



TỔNG ÔN CỰC TRỊ SỐ PHỨC

Sưu tầm và biên soạn: Phạm Minh Tuấn

Wednesday, 21 April

Luôn yêu để Sống, luôn sống để học Toán, luôn học toán để Yêu



Contents

CHUYÊN ĐỀ CỰC TRỊ SỐ PHỨC	1
1. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.....	1
2. ĐỀ TỰ LUYỆN.....	4
ĐỀ SỐ 1.....	4
❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 1.....	7
ĐỀ SỐ 2.....	14
❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 2.....	16
ĐỀ SỐ 3.....	22
❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 3.....	25
ĐỀ SỐ 4.....	33
❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 4.....	35
ĐỀ SỐ 5.....	44
❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 5.....	48

CHUYÊN ĐỀ CỰC TRỊ SỐ PHỨC

1. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: [THPT Nguyễn Khuyến] Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z|>2$.

B. $|z|<\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2}<|z|<2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1. Chọn $z=i$.

Cách 2.

$$\begin{aligned}2\sqrt{2} &\geq 2|z-1|+3|z-i|=2(|z-1|+|z-i|)+|z-i| \geq 2|z-1-(z-i)|+|z-i| \\&=2|i-1|+|z-i|=2\sqrt{2}+|z-i| \geq 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $|z-i|=0$ hay $z=i \Rightarrow |z|=|i|=1$.

Ví dụ 2: [THPT Kim Liên-HN - 2017] Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$.

- A. 6. B. $\sqrt{13} + 1$. C. $\sqrt{13} + 2$. D. 4.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $w = \bar{z} + 1 + i$.

Ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - 2 - 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + 3i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} + 1 + i - 3 + 2i| = 1$.

$$\Leftrightarrow |w - 3 + 2i| = 1.$$

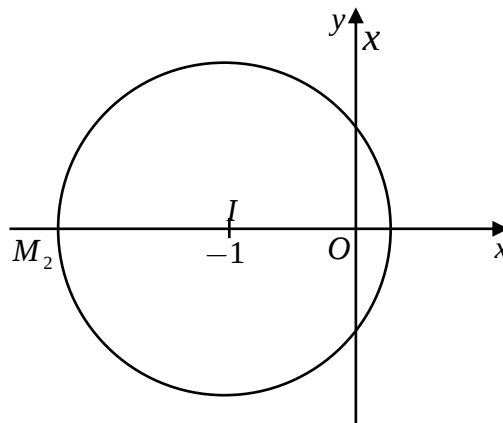
Ta có: $1 = |w - (3 - 2i)| \geq |w| - |3 - 2i| \Leftrightarrow |w| \leq 1 + \sqrt{13}$.

$$\Rightarrow \text{Max} |\bar{z} + 1 + i| = 1 + \sqrt{13}.$$

Ví dụ 3: [THPT Hùng Vương-PT] Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = |(1 + i)z|$. Đặt $m = |z|$, tìm giá trị lớn nhất của m .

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{2} + 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - 1| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow |z - 1| = |1 + i| \cdot |z|$.

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0.$$

$\Rightarrow$ tập các điểm biểu diễn z là đường tròn tâm $I(-1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \max |z| = OM_2 = OI + R = 1 + \sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: [THPT chuyên Phan Bội Châu] Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là.

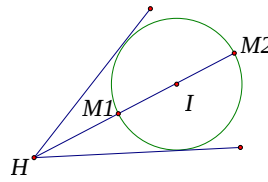
A. 4.

B. $\sqrt{13} + 1$.

C. $\sqrt{13} + 2$.

D. 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i$.

Theo giả thiết $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Gọi $M(x; y)$ và $H(-1; 1)$ thì $HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$$9t^2 + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ nên } M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = \sqrt{13} + 1$.

Ví dụ 5: [ITT Hiếu Học Minh Châu] Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$ là.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 8.

