng.

Câu 5.

Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$?

A. $\left[\begin{array}{l}-3<m\le 1\\ m\ge 2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 2\end{array}\right.$

C. $m<-3$ **D.** $m>-3$

Giải:

Nhận thấy, cả tử và mẫu đều có $\cos x$ nên dùng phương pháp đổi biến để làm bài toán dễ dàng hơn.

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ thì $t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{2t+3}{2t-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Điều kiện xác định $t\ne\dfrac{m}{2}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2(m+3)}{(2t-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ khi và chỉ khi

$$y'<0,\forall t\in\left(\frac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \dfrac{m}{2}\notin\left(\dfrac{1}{2};1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<m\le 1\\ m\ge 2\end{array}\right.$$

Với cách giải trên thì chọn đáp án A. Đáp án A là đáp án sai. Nguyên nhân sai lầm là do đâu?

Phân tích sai lầm: Nếu đặt $t=\cos x$ thì hàm số ban đầu là hàm hợp của các hàm $y=f\left(t\right)=\dfrac{2t+3}{2t-m}$ và $t=\cos x$. Khi đó $y'=f'_t.t'_x$ Yêu cầu bài toán tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên $y'<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow f'_t.t'_x<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$. Mà sau khi đổi biến như vậy thì ta có $t'_x<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$. Như vậy thì ta phải có $f'_t>0,\forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. Chứ không phải như $y'<0$ như cách giải ở trên. Sai lầm dẫn đến sai là không để ý đến biến mới nó biến thiên như thế nào để ta có bài toán mới. Ngoài ra, nhiều học sinh là quen nhiều dạng toán mà yêu cầu bài toán vẫn giữ nguyên nên dẫn đến ngộ nhận bài toán này như vậy. Đáp án chính xác được nêu ở phần hai.

Câu 6.

Cho hàm số $y=\left|x\right|$. Chọn mệnh đề đúng.

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ và cũng không đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ nên đạt cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ nhưng không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Giải:

Chắc hẳn có nhiều học sinh chọn đáp án B vì

$$y=|x|=\sqrt{x^2},\ y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\begin{cases}1, neu\, x>0\\ -1, neu\, x<0\end{cases}$$

Học sinh kết luận ngay hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ và cũng kết luận ngay không đạt cực tiểu tại $x=0$. Tại sao lại như vậy?

Phân tích sai lầm: Học sinh đã ngộ nhận ngay định lý *"Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$"* là điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị. Nghĩa là đạo hàm tại điểm đó mà không bằng 0 thì không có cực trị. Nguyên nhân là không nắm vững lý thuyết về cực trị. Đặc biệt là định lý trên chỉ có một chiều, không phải hai chiều. Tức là chiều ngược lại có thể không đúng.

Nhắc lại một chút về điều kiện đủ để điểm x_0 là điểm cực trị của hàm số: *"$f'(x)$ đổi dấu qua x_0 thì x_0 gọi là điểm cực trị của hàm số"* hoặc nếu nhìn vào đồ thị hàm số thì *"đồ thị hàm số đổi chiều qua điểm x_0 thì x_0 gọi là điểm cực trị"*. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có thể không có đạo hàm tại x_0 nhưng vẫn có thể đạt cực trị tại điểm x_0. Trong quá trình học lý thuyết, chúng ta nên học thật kĩ, hiểu tường tận bản chất của định nghĩa khái niệm đó để tránh khỏi mắc phải những sai lầm không đánh kể.

Như vậy đối với hàm số trên thì rõ ràng y' đổi dấu qua $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực trị. Ở câu hỏi này thì $x=0$ chính là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 7.

Cho số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Đối với số phức *z*, *a* là phần thực.

B. Điểm $M\left(a;b\right)$ trong hệ trục tọa độ *Oxy* được gọi là điểm biểu diễn số phức *z*.

C. Đối với số phức *z*, bi là phần ảo.

D. Đối với số phức *z*, *b* là phần ảo.

Giải:

Đối với câu này thì rất nhiều học sinh bối rối trong việc chọn đáp án giữa C, D. Có nhiều học sinh sẽ chọn đáp án D.

Phân tích sai lầm: Bởi vì học sinh không nhớ hoặc nhớ nhầm giữa các phần thực, phần ảo của số phức *z*. Học sinh hay cho rằng phần ảo chính là bi. Nhắc lại một chút lý thuyết: "*Cho số phức* $z=a+bi$ *với* $a,b\in\mathbb{R}$ *thì a được gọi là phần thực, b được gọi là phần ảo còn i được gọi là đơn vị ảo*".

Như vậy thì phần ảo của số phức *z* không có chứa *i*. Vậy mệnh đề C sai.

Phân tích từng mệnh đề:

Mệnh đề A, D đúng (theo phân tích lý thuyết ở trên).

Mệnh đề B đúng. Với mỗi số phức có dạng $z=a+bi$ thì $M\left(z\right)=\left(a;b\right)$ được gọi là điểm biểu diễn số phức *z*.

Mệnh đề C sai (theo phân tích lý thuyết trên).

Lưu ý: Với những câu lý thuyết thì cần phải nắm vững lý thuyết.

Câu 8.

Cho số phức $z_1 = 3+2i, z_2 = 6+5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 5z_1 + 6z_2$.

A. $51+40i$ **B.** $51-40i$ **C.** $48+37i$ **D.** $48-37i$

Giải:

Ta có $z = 5z_1 + 6z_2 = 5(3+2i) + 6(6+5i) = 51+40i$.

Ở đây có lẽ nhiều học sinh chọn ngay đáp án A.

Phân tích sai lầm: Đây là một bài toán dễ, nhưng nhiều học sinh lại mất điểm câu này. Lý do học sinh đọc đề không kĩ và hấp tấp trong việc chọn đáp án. Đề bài yêu cầu là số phức liên hợp của số phức z chứ không phải số phức z.

Câu 9.

Tìm tất các các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>4 \end{array}\right.$

C. $-1<m<4$ **D.** $m \in \{-5;-1;4\}$

Giải:

Sai lầm thường gặp:

Nhận thấy hàm số có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận đứng khi mẫu bằng 0 có đứng một nghiệm hay phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$$

Như vậy học sinh chọn ngay đáp án A.

Phân tích sai lầm: Học sinh đã xét thiếu trường hợp. Nếu mẫu có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm là của tử thì đồ thị hàm số vẫn có đúng một tiệm cận đứng.

Xét thêm trường hợp $x^2+2mx+3m+4=0$ có nghiệm $x=-1$ thì ta có $m=-5$.

Thử lại thì thấy $m=-5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ không có tiệm cận ngang khi và chỉ khi

A. $m\le 0$ **B.** $m=0$ **C.** $m<0$ **D.** $m>0$

Giải:

Có lẽ nhiều học sinh chọn đáp án C.

Phân tích sai lầm:

- Nguyên nhân thứ nhất: Học sinh quên xét trường hợp $m=0$. Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số $y=x+1$ cũng không có tiệm cận ngang.
- Nguyên nhân thứ hai: Không hiểu rõ mệnh đề và phủ định sai. Vì ban đầu học sinh có thể tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang trước. Và giải tìm được điều kiện như sau: $m>0$. Phụ định lại, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m<0$. Như vậy, đã phủ định sai mệnh đề.

Những sai lầm của học sinh đa số rơi vào xét thiếu trường hợp. Mặt khác, cũng có nhiều học sinh cũng hay làm theo kiểu phụ định mệnh đề và làm thông qua một bài toán mới. Nhưng khi phủ định lại mệnh đề thì lại bị sai.

Nhắc lại kiến thức về mệnh đề phủ định, hai mệnh đề tương đương:

*"Cho mệnh đề P. Mệnh đề không phải P được gọi là **mệnh đề phủ định** của P và kí hiệu $\overline{P}$. Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.*

*Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề có dạng "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là **mệnh đề tương đương** và kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.*

Nếu $P \Leftrightarrow Q$ thì $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ và ngược lại.

Ví dụ: cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\Delta' > 0$. Ngược lại hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $\Delta' \leq 0$."

Phân tích đáp án:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{-x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{m}}$$

Như vậy, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m > 0$. Phủ định lại, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 11.

Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m-4}{x^2+2(m-2)x+m^2-4}$ có đúng một đường tiệm cận và đó là tiệm cận ngang.

A. $m>2$ **B.** $m\le 2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m>2 \end{array}\right.$

Giải:

Với dạng toán này, học sinh nhận thấy đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang. Và nói rằng để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang thì $x^2+2(m-2)x+m^2-4=0$ vô nghiệm hay $\Delta'=(m-2)^2-(m^2-4)<0 \Leftrightarrow m>2$. Học sinh sẽ chọn đáp án A.

Phân tích sai lầm: Học sinh đã xét thiếu trường hợp. Nếu $x^2-2mx+m-4=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 và $x^2+2(m-2)x+m^2-4=0$ cũng có hai nghiệm x_1,x_2 thì giá trị của m tìm được trong trường hợp này vẫn xảy ta. Hay nói cách khác $\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2m}{2(m-2)}=\dfrac{m-4}{m^2-4}$. Với hệ này ta giải được $m=1$. Khi đó với $m=1$ ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x-3}$ có tiệm cận ngang là $y=1$. Do đó thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nguyên nhân dẫn đến sai lầm cũng có thể là không hiểu rõ bản chất của vấn đề.

Câu 12.

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left(m^2-2m\right)x^3+mx^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<0$ **B.** $1<m\le 3$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m\ge 3\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 3\end{array}\right.$

Giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\left(m^2-2m\right)x^2+2mx+3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3\left(m^2-2m\right)\le 0\\m^2-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-6m\le 0\\m^2-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m\ge 3\end{array}\right.$$

Đến đây, học sinh sẽ chọn đáp án C.

Phân tích sai lầm: Học sinh quên xét trường hợp $m^2-2m=0$. Đối với bài toán tìm m để hàm số đơn điệu của hàm bậc ba, hay trùng phương. Nếu hệ số bậc cao nhất có chứ tham số thì phải xét trường hợp hệ số đó bằng 0 trước xem có thỏa mãn yêu cầu bài toán hay không? Lỗi sai này rất hay gặp, học sinh hay quên. Như vậy, để làm đúng dạng toán này. Trường hợp đầu tiên, ta thấy hệ số bậc cao nhất chứa tham số thì xét trường hợp đó đầu tiên.

Lời giải đúng:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\left(m^2-2m\right)x^2+2mx+3$.

TH1: Nếu $m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Xét $m=0$ thì $y'=3>0$ (nhận, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$)

Xét $m=2$ thì $y'=4x+3$ (loại, vì $y'>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}$, không phải đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Xét $m^2-2m \neq 0$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3\left(m^2-2m\right) \leq 0 \\ m^2-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2-6m \leq 0 \\ m^2-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Kết hợp 2 trường hợp được đáp án D.

Câu 13.

Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $d: y=-x+m$ là A, B. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để OAB là một tam giác thỏa mãn $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ **B.** $m=2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ **D.** $m=3$

Phân tích lời giải: Đối với dạng toán này, chắc hẳn nhiều học sinh nghĩ đến tương giao của hai đồ thị hàm số. Như vậy, công việc đầu tiên là phương trình hoành độ giao điểm, sau đó thu gọn sẽ được một phương trình ẩn x tham số m. Với bài trên thì đó chính là phương trình bậc hai ẩn x tham số m. Chắc hẳn, nhiều bạn nghĩ đến dùng vi-et, nếu không dùng được thì sẽ không làm được bài này và bỏ cuộc. Bài toán này có mẹo giải là phải kết hợp với phương trình bậc hai để thu gọn biểu thức. Từ đó tìm được tham số m (kết hợp với giả thiết).

Giải:

Sai lầm thường gặp:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\frac{x-2}{x-1}=-x+m\left(x\neq 1\right)\Leftrightarrow x^2-mx+m-2=0,\left(x\neq 1\right).(1)$$

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4\left(m-2\right)>0\\1-m+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-4m+8>0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$$

Gọi $A\left(x_1;-x_1+m\right),B\left(x_2,-x_2+m\right)$.

$$OA=\sqrt{x_1^2+\left(-x_1+m\right)^2}=\sqrt{2x_1^2-2mx_1+m^2}$$

Do x_1 là nghiệm của (1) nên

$$x_1^2-mx_1+m-2=0\Leftrightarrow 2x_1^2-2mx_1=4-2m$$

(đây chính là mẹo mà đã nói ở trên)

Khi đó $OA=\sqrt{m^2-2m+4}$.

$$OB=\sqrt{x_2^2+\left(-x_2+m\right)^2}=\sqrt{2x_2^2-2mx_2+m^2}=\sqrt{m^2-2m+4}$$

Khi đó, theo giả thiết có

$$\frac{2}{\sqrt{m^2-2m+4}}=1\Leftrightarrow m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$$

Đến đây học sinh so sánh với điều kiện thì sẽ chọn đáp án A. Đây là đáp án sai. Tại sao học sinh lại sai câu này.

Phân tích sai lầm: Học sinh đọc đề bài không kĩ và khi làm ra giá trị của tham số m thì kết luận liền. Với câu này, đánh vào khả năng đọc đề và nhận thức của học sinh. Đề bài yêu cầu "***OAB là tam giác***". Như vậy điểm O không thuộc và đường thẳng d hay $m \neq 0$. Suy ra loại đáp án $m = 0$. Và chọn B. Sai lầm của học sinh là đọc đề học kĩ, đọc lượt và giải ra kết quả rồi quên thử lại.

Lời giải đúng:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\frac{x-2}{x-1} = -x + m, (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 2 = 0, (x \neq 1). (1)$$

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m-2) > 0 \\ 1 - m + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác OAB là tam giác nên $O \notin d$ hay $m \neq 0$.

Gọi $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2, -x_2 + m)$.

$$OA = \sqrt{x_1^2 + (-x_1 + m)^2} = \sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + m^2}$$

Do x_1 là nghiệm của (1) nên

$$x_1^2 - mx_1 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 2mx_1 = 4 - 2m$$

Khi đó $OA = \sqrt{m^2 - 2m + 4}$.

$$OB = \sqrt{x_2^2 + (-x_2 + m)^2} = \sqrt{2x_2^2 - 2mx_2 + m^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 4}$$

Theo giả thiết có

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 - 2m + 4}} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện được $m=2$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 14.

Số nghiệm của phương trình của phương trình sau

$$\log_2\left(x^2-1\right)=\log_2\left(x+1\right)^2+\frac{1}{2}\log_2\left(x-2\right)^2.$$

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Giải:

Sai lầm thường gặp:

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \left(x-2\right)^2>0 \\ \left(x+1\right)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x\neq 2 \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(x^2-1\right)=\log_2\left(x+1\right)^2+\log_2\left(x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=\log_2\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=\left(x+1\right)^2\left(x-2\right) \Leftrightarrow x-1=\left(x+1\right)\left(x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x=1+\sqrt{2}$. Chọn đáp án C.

Phân tích sai lầm: Học sinh đã áp dụng công thức $\log_a b^k = k\log_a b$ một cách tự nhiên mà không để ý đến điều kiện của *b, k*. Nguyên nhân sai lầm: Học sinh ngộ nhận công thức. Trong sách giáo khoa phát biểu: "Cho $0<a\neq 1,\ b>0$. Khi đó $\log_a b^k = k\log_a b, k\in\mathbb{R}$". Chính vì nguyên nhân này mà học sinh áp dụng công thức mà không để ý đến điều kiện.

Lời giải đúng:

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ (x-2)^2>0 \\ (x+1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x\neq 2 \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(x^2-1\right)=\log_2(x+1)^2+\log_2|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=\log_2(x+1)^2|x-2|$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=(x+1)^2|x-2| \Leftrightarrow x-1=(x+1)|x-2| \text{ (1)}$$

- Xét $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x-1=(x+1)(x-2) \Leftrightarrow x^2-2x-1=0$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}\,(x>2).$$

- Xét $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x-1=(x+1)(2-x) \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm.

Câu 15.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=7$.

A. Đường thẳng **B.** Elip

C. Đường tròn **D.** Hình tròn

Giải:

Đây là một câu dễ, tuy nhiên lại làm cho học sinh lúng túng trong việc chọn đáp án. Nguyên nhân chính là không nắm vững kiến thức, định nghĩa về đường tròn, hình tròn. Để phân biệt hai định nghĩa này, sau đây nhắc lại một chút về định nghĩa đường tròn, hình tròn. Nhắc lại các khái niệm này:

"Đường tròn: Đường tròn tâm I bán kính là $R>0$ là hình gồm những điểm cách đều điểm I một khoảng bằng R. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Hình tròn: Hình tròn là tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên đường tròn hay là tập hợp những điểm cách tâm một khoảng nhỏ hơn hoặc bằng bán kính. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hình tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$."

Giả sử $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó,

$|x-2+(y+3)i|=7\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=49$.

Như vậy, với lý thuyết này ta sẽ chọn đáp án C.

Lưu ý: *Cần phân biệt rõ đường tròn và hình tròn để tránh sai sót và mất điểm không đáng những câu như thế này.*

Câu 16.

Để tìm cực trị của hàm số $y=4x^5-5x^3$, một học sinh lập luận ba bước sau:

Bước 1: Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có

$f'(x)=20x^3(x-1), f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bước 2: Đạo hàm cấp 2 $f''(x)=20x^2(4x-3)$.

Suy ra $f''(0)=0, f''(1)=20>0$.

Bước 3: Từ các kết quả trên ta kết luận:

- Hàm số không có cực trị tại điểm $x=0$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

Vậy hàm số có một điểm cực tiểu và đạt tại $x=1$.

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Lời giải đúng **B.** Sai ở bước 1

C. Sai ở bước 2 **D.** Sai ở bước 3

Giải:

Bài này cũng có nhiều học sinh làm sai. Đặc biệt đó cũng là cách làm của một số học sinh và cho rằng bài toán này hoàn toàn đúng và chọn đáp án A.

Phân tích sai lầm: Sai lầm về mặt luận cứ: Do áp dụng sai định lý. Tức là học sinh đã ngộ nhận định lý sau có hai chiều:

"Giả sử tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b)$ chứa trong tập xác định của hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ và có đạo hàm cấp hai tại x_0. Khi đó

- Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

- Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$".

Như vậy, với định lý này chỉ đúng khi $f''(x_0)\neq 0$. Còn $f''(x_0)=0$ thì không thể kết luận được x_0 có phải là điểm cực trị hay không mà phải lập bảng biến thiên.

Câu 17. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề minh họa THPT Quốc gia – lần 1***

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	$\Vert$	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và nhỏ nhất bằng -1

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

<u>Giải:</u>

Với câu này, chắc không hẳn nhiều học sinh sẽ chọn đáp án A. Học sinh sẽ loại dần đáp án B, C, D và cuối cùng chọn đáp án A.

Phân tích sai lầm: Học sinh nhìn vào bảng biến thiên, thấy tại $x=0$, y' không xác định. Mặc định cho rằng hàm số sẽ không đạt cực trị tại điểm đó. Tại điểm $x=1$, $y'(1)=0$ nên hàm số đạt cực trị tại $x=1$. Từ đó loại đi đáp án D. Chọn ngay đáp án A. Để không nhầm lẫn, cần nhớ nhanh như sau:

"$y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ đổi dấu tại x_0"

Phân tích từng câu:

A sai vì hàm số có hai điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 khi $x=1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 18.

Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $m>1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$ **C.** $m<1$ **D.** $m<0$

Giải:

Sai lầm đầu tiên ở câu 5. Bây giờ, giả sử học sinh biết đổi biến đúng.

Sai lầm thường gặp

Đặt $t=\cot x, t\in(0;1)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{t-1}{mt-1}$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(mt-1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$$y'<0,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\ \dfrac{1}{m}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ \left[\begin{array}{l}m<0\\ 0<m\le 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m<1\\ m<0\end{array}\right..$$

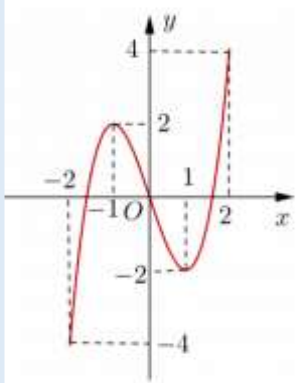
Chọn đáp án B.

Phân tích sai lầm: Xét thiếu trường hợp $m=0$. Khi đặt điều kiện cho mẫu, nghĩa là $mt-1\ne 0$ mà học sinh tương đương với $t\ne\dfrac{1}{m}$ mà chưa biết m đã khác 0 hay chưa?

Cách giải đúng (Ở phía sau).

Câu 19. ***Đề minh họa THPT Quốc gia – Lần 2***

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x=-2$

B. $x=-1$

C. $x=1$

D. $x=2$

Phân tích sai lầm: Học sinh nhìn vào đồ thị thấy hàm số đạt cực đại tại đỉnh của đồ thị hàm số. Nhưng lại chiếu qua trục tung và nói hàm số đạt cực đại tại $x=2$, trong khi đó, ta phải chiếu xuống trục hoành được $x=-1$. Những câu cho điểm trong đề thi THPT Quốc gia, học sinh cần phải thận trong, đừng hấp tấp như câu này dẫn đến mất điểm.

Câu 20. ***Đề minh họa THPT Quốc gia – Lần 2***

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y=\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$$

A. $x=-3$ và $x=-2$ **B.** $x=-3$

C. $x=3$ và $x=2$ **D.** $x=3$

Giải:

Sai lầm thường gặp:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Học sinh kết luận ngay, đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=3$. Chọn đáp án C.

Phân tích sai lầm: Học sinh ngộ nhận các nghiệm của mẫu bằng 0 đều là các tiệm cận đứng mà không hiểu đến định nghĩa của tiệm cận đứng. Hay học sinh ám ảnh cái câu: *"Muốn tìm tiệm cận đứng, ta giải phương trình mẫu bằng 0 và ngộ nhận luôn như vậy mà không kiểm tra lại"*. Nhắc lại định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$:

"Đường thẳng $x=a$ được gọi là đường tiệm cận đứng (tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$(1)\ \lim\limits_{x\to a^+} y = +\infty$ $(2)\ \lim\limits_{x\to a^+} y = -\infty$

$(3)\ \lim\limits_{x\to a^-} y = +\infty$ $(4)\ \lim\limits_{x\to a^-} y = -\infty$ "

Như vậy, khi giải phương trình mẫu bằng 0, ta cần kiểm tra lại xem nó có đúng là tiệm cận đứng hay không bằng định nghĩa đã nói trên.

Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

X	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
			2		$\|$		3		
Y		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-1\ \|\ -1$				2

Hàm số có bao điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

<u>Giải:</u>

Với câu này, nhiều học sinh chọn các đáp án A, B, C.

<u>Phân tích sai lầm:</u>

Sai lầm thứ nhất, học sinh chọn đáp án A vì nghĩ hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm 1$ nên xem nó là một cực trị và chọn đáp án A.

Sai lầm thứ hai, học sinh chọn đáp án C vì thấy y' đổi dấu qua $x = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và có thêm 2 cực trị khác là $x = \pm 1$. Nhắc lại định nghĩa điểm cực trị:

“Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\mathbb{K}$ và điểm $x_0 \in \mathbb{K}$.

Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.”

Như vậy, với định nghĩa trên thì hàm số $y = f(x)$ phải xác định và liên tục tại điểm x_0. Khi nhìn vào bảng biến thiên thì thấy $x = 0$ là điểm làm cho hàm số không xác định và cũng không liên tục. Vậy $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Hàm số chỉ có hai điểm cực trị là $x = \pm 1$. Chọn B.

Câu 22.

Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}$. Đồ thị hàm số có tổng cộng bao nhiên tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải:

Học sinh 1.

Ta có $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $x \neq \pm 1$ thì $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}.(x+1)}$.

Kết luận đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng $x = \pm 1$.

Do bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$. Vậy đồ thị có tổng cộng ba tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Chọn C.

Học sinh 2

Điều kiện xác định $x>1$. Khi đó,

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)}.$$

Hàm số suy biến tại $x=1$ nên không có tiệm cận đứng $x=1$. Do $x=-1$ không thuộc tập xác định nên $x=-1$ không phải là tiệm cận đứng.

Bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên có tiệm cận ngang là $y=0$. Chọn A.