D. $\sqrt{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1. Xét $z \neq 0$ suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}$. Gọi $z = a + bi, b \neq 0$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{w} = z + \frac{2}{z} = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2} + a \right) - b \left(\frac{2}{a^2 + b^2} - 1 \right) i.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{w} \in \mathbb{R} \text{ nên } b \left(\frac{2}{a^2 + b^2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Xét điểm $A(-1; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = -1 + i$ suy ra

$$P = MA \Rightarrow \max P = OA + r = 2\sqrt{2}.$$

Với r là bán kính đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Cách 2. $w = \frac{z}{2 + z^2} \Leftrightarrow w(2 + z^2) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{w}z + 2 = 0$ (*). (*) là phương trình bậc hai với hệ

số thực $\left(\frac{1}{w} \in \mathbb{R} \right)$. Vì z thỏa (*) nên z là nghiệm phương trình (*). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm

của (*) suy ra $z_1 \cdot z_2 = 2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1| |z_2| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$. Suy ra

$$P = |z + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } z = 1 - i.$$

2. ĐỀ TỰ LUYỆN

ĐỀ SỐ 1

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT

Câu 1: (Sở GD Cần Thơ-Đề 324-2018) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức $z - 2 - i$ bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. 9.

C. 25.

D. 5.

- Câu 2:** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{3}, |z_2| = 2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right|$.
- A. $\sqrt{13}$. B. 1. C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{13}}$.
- Câu 3:** (THTT - Số 484 - Tháng 10 - 2017 - BTN) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.
- A. $M + m = 63$. B. $M + m = 48$. C. $M + m = 50$. D. $M + m = 41$.
- Câu 4:** (THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Q Trị - HKII) Cho số phức z thỏa mãn $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 4$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.
- A. $2 + \sqrt{3}$. B. $4 + \sqrt{5}$. C. $4 + \sqrt{3}$. D. $2 + \sqrt{5}$.
- Câu 5:** (THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Q Trị - HKII) Gọi M và m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của môđun số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Tính $M + m$.
- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.
- Câu 6:** [THPT Hà Huy Tập - 2017] Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.
- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.
- Câu 7:** [THPT TH Cao Nguyên - 2017] Cho các số phức $z_1 = 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = m - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là.
- A. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$. B. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. D. $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.
- Câu 8:** (Chuyên Quang Trung - Bình Phước) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ và $|z - 3 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2|$ là:

- A. $\sqrt{13}+1$. B. $\sqrt{10}+1$. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 9: (Chuyên Quang Trung - Bình Phước) Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z - z_1| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

- A. $\sqrt{2016}-1$. B. $\frac{\sqrt{2017}-1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2016}-1}{2}$. D. $\sqrt{2017}-1$.

Câu 10: (THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh) Cho các số phức $z_1 = -2+i, z_2 = 2+i$ và số phức z thay đổi thoả mãn $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $M^2 - m^2$ bằng

- A. 15 B. 7 C. 11 D. 8

Câu 11: (Chuyên KHTN - Lần 3) Cho số phức z thoả mãn $|2z - 3 - 4i| = 10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M - m$ bằng.

- A. 5. B. 15. C. 10. D. 20.

Câu 12: (THPT Kinh Môn - Hải Dương) Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là:

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 13: (THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2) Cho z là số phức thay đổi thoả mãn $|(1+i)z + 2 - i| = 4$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho z trong mặt phẳng phức. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |x + y + 3|$.

- A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. 8. C. 4. D. $4\sqrt{2}$.

Câu 14: (THPT Chuyên Quốc Học Huế - Lần 2) Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $|z - 1 - i| \geq 1$ và $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{14}{5}$.

Câu 15: (Sở GD và ĐT Cần Thơ) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 1

CÂU 1:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } z = x + yi, (\forall x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } M = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3$$

$$= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \leq \sqrt{20} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + 23 = 33.$$

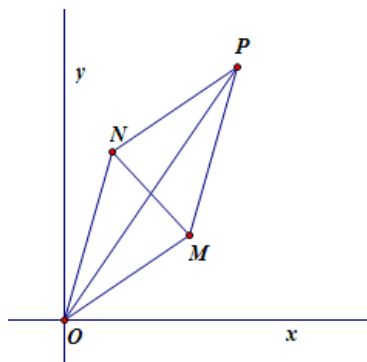
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi } \frac{x-3}{y-4} = \frac{4}{2} \text{ kết hợp với (1) suy ra } \begin{cases} x = y = 5 \Rightarrow z = 5 + 5i \\ x = 1, y = 3 \Rightarrow z = 1 + 3i \end{cases}$$

$$\text{Thử lại ta có } M_{\max} = 33 \Leftrightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = 5.$$

CÂU 2:

Lời giải

Chọn B



Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = OP \\ |z_1 - z_2| = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(150^\circ)} = 1 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(30^\circ)} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1 - z_2|} = 1.$$

CÂU 3:

Lời giải

Chọn B.

Cách 1. Ta có phương trình đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9$.

Mặt khác $F = 4a + 3b - 1 = 4(a-4) + 3(b-3) + 24 \Leftrightarrow F - 24 = 4(a-4) + 3(b-3)$.

Ta có $[4(a-4) + 3(b-3)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a-4)^2 + (b-3)^2] = 25 \cdot 9 = 225$.

$\Rightarrow -15 \leq 4(a-4) + 3(b-3) \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq F - 24 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

Khi đó $M = 39, m = 9$.

Vậy $M + m = 48$.

Cách 2. Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{F+1-3b}{4}$

$$(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F+1-3b}{4} - 4 \right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F+3)b + F^2 + 225 = 0$$

$$\Delta' = (3F+3)^2 - 25F^2 - 5625$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39.$$

CÂU 4:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left| z + \frac{1}{z} \right| \geq \left| z \right| - \frac{1}{\left| z \right|} \Leftrightarrow 4 \geq \left| z \right| - \frac{1}{\left| z \right|} \Rightarrow \left| z \right| \leq 2 + \sqrt{5}.$$

CÂU 5:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$. Khi đó $OM = |z|$.

$|z - 1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4 \quad (1)$. Chứng tỏ M thuộc đường tròn (C) có phương trình (1) , tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow M \in (C)$ sao cho OM lớn nhất, nhỏ nhất.

Ta có $OI = 1$ nên điểm O nằm trong đường tròn $\Rightarrow R - OI \leq OM \leq OI + R \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 3$.

Do đó $M = 3$ và $m = 1$.

Vậy $M + m = 4$.

CÂU 6:

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Khi đó $|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow |a - 1 + bi| = |a + (b - 1)i|$.

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = a^2 + (b - 1)^2 \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Khi đó $w = 2z + 2 - i = 2(a + ai) + 2 - i = (2a + 2) + i(a - 1)$.

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{(2a + 2)^2 + (a - 1)^2} = \sqrt{8a^2 + 4a + 5} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 7:

Lời giải

Chọn A

☒ Ta có: $|z_1| = 3, |z_2| = \sqrt{10}, |z_3| = \sqrt{m^2 + 4}$.

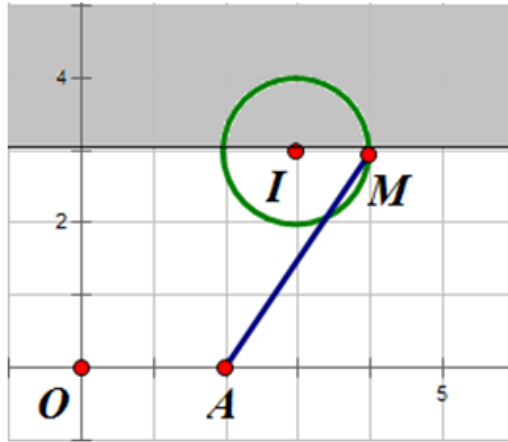
☒ Để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho thì

$$\sqrt{m^2 + 4} < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}.$$

CÂU 8:

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z - 2i| \leq |z - 4i|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq x^2 + (y - 4)^2$$

$\Leftrightarrow y \leq 3; |z - 3 - 3i| = 1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3; 3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P = |z - 2| = AM$ trong đó $A(2; 0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P = |z - 2|$ đạt được khi $M(4; 3)$ nên $\max P = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$.