<u>Phân tích sai lầm:</u>

Với cách giải của học sinh 1, sai lầm ở chỗ, học sinh 1 quên đặt điều kiện xác định để hàm số có nghĩa. Chính vì vậy, học sinh đã không trả lời được đường thẳng $x=-1$ có phải là tiệm cận đứng hay không? Như vậy, nếu đặt điều kiện xác định cho hàm số thì sẽ kiểm tra được rằng giới hạn (từ định nghĩa tiệm cận đứng) có tồn tại hay không?

Với cách giải của học sinh thứ 2, học sinh dùng máy tính để tính giới hạn của hàm số khi x tiến về 1. Khi bấm máy tính, chẳng hạn nhập $x=1{,}0000001$ (ở đây không nhập $x=0{,}99999$ điều kiện xác định của hàm số là $x>1$ nên chỉ tồn tại $x\to 1^+$) thì thấy giá trị của y chỉ là một con số không đủ lớn để học sinh có thể kết luận rằng $y\to\infty$. Do đó học sinh loại đi đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng.

Dẫn đến chọn đáp án A. Chắc hẳn cũng có học sinh bấm $x = 0,99999$ để kiểm tra.

Lời giải đúng

Tập xác định $D = (1;+\infty)$.

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)} = +\infty.$$

Suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = 0$. Suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Câu 23. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán Học và Tuổi trẻ - Lần 8***

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2+x+m^2}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ là:

A. $\varnothing$ **B.** $\{\varnothing\}$ **C.** $\{2\}$ **D.** $\{\pm 2\}$

Giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y = x + \frac{m^2}{x+1}$, $y' = 1 - \frac{m^2}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Đến đây, nhiều học sinh chọn ngay đáp án D.

Phân tích sai lầm: Sai về mặt lập lập luận: "*Hàm số đạt cực trị tại* $x = x_0$ *thì* $f'(x_0)$". Ở đây, chỉ có chiều suy ra không có chiều ngược lại. Do đó ở bước lí luận phải dùng dấu suy ra. Sau khi giải xong thì thử lại xem có thỏa mãn hay không?

Sửa lại: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

$\Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Bây giờ, thử lại

Với $m = -2$, ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$. Dùng máy tính casio kiểm tra xem $x = 1$ có phải là điểm cực đại.

Nhập $\dfrac{d}{dx}\left(1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}\right)_{x=1}$. Nếu lớn hơn 0 thì loại, nhỏ hơn không thì nhận.

Với $m = -2$ thì loại. Học sinh lại chọn đáp án C.

Phân tích sai lầm: Học sinh thường hay nghĩ rằng, bài toán tìm tham số *m* luôn luôn tồn tại giá trị *m*, khi có hai giá trị như trên. Nếu cái này không tồn tại thì giá trị còn lại tồn tại. Cứ như thế, không chịu kiểm tra hết lại các giá trị.

Với $m = 2$, $y' = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$, giống với trường hợp $m = -2$

Như vậy, với $m = 2$ cũng không thỏa mãn.

Đến đây thì học sinh lại phân vân không biết chọn đáp án nào? A hay B? Học sinh thấy các đáp án C, D đều có ngoặc nhọn nên nghĩ đáp án đúng là $\{\varnothing\}$. Vậy chọn B.

Phân tích sai lầm: Học sinh không phân biệt được rõ tập hợp. Ở đây, tập hợp các giá trị của m là tập rỗng và kí hiệu là $\varnothing$ nên không chọn đáp án A. Còn đáp án B, kí hiệu $\{\varnothing\}$ là tập hợp chứa phân tử rỗng.

PHẦN 2: TỔNG HỢP CÂU HỎI NÂNG CAO

Chuyên đề 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Câu 1.

Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$?

A. $m>-3$

B. $\left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$

C. $m<-3$

D. $\left[\begin{array}{l} -3<m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$

Giải:

Cách 1: Hàm số xác định khi $\cos x\ne \dfrac{m}{2}$.

$$y'=\frac{-2\sin x\left(2\cos x-m\right)-\left(2\cos x+3\right)\left(-2\sin x\right)}{\left(2\cos x-m\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(m+3\right)\sin x}{\left(2\cos x-m\right)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow m < -3$$

(do $m < -3$ nên $2\cos x - m = 0$ vô nghiệm)

Cách 2: Đặt $t = \cos x, t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \dfrac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{-2(m+3)}{(2t-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Câu 2. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 2***

Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 1}{m\cot x - 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $m > 1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 0 < m < 1 \end{array}\right.$ **C.** $m < 1$ **D.** $m < 0$

Giải:

Cách 1: Ta có: $y' = \dfrac{(1+\cot^2 x)(1-m)}{(m\cot x - 1)^2}$

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$y'>0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m\cot x-1\neq 0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\\1-m>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\tan x,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)(1)\\m<1\end{cases}$$

Giải điều kiện (1). Xét hàm số $f(x)=\tan x,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Dễ thấy hàm *f* đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ nên điều kiện (1) tương đương với $m\le f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Vậy $m<1$.

Cách 2: Đặt $t=\cot x,t\in(0;1)$. Khi đó bài toán trở thành tìm *m* để hàm số $y=\frac{t-1}{mt-1}$ nghịch biến trên $(0;1)$.

TH1: Nếu $m=0$ thì $y=1-t$, hiển nhiên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

TH2: Nếu $m\neq 0$

Ta có $y'=\frac{m-1}{(mt-1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \dfrac{1}{m} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ 0<m\le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<1 \\ m<0 \end{array}\right. .$$

Vậy $m<1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3.

Biết các hàm số $y=f(x)$ và $y=\dfrac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} f(x)>-1+3\sqrt{2} \\ f(x)<-1-3\sqrt{2} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} f(x)>-5+\sqrt{26} \\ f(x)<-5+\sqrt{26} \end{array}\right.$

C. $-5-\sqrt{26} \le f(x) \le -5+\sqrt{26}$

D. $-1-3\sqrt{2} \le f(x) \le -1+3\sqrt{2}$

Phân tích lời giải: Đây là dạng toán tìm mệnh đề đúng. Thông thường các câu hỏi khác, chúng ta đi phân tích từng mệnh đề xem mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai. Đối với bài này thì khác, chúng ta không thể loại đáp án trực tiếp từ các đáp án được mà phải biến đổi trực tiếp từ các hàm đã cho. Sau đó áp dụng giả thiết để có điều cần mong muốn. Chúng ta đã có công cụ đạo hàm để để giải các bài toán hàm số đồng biến, nghịch biến mà không cần dùng đến định nghĩa nữa. Như vậy,

Bước 1: Tính $f'(x)$ và

$$y' = \left(\frac{f(x)+5}{f^2(x)+1} \right)' = \ldots = \frac{f'(x)\left[-f^2(x)-10f(x)+1\right]}{\left[f^2(x)+1\right]^2}$$

Bước 2: Do hàm số $y = f(x)$ và $y = \dfrac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$ đồng biến nên có được điều gì?

Bước 3: Giải điều đó sẽ biết được mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai.

Giải:

Ta có $y' = \dfrac{f'(x)\left[f^2(x)+1\right]-2f'(x)f(x)\left[f(x)+5\right]}{\left[f^2(x)+1\right]^2}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)\left[-f^2(x)-10f(x)+1\right]}{\left[f^2(x)+1\right]^2}$

Để hai hàm số cùng đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$-f^2(x)-10f(x)+1 \geq 0 \Leftrightarrow -5-\sqrt{26} \leq f(x) \leq -5+\sqrt{26}$

Lưu ý: *Thuật toán dạng này, còn được áp dụng cho những bài sau nữa, mời bạn đọc.*

Câu 4. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1***

Dynano là một nhà ảo thuật gia đại tài người Anh nhưng người ta thường nói Dynano làm ma thuật chứ không phải làm ảo thuật. Bất kì màn trình diễn nào của anh chàng trẻ tuổi tài cao này đều khiến người xem há hốc miệng kinh ngạc vì nó vượt qua giới hạn của khoa học. Một lần đến NewYork anh ngẫu hứng trình diễn khả năng bay lơ lửng trong không trung của mình bằng cách di chuyển từ tòa nhà này đến toàn nhà khác và trong quá trình di chuyển đấy có một lần anh đáp đất tại một điểm trong khoảng cách giữa hai tòa nhà (biết mọi di chuyển của anh đều là đường thẳng). Biết tòa nhà ban đầu Dynano đứng có chiều cao là a (m), tòa nhà sau đó Dynano đến có chiều cao là b (m) $\left(a < b\right)$ và khoảng cách giữa hai tòa nhà là c (m).Vị trí đáp đất cách cách tòa nhà thứ nhất một đoạn là x (m). Hỏi x bằng bao nhiêu để quãng đường di chuyển của Dynano là bé nhất.

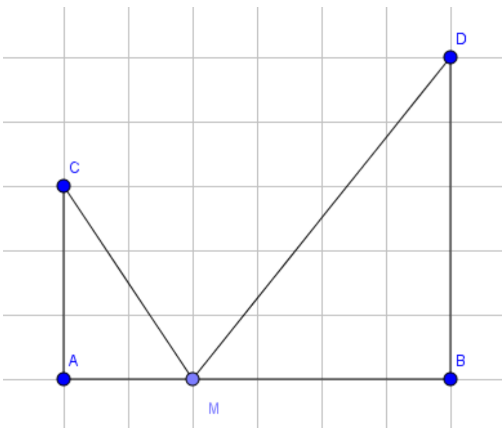
A. $x = \dfrac{3ac}{a+b}$

B. $x = \dfrac{ac}{3\left(a+b\right)}$

C. $x = \dfrac{ac}{a+b}$

D. $x = \dfrac{ac}{2\left(a+b\right)}$

Giải:



Giả sử có mô hình bài toán như trên,

Cách 1: ***Dùng kiến thức "Ứng dụng giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số"***. Như vậy, ứng với cách này ta cần phải xác định được một hàm số và tập xác định của nó.

$AB = c; AC = a; BD = b; AM = x$

Khi đó

$CM = \sqrt{a^2 + x^2}; MD = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}$

Khi đó ta có $T = MC + MD = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}$

Với $0 < x < c$, xét hàm số

$T(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}$.

$$T'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}}.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 2cx + b^2 + c^2} = (c - x)\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left((x - c)^2 + b^2\right) = (c - x)^2 (x^2 + a^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 = a^2(x - c)^2 \Leftrightarrow bx = a(c - x) \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a + b}$$

Lập bảng biến thiên ta có ngay $T(x)_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b}$.

Cách 2: ***Dùng kiến thức hình học để giải***.

Gọi D' là điểm đối xứng của D qua AB.

Khi đó $MC + MD = MC + MD' \geq CD'$.

Do đó $(MC + MD)_{\min} = CD'$.

Dấu "=" xảy ra khi $M \in CD'$.

Khi đó, áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{x}{c - x} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a + b}$

Câu 5. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1***

Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x), y=\dfrac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng.

A. $f(1)\le -\dfrac{11}{4}$ **B.** $f(1)<-\dfrac{11}{4}$

C. $f(1)>-\dfrac{11}{4}$ **D.** $f(1)\ge -\dfrac{11}{4}$

Giải:

Phân tích lời giải: Xuất phát từ giả thiết: "Cho các hàm số và hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$. Như vậy, chúng ta cần phải nhớ hệ số góc tiếp tuyến của một đường cong tại điểm $M(x_0,y_0)$ chính là đạo hàm của hàm số tại điểm x_0. Không còn các nào khác là phải làm bước này đầu tiên và theo giả thiết thì ba hệ só góc này bằng nhau nên ta có:

$$f'(1)=g'(1)=\frac{f'(1)\left[g(1)+1\right]-g'(1)\left[f(1)+3\right]}{\left[g(1)+1\right]^2}$$

Do $f'(1)=g'(1)\ne 0$ nên điều trên tương đương với:

$$1=\frac{g(1)+f(1)-2}{\left[g(1)+1\right]^2}\Leftrightarrow\left[g(1)+1\right]^2=g(1)-f(1)-2$$

Ở các đáp án, thấy bất đẳng thức đều chứa $f(1)$ không hề có $g(1)$. Chứng tỏ rằng, ta phải đánh giá $f(1)$ thông $g(1)$.

$$f(1)=-g^2(1)-g(1)-3=-\left[g(1)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{11}{4}\le-\frac{11}{4}$$

Như vậy, chọn ngay được đáp án **A.**

Lưu ý: *Học sinh cần phải nhớ làm sao để đưa tam thức bậc hai về dạng $a(x-x_0)^2+b$ để dễ dàng đánh giá bất đẳng thức. Ngoài ra, nếu nhớ đến hàm số parabol $y=ax^2+bx+c$ thì ta có thể làm nhanh như sau:*

- *Nếu $a>0$ thì hàm số đạt GTNN là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$*
- *Nếu $a<0$ thì hàm số đạt GTLN là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$*

Câu 6. *Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8*

Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc là m. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là:

A. 0 **B.** $\pm\frac{1}{2}$ **C.** $\varnothing$ **D.** ±1

Phân tích đề bài: Khi đọc đề xuất hiện các điểm cực tiểu và cực đại thì giải liền phương trình $y'=0$ (do đây là hàm trùng phương). Kết hợp với hình dáng đồ thị để xác định nhanh điểm cực tiểu và cực đại. Sau đó nhớ tới khoảng cách từ một điểm tới một đường trong mặt phẳng hệ trục tọa độ *Oxy*. Kết hợp với một số bất đẳng thức đã học trong phổ thông kết hợp để giải.

Giải:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0;0) \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(1;-1) \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(-1;-1) \end{array}\right.$$

Do $a = 1 > 0$ nên ta nhận thấy A là điểm cực đại và điểm *B, C* là điểm cực tiểu.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm cực đại và có hệ số góc m là $\Delta : y - mx = 0$

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm *B* và *C* tới Δ

Ta có:

$$d_1 + d_2 = \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{\frac{(m-1)^2}{m^2+1}} + \sqrt{\frac{(m+1)^2}{m^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow d_1 + d_2 = \sqrt{1 + \frac{-2m}{m^2+1}} + \sqrt{1 + \frac{2m}{m^2+1}} \ge \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left(1 + \frac{-2m}{m^2+1}\right)\left(1 + \frac{2m}{m^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4m^2}{(m^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = (m^2+1)^2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy chọn đáp án D.

Một cách khác:

Từ $d = d_1 + d_2$, bình phương hai vế được:

$$d^2=\frac{(m-1)^2}{m^2+1}+\frac{(m+1)^2}{m^2+1}+\frac{2\left|m^2-1\right|}{m^2+1}=2+\frac{2\left|m^2-1\right|}{m^2+1}\geq 2$$

Do $\left|m^2-1\right|\geq 0$ nên $d^2\geq 2$ hay $d\geq\sqrt{2}$.

Và cũng có được dấu "=" xảy ra khi $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Lưu ý: Ngoài ra còn một cách khác nữa: dùng khảo sát hàm số để giải. Như vậy, một bài có nhiều cách giải. Vì vậy, độc giả đọc sách cần lưu ý điều này, để có thể có lựa chọn cách phù hợp cho việc giải toán của mình. Tuy nhiên với bài trên, tác giả không có nhiều thời gian để tìm hiểu nhiều cách giải khác nhau.

Câu 7. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng***

Cho *x*, *y* là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi *M*, *m* là lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị biểu thức $M+m$

A. 44 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 42

Giải:

Ta có

$$P=x^2+y^2+2xy+2(x+y)+2+8\sqrt{4-(x+y)}$$
$$=(x+y)^2+2(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}+2$$

Đặt $t=x+y$. Khi đó $P=t^2+2t+8\sqrt{4-t}$.

Mặt khác ta có

$$t=x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2}.\sqrt{y+1}\leq\sqrt{3}.\sqrt{x+y}=\sqrt{3t}$$

Do đó $\begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 \le 3t \\ t \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t \le 4 \\ 0 \le t \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le t \le 3$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2, t \in [0;3]$.

$f'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$;

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4-t}} = 0 \Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t} = 2$

$(t+1)^2(4-t) = 4 \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Ta có $f(0) = 18, f(25)$. Vậy $M = 25, m = 28$ và $M + m = 43$

Câu 8.

Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ có đồ thị (C) và $g(x) = x^3 + 3bx^2 + 9x + 5$ có đồ thị (H), với *a, b* là các tham số thực. Đồ thị $(C),(H)$ có chung ít nhất 1 điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + 2|b|$

A. $\sqrt{21}$ **B.** $2\sqrt{6} + 6$

C. $3 + 5\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{6}$

<u>Phân tích đề toán:</u> Phương trình $f'(x) = 0, g'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm chung. Do phương trình $f'(x) = 0$, $g'(x) = 0$ bậc hai nên nếu có hai nghiệm trùng nhau thì $f'(x) = kg'(x)$ với $k \in \mathbb{R}, k \ne 0$ điều này là vô lý vì hệ số tự do trong phương trình $f'(x) = 0, g'(x) = 0$ không tỉ lệ với nhau. Vậy cho hai phương trình $f'(x) = 0, g'(x) = 0$ trừ nhau giải ra được nghiệm sau đó sử dụng công thức nghiệm ở từng phương trình, sau đó tìm được liên hệ a,b thay vào P.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3 = 0 \, (1) \\ g'(x) = 3x^2 + 6bx + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x(a-b) = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{a-b}$$

Áp dụng công thức nghiệm cho phương trình *(1)*

$$x = \frac{-6a \pm \sqrt{36a^2 - 36}}{6} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

TH1: $x = -a + \sqrt{a^2 - 1}$

Ta có

$$\frac{1}{a-b} = -a + \sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow b = a + \frac{1}{a - \sqrt{a^2 - 1}} = 2a + \sqrt{a^2 - 1}$$

Từ đó $P = |a| + 2|b| = |a| + \left|4a + 2\sqrt{a^2 - 1}\right|; P \geq \left|5a + 2\sqrt{a^2 - 1}\right|$

Xét

$$f(a) = 5a + 2\sqrt{a^2 - 1}; f'(a) = 5 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{a^2 - 1} = -2a \Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{25}{21}}$$

$$\Rightarrow f\left(-\sqrt{\frac{25}{21}}\right) = -\sqrt{21} \Rightarrow P \geq \sqrt{21}$$

Tương tự với trường hợp 2 cũng sẽ ra $P \geq \sqrt{21}$

Chọn câu *A*.

Câu 9.

Gọi S là tập hợp tất các các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho nằm khác phía và các đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng các phần tử của S.

A. 6 **B.** 3 **C.** -6 **D.** 0

Phân tích lời giải: Đây là hàm số bậc ba nên nếu hàm số có hai điểm cực trị thì hai điểm cực trị đó sẽ đối xứng qua tâm của đồ thị hàm số, hay nói cách khác, hai điểm cực trị đó sẽ đối xứng qua điểm uốn của đồ thị hàm số. Như vậy, để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về khác phía so với đường thẳng thì trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị. Hay nói cách khác, yêu cầu bài toán chính là tìm tất cả các giá trị của tham số m để điểm uốn thuộc và đường thẳng $d: y=5x-9$.

Giải:

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-1$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m\in\mathbb{R}$.

$y''=2x-2m; y''=0\Leftrightarrow x=m$.

Suy ra điểm uốn $I\left(m;\frac{m^3}{3}-m\right)$.

$$I\in d\Leftrightarrow\frac{m^3}{3}-m=5m-9\Leftrightarrow m^3-18m+9=0$$

$$\Leftrightarrow(m-3)\left(m^2+3m-9\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m_1=3\\ m_2+m_3=-3\end{array}\right..$$

Vậy $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Chọn D.

Chuyên đề 2: MŨ – LOGARIT

Câu 1. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội***

Cho $f(1)=1$; $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$.

Giá trị của biểu thức $T=\log\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}$ là:

A. 4 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 9

Giải:

Cho $m=1$, ta có $f(n+1)=f(n)+f(1)+n=f(n)+n+1$.

Với $n=1$, ta có $f(2)=f(1)+2$

Với $n=2$, ta có $f(3)=f(2)+3$

…

Với $n=k$ thì $f(k)=f(k-1)+k+1$

Cộng vế theo vế ta được

$f(2)+...+f(k)=f(1)+f(2)+...+f(k-1)+2+...+(k+1)$

Suy ra $f(k)=f(1)+2+...+k=1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Vậy hàm cần tìm là $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ta có $f(96)=\dfrac{96.97}{2}=4656$; $f(69)=\dfrac{69.70}{2}=2415$.

Suy ra $T=\log\dfrac{4656-2415-241}{2}=\log 1000=3$.

Câu 2. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Hàm Rồng***

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Hãy tính giá trị biểu thức sau:

$$P=f\left(\sin^2\frac{\pi}{2016}\right)+f\left(\sin^2\frac{2\pi}{2016}\right)+...+f\left(\sin^2\frac{1008\pi}{2016}\right)$$

A. $\dfrac{1007}{2}$ **B.** $\dfrac{3025}{6}$ **C.** $\dfrac{1511}{3}$ **D.** 504

Giải:

Nhận xét: Nếu $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=1$. Thật vậy,

$$f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-b}}{4^{1-b}+2}$$

$$=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4}{4+2.4^a}=\frac{4^a+2}{4^a+2}=1.$$

Ta có $\sin^2\dfrac{\pi}{2016}+\sin^2\dfrac{1007\pi}{2016}=\sin^2\dfrac{\pi}{2016}+\cos^2\dfrac{\pi}{2016}=1$.

Suy ra $f\left(\sin^2\dfrac{\pi}{2016}\right)+f\left(\sin^2\dfrac{1007\pi}{2016}\right)=1$.

Tương tự ta có $f\left(\sin^2\dfrac{2\pi}{2016}\right)+f\left(\sin^2\dfrac{1006\pi}{2016}\right)=1$

…

$f\left(\sin^2\dfrac{503\pi}{2016}\right)+f\left(\sin^2\dfrac{505\pi}{2016}\right)=1$

Sau khi ta nhóm theo cặp xong thì còn

$$f\left(\sin^2\frac{504\pi}{2016}\right)+f\left(\sin^2\frac{1008\pi}{2016}\right)=f\left(\sin^2\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}} + 2} + \frac{4}{4+2} = \frac{7}{6}$$

Vậy $P = 503 + \frac{7}{6} = \frac{3025}{6}$

Câu 2.

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 x + 1}$. Tính tổng

$S = f\left(2^{-100}\right) + f\left(2^{-99}\right) + ... + f\left(2^{-2}\right) + f\left(2^{0}\right) + f\left(2^{1}\right) + ... + f\left(2^{98}\right)$

A. $S = 99$ **B.** $S = 100$ **C.** $S = 200$ **D.** $S = 198$

Giải:

Với dạng toán này, ta cần ghép các hai giá trị với nhau và tìm ra quy luật của bài toán.

$$f(a) + f(b) = \frac{\log_2 a}{\log_2 a + 1} + \frac{\log_2 b}{\log_2 b + 1}$$

$$= \frac{\log_2 a(\log_2 b + 1) + \log_2 b(\log_2 a + 1)}{(\log_2 a + 1)(\log_2 b + 1)}$$

$$= \frac{2\log_2 a \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b}{\log_2 a \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b + 1}$$

Như vậy, ta cần chọn *a, b* sao cho tử rút gọn được mẫu. Đối với câu 2, ta đã chọn tổng $a + b = k$. Tại sao lại như vậy? Vì $a^{m+n} = a^m.a^n$. Còn đối với bài này thì chọn $ab = k$ vì $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ (biểu thức đã cho có nghĩa).

Nếu $ab = \frac{1}{4}$ thì $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab = \log_2 \frac{1}{4} = -2$.

Suy ra $f(a)+f(b)=\dfrac{2\log_2 a\log_2 b-2}{\log_2 a\log_2 b-1}=2$.

Với bài trên thì sẽ ghép $f\left(2^{-100}\right)+f\left(2^{98}\right)$ vì $2^{-100}.2^{98}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó

$$S=\left[f\left(2^{-100}\right)+f\left(2^{98}\right)\right]+\left[f\left(2^{-99}\right)+f\left(2^{97}\right)\right]+\ldots+$$
$$+\ldots+\left[f\left(2^{-2}\right)+f\left(2^{0}\right)\right]=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{99\,so\,2}=198$$

Câu 4.

Xét các số thực *a, b* thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k\in(2;3)$ **B.** $k\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$

C. $k\in(-1;0)$ **D.** $k\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

Phân tích lời giải: Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức logarit. Như vậy, ta cố gắng biến đổi sao cho về $\log_x y$ và sau đó đổi biến, đưa về biểu thức không chứa logarit. Thông thường thì sẽ là một biểu thức một ẩn và sẽ dẫn đến xét hàm hoặc dùng những bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Cauchy hai số, ba số; bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, bất đẳng thức Bunhiacopxki...

Giải:

Ta có

$$P=\frac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}=\log_a ab+\sqrt{1-\log_a b}$$
$$=1+\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}$$

Đặt $t=\log_a b$. Khi đó $P=1+t+\sqrt{1-t}$.

Do $a\ge b>1$ nên $\log_a b\ge 1$ hay $t\ge 1$.

Xét hàm số

$$f(t)=1+t+\sqrt{1-t}, t\ge 1;\ f'(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}=\frac{2\sqrt{1-t}-1}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{1-t}-1=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}.$$

Lập bảng thiến ta được

$\max P=\frac{9}{4}\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}\Rightarrow \log_a b=\frac{3}{4}\Leftrightarrow b=a^{\frac{3}{4}}$. Chọn D.

Câu 5. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Nguyễn Đăng Đạo – Lần 2***

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_2\frac{x^2+2x+2}{3x^2+x+2}=x^2-3x-3.$$

Tính giá trị biểu thức $T=x_1^2+x_2^2$.

A. $T=15$ **B.** $T=13$ **C.** $T=\frac{25}{4}$ **D.** $T=\frac{33}{4}$

Phân tích lời giải: Đây là phương trình vừa có biểu thức logarit vừa có đa thức. Phương pháp giải có thể là đánh giá, hàm số để giải. Gần đây, phương pháp sử dụng đơn điệu của hàm số rất ưa chuộng.

Nhắc lí thuyết "phương pháp hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình":

"***Định lý 1:*** *Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và đơn điệu trên D thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc D.*

Định lý 2: *Nếu $f\left(x\right)$ liên tục, đồng biến trên D; $g\left(x\right)$ liên tục, nghịch biến (hoặc hàm hằng) trên D và ngược lại thì phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc D.*

Định lý 3: *Nếu $f'\left(x\right)=0$ có một nghiệm trên $\left(a;b\right)$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $\left(a;b\right)$. Tổng quát nếu $f^{\left(n\right)}\left(x\right)=0$ có n nghiệm phân biệt trên $\left(a;b\right)$ thì $f^{\left(n-1\right)}\left(x\right)$ có nhiều nhất $n+1$ nghiệm trên $\left(a;b\right)$.*

Định lý 4: *Nếu $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)<f\left(v\right)\Leftrightarrow u<v$. Ngược lại, nếu $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)<f\left(v\right)\Leftrightarrow u>v$ với mọi $u,v\in\left(a;b\right)$.*

Định lý 5: *Nếu $f\left(x\right)$ liên tục và đơn điệu trên D thì $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v,\forall u,v\in D$."*

Khi giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình, điều kiện rất quan trọng. Như vậy, ưu tiên đầu tiên là đặt điều kiện xác định. Nếu không sau khi giải ra sẽ không biết nghiệm nào nhận, nghiệm nào loại.

Giải:

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương với

$$\log_2\left(x^2+2x+2\right)-\log_2\left(3x^2+x+2\right)=x^2-3x-3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2\left(x^2+2x+2\right)+2\left(x^2+2x+2\right)$$

$$=\log_2\left(3x^2+x+2\right)+3x^2+x+2$$

$$\Leftrightarrow f\left(2\left(x^2+2x+2\right)\right)=f\left(3x^2+x+2\right)\left(1\right)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+t$, $t>0$. Nhận thấy hàm số này đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Khi đó

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x+2\right)=3x^2+x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vậy $T=x_1^2+x_2^2=13$.

Câu 6. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Sở Giáo Dục và Đạo tạo Hà Nội***

Cho hàm số $f\left(x\right)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}}}$. Biết rằng $f\left(1\right).f\left(2\right).f\left(3\right)...f\left(2017\right)=e^{\frac{m}{n}}$ với *m, n* là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=2018$ **B.** $m-n^2=-2018$

C. $m-n^2=1$ **D.** $m-n^2=-1$

Phân tích lời giải: Trong đề toán dữ kiện quan trọng cần xoáy vào là hàm số ban đầu. Tập trung rút gọn số mũ để xuất hiện được điều gì đó mới mẻ hơn.

Phân tích mũ của hàm số:

$$1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1+x^2}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{(x^2+x)^2}=\left(1+\frac{1}{x(x+1)}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2$$

Suy ra $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=e^{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$

Do đó

$$f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}.e^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}.e^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}...e^{1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}}=e^{\frac{m}{n}}$$

$$\Rightarrow 2018-\frac{1}{2018}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow\frac{2018^2-1}{2018}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow m-n^2=-1$$

Chọn đáp án D

Câu 7. *Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- THPT Kim Liên-Hà Nội lần 2*

Cho ba số thực $a,b,c\in\left(\frac{1}{4},1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)$.

A. 3 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** 1

Phân tích lời giải: Cần chú ý vào khoảng mà ba số thực nằm trong đó và có bất đẳng thức phụ $a-\frac{1}{4}\le a^2$.

Giải:

Ta có: Vì $a,b,c\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ nên

$$b-\frac{1}{4}\le b^2\Leftrightarrow \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\ge \log_a\left(b^2\right)=2\log_a b$$

Tương tự sẽ được

$$\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)\ge 2\log_b\left(c\right);\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)\ge 2\log_c\left(a\right)$$

Từ đó

$$P\ge 2\left(\log_a b+\log_b c+\log_c c\right)\ge 2.3\sqrt[3]{\log_a b\log_b c\log_c a}=6$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 8. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Sở Giáo dục & Đào tạo Vũng Tàu***

Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a>0,0<b<2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(2b)^a}{\left(2^a-b^a\right)^2}+\dfrac{2^a+2b^a}{2b^a}$.

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{13}{4}$ **D.** 4

Giải:

Ta có:

$$P=\frac{\left(\frac{2}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{2}{a}\right)^a-1\right)^2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{b}\right)^a+1$$

Đặt $t=\left(\frac{2}{b}\right)^a$. Khi đó $P=\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{t}{2}+1$.

Do $0<b<2$ nên $\frac{2}{b}>1\Rightarrow\left(\frac{2}{b}\right)^a>1$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{t}{2}+1, t>1$.

$f'(t)=-\frac{t+1}{(t-1)^2}+\frac{1}{2}, f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Vậy $P_{\min}=f(3)=\frac{13}{4}$.

Chuyên đề 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Câu 1.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=9$ và $\int\limits_1^9 f\left(x\right)dx=2$. Tính giá trị biểu thức $\int\limits_0^3\left[f\left(\frac{x}{3}\right)+f\left(3x\right)\right]dx$.

A. $\frac{92}{3}$ **B.** -4 **C.** 9 **D.** -9

Giải:

Dễ thấy $\int\limits_0^9 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+\int\limits_1^9 f\left(x\right)dx=9+2=11$.

Nhận xét như sau: $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_a^b f\left(u\right)du=...$

Ta có

$$I=\int\limits_0^3\left[f\left(\frac{x}{3}\right)+f\left(3x\right)\right]dx=\int\limits_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx+\int\limits_0^3 f\left(3x\right)dx=I_1+I_2$$

Tính I_1:

Đặt $t=\frac{x}{3}\Rightarrow dx=3dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I_1=3\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt=27$.

Tính I_2:

Đặt $t=3x\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=3\Rightarrow t=9$.

Khi đó $I_2 = \frac{1}{3}\int_0^9 f(t)dt = \frac{11}{3}$. Vậy $I = \frac{92}{3}$

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^4 f(x)dx = 4$, $\int_2^3 f(x)dx = 2$.

Khi đó giá trị của tổng $\int_0^2 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** -2 **D.** 6

Giải:

Phân tích lời giải: Nhìn thấy ở đề bài và yêu cầu của bài toán thì thấy có các cận , 0, 2, 3, 4. Như vậy, nghĩ đến công thức chèn cận $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$. Ở đây, ta chèn bao nhiêu cận cũng được, tùy vào bài toán.

Ta có $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$

Suy ra

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 4 - 2 = 2$$

Câu 3.

Cho biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số $f(x)$ nằm dưới trục hoành. Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ nằm phía trên trục hoành. Cho biết $5b^2=36ac$. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

A. 2 **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^4+bx^2+c=0$.

Để phương trình có bốn nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-4ac>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases}$

Ta có $\Delta=b^2-4ac=b^2-\dfrac{5b^2}{9}=\dfrac{4b^2}{9}>0,\forall b\neq 0$

Khi đó, gọi x_1,x_2,x_3,x_3 lần lượt là bốn nghiệm của phương trình $y=0$ và $x_1<x_2<x_3<x_3$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a>0$.

Khi đó, $x^2=\dfrac{-b+\dfrac{2}{3}b}{2a}=-\dfrac{b}{6a}$; $x^2=\dfrac{-b-\dfrac{2}{3}b}{2a}=-\dfrac{5b}{6a}\left(b<0\right)$

Suy ra $x_1=-\sqrt{-\dfrac{5b}{a}},x_2=-\sqrt{-\dfrac{b}{6a}};x_3=\sqrt{-\dfrac{b}{6a}};x_4=\sqrt{-\dfrac{5b}{6a}}$

Do đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ đối xứng qua trục tung nên ta có

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_{x_3}^{x_4}\left|f\left(x\right)\right|dx=-2\int_{x_3}^{x_4}f\left(x\right)dx=-2\int_{x_3}^{x_4}\left(ax^4+bx^2+c\right)dx$$

$$=\frac{2ax_3^5}{5}+\frac{2b^3x_3^3}{3}+2cx_3-\frac{2ax_4^5}{5}-\frac{2b^3x_4^3}{3}-2cx_4$$

$$S_2=\int_{x_2}^{x_3}\left|f\left(x\right)\right|dx=2\int_0^{x_3}f\left(x\right)dx=2\int_0^{x_3}\left(ax^4+bx^2+c\right)dx$$

$$=\frac{2ax_3^5}{5}+\frac{2b^3x_3^3}{3}+2cx_3$$

Suy ra $S_2-S_1=\dfrac{2ax_4^5}{5}+\dfrac{2b^3x_4^3}{3}+2cx_4$

$$=\frac{2a}{5}.\frac{25b^2}{36a^2}.\sqrt{-\frac{5b}{6a}}+\frac{2b}{3}.\left(-\frac{5b}{6a}\right)\sqrt{-\frac{5b}{6a}}+2c.\sqrt{-\frac{5b}{6a}}$$

$$=2\sqrt{-\frac{5b}{6a}}\left(\frac{5b^2}{36a}-\frac{5b^2}{18a}+c\right)=2\sqrt{-\frac{5b}{6a}}.\frac{-5b^2+36ac}{36a}=0$$

Vậy $S_1=S_2$ hay $\dfrac{S_1}{S_2}=1$.

<u>Hướng giải khác:</u> Do đề bài đúng với mọi a,b,c thỏa mãn điều kiện như đề bài nên chỉ cần chọn *a, b, c* đơn giản. Sau đó giải bì toán trên trường hợp đơn giải đó.Ví dụ:

Chọn $a=1;b=-6;c=5$. Ta có $5b^2=36ac$.

$y=x^4-6x+5$; $y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Khi đó

$$S_1=\int_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|dx=\frac{44}{7};\ S_2=\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_1^{\sqrt{5}}\left|f\left(x\right)\right|dx=\frac{44}{7}$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=1$.

Câu 4. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Hàm Rồng***

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, biết thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 1)$ là một hình chữ nhật có độ dài lần lượt là x và $\ln(x^2+1)$.

A. $V = \dfrac{\ln 2 - 1}{2}$ **B.** $V = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

C. $V = \dfrac{1}{2}\ln 2 - 1$ **D.** $V = \ln 2 - 1$

Giải:

Lưu ý: Thể tích vật thể đối với những dạng toán như thế này là: $V = \int_a^b S(x)dx$.

Ta có diện tích hình chữ nhật $S(x) = x\ln(x^2+1)$.

Vậy $V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 x\ln(x^2+1)dx = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

Rất nhiều học sinh không biết đến công thức này hoặc là nhớ nhầm sang công thức khác.

Câu 5. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Hàm Rồng***

Trong trung tâm công viên có một khuôn viên hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m, đồ dài trục nhỏ bằng 10m. Giữa khuôn viên là một cái đài phun nước hình tròn có đường kính bằng 8m, phần còn lại của khuôn viên người ta thả cá. Số cá thả vào khuôn viên đó gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng mật độ thả cá là 5 con trên 1m² mặt nước.

A. 378 **B.** 375 **C.** 377 **D.** 376

Phân tích lời giải: Bài toán yêu cầu thả bao nhiêu còn cá vào khuôn viên thỏa mãn mật độ 5 con trên 1m² mà khuôn viên nước là hình elip. Từ trước tới giờ chưa hề học công thức tính diện tích của hình elip nên ta nghĩ đến ứng dụng tích phân trong tính diện tích hình phẳng. Như vậy phải lập phương trình elip. Nhắc lại kiến thức viết phương trình elip.

Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Trong đó 2$a$, 2$b$ lần lượt là độ dài trục lớn, trục bé. Nhận dạng elip nếu đề cho $MF_1+MF_2=2a$ với $F_1\left(-c;0\right),F_2\left(c;0\right)$ thì tập hợp điểm M là elip thỏa mãn $F_1F_2=2c$ và $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Với bài toán này thì diện tích phần còn lại để thả cá là $S_c=S_e-S_t$, trong đó S_e là diện tích hình elip, S_t là diện tích hình tròn ở giữa. Như vậy, tính số cá bằng $5S_c$ là xong.

Giải:

Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. Do trục tung và trục hoành chia elip thành bốn phần bằng nhau nên ta chỉ cần tính cái phần ở góc phần tư thứ nhất rồi nhân bốn lên là xong.

$$S_e=4\int_0^8\sqrt{5^2.\left(1-\frac{x^2}{8^2}\right)}dx=\frac{5}{2}\int_0^8\sqrt{8^2-x^2}dx.$$

Đặt $x=8\sin t\Rightarrow dx=8\cos tdt$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0, x=8 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó

$$S_e=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{8^2-8^2\sin^2 t}.8\cos t dt=160\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$$

$$=80\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=40\pi$$

Diện tích hình tròn có đường kính bằng 8m là: $S_t=16\pi$.

Suy ra $S_c=S_e-S_t=24\pi$ và số cá bằng $24\pi.5\approx 377$ (con).

Lưu ý: *Công thức tính diện tích của hình elip khi biết độ dài trục lớn $2a$ và độ dài trục bén $2b$ là $S=\pi ab$ (Dùng ứng dụng tích phân để chứng minh).*

Câu 6. *Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8*

Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;10\right]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx=7$, $\int_2^6 f\left(x\right)dx=3$. Khi đó giá trị của biểu thức

$$P=\int_0^2 f\left(x\right)dx+\int_6^{10} f\left(x\right)dx \text{ là:}$$

A. 10 **B.** 4 **C.** 3 **D.** -4

Phân tích lời giải : Bài toán dạng này chủ yếu cần thấy được sự tách cận ra hợp lý và kết hợp với phép cộng trừ nhân chia để tìm ra được giá trị biểu thức mà đề yêu cầu.

Giải

Ta có :

$$P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f\left(x\right)dx-\int_2^6 f\left(x\right)dx=7-3=4$$

Vậy chọn đáp án B

Câu 7. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 - Toán học và Tuổi trẻ - Lần 8***

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên miền $D=\left[a;b\right]$ có đồ thị là một đường cong $\left(C\right)$. Gọi S là phần giới hạn bởi $\left(C\right)$ và các đường thẳng $x=a;x=b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S=2\pi\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-\ln x}{4}$ và các đường thẳng $x=1;x=e$ quanh Ox

A. $\dfrac{2e^2-1}{8}\pi$ **B.** $\dfrac{4e^4-9}{64}\pi$

C. $\dfrac{4e^4+16e^2+7}{16}\pi$ **D.** $\dfrac{4e^4-9}{16}\pi$

<u>Phân tích lời giải:</u> Đây là một câu người hỏi muốn kiểm tra khả năng đọc hiểu.

<u>Giải:</u>

Ta có $S=2\pi\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$.

Trong đó $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-\ln x}{4}$ và a và b lần lượt là 1, e và

$$f'\left(x\right)=x-\frac{1}{4x}.$$

Thay vào và sử dụng máy tính bỏ túi để tính bấm máy được kết quả sau đó lưu vào A sau đó lấy A trừ cho các đáp án. (Đã hướng dẫn ở sách "*Máy tính bỏ túi – Kỹ thuật và sai lầm*")

Câu 8.

Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\dfrac{64}{15}$ là

A. $\varnothing$ **B.** $\left\{1\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ **D.** $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

<u>Phân tích lời giải:</u> Do hệ số $a=1>0$ nên đồ thị của hàm số sẽ có 2 cực tiểu và 1 cực đại. Bài toán nếu đọc nhanh lướt qua sẽ dễ nghĩ bài thuộc phần hàm số nhưng thật ra nó là thuộc phần tích phân. Nhận thấy rằng phần cần tính diện tích đối xứng nhau qua trục Oy nên cần tích một bên và nhân đôi lên sẽ có được phần đề yêu cầu

<u>Giải</u>

Ta có $y'=x^3-4m^2x$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=2\Rightarrow C(0;2)\\ x=2m\Rightarrow y=2-4m^4\Rightarrow A\left(2m;2-4m^4\right)\\ x=-2m\Rightarrow y=2-4m^4\Rightarrow B\left(-2m;2-4m^4\right)\end{array}\right.$$

Để phương trình có 3 điểm cực trị thì $m\neq 0$

Đường thẳng qua C và song song với Ox có dạng là: $y=2$

Giao điểm của (C) và d là $E\left(2\sqrt{2}m;2\right);F\left(-2\sqrt{2}m;2\right)$

Diện tích phần cần tính là

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}m}\left|2-\left(\frac{x^4}{4}-2m^2x^2+2\right)\right|dx=2\int_0^{2\sqrt{2}m}\left|-\frac{x^4}{4}+2m^2x^2\right|dx$$

$$=2\int_0^{2\sqrt{2}m}\left(\frac{-x^4}{4}+2m^2x^2\right)dx=2\left(-\frac{x^5}{20}+2m^2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}m}=\frac{128\sqrt{2}}{15}m^5$$

Theo giả thiết $S=\dfrac{64}{15}$ nên $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Chọn câu C.

Câu 9.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)dx=f(1)$.

Tính giá trị biểu thức $I=\int_0^1 f(x)$

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** Không tính được

Phân tích lời giải: Nhận thấy rằng, không thể biến đổi ngay từ yêu cầu bài toán được. Do đó, ta xuất phát từ giả thiết. Và biến đổi sao cho có tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

Giải:

Theo giả thiết

$$\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)dx = f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x)dx - \int_0^1 2xdx = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x)dx = f(1)+1 \quad \textbf{(1)}$$

Nhìn vào phương trình sau khi biến đổi, tích phân $\int_0^1 xf'(x)dx$ thấy hàm dưới dấu tích phân là tích của hai hàm x và $f'(x)$. Do đó nghĩ đến phương pháp tích phân từng phần để có $\int_0^1 f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1)+1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = -1.$$

Chọn đáp án C.

Câu 10. ***Group Nhóm Toán***

Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2f\left(x\right)=\cos x$ (1). Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$.

A. $I=\frac{4}{3}$ **B.** $I=\frac{1}{3}$ **C.** $I=\frac{2}{3}$ **D.** $I=1$

Giải:

Cách 1: Thay x bởi $-x$ ta được,

$f\left(x\right)+2f\left(-x\right)=\cos x$ (2). Lấy (2) –(1) được $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$

Do đó $f\left(x\right)=\frac{1}{3}\cos x$. Vậy $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos xdx=\frac{2}{3}$

Cách 2: Lấy tích phân hai vế từ (1) được

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+2f\left(x\right)\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-x\right)dx+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=2$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(t\right)dt+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=2\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=\frac{2}{3}$$

Bài tập tương tự:

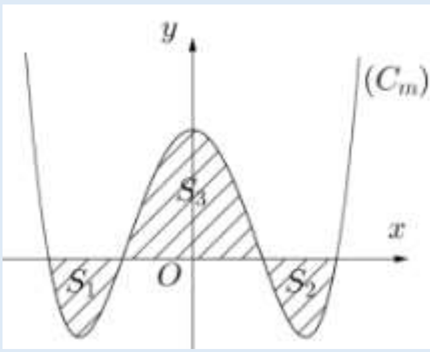
Bài 1. ***Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – Lần 3***

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx$ bằng?

A. -6 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 6

Câu 11. ***Group Nhóm Toán***

Cho hàm số có đồ thị $\left(C_m\right)$ với m là tham số thực. Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ:



Gọi S_1,S_2,S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm tham số m để $S_1+S_2=S_3$.

A. $m=-\dfrac{5}{2}$ **B.** $m=-\dfrac{5}{4}$ **C.** $m=\dfrac{5}{2}$ **D.** $m=\dfrac{5}{4}$

Phân tích lời giải: Đây là bài toán tìm tham số m và các đáp án A, B, C, D có giá trị m cụ thể. Như vậy, để đơn giản, ta thử từng đáp án.

Giải:

- Với $m=-\frac{5}{2}$, ta có $y=x^4-3x^2-\frac{5}{2}$.

$y=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{19}}{2}$ (loại vì $x^2=\frac{3-\sqrt{19}}{2}<0$). Loại A.

- Với $m=-\frac{5}{4}$, ta có $y=x^4-3x^2-\frac{5}{4}$.

$y=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{14}}{2}$ (loại vì $x^2=\frac{3-\sqrt{14}}{2}<0$). Loại B

- Với $m=\frac{5}{2}$, ta có $y=x^4-3x^2+\frac{5}{2}$. $y=0(VN)$.

  Loại C.

Như vậy, chọn đáp án D.

Nếu bài toán đổi đề. Với giá trị m đó và yêu cầu tình giá trị biểu thức nào đó và những bài toán liên quan khác thì với cách giải trên thì sẽ không giải quyết được vấn đề khác. Vậy có cách giải tổng quát nào cho dạng toán này.

Giả sử (C_m) cắt Ox tại bốn điểm $x_1<x_2<x_3<x_4$ và do đồ thị hàm số đối xứng nhau qua Oy nên $S_1=S_2$ và $\int_0^{x_3}|y|dx=\int_{x_3}^{x_4}|y|dx$ và áp dụng điều này.

Điều kiện để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm.

$$\begin{cases} 9-4m>0 \\ 3>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}$$

Với điều kiện này thì loại ngay đáp án A, B, C và chọn D.

Tiếp tục giải bài toán này để người đọc hiểu rõ hơn bài này.

Theo như nhận định trên thì

$$\int_0^{x_3}\left|x^3-3x^2+m\right|dx=\int_{x_3}^{x_4}\left|x^4-3x^2+m\right|dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_3}\left(x^4-3x^2+m\right)dx=-\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4-3x^2+m\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4}\left(x^4-3x^2+m\right)dx=0 \Leftrightarrow \left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3+mx\right)\right|_0^{x_4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5}-x_4^3+mx_4=0 \Leftrightarrow x_4^4-5x_4^2+5m=0 \ \ (1)$$

Mặt khác x_4 là nghiệm của $x_4^4-3x_4^2+m=0$ (2)

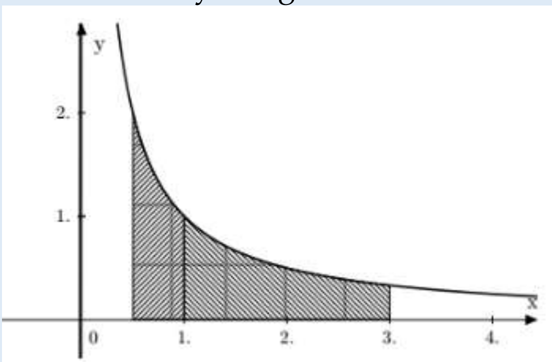
Lấy (2)-(1) được $x_4^2=2m$.

Thay vào (2) và được $4m^2-6m+m=0 \Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$.

Bình luận: Đây là một câu cho đáp án không hay. Vì nếu học sinh chỉ cần làm đến những bước kia thì có thể chọn ngay đáp án mà không cần làm tiếp.

Câu 12. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề thi off thầy Đoàn Trí Dũng***

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Gọi S là diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{x}, x=a, x=1$ và trục hoành. Gọi S' là diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{x}, x=1,$ $x=b$ và trục hoành. Trong đó $0<a<1<b$. Để $S=S'$ thì khẳng định nào sau đây đúng?