CÂU 9:

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$

Ta có: $\Delta = -2016 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2016}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2016}}{2}i \end{cases}$$

Khi đó: $z_1 - z_2 = i\sqrt{2016}$

$$|z - z_2| = |(z - z_1) + (z_1 - z_2)| \geq |z_1 - z_2| - |z - z_1| \Leftrightarrow P \geq \sqrt{2016} - 1.$$

Vậy $P_{\min} = \sqrt{2016} - 1.$

CÂU 10:

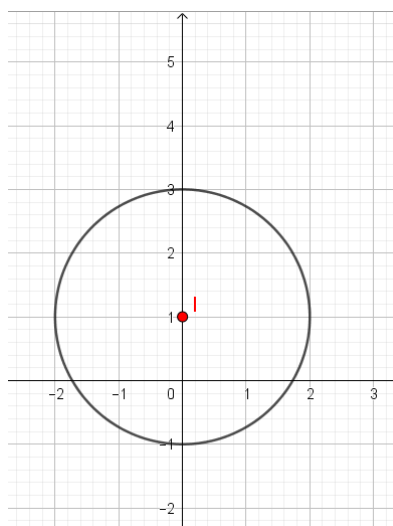
Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 &\Leftrightarrow |x + yi + 2 - i|^2 + |x + yi - 2 - i|^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0; 1)$ bán kính $R = 2$.



Do đó $m = 1, M = 3$.

$$\text{Vậy } M^2 - m^2 = 8.$$

CÂU 11:

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$.

$$\text{Ta có: } |2z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow \left| z - \frac{3}{2} - 2i \right| = 5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề là đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, bán kính $R = 5$.

Khi đó: $\begin{cases} m = IO - R \\ M = IO + R \end{cases} \Rightarrow M - m = 2R = 10.$

CÂU 12:

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1 i (a_1, b_1 \in \mathbb{R})$, $z_2 = a_2 + b_2 i (a_2, b_2 \in \mathbb{R})$.

Ta có

⊙ $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 + b_1^2 = 25$. Do đó, tập hợp các điểm A biểu diễn cho số phức z_1 là đường tròn $(C): (x + 5)^2 + y^2 = 25$ có tâm là điểm $I(-5; 0)$ và bán kính $R = 5$.

⊙ $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \Leftrightarrow (a_2 + 1)^2 + (b_2 - 3)^2 = (a_2 - 3)^2 + (b_2 - 6)^2$

$\Leftrightarrow 8a_2 + 6b_2 - 35 = 0$. Do đó tập hợp các điểm B biểu diễn cho số phức z_2 là đường thẳng $\Delta: 8x + 6y - 35 = 0$.

Khi đó, ta có $|z_1 - z_2| = AB$.

Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} = AB_{\min} = d(I; \Delta) - R = \frac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 = \frac{5}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là $\frac{5}{2}$.

CÂU 13:

Lời giải

Chọn B

Ta có $|(1+i)z + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = 2\sqrt{2}$. Vậy quỹ tích điểm biểu diễn cho số

phức z là đường tròn (C) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = 2\sqrt{2}$ (1).

Biểu thức $T = |x + y + 3|$, với $T \geq 0$ thì ta có $\begin{cases} x + y + 3 - T = 0 \\ x + y + 3 + T = 0 \end{cases}$ (2).

Khi đó điểm M là điểm thuộc đường tròn (C) và một trong hai đường thẳng trong (2).

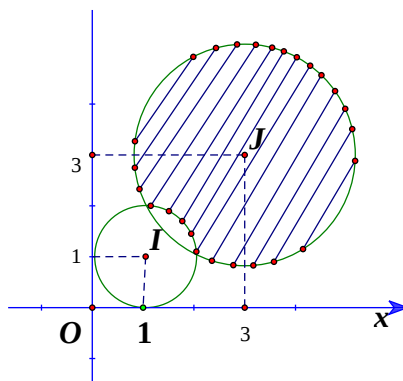
Điều kiện để một trong hai đường thẳng trên cắt đường tròn (C) là

$$\begin{cases} \frac{|4-T|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2} \\ \frac{|T+4|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq T \leq 8 \\ -8 \leq T \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq T \leq 8. \text{ Vậy } \max T = 8.$$

CÂU 14:

Lời giải

Chọn B



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z .

Từ giả thiết $|z - 1 - i| \geq 1$ ta có A là các điểm nằm bên ngoài hình tròn (C_1) có tâm $I(1; 1)$ bán kính $R_1 = 1$.