A. $ab=1$ **B.** $a^2+b^2=1$ **C.** $a+b=ab$ **D.** $a+b=e$

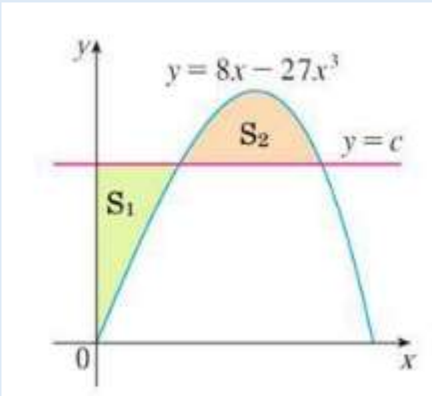
Giải:

Ta có $S=\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{x}dx=-\ln a$, $S'=\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x}=\ln b$.

$S=S' \Leftrightarrow -\ln a=\ln b \Leftrightarrow ab=1$.

Câu 13. *Group Nhóm Toán 12*

Cho hàm số $y=8x-27x^3$ có đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y=c$ với $c>0$. Trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ, gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng gới hạn bởi (C) và trục tung như hình vẽ dưới đây. Biết rằng c thỏa mãn $S_1=S_2$. Chọn khẳng định đúng trong cách khẳng định sau:



A. $0<c<\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}<c<2$ **C.** $\frac{1}{2}<c<1$ **D.** $1<c<\frac{3}{2}$

Giải:

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ

$$x=0; x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Như vậy, trong góc phần tư thứ nhất, đồ thị (C) cắt trục hoành tại $x=0$ và $x=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

Điểm cực đại của hàm số là $x = \frac{2\sqrt{2}}{9}$. Suy ra $y_{CD} \approx 1,7$.

Do đó $0 < c < 1,7$. Như vậy có thể loại ngay đáp án B.

Phương trình hoành độ giao điểm $8x - 27x^3 = c\left(*\right)$.

Giả sử (*) có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Khi đó:

$S_1 = \int_0^{x_1} \left(c - 8x + 27x^3\right)dx$ và

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left(8x - 27x^3 - c\right)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \left(27x^3 - 8x + c\right)dx$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left(27x^3 - 8x + c\right)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\left(\frac{27}{4}x^4 - 4x^2 + cx\right)\right|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{27}{4}x_2^3 - 4x_2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 27x_4^3 - 16x_2 + 4c = 0 \ \left(1\right)$$

Mặt khác x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên

$27x_2^3 - 8x_2 + c = 0 \Leftrightarrow 27x_2^3 = 8x_2 - c$ (2). Thế vào (1)

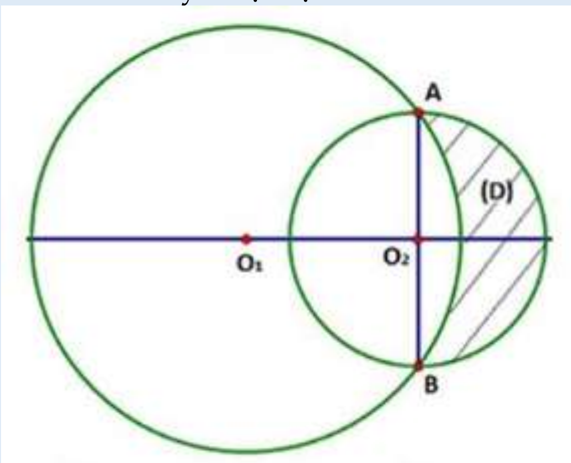
$-8x_2 + 3c = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3c}{8}$.

Thế vào (2) được $27.\left(\frac{3c}{8}\right)^3 = 2c \Leftrightarrow 729c^2 = 1024 \Leftrightarrow c = \frac{32}{27}$.

Vậy $c \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$. Chọn D.

Câu 14. ***Group Nhóm Toán 12***

Cho hia đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm *A*, *B* sao cho *AB* là đường kính của đường tròn (O_2). Gọi *D* là hình phẳng giới hạn bởi hai đường (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay quanh *D* quay quanh trục O_1O_2 được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.



A. $\frac{14\pi}{3}$ **B.** $\frac{68\pi}{3}$ **C.** $\frac{40\pi}{3}$ **D.** 36π

Phân tích lời giải: Bài toán có nhiều cách giải. Tùy vào độc giả thích giải theo cách nào. Sau đây, xin giới thiệu đến hai cách:

Cách thứ nhất: Áp dụng công thức tính thể tích chỏm cầu. khi đó thể tích cần tìm là $\frac{1}{2}V_{(O_2;3)} - V_{cc}$. Vấn đề công thức tính chỏm cầu là gì?

"Cho một khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h. Khi đó thể tích khối chỏm cầu: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Cho khối cầu có bán kính R.Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$*".*

Cách 2: Ứng dụng tích phân vào tính thể tích khối tròn xoay. Vậy vấn đề là cần xây dựng hệ trục tọa độ. Chọn hệ trục sao cho dễ tính nhất có thể. Tùy vào mỗi người có một cách chọn hệ trục tọa độ riêng.

Giải:

Cách 1: Khi quay quanh trục O_1O_2 đường tròn tâm O_2 bán kính bằng 3. Ta được một khối cầu có bán kính bằng 3.

Khi đó thể tích khối cầu là $V_{(O_1,3)} = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

Khi quanh quanh trục O_1O_2 thì cung nhỏ AB tạo thành một khối chỏm cầu có bán kính bằng 5. Và bây giờ ta cần xác định được chiều cao của nó. Dễ thấy $h = 5 - O_1O_2$.

Xét tam giác O_1O_2A vuông tại O_2 có

$O_1O_2 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Suy ra $h = 1$.

Vậy $V_{cc} = \pi\left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}\pi$.

Do đó $V_{ct} = 18\pi - \frac{14}{3}\pi = \frac{40}{3}\pi$. Chọn C.

Cách 2: Xét hệ trục tọa độ Oxy với

$O \equiv O_1, O_1O_2 \equiv Ox, AB \equiv Oy$. Khi đó (O_1), (O_2) lần lượt có phương trình là:

$(O_1):(x+4)^2+y^2=25$, $(O_2):x^2+y^2=9$.

Thể tích cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^3\left|9-x^2\right|dx-\pi\int_0^1\left|25-(x+4)^2\right|dx=\frac{40\pi}{3}$$

Câu 15. ***Trích đề thầy Lê Phúc Lữ***

Trong giải tích, với hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a;b]$ có đồ thị là một đường cong C. Người ta có thể tính đồ dài của C bằng công thức $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$. Với thông tin đó, hãy tính độ dài đường cong C cho bởi $y=\frac{x^2}{8}-\ln x$ trên $[1;2]$.

A. $\frac{3}{8}-\ln 2$ **B.** $\frac{31}{24}-\ln 4$

C. $\frac{3}{8}+\ln 2$ **D.** $\frac{31}{24}+\ln 4$

<u>Phân tích lời giải:</u> Dạng toán đọc hiểu bổ đề của một bài toán. Và chỉ việc áp dụng công thức sau đó giải.

<u>Giải:</u>

Ta có $y'=\frac{x}{4}-\frac{1}{x}$. Khi đó,

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Suy ra

$$L=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int_1^2\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{8}+\ln|x|\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{8}+\ln 2$$

Chọn C.

Câu 16.

Tính tích phân $\int\limits_0^2 \max\left\{x,x^3\right\}dx$.

A. 2 **B.** 4 **C.** $\frac{15}{4}$ **D.** $\frac{17}{4}$

Phân tích lời giải: Đây là một câu khá lạ. Rõ ràng đây là một câu tính tích phân. Tuy nhiên hàm dưới dấy tích phân là max của của hai hàm. Vậy có cách nào để giải dạng này?

Nhắc một chút kiến thức về phần này?

"Cho hai hàm f, g liên tục trên $\mathbb{K}$. Khi đó

$$(1)\ \max\left\{f,g\right\}=\frac{f+g+|f-g|}{2}$$

$$(2)\ \min\left\{f,g\right\}=\frac{f+g-|f-g|}{2}$$ "

Như vậy, với bài toán tính giá trị tích phân mà hàm dưới dấu giá trị tích phân sẽ chuyển về tính tích phân với hàm dưới dấu tích phân là hàm trị tuyệt đối mà đã biết cách giải. Nghĩa là:

$$\int\limits_a^b \max\left\{f(x),g(x)\right\}dx=\int\limits_a^b\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}dx$$

$$\int_a^b \min\left\{f(x),g(x)\right\}dx=\int_a^b \frac{f(x)+g(x)-\left|f(x)-g(x)\right|}{2}dx$$

Ngoài ra, ta có thể áp dụng cách này.

Bước 1: Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$. Từ đó tìm các nghiệm thỏa $a<x_1<x_2<...<x_n<b$

Bước 2: Xét dấu $f(x)-g(x)$ trên các khoảng nghiệm.

Bước 3: Tách thành cách tích phân và giải.

Giải:

Cách 1:

$$\int_0^2 \max\left\{x,x^3\right\}dx=\int_0^2 \frac{x^3+x+\left|x^3-x\right|}{2}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^3dx=\frac{17}{4}$$

Cách 2:

Ta có $x^3=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Do $x\in[0;2]$ nên $x=0, x=1$.

Lại có x^3-x âm trên khoảng $(0;1)$ dương trên khoảng $(1;2)$ nên $\max\limits_{[0;1]}\left\{x,x^3\right\}=x, \max\limits_{[1;2]}\left\{x,x^3\right\}=x^3$.

Vậy $\int_0^2 \max\left\{x,x^3\right\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^3dx=\frac{17}{4}$.

Chuyên đề 4: SỐ PHỨC

Câu 1. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội***

Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$.

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{10}$ **C.** $3\sqrt{5}$ **D.** $3\sqrt{2}$

<u>Phân tích lời giải:</u> Cách giải thuần túy, đặt $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$. Sau đó biến đổi giả thiết và biểu thức cần mà đề bài đề bài yêu cầu. Ngoài ra, có thể dùng bất đẳng thức. Nhắc lại:

"Bất đẳng thức Bunhiacopxki: Với hai bộ số $(a;b),(x;y)$ thì

$$(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)".$$

<u>Giải:</u>

Cách 1: Giả sử $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $x^2+y^2=1$.

$$T=|x+yi+1|+2|x+yi-1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$, $x\in[-1;1]$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-\dfrac{2}{\sqrt{2-2x}}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2-2x}=2\sqrt{2x+2}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$$

$f(-1)=4$; $f\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $f(1)=2$. Vậy $\max T=2\sqrt{5}$

Cách 2:

$T=|z+1|+2|z-1|\le\sqrt{(1+2^2)\left(|z+1|^2+|z-1|^2\right)}$

Ta có đẳng thức $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

Khi đó ta có $T\le\sqrt{5.2\left(|z|^2+1\right)}=2\sqrt{5}$.

Vậy $\max T=2\sqrt{5}$.

Lưu ý: Học sinh phải nhớ đẳng thức bình hành:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

Câu 2. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An***

Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $P=\sqrt{2}$ **C.** $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $P=\sqrt{3}$

Giải:

Gọi $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Biến đổi $|2z-i|=|2+iz|$ ta được $x^2+y^2=1$. Gọi A,B là điểm biểu diễn hai số phức z_1,z_2.

Khi đó ta có $|z_1-z_2|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=AB=1$.

Suy ra tam giác OAB đều cạnh bằng 1.

Gọi M là trung điểm AB.

Ta có $P=\left|z_1+z_2\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|2\overrightarrow{OM}\right|=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Câu 3. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định***

Cho các số phức z thoả mãn $\left|z-1\right|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=16$ **B.** $r=4$ **C.** $r=25$ **D.** $r=9$

Phân tích lời giải: Đây là dạng toán, cho số phức z thỏa mãn điều kiện nào đó và tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w với biểu thức w thông qua z. Để giải dạng toán này, ta cần rút ngược lại z theo w và thế vào điều kiện của z để tìm điều kiện của w. Một số kiến thức áp dụng trong bài toán này:

"Cho $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Khi đó $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$"

Giải:

Ta có $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\Leftrightarrow z=\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}}$. Thế vào điều kiện:

$$\left|\frac{w-2}{1+i\sqrt{3}}-1\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{w-3-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right|=2\Leftrightarrow\frac{\left|w-3-i\sqrt{3}\right|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|w-3-i\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3}}=2\Leftrightarrow\left|w-3-i\sqrt{3}\right|=4$$. Vậy $r=4$.

Lưu ý: *Cho $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Khi đó $\left|z_1z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$.*

Câu 4.

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z|$.

A. $\max P = 3\sqrt{5}$ **B.** $\max P = 5$

C. $\max P = \sqrt{5}$ **D.** $\max P = \sqrt{13}$

Giải:

Cách 1: Gọi $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $P = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ta có $|x+yi-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Đặt $x = 2+\sqrt{5}\sin t, y = 4+\sqrt{5}\cos t, t \in [0;2\pi]$.

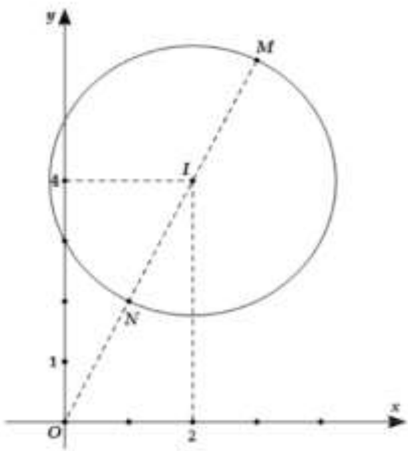
Suy ra

$$P = \sqrt{\left(2+\sqrt{5}\sin t\right)^2 + \left(4+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t}$$

Do $-20 \le 4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t \le 20$ nên $\sqrt{5} \le P \le 3\sqrt{5}$.

Vậy $\max P = 3\sqrt{5}$.

Cách 2: Từ cách 1, ta có tập hợp điểm $M(z)$ là đường tròn tâm $I(2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.



Vậy

$\max P = OM = OI + R$

$= \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Cách 3: Áp dụng công thức giải nhanh (đã nói ở tài liệu công thức giải nhanh):

Ta có $A = -2 - 4i$, $B = 0$; $k = \sqrt{5}$.

$T = \sqrt{|A^2| + |B^2| - \overline{A}B + A\overline{B}} = 2\sqrt{5}$

Vậy $\left|2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right| \le P \le 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$ hay $\sqrt{5} \le P \le 3\sqrt{5}$.

Nếu đề bài hỏi:

a. Tìm $\min|z|$ thì $\min|z| = ON = OI - R = \sqrt{5}$ (cách 2).

(cách 1, 3 hiển nhiên ta có $\min|z|$.

b. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất lớn nhất.

Ứng với cách 1 thì không giải được.

Ứng với cách 2: Phương trình đường thẳng *OI* là: $y = 2x$.

Khi đó toạ độ *M, N* là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Số phức có môđun lớn nhất là $z = 3 + 6i$. Số phức có môđun nhỏ nhất là: $z = 1 + 2i$.

Ứng với cách 3:

Ta giải hệ $\begin{cases} |z-2-4i| = \sqrt{5} \\ \min|z| = ... \end{cases}$ để tìm số phức có môđun nhỏ nhất và $\begin{cases} |z-2-4i| = \sqrt{5} \\ \max|z| = ... \end{cases}$ để tìm số phức có môđun lớn nhất.

Câu 5. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên – Lần 1***

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z+1-7i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 6

Giải:

Cách 1: Ta có $|(1+i)z+1-7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|z + \frac{1-7i}{1+i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|}$

$\Leftrightarrow |z-3-4i| = 1$. Lúc này chuyển về bài toán đã giải ở trên.

$A = -3-4i$; $B = 0; k = 1$.

$T = \sqrt{|A^2| + |B^2| - \overline{A}B + A\overline{B}} = 5$

Suy ra $4 \le P \le 6$. Vậy $\max|z| = 6$.

Cách 2: Xét bài toán tổng quát: "*Trong các số phức z thỏa mãn $|z-z_1| = r_1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z-z_2|$*"

Đặt $r_2 = |z_1 - z_2|$. Khi đó $\max P = r_1 + r_2$; $\min P = |r_1 - r_2|$.

Thực chất đây chính là công thức giải nhanh ở cách 1, chỉ là biểu diễn ở dạng khác dễ nhớ hơn.

Từ cách biến đổi $z_1 = 3+4i$; $z_2 = 0$. Suy ra $r_2 = 5$.

Câu 6.

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Biết số phức $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ có môđun nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2$.

A. 10 **B.** 8 **C.** 16 **D.** 26

Giải:

$$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |x-2+(y-4)i| = |z+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow y = 4-x$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = \sqrt{2x^2-8x+16}$$

$$= \sqrt{2(x-2)^2+8} \geq 2\sqrt{2}$$

Vậy $P = 8$.

Lưu ý: Gặp dạng bài mà có tập các điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng $ax+by+c=0$ thì rút y theo x rồi thế vào yêu cầu bài toán. Chẳng hạn như bài trên.

Câu 7. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán Học Tuổi Trẻ - lần 5.***

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4| = 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là:

A. 10 và 4 **B.** 5 và 4 **C.** 4 và 3 **D.** 5 và 3

Giải:

Gọi $z = x+yi; x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết ta có:

$|z-4|+|z+4|=10 \Leftrightarrow |z-4+yi|+|x+4+yi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10 \ (1)$

Gọi $M(x;y), F_1(-4;0), F_2(4;0)$ thì $(1) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là elip với

$F_1F_2=2c; MF_1+MF_2=2a$

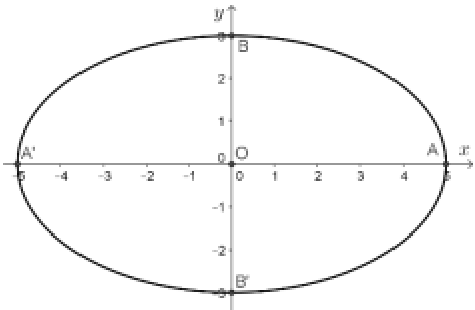
$\Rightarrow a=5; c=4 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

Phương trình chính tắc của elip là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Vẽ hình, ta thấy

$\max|z|=OA=OA'=5$;

$\min|z|=OB=OB'=3$.



Câu 8.

Biết số phức $x+yi; x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun số phức z.

A. $\sqrt{33}$ **B.** 50 **C.** $\sqrt{10}$ **D.** $5\sqrt{2}$

Giải:

Ta có $|z-(3+4i)|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$ (1).

$P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2$

Suy ra $4x+2y+3-P=0$ (2).

Cách 1: Từ (2) suy ra $y=-2x+\dfrac{P-3}{2}$

Thế vào (1) ta được:

$$(x-3)^2+\left(-2x+\frac{P-11}{2}\right)^2=5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+2(8-P)x+4+\frac{(P-11)^2}{4}=0$$

Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(8-P)^2-5\left(4+\frac{(P-11)^2}{4}\right)\ge 0 \Leftrightarrow 13\le P\le 33$$

Vậy $\max P=33$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{33-8}{5}=5\Rightarrow y=5$

Suy ra $z=5+5i\Rightarrow |z|=5\sqrt{2}$.

Cách 2: Dễ thấy (1) là phương trình đường thẳng. Khi đó ta tìm P sao cho Δ và đường tròn (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R \Leftrightarrow \frac{|12+8+3-P|}{\sqrt{20}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow |23-P|\le 10$$

$$\Leftrightarrow 13\le P\le 33.$$

Vậy $\max P=33$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}4x+2y-30=0\\(x-3)^2+(y-4)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$$

Câu 9.

Biết số phức $x+yi;x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z|=|\overline{z}+4-3i|$ và $P=|z+1-i|+|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị $P=x+2y$.

A. $P=-\dfrac{61}{10}$ **B.** $P=-\dfrac{253}{50}$ **C.** $P=-\dfrac{41}{5}$ **D.** $P=-\dfrac{18}{5}$

Giải:

Ta có $|z|=|\bar{z}+4-3i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x+4-(y+3)i|$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x+4)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 8x+6y+25=0\,(\Delta)$

$P=|x+1+(y-1)i|+|x-2+(y+3)i|$

$=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=ME+MF$

Trong đó $E=(-1;1);F(2;-3)$, $M(x;y)$.

Khi đó bài toán trở tình tìm Δ sao cho $ME+MF$ đạt giá trị nhỏ nhất. Kiểm tra được E, F nằm cùng một phía so với Δ

Gọi E' là điểm đối xứng của E qua Δ.

Suy ra EE' đi qua E và vuông góc với Δ có phương trình là: $3x-4y+7=0$.

Gọi H là giao điểm của EE' với Δ suy ra $H\left(-\dfrac{71}{25};-\dfrac{19}{25}\right)$

Suy ra $E'\left(-\dfrac{117}{25};-\dfrac{44}{25}\right)$ (H là trung điểm EE').

Ta có $ME+MF=ME'+MF\geq E'F$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M=E'F\cap\Delta$.

Phương trình $E'F$ đi qua hai điểm E',F là:

$$31x+167y+439=0$$

Vậy $M\left(-\dfrac{67}{50};-\dfrac{119}{50}\right)$. Suy ra $P=x+2y=-\dfrac{61}{10}$.

Câu 10.

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|$. Tính giá trị của $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{39}{4}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{13}{4}$

Giải:

Giả sử $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $x^2+y^2=1$.

$$P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|=\left|x+1+yi\right|+\left|x^2-y^2-x+1+y\left(2x-1\right)i\right|$$

$$=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x^2-y^2-x+1\right)^2+y^2\left(2x-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{2+2x}+\sqrt{\left(2x^2-x\right)^2+\left(1-x^2\right)\left(2x-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{2x+2}+\sqrt{\left(2x-1\right)^2}$$

Nếu $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ thì $P=\sqrt{2x+2}+2x-1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2x+2}+2x-1$ với $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2x+2}}+2>0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};1\right).$$

Suy ra $\max f\left(x\right)=f\left(1\right)=3$, $\min f\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$.

Nếu $-1\le x<\dfrac{1}{2}$ thì $P=\sqrt{2x+2}+1-2x$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2x+2}+1-2x$ với $x\in\left[-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{8}$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x)=f\left(-\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{13}{4}$.

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được:

$\max P=\dfrac{13}{4};\min P=\sqrt{3}$. Suy ra $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 11. ***Đề minh họa THPT Quốc gian 2017 – Lần 2***

Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nà dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$ **B.** $|z|>2$ **C.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ **D.** $|z|<\dfrac{1}{2}$

Giải:

Ta có $\dfrac{\sqrt{10}}{z}=(1+2i)|z|+2-i\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{10}}{z}=|z|+2+(2|z|-1)i$

$\Rightarrow\left|\dfrac{\sqrt{10}}{z}\right|=\left||z|+2+(2|z|-1)i\right|\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}=\sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{|z|}=\sqrt{|z|^2+1}\Leftrightarrow|z|^4+|z|^2-2=0\Leftrightarrow|z|=1$.

Câu 12.

Cho các số phức $z_1\neq 0,z_2\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{2}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{z_1+z_2}$ (1). Tính giá trị biểu thức $P=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|+\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$.

A. $P=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Giải:

$$(1)\Leftrightarrow 2z_2\left(z_1+z_2\right)+z_1\left(z_1+z_2\right)=z_1z_2\Leftrightarrow z_1^2+2z_1z_2+2z_2^2=0$$

Nhận thấy đây là phương trình đẳng cấp và $z_2\neq 0$ nên chia cả hai vế cho z_2^2.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+2.\frac{z_1}{z_2}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=\left(-1+i\right)z_2\\ z_1=\left(-1-i\right)z_2\end{array}\right.\Rightarrow\left|z_1\right|=\sqrt{2}\left|z_2\right|$$

Do đó $P=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}+\frac{\left|z_2\right|}{\left|z_1\right|}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Chọn D.

Câu 13.

Cho hai số phức *u, v* thỏa mãn điều kiện $|u|=|v|=10$ và $|3u-4v|=\sqrt{2017}$. Tính $M=|4u+3v|$.

A. $\sqrt{2983}$ **B.** $\sqrt{2883}$ **C.** $\sqrt{2893}$ **D.** $\sqrt{24}$

Phân tích lời giải: Cần chú ý ở hệ số của *u* và *v*. Vì giả thiết cho là $3u-4v$ và hỏi là $4u+3v$. Khi nhắc tới môđun sẽ nhớ tới căn bình phương và đặc biệt là thấy ở cả *u* và *v* là $\sqrt{3^2+4^2}=5$

Giải:

Ta có $|z|^2=z.\overline{z}$. Đặt $N=|3u-4v|$. Khi đó

$$N^2=\left(3u-4v\right)\left(3\overline{u}-4\overline{v}\right)=9|u|^2+16|v|^2-12\left(u\overline{v}+\overline{u}v\right)$$

$$M^2=\left(4u+3v\right)\left(4\overline{u}+3\overline{v}\right)=16|u|^2+9|v|^2+12\left(u\overline{v}+\overline{u}v\right)$$

Do đó $M^2 + N^2 = 25\left(|u|^2 + |v|^2\right) = 5000$

$\Rightarrow M = \sqrt{5000 - N^2} = \sqrt{5000 - 2017} = \sqrt{2983}$. Chọn câu A

Lưu ý: *Kỹ thuật liên hợp của số phức rất qua trọng. Bài trên áp dụng rất thành công và nhanh chóng ra kết quả. Nếu bạn đọc giải theo cách truyền thống đặt $z = x + yi$ thì sẽ rất lâu.*

Câu 14.

Nếu hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 z_2 \neq -1$ và $|z_1| = |z_2| = 1$ thì số phức $w = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ có phần ảo bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 2

Phân tích lời giải: Với bài này, có thể chọn z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán và tính số phức w theo z_1, z_2. Từ đó có được kết quả. Tuy nhiên để hiểu rõ vẫn đề, ta cần có một lời giải hoàn chỉnh cho bài này. Bài này sử dụng một số phần lý thuyết như sau:

"Cho số phức z_1, z_2.

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *(2)* $\overline{z_1 z_1} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ *(3)* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(4) $\overline{z_1} = z_1 \Leftrightarrow z_1$ *là số thực* *(5)* $|z_1| = 1 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$ *"*

Giải:

Cách 1: Chọn $z_1 = 1, z_2 = i$, ta có $w = \dfrac{1+i}{1+i} = 1$.

Vậy phần ảo của w bằng 0.

Cách 2: Do $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = 1$ nên $z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}}, z_2 = \frac{1}{\overline{z_2}}$. Khi đó,

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}}}{1 + \frac{1}{\overline{z_1}} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + 1} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \overline{\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}} = \overline{w}$$

Vậy w là số thực hay phần ảo bằng 0.

Câu 15. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An***

Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $\left|z^2 + 4\right| = 2\left|z\right|$. Đặt $P = 8\left(b^2 - a^2\right) - 12$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = \left(\left|z\right| - 2\right)^2$ **B.** $P = \left(\left|z\right|^2 - 4\right)^2$

C. $P = \left(\left|z\right| - 4\right)^2$ **D.** $P = \left(\left|z\right|^2 - 2\right)^2$

Giải:

Giả thiết tương đương với

$$\left|z^2 + 4\right|^2 = 4\left|z\right|^2 \Leftrightarrow \left(z^2 + 4\right)\left(\overline{z}^2 + 4\right) = 4z\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow z^2.\overline{z}^2 + 4z^2 + 4\overline{z}^2 + 16 = 4z\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow \left(z\overline{z} - 2\right)^2 + 4\left(z^2 + \overline{z}^2\right) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\left(z^2 + \overline{z}^2\right) - 12 = \left(\left|z\right|^2 - 2\right)^2$$

Đặt $z = a + bi$ thì $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$.

Suy ra $z^2 + \bar{z}^2 = 2\left(a^2 - b^2\right)$.

Suy ra $P = 8\left(b^2 - a^2\right) = \left(|z| - 2\right)^2$.

Câu 16. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán học & Tuổi trẻ - Lần 8***

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 3$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Giải:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 9 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(z^2 + 1\right)\left(\bar{z}^2 + 1\right)}{z.\bar{z}} = 9 \Leftrightarrow z^2\bar{z}^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 9|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 + \left(z + \bar{z}\right)^2 - 2|z|^2 + 1 = 9|z|^2.$$

Ta có $\left(z + \bar{z}\right)^2 \geq 0$ nên

$$9|z|^2 \geq |z|^4 - 2|z|^2 + 1 \Leftrightarrow |z|^4 - 11|z|^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2} \leq |z|^2 \leq \frac{11 + 3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \leq |z| \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Vậy $\max|z| + \min|z| = \sqrt{13}$.

<u>Tổng quát hóa:</u> Cho a, b, c là các số thực dương và số phức z khác 0 thỏa mãn $\left|az + \dfrac{b}{z}\right| = c$. Khi đó

$$\frac{-c+\sqrt{c^2+4ac}}{2a} \le |z| \le \frac{c+\sqrt{c^2+4ab}}{2a}$$

Câu 17. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Toán học và tuổi trẻ - Lần 8***

Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i| \le 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$ **B.** $|z|<\frac{1}{2}$ **C.** $|z|>2$ **D.** $\frac{3}{2}<|z|<2$

<u>Phân tích lời giải:</u> Sử dụng bất đẳng thức $|u+v| \le |u|+|v|$.

<u>Giải:</u>

Cách 1: Ta có

$2\sqrt{2} \ge 2|z-1|+2|z-i|+|z-i| \ge 2|1+i|+|z-i|$

Suy ra $|z-i| \le 0 \Leftrightarrow z=i \Rightarrow |z|=1$. Chọn D.

Cách 2: Sử dụng hình học để giải:

Giả sử $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$.

Số phức $z-1$ có điểm biểu diễn là $A(x-1;y)$, $z-i$ có điểm biểu diễn là $B(x;y-1)$. Khi đó

$2|z-1|+3|z-i| \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2OA+3OB \le 2\sqrt{2}=2AB$

Mặt khác $2OA+3OB=2OA+2OB+OB \ge 2AB+OB$.

Do đó $2AB+OB \le 2AB \Leftrightarrow OB=0 \Leftrightarrow B \equiv O \Leftrightarrow z=i$

Câu 18. ***Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – lần 3***

Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z-1+i|$

Tính $P = m + M$

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$ **B.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$

C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **D.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

Giải:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = 6\sqrt{2}$

Và $T = |z-1+i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$

Cách 1:

Đặt $F_1(-2;1), F_2 = (4;7), A(1;-1)$. Khi đó

$MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{2}$ và $T = MA$.

Mặt khác ta có $F_1F_2 = 6\sqrt{2}$. Do đó điểm M thuộc vào đoạn thẳng F_1F_2.

Phương trình đường thẳng $F_1F_2 : x - y + 3 = 0$.

Kiểm tra được, hình chiếu của C lên đường thẳng F_1F_2 thuộc ngay vào đoạn thẳng F_1F_1.

Ta có $CF_1 = \sqrt{13}, CF_2 = \sqrt{73}, d(C;F_1F_2) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $T_{\max} = \sqrt{73}, T_{\min} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ và $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. Chọn B.

Bình luận: *Nếu hình chiếu của điểm C lên đường thẳng F_1F_2 nằm ngoài đoạn thẳng F_1F_2 thì cách giải trên có còn áp dụng được* *không? Học sinh cần lưu ý, nếu hình chiếu không nằm trên đoạn F_1F_2 thì khi đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đạt được chính tại hai điểm đầu mút của đoạn thẳng.*

Cách 2:

Áp dụng bất dẳng thức

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

Ta có

$$6\sqrt{2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}$$

$$\ge\sqrt{(x+2+4-x)^2+(y-1+7-y)}=6\sqrt{2}$$

Do đó "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x+2}{4-x}=\frac{y-1}{7-y}\Leftrightarrow x-y+3=0$$

Từ đó rút ra được $y=x+3$. Thay vào T được:

$$T=\sqrt{(x-1)^2+(x+4)^2}=\sqrt{2x^2+6x+19}$$

Do điểm x,y thỏa mãn biểu thức

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}=6\sqrt{2}$$

Nên có $|x+2|+|x-4|=6$ đúng với mọi $x\in[-2;4]$.

Như vậy,

Xét hàm số $y=2x^2+6x+19$ với $x\in[-2;4]$.

Do đó $\max y=73,\min y=\frac{25}{2}$ trên đoạn $[-2;4]$

Suy ra $\max T=\sqrt{73},\min T=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức môđun $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1=0$ hoặc $z_2=0$ hoặc tồn tại $k>0$, $k\in\mathbb{R}$ sao cho $z_1=kz_2$.

Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|\ge|z+2-i+4-7i-z|=6\sqrt{2}$.

Vậy áp dụng dấu bằng xảy ra:

TH1: $z=2-i$. Suy ra $T=\sqrt{13}$.

TH2: $z=4+7i$. Suy ra $T=\sqrt{73}$.

TH3: Tồn tại số $k>0$ thỏa $|z+2-i|=k|z-4-7i|$.

Ở đây, chọn $k=1$ và thỏa mãn. Tập hợp các điểm biểu diễn của z thỏa mãn $|z+2-i|=|z-4-7i|$ chính là đường thẳng $x-y+3=0$ và quay về **cách 2**.

Chuyên đề 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 1.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Biết $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, $d\left(AB;CD\right) = a$.

Xét các mệnh đề sau:

(1). Góc $\left(AB,CD\right) = 60^0$ (2). $MN = \frac{a}{2}$

(3). $V_{MNCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (4). $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải:

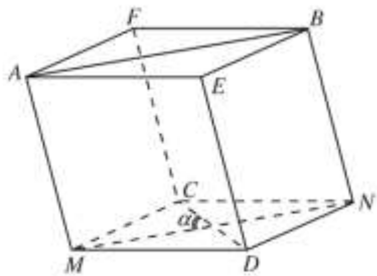
Bài toán phụ: *Cho tứ diện ABCD. Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo AB và CD, α là góc giữa hai đường thẳng đó. Khi đó thể tích tứ diện ABCD là:*

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin\alpha$$

Chứng minh:

Cách 1: Dựng hình hộp $AEBF.MDNC$.

Vì $\left(AEBF\right)//\left(MDNC\right)$ nên chiều cao của hình hộp bằng khoảng cách d giữa AB và CD.



Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{AEBF.MDNC} = \frac{1}{3}S_{MDNC}.d$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.MN.CD.\sin\alpha.d = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$$

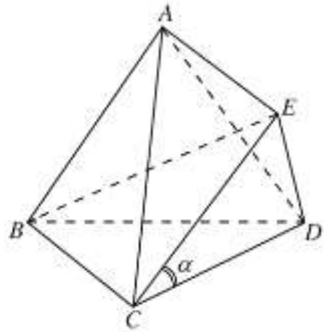
Cách 2: Dựng hình bình hành $ABCE$. Khi đó:

$V_{A.BCD} = V_{E.BCD}$

(do $AE \,//\, \left(BCD\right)$) (1)

$V_{E.BCD} = V_{B.ECD}$ (2)

$V_{B.ECD} = \frac{1}{3}.S_{ECD}.d\left(B,\left(CDE\right)\right)$ (3)



$S_{ECD} = \frac{1}{2}.CE.CD.\sin ECD = \frac{1}{2}AB.CD.\sin\alpha$ (4)

$d\left(B,\left(CDE\right)\right) = d\left(AB,CD\right)$ (do $AB \,//\, \left(CDE\right)$) (5)

Từ (2), (2), (3), (4), (5) suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$.

<u>Áp dụng:</u>

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha = \frac{1}{6}.a.a.a.\sin\alpha$

Suy ra $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hay $\alpha = 60^0$.

Gọi P là trung điểm BD. Khi đó ta có $MP = NP = \frac{a}{2}$.

Và $MP//AB$ và $NP//CD$.

Do đó $\left(AB;CD\right) = \left(MP,NP\right)$.

TH1: Góc $MPN = 60^0$. Suy ra tam giác MNP đều và $MN = \frac{a}{2}$.

TH2: Góc $MPN = 120^0$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác MNP có:

$$MN^2 = MP^2 + NP^2 - 2MP.NP.\cos MPN = \frac{3}{4}a^2$$

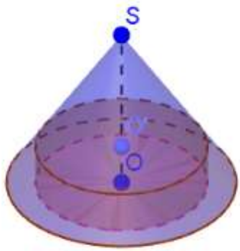
Suy ra $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

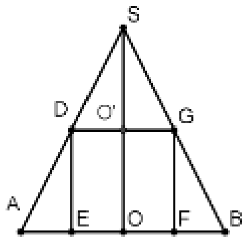
Câu 2.

Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P), đường cao $SO = h$. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho $SO' = x$, $0 < x < h$. Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính r', $0 < r' < r$ nằm trên mặt phẳng (P), đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q), (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng nằm phía ngoài của (T), đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{h}{2}$ **B.** $x = \frac{h}{3}$ **C.** $x = \frac{2h}{3}$ **D.** $x = \frac{h}{4}$

Phân tích lời giải: Đề bài này yêu cầu người giải phải biết được công thức tính thể tích hình nón và thể tích hình trụ ngoài ra còn phải đọc hiểu đề một cách chắc chắn.





Giải:

Nhận xét: Thể tích cần tìm là sẽ bằng phần thể tích nón lớn (đỉnh S đáy là đường tròn tâm O bán kính r) trừ nón nhỏ (đỉnh S đáy là hình tròn tâm O' bán kính r') trừ thể tích hình trụ.

$$V_{ct} = V_{(S,(O))} - V_{(S,(O'))} - V_{((O),(O'))}$$
$$= \frac{1}{3}h.\pi r^2 - \left(\frac{1}{3}x\pi r'^2 + (h-x)\pi r'^2\right)$$

Thể tích cần tìm nhỏ nhất $\Leftrightarrow A = \frac{1}{3}x\pi r'^2 + (h-x)\pi r'^2$ lớn nhất do $\frac{1}{3}h.\pi r^2$ là không đổi.

Ta có $\frac{x}{h} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{xr}{h}$

Do đó

$$A = \frac{1}{3}x\pi r'^2 + (h-x)\pi r'^2 = \pi.r'^2\left(h - \frac{2}{3}x\right) = \pi\frac{x^2r^2}{h^2}\left(h - \frac{2}{3}x\right)$$

Xét $f\left(x\right)=\pi\frac{x^2r^2}{h^2}\left(h-\frac{2}{3}x\right)=\pi\frac{x^2r^2}{h}-\pi\frac{2x^3r^2}{3h^2}$, $x\in\left(0;h\right)$

$$f'\left(x\right)=\pi\frac{2xr^2}{h}-\pi\frac{2x^2r^2}{h^2}; f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=h\end{array}\right.$$

Do $0<x<h$ nên $f'\left(x\right)>0$.

Do hàm đồng biến trên $\left(0;h\right)$ nên nhìn đáp án.

Chọn câu C.

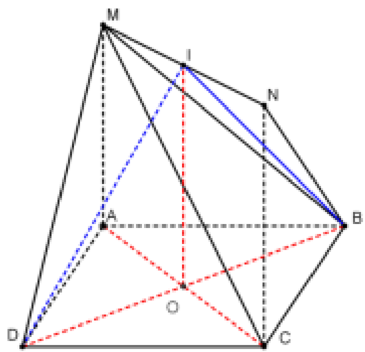
Câu 3:

Cho mặt phẳng *(P)* chứa hình vuông *ABCD*. Trên *đường* thẳng vuông góc với mặt phẳng *(P)* tại *A*, lấy điểm M. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng *(P)* tại *C*, lấy điểm *N* (*N* cùng phía *M* so với mặt phẳng *(P)*) . Gọi *I* là trung điểm của *MN*. Thể tích tứ diện *MNBD* luôn có thể tính được bằng công thức nào sau đây ?

A. $V=\frac{1}{3}.AC.S_{IBD}$ **B.** $V=\frac{1}{3}.AC.S_{BDN}$

C. $V=\frac{1}{3}.BD.S_{BMN}$ **D.** $V=\frac{1}{3}.BD.S_{MBD}$

<u>Phân tích lời giải:</u>



Bài toán này yêu cầu cần chọn chính xác mặt đáy là mặt nào. Nếu chọn đường cao là *BD* sau đó tách khối cần tìm thể tích thành hai khối nhỏ là $DOMN;BOMN$ thì sẽ dễ dàng lúc đầu nhưng lâm vào bế tắc lúc sau do đáp án không có S_{OMN} Vậy tại sao không bắt đầu từ AC thử xem nào ? Tại sao đề gọi nhắc điểm I nhưng vẫn chưa được sử dụng ? Hãy thử tách khối cần tìm thành 2 khối nhỏ *MIBD;NIBD* về ý tưởng nó xem xem như trên nhưng lợi thế ở đây là có đáy là *IBD* và trong đáp án có *IBD*. Điều khó ở hướng này là đường cao.

Giải:

Gọi *I* là trung điểm *MN*, *O* là tâm hình vuông.

Ta có:

$$V_{MNBD}=V_{MIBD}+V_{NIBD}=\frac{1}{3}d_{(M,(IBD))}.S_{IBD}+\frac{1}{3}d_{(N,(IBD))}.S_{IBD}$$

Lại có $d\left(M,\left(IBD\right)\right)=d\left(N,\left(IBD\right)\right)$ (do *I* là trung điểm *MN*).

Do $AM//IO$ nên $AM//\left(IBD\right)\Rightarrow d_{(M;(IBD))}=d_{(A;(IBD))}=AO$

Suy ra $V_{MNBD}=\frac{2}{3}AO.S_{IBD}=\frac{1}{3}AC.S_{IBD}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 4:

Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với đáy một góc 60^0. Gọi *M* là điểm đối xứng của *C* qua *D*, *N* là trung điểm *SC*. Mặt phẳng $\left(BMN\right)$ chia khối chóp *S.ABCD* thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần trên.

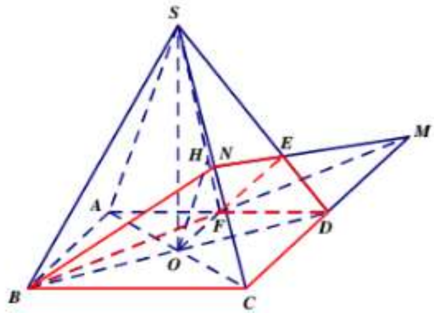
A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{6}{5}$

Giải:

Cách xác định thiết diện của mặt (BMN) như hình vẽ.

Ta có $E = SD \cap MN$ nên E là trọng tâm tam giác SCM.

Do $DF \parallel BC$ nên F là trung điểm BM.



Ta có $\left(SD,(ABCD)\right) = SDO = 60^0$.

Tính được $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ta có $d\left(o,(SAD)\right) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{\Delta SAD} = \dfrac{1}{2}SF.AD = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$

Lại có $\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \dfrac{ME}{MN}.\dfrac{MF}{MB}.\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{1}{6}$.

$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \dfrac{5}{6}V_{MNBC} = \dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{3}d\left(M,(SAD)\right).\dfrac{1}{2}S_{SBC} = \dfrac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \dfrac{7a^3\sqrt{6}}{36}$. Suy ra $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \dfrac{7}{5}$

Câu 5.

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng

(AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C'. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. $\frac{25}{47}$ B. 1 C. $\frac{17}{25}$ D. $\frac{8}{17}$

Phân tích đề bài: Để làm những dạng bài cần tạo thành nó 1 thiết diện như bài tập xác định thiết diện lớp 11. Cần kéo dài mặt thiết diện ra ngoài khối chóp để kết hợp mặt khối chóp tạo thành 1 tứ diện . Sau đó sử dụng công thức tỷ số thể tích trong tứ diện để thao tác.

Giải

Đường thẳng EF cắt $A'D'$ và $A'B'$ tại N, M, AN cắt DD' tại P, AM cắt BB' tại Q khi đó mặt phẳn(AEF) cắt khối lập phương làm hai phần riêng biệt và xác định được

$$V_1 = V_{AA'QB'EFD'P}; V_2 = V_{ABCDC'QEFP}$$

Gọi $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}, V_3 = V_{A.A'MN}, V_4 = V_{PFD'N}, V_5 = V_{PFD'N}$.

Do tính đối xứng của hình lập phương nên ta có $V_4 = V_5$.

Nhận thấy :

$$V_3 = \frac{1}{6}AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8}$$

$$V_4 = \frac{1}{6}PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$$

$$V_1 = V_3 - 2V_4 = \frac{25a^3}{72}, V_2 = V - 2V_1 = \frac{47a^3}{72}$$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{25}{47}$. Vậy chọn A.

Câu 6. ***Group Nhóm Toán 12***

Cho hình nón (N) có đỉnh S, có đáy là hình tròn (O) tâm O, bán kính R. Người ta cắt (N) bằng một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy của (N), được thiết diện là đường tròn (O') tâm O' bán kính r, (P) cách mặt đáy một đoạn bằng h. Gọi phần hình nón gồm giữa (P) và mặt đáy của hình nón là khối (T) và có thể tích là $\dfrac{\pi b^2 h}{3}$. Phần đường sinh của hình nón được giới hạn bởi mặt (P) và mặt đáy bằng a và được gọi là cạnh bên của (T). Tính R theo a, b, h.

A. $R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4b^2 - h^2 + a^2}{3}} + \sqrt{a^2 - h^2}\right)$

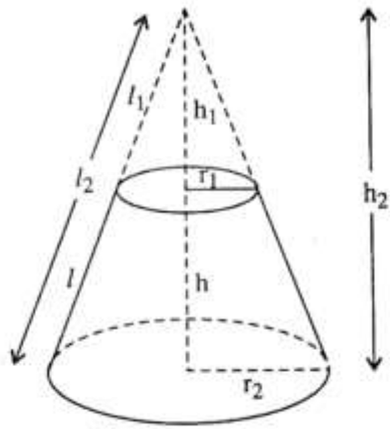
B. $R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}} + \sqrt{a^2 - h^2}\right)$

C. $R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{2b^2 + h^2 - a^2}{3}} + \sqrt{a^2 - h^2}\right)$

D. $R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{2b^2 - h^2 + a^2}{3}} + \sqrt{a^2 - h^2}\right)$

<u>Phân tích lời giải:</u> Ở đây, chúng ta có một khái niệm mới đó là hình nón cụt. Đó là phần của khối (T). Hình nón cụt là gì?

"Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy được gọi là một hình nón cụt."



Trong sách giải tích 12 nâng cao, có đề cập đến công thức tính thể tích hình chóp cụt:

"Gọi B và B' lần lượt là diện tích của đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt; h là chiều cao của nó (h chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng chứa hai đáy; cũng bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của đáy này đến mặt phẳng chứa đáy kai. Khi đó thể tích khối chóp cụt:

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right).\text{"}$$

Từ thể tích của khối chóp chụt, ta có thể tính được thể tích khối nón cụt.

"Gọi R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt. Khi đó thể tích khối nón cụt:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\text{"}.$$

Sau đây, nhắc một số kiến thức liên qua tới hình nón cụt.

"(1) Diện tích xung quanh của hình nón cụt: $S_{xq}=\pi\left(R+r\right)l$.

(2) Diệc tích toàn phần

$S_{tp}=S_{xq}+S_{dn}+S_{dl}=\pi\left(R^2+r^2+\left(R+r\right)l\right)$*".*

Bài toán sẽ áp dụng kiến thức trên để giải và áp dụng một số kiến thức liên quan khác. Chẳng hạn như: Định lý Ta – lét.

Giải:

Thể tích khối $\left(T\right)$ là:

$$V_T=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)=\frac{\pi b^2h}{3}\Leftrightarrow R^2+r^2+Rr=b^2\ \ (1)$$

Vấn đề bây giờ, cần biểu diễn *r* theo *a*, *b*, *h*.

Mặt khác, hình nón cụt được sinh ra khi quay hình thang vuông $OO'AB$ quay quanh trục OO' nên ta có $O'A=r,OB=R,OO'=h,AB=a$.

Gọi H là hình chiếu của *A* lên *OB*. Khi đó ta có $OH=r$ và $HB=R-r$. Xét tam giác *AHB* vuông tại *H* nên $R-r=\sqrt{a^2-h^2}$.