Mặt khác $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$ ta có A là các điểm nằm bên trong hình tròn (C_2) có tâm $J(3; 3)$ bán kính $R_2 = \sqrt{5}$.

Ta lại có: $P = x + 2y \Leftrightarrow x + 2y - P = 0 (\Delta)$. Do đó để tồn tại x, y thì (Δ) và phần

gạch chéo phải có điểm chung tức là $d(J; \Delta) \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|9 - P|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |9 - P| \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq P \leq 14$. Suy ra $m = 4; M = 14 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{7}{2}$.

CÂU 15:

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $-1 \leq x \leq 1$.

Khi đó, $P = |1+z| + 2|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)[(2x+2) + (2-2x)]}$ hay $P \leq 2\sqrt{5}$, với mọi $-1 \leq x \leq 1$.

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2} = \sqrt{2-2x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}, y = \pm \frac{4}{5}$.

ĐỀ SỐ 2

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT

- Câu 1:** (THPT Chuyên Tiền Giang - Lần 1) Biết số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $T = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.
- A. $|z| = \sqrt{33}$. B. $|z| = 50$. C. $|z| = \sqrt{10}$. D. $|z| = 5\sqrt{2}$.
- Câu 2:** (Đoàn Trí Dũng - Lần 7) Biết rằng $|z - 1| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của module số phức $w = \bar{z} + 2i$?
- A. $\sqrt{5} - 2$ B. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ D. $2 + \sqrt{5}$
- Câu 3:** (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa) Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\bar{z} - 4 + 7i|$.
- A. 8. B. 10. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.
- Câu 4:** (Sở GD Bạc Liêu - HKII - 2018 Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b > 0$) thỏa mãn $|z| = 1$. Tính $P = 2a + 4b^2$ khi $|z^3 - z + 2|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $P = 4$. B. $P = 2 - \sqrt{2}$. C. $P = 2$. D. $P = 2 + \sqrt{2}$.

Câu 5: (THPT Quốc Oai - Hà Nội - HKII) Trong các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$.
Hãy tìm z có môđun nhỏ nhất.

- A. $z = \frac{27}{5} + \frac{6}{5}i$. B. $z = -\frac{6}{5} - \frac{27}{5}i$. C. $z = -\frac{6}{5} + \frac{27}{5}i$. **D. $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.**

Câu 6: [TRẦN HƯNG ĐẠO – NB] Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$.
Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 7: [LẠNG GIANG SỐ 1] Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. $4 - \sqrt{7}$. B. $4 + \sqrt{7}$. C. 7. D. $4 + \sqrt{5}$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|A| \leq 1$. B. $|A| \geq 1$. C. $|A| < 1$. D. $|A| > 1$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

- A. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 1$. B. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 2$.
C. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 1$. D. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 2$.

Câu 10: Cho số phức z thỏa $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{z + i}{z} \right|.$$

- A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

- A. $3\sqrt{15}$. B. $6\sqrt{5}$. C. $\sqrt{20}$. D. $2\sqrt{20}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

- A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$. C. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$. D. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

- A. $4\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. 3. D. $3+\sqrt{5}$

Câu 14: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

- A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$ D. $3+\sqrt{2}$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z-1+i$.

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{2}$.

❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 2

CÂU 1:

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$, theo giả thiết $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$. (C)

Ngoài ra $T = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow 4x+2y+3-T=0$ (Δ) đạt giá trị lớn nhất.

Rõ ràng (C) và (Δ) có điểm chung do đó $\frac{|23+T|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq T \leq 33$.

Vì T đạt giá trị lớn nhất nên $T = 33$ suy ra $4x+2y-30=0 \Leftrightarrow y=15-2x$ thay vào (C) ta được $5x^2 - 50x + 125 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5$. Vậy $|z| = 5\sqrt{2}$.

CÂU 2:

Lời giải

Chọn D

Quỹ tích $M(z)$ là đường tròn tâm $I(1,0)$ bán kính $R=2$. Còn $|w| = |\bar{z}+2i| = MA$

với $A(0,2)$. Khi đó $|w|_{\max} = IA + R = 2 + \sqrt{5}$.