Suy ra $r=R-\sqrt{a^2-h^2}$. Thế vào (1) được

$$R^2+\left(R-\sqrt{a^2-h^2}\right)^2+R\left(R-\sqrt{a^2-h^2}\right)-b^2=0$$

$$\Leftrightarrow R^2+R^2-2R\sqrt{a^2-h^2}+a^2-h^2+R^2-R\sqrt{a^2-h^2}-b^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2-3R\sqrt{a^2-h^2}+a^2-h^2-b^2=0$$

$$\Delta=9\left(a^2-h^2\right)-12\left(a^2-h^2-b^2\right)=12b^2-3\left(a^2-h^2\right)$$

Do đó

$$R=\frac{3\sqrt{a^2-h^2}+\sqrt{12b^2-3\left(a-h^2\right)}}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4b^2-a^2+h^2}{3}}+\sqrt{a^2-h^2}\right)$$

Chọn đáp án B mà không cần làm tiếp nghiệm thứ 2.

Câu 7. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Sở Giáo dục & Đào tạo Nam Định***

Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, đáy ABC thỏa mãn điều kiện $\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{2}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}$. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *BD* và *BC*. Tính thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$.

A. $V=\frac{4\pi}{3}$ **B.** $V=\frac{32\pi}{3}$ **C.** $V=\frac{8\pi}{3}$ **D.** $V=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Phân tích lời giải: Bước đầu tiên, xác định mặt cầu của tam hình chóp *A.BCHK* có hình dạng như thế nào? Hay nói các khác nó có đặc điểm gì đặc biệt hay không? Bởi vì, đề bài không hề cho đường cao của tứ diện bằng bao nhiêu, cho những giả thuyết như điều kiện đáy của *ABC* và *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A* lên *DB, DC*. Do đó, có phải chẳng bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó dựa vào giả thiết đáy *ABC*. Muốn có được điều này thì cần phải xác định được mặt cầu đó có tâm và bán kính như thế nào?

Tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của nó.

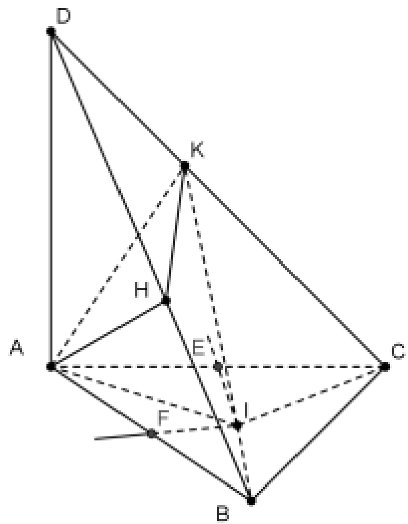
Như vậy, để xác định tâm mặt cầu chứa hai hai đường tròn cắt nhau chính là giao điểm của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng chứa đường tròn đó tại tâm của hai đường tròn đó.

Đối với bài toán này thì đã hoàn toàn xác định hai đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHB, AKC* của hình chóp *A.BCKH* bởi vì hai tam giác đó đều là tam giác vuông. Như vậy chỉ cần từ tâm của hai đường tròn đó, kẻ một đường thẳng vuông góc với tới mặt phẳng chứa hai đường tròn đó tại tâm của hai đường tròn. Giao hai đường thẳng đó thì được tâm mặt cầu.

"Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, AB. Kẻ các đường thẳng d, d' lần lượt vuông góc với AC, AB tại E, F. Do $DA \perp d, DA \perp d'$ ($DA \perp (ABC)$) nên $d \perp (DAC)$, $d' \perp (DAB)$. Do đó d và d' chính là hai đường thẳng mà ta đã nói ở trên. Gọi I là giao điểm của d, d' thì I chính là tâm mặt cầu chứa hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC, AKC.

Thật vậy, trong mặt phẳng (ABC) ta có I là giao điểm của hai đường trung trực hai cạnh của một tam giác nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó $IA = IB = IC$. Mặt khác, ta có một điểm nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp thì đều cách điều các điểm trên đường tròn đó nên $IA = IH = IB$. Tương tự ta có $IA = IK = IC$. Từ đó suy ra $IA = IB = IC = IH = IK$. Vậy I chính là tâm mặt cầu ngoài tiếp tứ hình chóp $A.BCKH$ và bán kính *bằng $IA = R$, cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC".*

Đến lúc này, ta đã hoàn toàn xác định được tâm và bán kính. Vấn đề còn lại là tính bán kính. Chính là dựa vào giả thiết đáy ABC thỏa mãn điều kiện trên.



Một số liên kiến thức liên quan tới hệ thức lượng trong tam giác.

"Cho tam giác ABC, gọi AH là đường cao, R, r lần lượt là bán kính ngoại tiếp và nội tiếp tam giác, p là nửa chu vi. Kí hiệu $a = BC, b = AC, c = AB$, diện tích là S

(1) Định lý cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(2) Định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(3) Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A (kí hiệu m_a)

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$$

(4) Các công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \text{ ''}$$
$$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ngoài ra, còn một số hệ thức lượng nâng cao khác như:

"*(1) Định lý tan:*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}};\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}};\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}$$

(2) Định lý cotan:

$$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S};\cot B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S};\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ "

Việc chứng minh công thức hệ thức lượng trong tam giác (nâng cao) dành cho bạn đọc.

Sau đó, ta sẽ áp dụng vào giải tìm *R*.

<u>Giải:</u>

Việc xác định tâm và bán kính đã nêu ở trên, ở đây không nói lại và vào thẳng vấn đề xác định bán kính *R*.

Áp dụng định lý cotang cho tam giác *ABC* ta có:

$$\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{2}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2+AC^2+BC^2}{8S_{\Delta ABC}}=\frac{BC}{AB.AC}+\frac{CA}{BA.BC}+\frac{AB}{CA.CB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2+AC^2+BC^2}{8S_{\Delta ABC}}=\frac{BC^2+AC^2+AB^2}{AB.AC.BC}$$

$$\Leftrightarrow 8S_{\Delta ABC}=AB.AC.BC \Leftrightarrow 8\frac{AB.AC.BC}{4R}AB.AC.BC \Leftrightarrow R=2$$

Vậy $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.

Lưu ý: Học sinh chỉ học những hệ thức lượng như trong sách giáo khoa lớp 10 (cả nâng cao, lẫn cơ bản) nên việc giải bài này rất khó khăn.

Câu 8. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Sở Giáo dục & Đào tạo Bắc Ninh***

Cho hình nón chứa bốn mặt cầu cùng bán kính là *r*, trong đó có ba mặt cầu tiếp xúc với đáy, tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Mặt cầu thứ tư tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên và tiếp xúc với mặt phẳng xung quanh của hình nón. Tính chiều cao của hình nón.

A. $r\left(1+\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **B.** $r\left(2+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

C. $r\left(1+\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ **D.** $r\left(1+\sqrt{6}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

Giải:

Gọi I_1,I_2,I_3,I_4 lần lượt là tâm của mặt cầu và giả sử I_4 là tâm mặt cầu thứ tự như đề.

Khi đó ta có $I_1I_2=I_1I_3=I_2I_3=2r$ (do ba mặt cầu tiếp xúc với nhau). Tương tự cũng có $I_4I_1=I_4I_2=I_4I_3=2r$.

Do đó bốn điểm I_1,I_2,I_3,I_4 tạo thành tứ diện đều cạnh bằng $2r$.

Gọi G là trọng tâm tam giác $I_1I_2I_3$ thì $I_1G=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Gọi hình nón đó sinh bởi tam giác SOA vuông tại O với SO là đường cao, OA là bán kính. Khi đó SO đi qua các điểm I_4,G.

Suy ra $SO=SI_4+I_4G+GO$. Dễ thấy $GO=r$.

Bây giờ cần tính SI_4,I_4G theo r.

Do I_4G là đường cao của tứ diện đều $I_1I_2I_3I_4$ nên $I_4G=\sqrt{I_1I_4{}^2-I_1G^2}=\frac{2r\sqrt{6}}{3}$. Như vậy đến đây có thể loại được đáp án A, B.

Gọi C,D lầm lượt là các điểm tiếp xúc của mặt cầu $(I_1,r),(I_4,r)$ tiếp xúc với hình nón. Khi đó có được $I_1I_4 // CD$.

Do đó $\angle I_1I_4G = \angle DSI_4$ mà hai tam giác SDI_3 và I_1I_4G là hai tam giác vuông nên $\Delta SDI_4 \backsim \Delta I_4GI_1$.

Suy ra $\dfrac{SI_4}{I_1I_4} = \dfrac{I_4D}{I_1G} \Rightarrow SI_4 = \dfrac{I_4D}{I_1G}.I_1I_4 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2r}.2r = r\sqrt{3}$.

Vậy chọn C.

Câu 9:

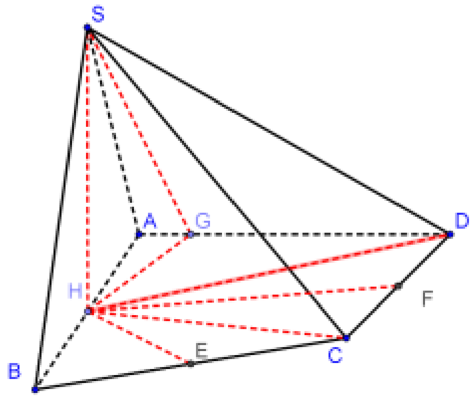
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là tứ giác lồi và góc tạo bởi $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$ với mặt đáy lần lượt là $90°,60°,60°,60°$. Biết rằng tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ là $9a$ .Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

C. $a^3\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ **D.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Phân tích đề toán: Do mặt (SAB) tạo với đáy một góc vuông nên mặt (SAB) vuông góc với đáy và do tam giác SAB vuông cân nên đường cao từ đỉnh S của tam giác SAB cũng là chiều cao khối chóp. Cần nhớ thêm diện tích của một hình lớn có thể tính bằng tổng các hình nhỏ cộng lại.

Giải:



Kẻ SH vuông góc với AB trong tam giác SAB (H thuộc AB). Từ phân tích đề bài có được H là chân đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Trong mặt đáy, kẻ HE vuông với BC ở E, HF vuông góc với CD ở F, HG vuông góc với AD ở G. Từ đó xác định được $\angle SEH = \angle SFH = \angle SGH = 60°$.

Do tam giác SAB vuông cân ở S và có $AB = a$ nên $SH = \dfrac{a}{2}$

Từ SH và $\angle SEH = \angle SFH = \angle SGH = 60°$ nên

$$HE = HF = HG = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ta có

$$P(ABCD) = AB + BC + CD + DA = 9a \Rightarrow BC + CD + DA = 8a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}HE.BC + \frac{1}{2}HF.CD + \frac{1}{2}HG.AD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.8a$$

Do $HE = HF = HG = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ nên $S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$.

Thể tích khối chóp là

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{2\sqrt{3}a^2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}a^3$$

Vậy chọn đáp án *D*.

Câu 10. ***Đề minh họa THPT Quốc gian 2017 – Lần 3***

Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng $\left(P\right)$ thay đổi cắt mặt cầu giao tuyến là đường tròn $\left(C\right)$. Hình nón $\left(N\right)$ có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn $\left(C\right)$ và có chiều cao là h $\left(h>R\right)$. Tính h để thể tích khối nón tạo bởi $\left(N\right)$ có giá trị lớn nhất.

A. $h=R\sqrt{3}$ **B.** $h=R\sqrt{2}$ **C.** $h=\dfrac{4R}{3}$ **D.** $h=\dfrac{3R}{2}$

<u>Phân tích lời giải:</u> Nhận thấy rằng đây là câu tìm h để thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất. Xuất phát từ đây, bước đầu cần phải xác định được thể tích khối nón như thế nào. Bài toán đặt ra, thể tích lớn nhất nên nghĩ đến đó chính là bài toán tìm cực trị. Phương pháp đầu tiên nghĩ đến đó chính là dùng kiến thức giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức thể tích khối nón. Muốn làm được điều này thì cần phải biến đổi thể tích khối nón về cùng một biến, lúc đó thì mới có thể xét hàm được.

Một chút kiến thức về phần này:

"(1) Thể tích khối nón có bán kính đáy r, chiều cao h:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

(2) Cho mặt cầu $S\left(O;R\right)$ *và mặt phẳng* $\left(P\right)$*, gọi d là khoảng cách từ O tới* $\left(P\right)$ *và H là hình chiếu của O trên* $\left(P\right)$*. Khi đó*

- *Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.*
- *Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tại duy nhất một điểm là H.*
- *Nếu $d>R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)."*

Giải:

Gọi x là khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P). Khi đó $h=R+x$ (do $h>R$) và bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-x^2}$.

Thể tích khối nón cần tìm là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)(R+x)$$
$$=\frac{1}{3}\pi(R+x)^2(R-x)$$

Xét hàm số $f(x)=(R+x)^2(R-x)$ với $0<x<R$.

$f'(x)=2(R+x)(R-x)-(R+x)^2=(R+x)(R-3x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{R}{3}$

Lập bảng biến thiên được $V_{\max} \Leftrightarrow x=\frac{R}{3}$.

Vậy $h=\frac{R}{3}+R=\frac{4R}{3}$. Chọn C.

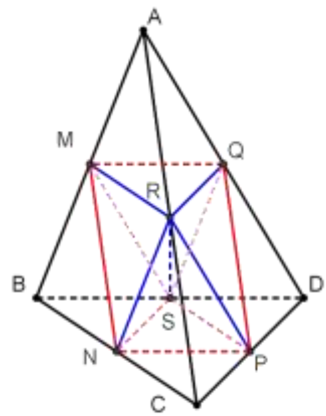
Câu 11. ***Đề minh họa THPT Quốc gian 2017 – Lần 3***

Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$

Phân tích lời giải: Giả sử hình bài toán như hình dưới. Ý tưởng xuất phát từ bài này chính là dùng tỉ lệ thể tích. Tuy nhiên, nếu dùng tỉ lệ thể tích này thi nó chỉ đúng cho khối tứ diện. Như vậy, cần phải tìm cách chia nhỏ ra thành các tứ diện nhỏ hơn (từ hình lớn). Tuy nhiên, nếu vẽ hình rồi thì việc chia nhỏ thành các tứ diện nhỏ hơn thì sẽ gặp khó khăn. Do đó, ta nghĩ đến dùng phần bù thì sẽ dễ dạng hơn, nghĩa là $V'=V-V_{A.MRQ}-V_{B.MNR}-V_{C.NMR}-V_{D.PQR}$.

Dễ thấy thì các thể tích mà thể tích tứ diện trừ đi đều dễ dàng tính theo V ban đầu và nó bằng $\frac{1}{8}V$. Vậy, áp dụng theo cách này thì sẽ nhanh hơn.



Giải:

Ta có

$$\frac{V_{A.MQR}}{V_{A.BCD}}=\frac{AM}{AB}.\frac{AR}{AC}.\frac{AQ}{AD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Suy ra $V_{A.MQR}=\dfrac{1}{8}V$. Tương tự các thể tích còn lại.

Vậy $V'=V-\dfrac{1}{2}V=\dfrac{1}{2}V$. Chọn A.

Chuyên đề 6: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An***

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S_m) $x^2+y^2+z^2+2mx-2(m-1)y-mz+m-2=0$. Với mọi $m\in\mathbb{R}$, mặt cầu (S_m) luôn đi qua một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn cố định đó.

A. $r=3$ **B.** $r=\sqrt{2}$ **C.** $r=\sqrt{3}$ **D.** $r=2$

Phân tích lời giải: Với những dạng bài như thế này thì ta thấy rằng nó rất giống với dạng bài tìm điểm cố định của đồ thị hàm số đi qua. Trước đây giải những dạng bài đó thì tìm các điều kiện để nó đúng với mọi tham số *m*. Tức là đưa về dạng $a_m m^n + a_{m-1}m^{n-1}+...+a_0=0(1)$, với các a_i chứa các ẩn *x*, *y*. Do đó điều kiện để phương trình (1) nghiệm đúng với mọi *m* thì $a_i=0,\forall i$, và từ đó tìm được điểm cố định. Với dạng bài này cũng thế, ta sẽ đưa về dạng của phương trình (1). Như vậy, bài toán trên được giải như sau:

Giải:

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)\in(C)$ cố định. Khi đó $M\in(S_m)$.

Hay $x_0^2+y_0^2+z_0^2+2mx_0-2(m-1)y_0-mz_0+m-2=0$

$\Leftrightarrow m(2x_0-2y_0-z_0+1)+x_0^2+y_0^2+z_0^2+2y_0-2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - z_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2y_0 - 2 = 0 \end{cases} \text{(do nghiệm đúng với mọi } m\text{)}$$

Khi đó, tập hợp điểm M là giao tuyến giữa mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2+2y-2=0$, tâm $I(0;-1;0)$; $R=\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-1=0$.

Ta có $d(I,(P))=1$, suy ra $r=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$. Chọn đáp án B.

Câu 2.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz về phía dương tại các điểm A, B, C sao cho tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$ **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$

C. $3x+y+z-9=0$ **D.** $x+2y+4z-21=0$

Phân tích lời giải: Đây là dạng toán viết phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn. Như vậy, cần gọi các điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ (tùy theo đề bài có các điều kiện *a, b, c*). Đối với bài này thì $a,b,c>0$. Khi đó mặt phẳng cần tìm có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Do M thuộc và (P) nên có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1$. Đây chính là điều kiện của bài toán. Tiếp theo lại có thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{abc}{6}$. Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc$ sao cho $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1$ và $a,b,c>0$. Đến đây chuyển về bài toán bất đẳng thức mà đã học trước đây. Thông thường dùng bất đẳng thức Cauchy.

Giải:

Giả sử $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Khi đó mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Do M thuộc (P) nên ta có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1$.

Thể tích tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1.2.4}{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 216$$

$\Rightarrow V_{OABC}\geq \frac{216}{6}=36$, dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}$

Giải được $a=3;b=6;c=12$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$$

Câu 3.

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua *M* và cắt các trục *Ox*, *Oy*, *Oz* tại các điểm *A*, *B*, *C* sao cho $T=\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó vecto pháp tuyến của mặt phẳng là:

A. $\vec{n}=(18;9;6)$ **B.** $\vec{n}=(2;3;6)$

C. $\vec{n}=(9;6;18)$ **D.** $\vec{n}=(3;2;6)$

<u>Giải:</u>

Giả sử $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Khi đó mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Do *M* thuộc (P) nên ta có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ (*).

$T=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Theo bất đẳng thức B.C.S:

$$1=\frac{1}{3}.\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+3.\frac{1}{c}\le\sqrt{\left(\frac{1}{9}+1+9\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

$\Rightarrow T\ge\frac{9}{91}$, dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{9}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=t$

Thế vào (*) ta được $t=\frac{19}{9}$. Suy ra $a=19;b=\frac{38}{9};c=\frac{19}{3}$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$(P):\frac{9x}{19}+\frac{9y}{38}+\frac{3z}{19}=1\Leftrightarrow 18x+9y+6z-38=0$$

Câu 4.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho sáu điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$; $A'=(a';0;0)$; $B'=(0;b';0)$; $C'=(0;0;c')$ thỏa mãn $aa'=bb'=cc'\neq 0$; $a\neq a'$, $b\neq b'$, $c\neq c'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d(O;(ABC))=d(O;(A'B'C'))$

B. $V_{OABC}=V_{OA'B'C'}$

C. Chỉ có 4 điểm A,A',B,C cùng thuộc một mặt cầu.

D. Tồn tại mặt cầu đi qua 6 điểm trên.

Giải:

Ta có $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$; $V_{OA'B'C'}=\frac{1}{6}a'b'c'$

Suy ra $\frac{V_{OABC}}{V_{OA'B'C'}}=\frac{abc}{a'b'c'}$.

Từ điều kiện $aa'=bb'=cc'=t\Rightarrow\frac{abc}{a'b'c'}=\frac{t^3}{a'^2b'^2c'^2}$.

Từ đó suy ra được V_{OABC} có thể khác $V_{OA'B'C'}$. Loại B.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ hay } bcx+acy+abz-abc=0$$

Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là:

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1 \text{ hay } b'c'x+a'c'y+a'b'z-a'b'c'=0$$

$$d\left(O;\left(ABC\right)\right)=\frac{\left|abc\right|}{\sqrt{\left(ab\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ca\right)^2}}$$

$$d\left(O;\left(ABC\right)\right)=\frac{\left|a'b'c'\right|}{\sqrt{\left(a'b'\right)^2+\left(b'c'\right)^2+\left(c'a'\right)^2}}$$

Tương tự loại A.

Giả sử $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại đi qua 4 điểm A, A', B, C. Khi đó ta có $IA^2=IA'^2=IB=IC$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-a\right)^2+y^2+z^2=\left(x-a'\right)^2+y^2+z^2\\\left(x-a\right)^2+y^2+z^2=x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\\\left(x-a\right)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(z-c\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2ax+a^2=-2a'x+a'^2\\-2ax+a^2=-2by+b^2\\-2ax+a^2=-2cz+c^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{a+a'}{2};y=\frac{b^2+aa'}{2b};z=\frac{c^2+aa'}{2c}$$

Suy ra $I\left(\frac{a+a'}{2};\frac{b^2+aa'}{2b};\frac{c^2+aa'}{2c}\right)$.

Như vậy ta đã có 4 điểm cùng thuộc 1 mặt cầu.

Kiểm tra xem B',C' có thuộc mặt cầu trên không?

$$IB^2=\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2+\left(\frac{aa'-b^2}{2b}\right)^2+\left(\frac{c^2+aa'}{2}\right)^2$$

$$IB'^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2+aa'}{2b} - b'\right) + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)$$

$$= \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2-aa'}{2b}\right) + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)$$

Suy ra $IB = IB' \Rightarrow B'$ thuộc mặt cầu nói trên. Tượng tự C'

Câu 5.

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*, biết $S(3;2;4)$, $B(1;2;3)$, $D(3;0;3)$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) chứa BI và song song với AC nhận vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến?

A. $\vec{n} = (3;4;-1)$ **B.** $\vec{n} = (1;1;0)$

C. $\vec{n} = (1;-1;0)$ **D.** $\vec{n} = (3;5;4)$

Giải:

Gọi H là tâm hình vuông. Khi đó $H(2;1;3)$.

Ta có $\overrightarrow{SH} = (-1;-1;-1)$.

Phương trình đường thẳng SH là: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2+t \\ z = 4+t \end{cases}$

Ta có $I \in SH$ nên $I(3+t;2+t;4+t)$.

$\overrightarrow{SI} = (t;t;t), \overrightarrow{BI} = (t+2;t;t+1)$.

Do I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $SI^2 = BI^2 \Leftrightarrow 3t^2 = (t+2)^2 + t^2 + (t+1)^2 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6}$.

Suy ra $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BI} = (7;-5;1)$.

Tới đây, loại được đáp án B, C.

Do $\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{BD}$ có giá vuông góc với AC nên

$$\overrightarrow{u_2} = \left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{BD}\right] = -2(1;1;-2)$$

Suy ra $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-9;-15;-12)$.

Vậy VTPT là $\vec{n} = (3;5;4)$

Câu 6. *Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp*

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ với a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Biết a, b, c thay đổi thì tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;1;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=\sqrt{3}$ **B.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $d=0$

Phân tích lời giải: Đầu tiên phải tìm được tâm của mặt cầu

Giả sử phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm $O(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ có dạng:

$$(S): x^2+y^2+z^2-2a'x-2b'y-2c'z=0$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a'a=0 \\ b^2-2b'c=0 \\ c^2-2c'c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=\dfrac{a}{2} \\ b'=\dfrac{b}{2} \\ c'=\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Suy ra $I=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$ và $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Với $I(x;y;z)$ bất kì là tâm mặt cầu, ta luôn có

$$x=\frac{a}{2};y=\frac{b}{2};z=\frac{c}{2}\Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2}\Leftrightarrow x+y+z-2=0$$

Vậy I luôn thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$.

$$d(M;(P))=\frac{|1+1+-1-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 7. *Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1*

Trông không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(0;2;-1)$, $C(2;-3;1)$. Điểm M thỏa mãn $T=MA^2-MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x_M^2+2y_M^2+3z_M^2$

A. $P=101$ **B.** $P=134$ **C.** $P=114$ **D.** $P=162$

Phân tích lời giải:

Giả sử ta có điểm *I*, khi đó:

$$T=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+IA^2-IB^2+IC^2$$

Khi đó, ta cần chọn điểm *I* sao cho $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Như vậy, $T\geq IA^2-IB^2+IC^2$ và dấu bằng "=" xảy ra khi $M\equiv I$.

Tại sao lại chọn điểm *I* như vậy? Lí do mà chọn đơn giản là phải có được tích vô hướng $2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=0$ mà điểm *M* cần tìm nên chỉ có thể chọn điểm *I* sao cho $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Giả sử $I(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ nên $I(3;-7;3)$.