CÂU 3:**Lời giải****Chọn B**

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, gọi M là điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số

$$\begin{aligned} \text{phức } z. \text{ Ta có: } \left| \frac{z-1}{z+3i} \right| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}|(x-1)+yi| = |x+(y+3)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Gọi $A(0;-1)$, $B(4;7)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -i$, $z_2 = 4+7i$.

Dễ thấy A, B thuộc đường tròn (C) . Vì $AB = 4\sqrt{5} = 2R$ nên AB là đường kính của đường tròn $(C) \Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 20$.

Từ đó:

$$\begin{aligned} P &= |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = |z+i| + 2|z-4-7i| \\ &= MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2+2^2)(MA^2+MB^2)} = 10. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} MB = 2MA \\ MA^2 + MB^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 2 \\ MB = 4 \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 10$.

CÂU 4:**Lời giải****Chọn C**

$$|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\text{Do } b > 0 \Rightarrow -1 < a < 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left| z^3 - z + 2 \right| &= \left| z - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} \right| = \left| z - \bar{z} + 2\bar{z}^2 \right| = 2|bi + (a-bi)^2| \\ &= 2|bi + a^2 - b^2 - 2abi| \quad AB = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{b^2 - 4ab^2 + 1} = 2\sqrt{1 - a^2 - 4a(1 - a^2)} + 1$$

$$= 2\sqrt{4a^3 - a^2 - 4a + 2}$$

Biểu thức trên đạt GTLN trên miền $-1 < a < 1$ khi $a = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (do $b > 0$)

Vậy $P = 2a + 4b^2 = 2$

CÂU 5:

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có $|x + yi - i| = |x - yi - 2 - 3i| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) - (y + 3)i|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2y = 13 - 4x + 6y \Leftrightarrow 4x = 12 + 8y \Leftrightarrow x = 2y + 3.$$

Do đó $|z|^2 = x^2 + y^2 = (2y + 3)^2 + y^2 = 5y^2 + 12y + 9 = \left(y\sqrt{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}$, khi đó $x = \frac{3}{5} \Rightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

CÂU 6:

Lời giải

Chọn C

Phương pháp tự luận

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y + 3)i| = |(x + 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y + 1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z+3i|=|z+2-i| \Leftrightarrow |x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i| \Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1 \Leftrightarrow 4x-8y-4=0 \Leftrightarrow x-2y-1=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$ là đường thẳng $d: x-2y-1=0$.

Phương án A: $z=1-2i$ có điểm biểu diễn $(1;-2) \notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right) \notin d$ nên loại B.

Phương án D: $z=-1+2i$ có điểm biểu diễn $(-1;2) \notin d$ nên loại B.

Phương án C: $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{5}\right) \in d$

CÂU 7:

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ với $x,y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } 8=|z-3|+|z+3| \geq |z-3+z+3|=|2z| \Leftrightarrow |z| \leq 4.$$

$$\text{Do đó } M=\max|z|=4.$$

Mà

$$|z-3|+|z+3|=8 \Leftrightarrow |x-3+yi|+|x+3+yi|=8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8=1.\sqrt{(x-3)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+3)^2+y^2} \leq \sqrt{(1^2+1^2)}\sqrt{(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{2(2x^2+2y^2+18)} \Leftrightarrow 2(2x^2+2y^2+18) \geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{7}.$$

$$\text{Do đó } M=\min|z|=\sqrt{7}.$$

$$\text{Vậy } M+m=4+\sqrt{7}.$$

CÂU 8:

Lời giải

Chọn A

Đặt Có $a = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$ (do $|z| \leq 1$)

$$|A| = \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| = \left| \frac{2a+(2b-1)i}{2-b+ai} \right| = \sqrt{\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1$.

Thật vậy ta có $\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2+(2b+1)^2 \leq (2-b)^2+a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $a^2+b^2=1$.

Vậy $|A| \leq 1$.

CÂU 9:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M \leq |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5$.

Mặt khác: $M = \frac{|1-z^3|}{|1-z|} + |1+z^3| \geq \frac{|1-z^3|}{2} + \frac{|1+z^3|}{2} \geq \frac{|1-z^3+1+z^3|}{2} = 1$, khi

$z = -1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow M_{\min} = 1$.

CÂU 10:

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left| 1 + \frac{i}{z} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z = -2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z = 2i$.

CÂU 11:

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

$$\text{Ta có: } P = |1 + z| + 3|1 - z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$; $x \in [-1; 1]$. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$

$$\text{và với } x \in (-1; 1) \text{ ta có: } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1)$$

$$\text{Ta có: } f(1) = 2; f(-1) = 6; f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{20} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{20}.$$

CÂU 12:**Lời giải****Chọn A**

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$

Đặt $x = 1 + 2\sin t; y = -2 + 2\cos t; t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5} \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ đạt được khi } z = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i.$$

CÂU 13:**Lời giải****Chọn B**

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$|(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |(1-i) \cdot \left[z + \frac{-6-2i}{1-i}\right]| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5} \sin t; y = 4 + \sqrt{5} \cos t; t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= (2 + \sqrt{5} \sin t)^2 + (4 + \sqrt{5} \cos t)^2 = 25 + (4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t) \\
&= 25 + \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2} \sin(t + \alpha); \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow |z|^2 &= 25 + 20 \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [\sqrt{5}; 3\sqrt{5}] \\
\Rightarrow z_{\max} &= 3\sqrt{5} \text{ đạt được khi } z = 3 + 6i.
\end{aligned}$$

CÂU 14:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

$$\text{Ta có: } |z + 2i|^2 = x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x-3)^2 + 18 \geq 18$$

$$\Rightarrow |z + 2i|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ khi } z = 3 + i.$$

CÂU 15:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$. Ta có:

$$|z - 1 + 2i| = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Đặt $x = 1 + 3 \sin t$; $y = -2 + 3 \cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

$$\Rightarrow |z - 1 + i|^2 = (3 \sin t)^2 + (-1 + 3 \cos t)^2 = 10 - 6 \cos t \Rightarrow 2 \leq |z - 1 + i| \leq 4 \Rightarrow |z - 1 + i|_{\min} = 2, \text{ khi } z = 1 + i.$$

ĐỀ SỐ 3

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT

Câu : Cho số phức $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)}$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z .

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 2: (Toán học tuổi trẻ tháng 1) Cho 2018 phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính môđun của 2018 phức $w = M + mi$.

A. $|w| = \sqrt{1258}$.

B. $|w| = \sqrt{1258}$.

C. $|w| = 2\sqrt{314}$.

D.

$|w| = 2\sqrt{309}$.

Câu 3: (SGD BINH THUAN) Xét các số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 2 + mi$, ($m \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng?

A. $\frac{2}{5}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 4: [SGD SOC TRANG] Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

A. $S = -3$.

B. $S = 5$.

C. $S = -5$.

D. $S = 11$.

Câu 5: (Sở GD Kiên Giang) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2$ và $|\overline{z_2} - 1 - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - z_2|$.

A. $P = 3 + \sqrt{34}$.

B. $P = 3 + \sqrt{10}$.

C. $P = 6$.

D. $P = 3$.

Câu 6: (SỞ GD-ĐT PHÚ THỌ) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng 2 số phức z thỏa $|z - (m - 1) + i| = 8$ và $|z - 1 + i| = |\overline{z} - 2 + 3i|$.

A. 130.

B. 66.

C. 65.

D. 131.

Câu 7: [NGUYỄN TRÃI] Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 2i| = 1$. Số phức $z - i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5} - 1$.

B. $\sqrt{5} + 1$.

C. $\sqrt{5} - 2$.

D. $\sqrt{5} + 2$.

Câu 8: [CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH] Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{3}{2}$. B. $\min |w| = 2$. C. $\min |w| = 1$. D.

$\min |w| = \frac{1}{2}$.

Câu 9: [CHUYÊN SƠN LA] Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 10: [CHU VĂN AN - HN] Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Câu 11: (SGD Bà Rịa - Vũng Tàu) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = |z + i|^2 - |z - 2|^2$. Tính $A = m + M$.

A. $A = -3$. B. $A = -2$. C. $A = 5$. D. $A = 10$.

Câu 12: (THPT Ninh Giang - Hải Dương) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 3| = |z + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z|$.