Vậy điểm $M(3;-7;3)$ và $P=134$.

Lưu ý: *Khó khăn của bài này là phải nghĩ ra được vì sao phải chọn điểm I như vậy.*

Câu 8. ***Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – Lần 2***

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$, với $m>0,n>0$ thỏa mãn $m+n=1$. Biết rằng khi *m*, *n* thay đổi, tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua *D*. Tính bán kính *R* của mặt cầu đó.

A. $R=1$ **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $R=\frac{3}{2}$ **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải:

Gọi $I(a;b;c)$ và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu cố định. Khi đó, ta có $ID=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}=R$ (*).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{1}=1 \text{ hay } nx+my+mnz-mn=0$$

$$d(I;(ABC))=\frac{|na+mb+mnc-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=\frac{|na+mb+mnc-mn|}{1-mn}=R$$

$\Leftrightarrow |na+mb+mnc-mn|=R(1-mn)$.

Với $n=1-m$, ta có

$\Leftrightarrow |(1-m)a+mb+m(1-m)c-m(1-m)|=R(1-m(1-m))$

$\Leftrightarrow |(1-c)m^2+(-a+b-c-1)m+a|=R(1-m+m^2)$ (1)

TH1: $(1)\Leftrightarrow(1-c)m^2+(-a+b-c-1)m+a=R(1-m+m^2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-c=R\\-a+b-c-1=-R\\a=R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\b=-R\\c=1-R\end{cases}$$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\sqrt{2(R-1)^2+R^2}=R\Leftrightarrow R=1$.

TH1: Làm tương tự.

Câu 9.

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 3mx+5\sqrt{1-m^2}y+4mz+20=0$. Biết rằng khi m thay đổi trên đoạn $[-1;1]$ thì mặt phẳng (P) luôn tiếp xúc với một mặt cầu (S) cố định. Tìm bán kính mặt cầu đó.

A. $R=\sqrt{5}$ **B.** $R=\sqrt{3}$ **C.** $R=2$ **D.** $R=4$

Giải:

Ta đã biết mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R khi và chỉ khi $d(I;(P))=R$ hay $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R$. Như vậy, ta có:

Ta có VTPT $\vec{n}=\left(3m;5\sqrt{1-m^2};4m\right)$ nên

$$|\vec{n}|=\sqrt{9m^2+25\left(1-m^2\right)+16m^2}=5$$

Do đó ta cần chọn điểm $I(a;b;c)$ sao cho

$\left|3ma+5\sqrt{1-m^2}b+4mz+20\right|=k$ không đổi.

Vậy ta có $O(0;0;0)$

Khi đó $d(O;(P))=\frac{20}{5}=4$. Hay mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và $R=4$.

Câu 10.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\left(1-m^2\right)x+2my+2\left(1+m^2\right)z+5m^2+4m+12=0$. Biết rằng khi m thay đổi thì mặt phẳng (P) luôn tiếp xúc với một mặt cầu (S) cố định và tâm của mặt cầu đó thuộc mặt phẳng $(Q):2x-3y+z=0$. Tìm bán kính mặt cầu đó.

A. $R=\frac{71\sqrt{5}}{10}$ **B.** $R=\sqrt{3}$ **C.** $R=\sqrt{5}$ **D.** $R=4$

Giải:

Với mỗi $I(x;y;z)$, ta có:

$$d(I;(P))=\frac{\left|(1-m^2)x+2my+2(1+m^2)z+5m^2+4m+12\right|}{\sqrt{(1-m^2)^2+4m^2+4(1+m^2)^2}}$$

$$=\frac{\left|m^2(-x+2z+5)+2m(y+2)-x+2z+12\right|}{\sqrt{5}.(m^2+1)}$$

Để (P) luôn tiếp xúc với mặt (S) cố định thì $d(I;(P))=k$ không đổi. Nghĩa là tử và mẫu phải tỉ lệ với nhau.

Do đó $\begin{cases} y+2=0 \\ \dfrac{-x+2z+5}{1}=\dfrac{-x+2z+12}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-\dfrac{17}{2} \end{cases}$

Do đó $I\left(-\dfrac{17}{2};-2;z\right)$. Mặt khác $I\in(Q)$ nên

$$-\frac{17}{2}.2-3.(-2)+z=0 \Leftrightarrow z=11$$

Vậy $I=\left(-\dfrac{17}{2};-2;11\right)$ và $R=\dfrac{71\sqrt{5}}{10}$

Câu 11. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai***

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4)$; $B(a;b;c)$. Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy),(Oxz)$, (Oyz). Biết rằng M,N,P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Tính giá trị tổng của $a+b+c$.

A. 11 **B.** -11 **C.** 17 **D.** -17

Giải:

Phương trình $(Oxy): z=0$, $(Oyz): x=0$, $(Oxz): y=0$

Giả sử $M(x_M;y_M;0)$, $N(x_N;0;z_N)$, $P(0;y_P;z_P)$.

Theo giả thiết ta có M là trung điểm của AN.

$$x_M=\frac{5+x_N}{2};y_M=-\frac{3}{2};0=\frac{4+z_N}{2}$$

$$\Rightarrow 2x_M=6+x_N;y_M=-\frac{3}{2};z_N=-4$$

Suy ra $M\left(x_M;-\frac{3}{2};0\right), N(x_N;0;-4)$.

Mặt khác ta có N là trung điểm MP

$x_N=\frac{x_M}{2};0=\frac{y_M+y_P}{2};-4=\frac{z_P}{2}\Rightarrow 2x_N=x_M;y_P=\frac{3}{2};z_P=-8$

Từ đó suy ra được $M\left(4;-\frac{3}{2};0\right), N(2;0;-4), P\left(0;\frac{3}{2};-8\right)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AN}$ với

$\overrightarrow{AB}=(a-6;b+3;c-4);\overrightarrow{AN}=(-4;3;-8)$

Suy ra $a=-2;b=3;c=-12$. Vậy $a+b+c=-11$.

Câu 12. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và tuổi trẻ - Lần 8***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ cón $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(1;-2;2)$. Các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện $ABCD$ chia không gian $Oxyz$ thành số phần là:

A. 9 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 16

Giải:

Ta có 3 đường thẳng chia mặt phẳng thành 7 phần.

3 mặt phẳng chia không gian thành 8 phần, mặt phẳng thứ 4 cắt 3 mặt phẳng trước thành 3 giao tuyến, 3 giao tuyến này chia mặt phẳng thứ 4 thành 7 phần, mỗi phần lại chia 1 phần của không gian thành 2 phần.

Vậy 4 mặt phẳng chia không gian thành $8+7=15$.

Câu 13. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017- Toán học và tuổi trẻ - Lần 8***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4), B(4;6;-9)$. Gọi C, D là các điểm thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $CD=\sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó trung điểm của CD

A. $\left(\dfrac{79}{35};\dfrac{64}{35};\dfrac{102}{35}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{181}{5};-\dfrac{104}{5};-\dfrac{42}{5}\right)$

C. $\left(\dfrac{101}{28};\dfrac{13}{14};\dfrac{69}{28}\right)$ **D.** $(2;2;3)$

<u>Phân tích lời giải:</u> Bài này là một bài khá lạ. Đề bài không đề cập đến đường cao của tứ diện. Để làm được bài này cần nhớ tới một công thức đã được chứng minh ở trên là $V=\dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)$ ***(1)*** và một công thức đó là $r=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{tp}}$ ***(2)*** (Công thức này sẽ được chứng minh ở cuối câu này). Một công thức cũng giúp ích không kém là

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[AB,AC\right]\right\|$ ***(3)***. Bài này yêu cầu học sinh nhớ nhiều công thức và cần phải thao tác một cách nhanh và chính xác.

Giải:

Do $C,D\in\Delta$ nên

$C\left(-1+3t_1;4-2t_1;4-t_1\right);D\left(-1+3t_2;4-2t_2;4-t_2\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(2;3;-5\right);\overrightarrow{AC}=\left(-3+3t_1;1-2t_1;8-t_1\right);$

$\overrightarrow{AD}=\left(-3+3t_2;1-2t_2;8-t_2\right)$

Ta có

$CD^2=14=9\left(t_1-t_2\right)^2+4\left(t_1-t_2\right)^2+\left(t_1-t_2\right)^2\Leftrightarrow\left(t_1-t_2\right)^2=1$

$\Leftrightarrow t_2=t_1+1$ (do vai trò của t_1,t_2 như nhau)

V_c lớn nhất $\Leftrightarrow r$ lớn nhất

Từ công thức ***(1)*** thấy V_{ABCD} không đổi.

Công thức số ***(2)*** thì r lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{tp} nhỏ nhất.

Mặt khác $S_{tp}=S_{ABC}+S_{ABD}+S_{BCD}+S_{ADC}$

Do $S_{BCD};S_{ADC}$ không đổi nên cần tìm min của $S_{ABC}+S_{ABD}$

$$S_{ABC}+S_{ABD}=\frac{1}{2}\left(\left\|\left[AB,AC\right]\right\|+\left\|\left[AB,AD\right]\right\|\right)$$

$$\left\|\left[AB,AC\right]\right\|=\sqrt{\left(29-13t_1\right)^2+\left(1+13t_1\right)^2+\left(11-13t_1\right)^2}$$

$$\left\|\left[AB,AD\right]\right\|=\sqrt{\left(29-13t_2\right)^2+\left(1+13t_2\right)^2+\left(11-13t_2\right)^2}$$

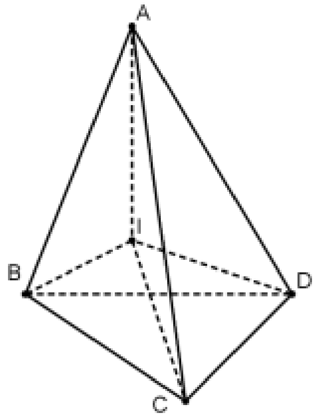
$$=\sqrt{\left(16-13t_1\right)^2+\left(14+13t_1\right)^2+\left(2+13t_1\right)^2}$$

Với $t_2=t_1+1$.

Đặt $x=13t_1$. Khi đó

$$f\left(x\right)=\sqrt{\left(29-x\right)^2+\left(1+x\right)^2+\left(11-x\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(26-x\right)^2+\left(14+x\right)^2+\left(2+x\right)^2}$$
$$=\sqrt{3x^2-78x+963}+\sqrt{3x^2+456}$$
$$f'\left(x\right)=\frac{3x-39}{\sqrt{3x^2-78x+963}}+\frac{3x}{\sqrt{3x^2+456}}$$
$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{13}{2}\Rightarrow t_1=\frac{1}{2}$. Vậy $I\left(2;2;3\right)$.

Chứng minh Công thức số (2):

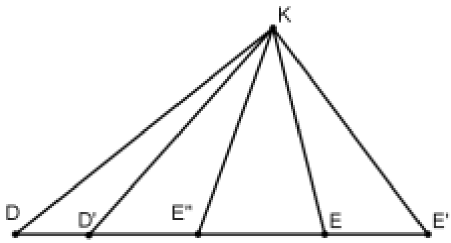


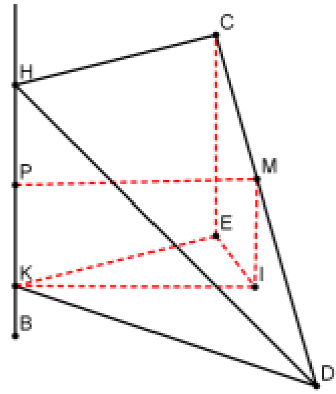
Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$

Ta có:

$$V_{ABCD}=V_{IBCD}+V_{IACD}+V_{IABD}+V_{IABC}$$
$$=\frac{1}{3}r.S_{BCD}+\frac{1}{3}r.S_{ACD}+\frac{1}{3}r.S_{ABD}+\frac{1}{3}r.S_{ABC}$$
$$=\frac{1}{3}r\left(S_{BCD}+S_{ABD}+S_{ACD}+S_{ABC}\right)=\frac{1}{3}r.S_{tp}$$
$$\Rightarrow r=\frac{3V_{ABCD}}{S_{tp}}$$

Một cách giải khác tham khảo từ giáo viên khác (Thầy Võ Quang Mẫn)





Hạ *CH, DK* vuông góc với *AB*. Chú ý

$$V=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right).$$

Tương tự cách xác định các giá trị không đổi và xác định được thể tích tứ diện *ABCD* lớn nhất $\Leftrightarrow$ *CH+DK* nhỏ nhất.

Dựng hình chữ nhật *CHKE.*

Khi đó $ED=\text{const}, d\left(K;ED\right)=\text{const}$.

Dựng tam giác $E'KD'$ cân tại E và $E'D'=ED$. Dựng tam giác EKE'' cân tại K, khi đó D' là trung điểm của DE'' và

$$DK+CH=DK+EK=DK+E''K\geq 2KD'=D'K+E'K$$

Dấu bằng xảy ra khi $KI\perp DE$ hay *MP* là đoạn vuông góc chung của *AB* và *CD*. Suy ra $M\left(2;2;3\right)$. Chọn D

Câu 14:

Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có phương trình

$\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2=4$ và $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-mt\\z=(m-1)t\end{cases}$, với m là tham số thực . Giả sử (P) và (P') là hai mặt phẳng qua *d*, tiếp xúc với (S) lần lượt tại T và T'. Khi m thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng TT'

A. $\dfrac{4\sqrt{13}}{5}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$

Phân tích lời giải: Đề toán này gây một phần khó khăn ở phần suy nghĩ vẽ hình. Sau khi vẽ hình được thì cần cố gắng xác định các giá trị không đổi quy các giá trị thay đổi về giá trị không đổi.

Giải:

Gọi $I(1;2;3)$, $R=2$ lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Gọi E là điểm nằm trên đường d sao cho nằm chung mặt phẳng (OTT') và thuộc trung trực của TT'. Gọi M là giao điểm của TT' và IE.

Dễ dàng chứng minh được IE là trung trực của TT'. Từ đó M là trung điểm của TT' . Lấy D là hình chiếu của I trên d.

Ta có:

$$TT'=2MT=2\frac{IT.ET}{IE}=2.\frac{2.\sqrt{IE^2-IT^2}}{IE}$$

$$\Rightarrow TT'^2=16\frac{IE^2-IT^2}{IE^2}=16\left(1-\frac{4}{IE^2}\right)$$

$$TT'_{\min}\Leftrightarrow IE_{\min}\Leftrightarrow E\equiv D$$

Do $E\in d$ nên $I\left(1+t;-mt;(m-1)t\right)$

$$\overrightarrow{IE}=\left(t;-mt-2;(m-1)t-3\right)$$

$$d_{(I,d)} = IE = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}, \left(A(1;0;0) \in d\right)$$

$$\Leftrightarrow d_{(I,d)} = \frac{\sqrt{4+9+(5m-2)^2}}{\sqrt{1+m^2+(m-1)^2}} = \sqrt{\frac{4+9+(5m-2)^2}{2+2m^2-2m}}$$

$$\Leftrightarrow d_{(I,d)} = \sqrt{\frac{25m^2-20m+17}{2+2m^2-2m}}$$

Xét $f(x) = \dfrac{25x^2-20x+17}{2x^2-2x+2}$ với $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-10x^2+32x-6}{(2x^2-2x+2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên được

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25}{3} \Rightarrow IE^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow TT' = \frac{4\sqrt{13}}{5}.$$

Vậy chọn đáp án A

Câu 15. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Sở Giáo dục & Đào tạo Nam Định***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;0)$, $B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Ax, By là hai tiếp tuyến của (S) và $Ax \perp By$. Gọi M, N lần lượt là điểm di động trên Ax, By sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu (S). Tính giá trị của $AM.BN$.

A. $AM.BN = 19$ **B.** $AM.BN = 18$

C. $AM.BN = 38$ **D.** $AM.BN = 48$

Phân tích lời giải (Hình ở dưới): Nhắc lại một chút lý thuyết về tiếp tuyến của mặt cầu:

"Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó:

(1) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

(2) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.".

Như vậy, đối với bài này, nếu MN tiếp xúc với (S) tại điểm C thì $AM = MC; BN = NC$. Khi đó $AM.BN = MC.NC$ và $AM + BN = MN$ (chuyển hai đoạn thẳng rời rạc về đoạn thẳng chung điểm thì dễ dàng làm hơn). Nếu để ý thì ta có $AM \perp BN, AM \perp AB$ nên $AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN$. Như vậy để tính được tích $AM.BN$ thì áp dụng định lý Pythagore cho tam giác AMN là xong.

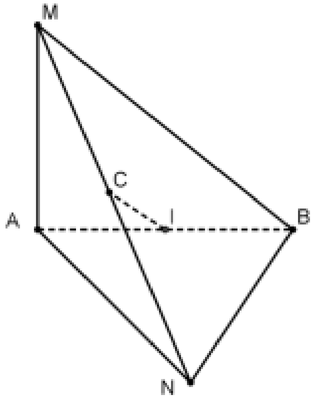
Giải:

Gọi I là tâm mặt cầu (S). MN tiếp xúc với (S) tại C. Khi đó $AM = MC, BN = NC$.

Ta có $AM \perp BN, AM \perp AB$

$\Rightarrow AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN$.

$\Rightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2$ (định lý Pythagore trong ΔAMN)



Mặt khác, $AN^2 = AB^2 + BN^2$ (do BN là tiếp tuyến nên $BN \perp AB$ và áp dụng định lý Pythagore).

Do đó

$MN^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2$ hay

$\left(AM + BN\right)^2 = AM^2 + BN^2 + AB^2$

$\Leftrightarrow AB.BN = \dfrac{AB^2}{2}$

Ta có

$\overrightarrow{AB} = \left(2;-5;2\right) \Rightarrow AB = \sqrt{38}$.

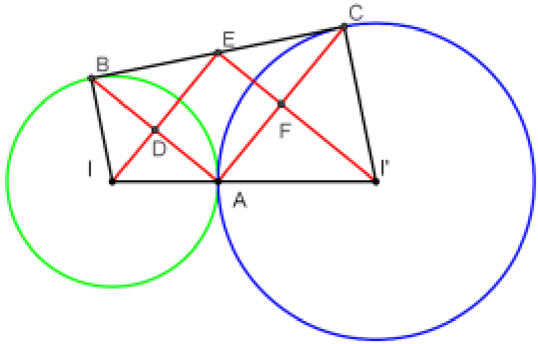
Vậy $AM.BN = 19$ (đáp án A)

Câu 16. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề thi off thầy Đoàn Trí Dũng***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $\left(S\right)$ và S' tiếp xúc ngoài tại điểm $A\left(2;1;1\right)$. Một tiết diện chung ngoài của hai mặt cầu lần lượt tiếp xúc với $\left(S\right)$ tại $B\left(3;1;-2\right)$ và tiếp xúc với $\left(S'\right)$ tại C. Xác định tọa độ điểm C biết C nằm trên đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$

A. $\left(0;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ **B.** $C\left(2;\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

C. $C\left(1;0;0\right)$ **D.** $C\left(4;1;-1\right)$



Phân tích bài toán: Một tính chất cũ ở hình học lớp 9 $AB \perp AC$. Nếu nhớ được tính chất đó thì bài toán sẽ không còn quá khó.

Giải:

Chứng minh tính chất đã đề cập ở trên thông qua tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau cũng ở lớp 9 thì có $\angle ADE = \angle AFE = 90°$ và EF, ED lần lượt là đường phân giác của 2 góc kề bù $\angle AEC, \angle AEB$ nên $\angle DEF = 90°$. Từ đó $ADEF$ là hình chữ nhật nên $AB \perp AC$

Ta có

$A(2;1;1), B(3;1;-2), C(3t+1;t;-t)$

$\overrightarrow{AB} = (1;0;-3), \overrightarrow{AC} = (3t-1;t-1;-t-1)$

$AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Rightarrow C\left(0;\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Chọn câu *A*

Câu 17. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An***

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-3}$ và hai điểm $A(1;-1;-1)$, $B(-2;-1;1)$. Gọi *C, D* là hai điểm phân biệt di động trên đường thẳng Δ sao cho tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện *ABCD* luôn nằm trên tia *Ox*. Tính độ dài đoạn thẳng *CD*.

A. $\dfrac{12\sqrt{17}}{17}$ **B.** $\sqrt{17}$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{11}$ **D.** $\sqrt{13}$

Phân tích lời giải: Bài toán trên đã có hai mặt phẳng hoàn toàn xác định được là (ACD) và (BCD). Gọi *I* là tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện. Khi đó dễ dạng áp dụng được điều kiện tiếp xúc đối với hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Kết hợp với điểm *I* thuộc tia *Ox* nên sẽ tìm được tọa độ điểm *I* và bán kính mặt cầu đó. Yêu cầu bài toán là tìm độ dài *CD*. Do đó cần xác định được tọa các điểm *C, D*. Ta lại áp dụng điều kiện tiếp xúc đối với mặt phẳng (CAB) hay (DAB) để tìm tọa độ điểm *C, D*. Nhắc lại cách viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và qua điểm *M* không thuộc Δ:

"Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$; *cho điểm* $M(x_M;y_M;z_M)\notin\Delta$. *Khi đó các bước viết phương trình:*

Bước 1: *Lấy điểm* $A\in\Delta$, *tính* $\overrightarrow{AM}$. *Xác định VTCP của* Δ.

Bước 2: *Tính* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=\left(A;B;C\right)$. *Đây chính là VTPT của mặt phẳng.*

Bước 3: *Viết phương trình mặt phẳng qua* M, *nhận VTPT* $\vec{n}$ *có dạng* $A\left(x-x_M\right)+B\left(y-y_M\right)+C\left(x-x_M\right)=0$ *"*

<u>Giải:</u>

Với cách viết phương trình mặt phẳng như trên được:

$\left(ACD\right):2x+y+2z+1=0$; $\left(BCD\right):x+2y+2z+2=0$.

Gọi $I\left(t;0;0\right)\in Ox$. Khi đó

$$d\left(I;\left(ACD\right)\right)=d\left(I\left(BCD\right)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|2t+1\right|}{3}=\frac{\left|t+2\right|}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$$

Do I thuộc tia Ox nên $t>0$. Do đó $t=1$.

Suy ra $I\left(1;0;0\right)$ và $r=1$.

Gọi $C\left(2t+2;2t+1;-3t-3\right)\in\Delta$.

$\overrightarrow{CA}=\left(-2t-1;-2t-2;3t+2\right)$;

$\overrightarrow{CB}=\left(-2t-4;-2t-2;+3t+4\right)$.

Ta có $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]=\left(4t+4;5t+4;6t+6\right)$.

Phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là:

$$\left(4t+4\right)\left(x-1\right)+\left(5t+4\right)\left(y+1\right)+\left(6t+6\right)\left(z+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow (4t+4)x+(5t+4)y+(6t+6)z+7t+6=0$.

$$d(I;(ABC))=1 \Leftrightarrow \frac{|11t+10|}{\sqrt{(4t+4)^2+(5t+4)^2+(6t+6)^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{8}{11} \end{array}\right.$$

Suy ra $C(0;-1;0)$; $D\left(\frac{6}{11};-\frac{5}{11};-\frac{9}{11}\right)$ hoặc ngược lại.

Do đó $CD=\sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}\right)^2}=\frac{3\sqrt{17}}{11}$. Chọn C.

Câu 18.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d qua A có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90^0. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $H(-2;-1;3)$ **B.** $I(-1;-2;3)$

C. $K(3;0;15)$ **D.** $J(-3;2;7)$

Giải:

Phương trình đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-4}$.

Do $B \in d$ nên $B(3b+1;4b+2;-4b-3)$ mà $B \in (P)$ nên $b=-1$. Suy ra $B(-2;-2;1)$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Khi đó phương trình $AA': \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Và dễ dàng tìm được tọa độ điểm $A'(-3;-2;-1)$.

Do M nhìn AB dưới góc 90^0 nên $MA^2+MB^2=AB^2$.

Mặt khác ta có $MA \geq AA'$ (tính chất cạnh góc vuông cạnh huyền). Do đó $AB^2=MA^2+MB^2 \geq MB^2+AA'^2$.

Suy ra $MB^2 \leq AB^2-AA'^2=A'B^2$.

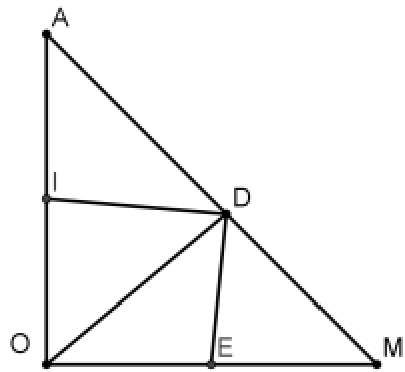
Vậy $\max MB = A'B \Leftrightarrow M \equiv A'$. Từ đó viết được phương trình và kiểm tra xem điểm nào thuộc.

Câu 19.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn đi qua tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tìm bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$ **B.** $R=1$ **C.** $R=4$ **D.** $R=\sqrt{2}$

<u>Phân tích lời giải:</u> Do các điểm A,D,M,E cùng thuộc một mặt phẳng (OAM) nên sẽ chuyển những điểm đó về hình học phẳng và chứng minh các tính chất đó giống như trong hình học phẳng trước đây đã học. Ta có các nhận định sau:



- Tam giác OAM vuông tại O.
- O, A không đổi nên gọi I là trung điểm OA thì I cố định. Và D thuộc mặt cầu cố định đường tâm I và đường kính OA.
- Tam giác ODM vuông tại D và E là trung điểm OM nên góc $ODE = DOE$.
- Tam giác OAD vuông tại D nên $IA = IO = ID = 2$ không đổi nên dự định đây chính là bán kính mặt cầu tiếp xúc với DE. Như vậy cần phải chứng minh được $ID \perp DE$.

<u>*Giải:*</u>

Bạn đọc tự chứng minh các nhận định 1, 2, 3 (theo thứ tự trên. Bây giờ chứng minh nhận định 4.

Ta có góc $ODI = IOD$. Từ đó suy ra

$$\angle IDE = \angle IDO + \angle ODE = \angle IOD + \angle DOE = \angle IOE = 90^0$$

Suy ra $ID \perp DE$. Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm I bán kính bằng 2. Chọn A.

Câu 20.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$$

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$$

Cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu tâm thuộc mặt phẳng chứa đường tròn (C) và tiếp xúc với ba đường đường thẳng *AB, AC,BC.*

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** vô số

Phân tích lời giải: Như đã biết, trong mặt phẳng có 4 đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác. Và ở đây, cũng dự đoán rằng sẽ có 4 mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng đó.

Sau đây, xin nhắc một số kiên thức về vấn đề tập hợp tâm của một mặt cầu thỏa mãn điều kiện nào đó.

Bài toán 1. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.

Giải. Giả sử đường tròn cố định (C) tâm I bán kính r nằm trên mặt phẳng (P). Xét đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P). Đường thẳng d được gọi là trục của đường tròn. Giả sử O là tâm của mặt cầu (S) chứa đường tròn (C) thì O cách đều mọi điểm của (C). Vì vậy chân đường vuông góc hạ từ O xuống mặt phẳng (P) chính là tâm I của (C). Điều đó xảy ra khi và chỉ khi điểm $O \in d$.

Kết luận: Tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của nó.

Bài toán 2. Tìm tập hợp tâm những mặt cầu luôn cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

Giải. Giả sử tam giác ABC cho trước nằm trong mặt phẳng (P). Mặt cầu (S) tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC sẽ giao với mặt phẳng (P) theo một đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC, chính là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo bài toán 1, tập hợp tâm các mặt cầu luôn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC là trục đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Như vậy, muốn kiểm tra xem có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với ba cạnh thì ta cần xác định rằng có bao nhiêu điểm I với I là tâm mặt cầu đó. Và ta cần xác định tới 4 trường hợp. Vì với một tam giác, có tới 4 đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác.

Giải:

Mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-1=0$.

Gọi (P) mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$.

Khi đó, tập hợp các điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x+2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow 6x+3y+2z=0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 6x+3y+2z=0$.

Dễ thấy (P) song song với (ABC). Như vậy, ứng với mỗi đường tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC thì ta tìm được duy nhất một tâm mặt cầu. Vậy có 4 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn C.

Câu 21. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 - Trường THPT chuyên KHTN - Hà Nội – Lần 5***

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tứ diện *ABCD* có tọa độ các đỉnh lần lượt là $A(6;-1;1), B(4;0;-2)$, $C(5;1;-1), D(3;2;-6)$. Các điểm P,Q di chuyển trong không gian thỏa mãn $PA=QB, PB=QC, PC=QD$, $PD=QA$. Biết rằng mặt phẳng trung trực của *PQ* luôn đi qua điểm *X* cố định. Vậy *X* sẽ nằm trong mặt phẳng nào dưới đây ?

A. $x-3y-3z-9=0$ **B.** $3x-y+3z-3=0$

C. $3x-3y+z-6=0$ **D.** $2x+2y-6z+39=0$

Vì lý do đề làm sai đáp án nên chúng tôi đã sửa lại các điểm A, B, C, D sao cho phù hợp với đáp án và có chút thay đổi đáp án.

Phân tích đề bài: Mặt phẳng trung trực của *PQ*, điều này sẽ giúp liên tưởng tới trung điểm của đoạn *PQ*. Ngoài ra để có thể làm được câu này cần nhớ tới $PQ^2=\overrightarrow{PQ}^2$

Giải

Gọi I là trung điểm của PQ .

Gọi G là trọng tâm tứ diện *ABCD* nên $G\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2};-2\right)$.

Ta có:

$$PA = QB, PB = QC, PC = QD, PD = QA$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{QB}^2; \overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{QC}^2; \overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{QD}^2; \overrightarrow{PD}^2 = \overrightarrow{QA}^2$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{PA}^2 - \overrightarrow{QA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 - \overrightarrow{QB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 - \overrightarrow{QC}^2 + \overrightarrow{PD}^2 - \overrightarrow{QD}^2 = 0$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{PQ} = 0$$
$$\Rightarrow 8\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow IG \perp PQ$$

Vậy G là điểm cố định mà mặt phẳng trung trực PQ đi qua. Thay vào các đáp án thấy đáp án A thỏa.

Câu 22. ***Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Trường THPT huyên Lam Sơn – Thanh Hóa***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho phương trình ba mặt phẳng lần lượt là: $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$; $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại ba điểm A, B, C. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = AB^2 + \dfrac{144}{AC}$

A. $\min T = 72\sqrt[3]{3}$ **B.** $\min T = 54\sqrt[3]{2}$

C. $\min T = 108$ **D.** $\min T = 72\sqrt[3]{4}$

<u>Phân tích lời giải:</u> Dễ thấy ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ song song với nhau. Một đường thẳng d cắt cả ba mặt tại ba điểm A, B, C nên ta nghĩ đến một kiến thức cũ: “***Định lý Thales trong không gian***”. Định lý phát biểu như sau:

“Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì trên các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. Nghĩa là, nếu ba mặt

phẳng đôi một song song $(P),(Q),(R)$ cắt các đường thẳng a,a' lần lượt tại A, B, C và A',B',C' thì $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$ ".

Nhân tiện, nhắc lại *"**Định lý Thales đảo**"*. Định lý phát biểu như sau:

"Giả sử trên các đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A,B,C và $A',B'C'$ sao cho $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$. Khi đó, ba đường thẳng AA',BB',CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng song song với cùng một mặt phẳng."

Như vậy, với kiến thức trên, ta sẽ áp dụng như thế nào? Yêu cầu bài toán, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Ta sẽ nghĩ đến việc dùng bất đẳng thức để giải. Chẳng hạn như dùng bất đẳng thức Cauchy. Nếu áp dụng bất đẳng thức này thì cần phải đưa về về cùng ẩn là AB hoặc AC. Do đó, áp dụng định lý Thales để có thể biểu diễn AB theo AC hoặc ngược lại. Nếu vậy, cần phải xác định đường đường thẳng d' cắt ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ sao cho có được tỉ lệ. Đường đó chính là đường thẳng vuông góc với cả ba mặt phẳng đó. Vì sao lại vậy? Do khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, ta có thể tính được các khoảng cách chính là đoạn giao điểm của hai mặt phẳng với đường thẳng vuông góc đó. Từ đó áp dụng định lý Thales được.

Giải:

Giử sử d' cắt ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A',B',C'. Khi đó theo định lý Thales có

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \text{ hay } AC=\frac{A'C'}{A'B'}.AB.$$

Lấy $M(0;0;1)$. Từ đó có

$$A'B' = d\left(M,(Q)\right) = \frac{|1+8|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$$

$$A'C' = d\left(M;(R)\right) = \frac{|1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Suy ra $AC = \frac{1}{3}AB$. Và

$$T = AB^2 + \frac{144}{AC} = AB^2 + \frac{432}{AB} = AB^2 + \frac{216}{AB} + \frac{216}{AB}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{AB^2.\frac{216}{AB}.\frac{216}{AB}} = 3\sqrt[3]{216^2} = 108$$

Câu 23:

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho tọa độ điểm $A(1;0;2), B(-2;0;5), C(0;-1;7)$. Một điểm *S* di động trên đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại *A*. Gọi *D,E* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB,SC*. Biết rằng khi *S* di động trên *d* thì đường thẳng *DE* luôn đi qua 1 điểm *F* cố định. Tính khoảng cách từ *F* đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-9=0$

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

<u>Phân tích bài toán:</u> Do nếu điểm cố định thì nằm trong mặt đáy vì đáy là mặt đã cố định và *DE* hướng xuống nên dự đoán *F* là giao điểm của tiếp tuyến tại *A* của đường trong tâm tam giác *ABC* và *BC*.

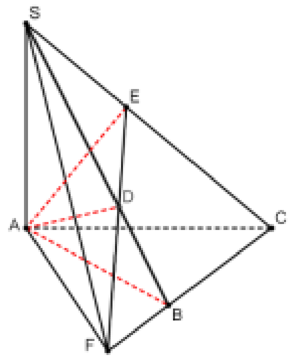
<u>Giải:</u>

Ta có : $\overrightarrow{AB}=(-3,0,3),\overrightarrow{AC}=(-1;-1;5),\overrightarrow{BC}=(2;-1;2)$.

Kiểm tra được tam giác ABC vuông tại B

Chứng minh được $AD\perp(SBC); BC\perp(SAB)$,AF $\perp(SAC)$

Gọi D' là giao điểm của EF và SB. Do $BC\perp(SAB)$ nên $BC\perp AD'(1)$



Do $SC\perp AE, AF\perp SC \Rightarrow SC\perp(AEF)\Rightarrow SC\perp AD'(2)$

Từ (1) và (2) suy ra được D' là hình chiếu của A lên mặt (SBC) mà D cũng là hình chiếu của A lên mặt (SBC) nên D trùng D'. Vậy đã có được điểm F.

Phương trình đường thẳng $BC:\begin{cases}x=-2+2t\\y=0-t\\z=5+2t\end{cases}$

Do $F\in BC$ nên $F(-2+2t;-t;5+2t)$

Lại có $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-1).(2t-3)+(-1)(-t)+5.(2t+3)=0$

$\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow F(-6;2;1)$ và $d_{(F,(P))}=3$. Vậy chọn B.

Câu 24: ***Đề minh họa THPT Quốc gia 2017 – lần 3***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu

$$(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0.$$

Giả sử điểm $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN = 3$ **B.** $MN = 1 + 2\sqrt{2}$

C. $MN = 3\sqrt{2}$ **D.** $MN = 14$

Phân tích lời giải: Nhận thấy góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng MN bằng 45^0 không đổi. Hay nói cách khác, gọi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P) thì góc $NMH = 45^0$ không đổi. Khi đó $MN = \frac{NH}{\sin 45^0} = NH\sqrt{2}$. Do đó dẫn đến MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. NH lớn nhất khi và chỉ khi NH đi qua tâm mặt cầu. Như vậy, hoàn toàn tính được NH và suy ra $MN = NH\sqrt{2}$ là xong.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = 1$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có $d(I,(P)) = 2$. Suy ra $NH = NI + d(I,(P)) = 3$.

Vậy $MN = NH\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Câu 25: ***(Đề thi thử THPT Quốc gia 2017 – Đề thi của thầy Đoàn Trí Dũng)***

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tọa độ điểm $A(0;0;2)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2\end{cases}$. Gọi M là một điểm di động trên trục hoành, N là một điểm di động trên Δ sao cho $OM+AN=MN$. Khi đó MN luôn tiếp xúc với một cầu cố định có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $R=\dfrac{1}{2}$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Phân tích bài toán:</u> Cách thức chọn tâm đã nêu ở câu 10, chuyên đề này.

<u>Giải:</u>

Gọi $M(m;0;0),N(0;n;2)$

$\Rightarrow |m|+|n|=\sqrt{m^2+n^2+4}\Rightarrow |mn|=2$.

Xét điểm $I(0;0;1)$.

Ta có:

$\overrightarrow{MN}=(-m;n;2),\overrightarrow{IN}=(0;n;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{IN}\right]=(-n;m;-mn)$

$\Rightarrow d(I;MN)=\dfrac{\sqrt{m^2n^2+m^2+n^2}}{\sqrt{4+m^2+n^2}}=1$

Đề và đáp án thực hiện bởi Thầy Đoàn Trí Dũng

PHẦN III: MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm *A*, *B* lần lượt nằm trên các tia *Ox*, *Oy*. Có bao nhiêu điểm *M* trong không gian thỏa mãn $MA^2 + MB^2 \le MO^2$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** Vô số

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm A, B, C di động trên các tia *Ox*, *Oy*, *Oz* sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{2017}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $M(m;n;p)$. Giá trị của biểu thức $m+n-p$ là :

A. 2017 **B.** 2016 **C.** 2015 **D.** 2018

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(S):(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ và ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) sao cho $2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 8 **B.** 5 **C.** 3 **D.** -5

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$ và các điểm $A(1;0;0), B(2;-1;2)$, $C(-1;1;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng *d* và cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất ? Chọn đáp án đúng

A. $R_{\min} = 2$ **B.** $R_{\min} = 5$ **C.** $R_{\min} = \sqrt{3}$ **D.** $R_{\min} = 4$

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+16=0$. Hai điểm M, N di động trên (P) và (P) . Độ dài nhỏ nhất của đoạn MN bằng ?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Bài 6. Cho hình nón tròn xoay có tỉ lệ bán kính đáy và chiều cao là $3:4$ nội tiếp một hình chóp cho trước, đỉnh của hình chóp và hình nón trùng nhau. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp và khối nón đó. Giả sử tồn tại một khối cầu có thể tích là V_3 sao cho hình chóp đã cho ngoại tiếp khối cầu này. Khi đó $V_1 : V_2 : V_3$ là bao nhiêu ? Biết rằng diện tích toàn phần của hình chóp là $3\pi h^2$ (h là chiều cao của hình nón tròn xoay)

A. 12:8:3 B. 12:8:5
C. 16:8:3 D. 16:8:5

Bài 7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều có cạnh là 5, chiều cao bằng 5 . Điểm M thay đổi trên đoạn AB' sao cho mặt phẳng qua M và vuông góc với AB cắt đoạn BC' tại N. Xác định tỉ số $\frac{AM}{B'M}$ sao cho giá trị biểu thức: $\frac{AM^2}{2}+\frac{MN^2}{4}$ nhỏ nhất.

A. $\frac{7}{9}$ **B.** $\frac{9}{7}$ **C.** $\frac{9}{16}$ **D.** $\frac{7}{16}$

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh a và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle AHB = \angle BHC = \angle CHA = 120°, \angle CHA = 90°$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp của ác hình chóp $S.HAB, S.HBC, S.HCA$ là $\frac{31}{3}\pi a^2$ .Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

Bài 9. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$ có cạnh là a và tâm O . Lấy điểm S di động. Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh SB.Gọi O' là điểm đối xứng của tâm O qua các cạnh AB. Biết khi S di động trên Ax thì đường thẳng $O'H$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính thể tích của khối cầu đó.

A. $\frac{2a^3\pi}{3}$ **B.** $\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$ **D.** $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$

Bài 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho có $A(4;0;0), B(0;0;m), C(2,4,0) (m \in R)$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng AB. Biết rằng có một mặt cầu luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng CD tại điểm D. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** 3

Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(a;0;0), B(-a;0;0), C(0;-1;0)$

$B'(-a;0;b)$ với $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b=4 \end{cases}$. Khoảng cách lớn nhất giữa 2 đường thẳng $B'C$ và AC' là:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 12. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $|c|\le 1,|a-b+c|\le 1,|a+b+c|\le 1$. Tìm tất cả cá giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=6x+m(2ax^3+3bx^2+6cx)$ đồng biến trên $[-1,1]$.

A. $-1\le m\le 1$ **B.** $\frac{-5}{4}\le m\le \frac{5}{4}$

C. $\frac{-4}{5}\le m\le \frac{4}{5}$ **D.** $\frac{-1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$

Bài 13. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(4;-4;2)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z=0$ .Gọi *M* là điểm nằm trong (P),*N* là trung điểm của *OM*, *H* là hình chiếu vuông góc của *O* lên *AM*. Biết rằng khi *M* thay đổi thì đường thẳng *HN* luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán *R* của mặt cầu đó.

A. $R=2\sqrt{3}$ **B.** $R=3$ **C.** $R=3\sqrt{2}$ **D.** $R=6$

Bài 14. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+15=0$ .Gọi *M* là điểm di động trên (P),*N* là điểm thuộc tia *OM*, sao cho $OM.ON=10$. Hỏi khoảng cách từ *N* đến mặt phẳng (P) có giá trị nhỏ nhất là?

A. 4 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Bài 15. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2(m-1)x+2(1-m)y+2z-5=0$. Biết rằng khi m thay đổi thì mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn (C) cố định. Tìm bán kính r của đường tròn (C)

A. $r=\sqrt{7}$ **B.** $r=\sqrt{2}$ **C.** $r=1$ **D.** $r=\sqrt{3}$

Bài 16. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(-1;2;0), B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính *AB* và *Ax* là tiếp tuyến của (S) tại *A*, *By* là tiếp tuyến của (S) tại *B* và $Ax \perp By$. Hai điểm *M,N* lần lượt di động trên *Ax,By* sao cho *MN* là tiếp tuyến của (S). Hỏi tứ diện *AMBN* có diện tích toàn phần nhỏ nhất là ?

A. $19\sqrt{3}$ **B.** $19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

C. $19\left(2+\sqrt{3}\right)$ **D.** $19\left(2+\sqrt{6}\right)$

Bài 17. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(0;-3;0), B(0;0;2)$ và hai điểm *CD* di động trên trục *Ox* sao cho $CD=\sqrt{13}$. Tính thể tích khối tứ diện *ABCD* ?

A. $V=\sqrt{13}$ **B.** $V=6\sqrt{13}$ **C.** $V=13$ **D.** $V=2\sqrt{13}$

Bài 18. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $S(0;0;3), A(-2;0;0), B(2;0;0)$ và các điểm *C,D* di độgn trên mặt *Oxy* sao cho *ABCD* là một tứ giác lồi có chu vi bằng 36. Các mặt $(SAD),(SCD),(SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng *Oxy* góc $60°$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*.

A. $18\sqrt{3}$ **B.** 48 **C.** $16\sqrt{3}$ **D.** 54

Bài 19. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(0;1;1), B(-1;-2;-3), C(1;0;-3)$. Gọi D là điểm di động trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$. Hỏi giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ là ?

A. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{40}{3}$ **D.** $\frac{20}{3}$

Bài 20. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}, d_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng (P) vuông góc d_1, cắt trục Oz tại A và cắt d_2 tại B. Hỏi độ dài nhỏ nhất của đoạn AB ?

A. $\frac{2\sqrt{31}}{5}$ **B.** $\frac{24}{5}$ **C.** $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$

Bài 21. Cho *x,y* là các số thực dương thỏa $xy=4, x\ge\frac{1}{2}, y\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(\log_2 x)^2+(\log_2 y-1)^2.$$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -11 **D.** 5

Bài 22. Cho hàm số $f(x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}} (x\in\mathbb{R})$. Tính

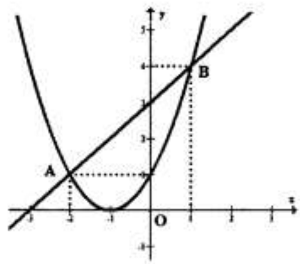
$$S=f(\sin^2 0^\circ)+f(\sin^2 1^\circ)+...+f(\sin^2 89^\circ)+f(\sin^2 90^\circ)$$

A. $\frac{91}{2}$ **B.** 45 **C.** 46 **D.** $\frac{93}{2}$

Bài 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn lớn và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0),B(0;b;0)$, $C(0;0;3)$ $(a,b>0)$. Tính tổng $T=a+b$ khi thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $T=18$ **B.** $T=9$ **C.** $T=11$ **D.** $T=3$

Bài 23. Cho parabol (P) có đỉnh $I(-1;0)$ và cắt đường thẳng d tại $A(-2;1),B(1;4)$ như hình vẽ bên cạnh. Tính diện tích hình phẳng giới hạn parabol (P) và đường thẳng d.



A. $S=\dfrac{9}{2}$ **B.** $S=\dfrac{13}{2}$ **C.** $S=\dfrac{5}{6}$ **D.** $S=\dfrac{21}{2}$

Bài 25. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+2z+18=0$ .Gọi M là điểm di chuyển trên (P); N là điểm nằm trên tia OM sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

A. $\min d(N,(P))=2$ **B.** $\min d(N,(P))=0$

C. $\min d(N,(P))=4$ **D.** $\min d(N,(P))=6$

Bài 26. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và $M(x_o;y_o;z_o)\in(S)$ sao cho $A = x_o + 2y_o + 2z_o$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tổng $x_o + y_o + z_o$.

A. 2 **B.** -1 **C.** -2 **D.** 1

Bài 27. Cho hàm số $y = \dfrac{m\sqrt{3x+1}-10}{3\sqrt{3x+1}+1-m}$. Biểu diễn tập hợp các giá trị của tham số để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;5)$ thành dạng $(-\infty;a)\cup[b;+\infty)$. Tính tổng $S = a+b$.

A. $S=-1$ **B.** $S=8$ **C.** $S=-8$ **D.** $S=1$

Bài 28. Biết tập nghiệm bất phương trình

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+x+2}+1\right)+3\log_5\left(x^2+x+3\right)<4 \text{ là } (a,b).$$

Tính $2a+b$?

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** -3

Bài 29. Cho khối hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của BB' mặt phẳng (MDC') chia khối hình hộp chữ nhật thành hai khối đa diện, một khối chứa đỉnh C và một khối chứa đỉnh A'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối đa diện chứa C và A'. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{8}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{17}$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{24}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ Biên) – VŨ TUẤN (Chủ Biên) – LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG – NGUYỄN TIẾN TÀI – CẤN VĂN TUẤT (2013), *Giải tích 12*, NXB Giáo dục Việt Nam.

2. VŨ TUẤN (Chủ Biên) – LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG – NGUYỄN THU NGA – PHẠM THU – NGUYỄN TIẾN TÀI – CẤN VĂN TUẤT (2013), *Bài tập Giải tích 12*, NXB Giáo dục Việt Nam.

3. ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ Biên) – NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ Biên) – TRẦN PHƯƠNG DUNG – NGUYỄN XUÂN LIÊM – ĐẶNG HÙNG THẮNG (2013), *Giải tích 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

4. NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ Biên) – TRẦN PHƯƠNG DUNG – NGUYỄN XUÂN LIÊM – PHẠM THỊ BẠCH NGỌC – ĐOÀN QUỲNH – ĐẶNG HÙNG THẮNG (2013), Bài tập *Giải tích 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

5. TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ Biên) – NGUYỄN MỘNG HY (Chủ Biên) – KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYÊN – (2013), *Hình học 12*, NXB Giáo dục Việt Nam.

6. NGUYỄN MỘNG HY (Chủ Biên) – KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYÊN – TRẦN VĂN HẠO (2013), *Bài tập hình học 12*, NXB Giáo dục Việt Nam.

7. ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ Biên) – VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ Biên) - PHẠM KHẮC BAN – LÊ HUY HÙNG – TẠ MẪN (2013), *Hình học 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

8. VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ Biên) - PHẠM KHẮC BAN – LÊ HUY HÙNG – TẠ MẪN (2013), *Bài tập Hình học 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

9. Bài tập từ các nhóm: Nhóm pi, nhóm toán 12, nhóm toán,…

10. Tham khảo các đề thi thử từ trang web:

http://toanhocbactrungnam.vn/download/De-thi-THPT-Quoc-gia-2017/