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{10}}{5}$. B. $P_{\min} = 3$. C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$. D.

$P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 13: [CHUYÊN SƠN LA - 2017] Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $\sqrt{6}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 14: [THPT THÁI PHIÊN HP - 2017] Trong tập hợp các số phức z thỏa mãn:

$\left| \frac{z + 2 - i}{z + 1 - i} \right| = \sqrt{2}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z + i$.

A. $2 + \sqrt{2}$. B. $3 + \sqrt{2}$. C. $3 - \sqrt{2}$. D. $2 - \sqrt{2}$.

Câu 15: [THPT Lý Thường Kiệt - 2017] Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho điểm $A(4; 4)$ và M là điểm biến diễn số phức z thoả mãn điều kiện $|z-1|=|z+2-i|$. Tìm toạ độ điểm M để đoạn thẳng AM nhỏ nhất.

- A. $M(-1; -1)$. B. $M(-2; -4)$. **C. $M(1; 5)$.** D. $M(2; 8)$.

❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 3

CÂU 1:

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{m^2+1}} \leq 1 \Rightarrow |z|_{\max} = 1 \Leftrightarrow z = i; m = 0.$$

CÂU 2:

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 5 \quad (1).$$

$$P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (a+2)^2 + b^2 - [a^2 + (b-1)^2] = 4a + 2b + 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $20a^2 + (64-8P)a + P^2 - 22P + 137 = 0$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta' = -4P^2 + 184P - 1716 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}.$$

CÂU 3:

Lời giải

Chọn A

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+mi}{3-4i} = \frac{(2+mi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6-4m+(3m+8)i}{25} = \frac{6-4m}{25} + \frac{3m+8}{25}i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{6-4m}{25} \right)^2 + \left(\frac{3m+8}{25} \right)^2} \Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{36-48m+16m^2+9m^2+48m+64}{25^2}}$$

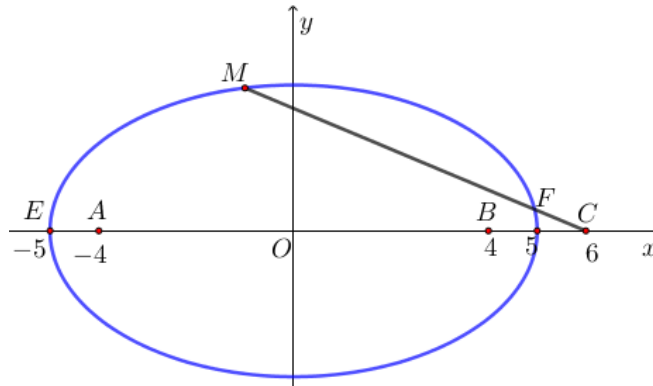
$$\Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{25m^2+100}{25^2}} \Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{m^2+4}{25}} \geq \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

Hoặc dùng công thức: $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}.$

CÂU 4:

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $C(6;0)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1=-4$, $z_2=4$, $z_3=6$.

Khi đó ta có $|z+4|+|z-4|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10$ suy ra tập hợp điểm M là (E) nhận A, B là các tiêu điểm, độ dài trục lớn $2a=10 \Rightarrow a=5$, tiêu cự $2c=8 \Rightarrow c=4$, $b=3$

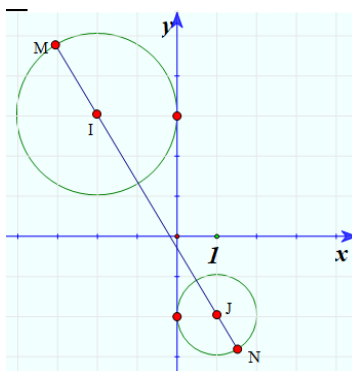
$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $|z-6|=MC$, khi đó $MC_{\max}=EF+FC=11$, khi đó $M \equiv E$ với $E(-5;0)$, $F(5;0) \Rightarrow z=-5$. Vậy $S=a+b=-5$.

CÂU 5:

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 , $N(x_2; y_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2

Số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = 4$ suy ra $M(x_1; y_1)$ nằm trên đường tròn tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R_1 = 2$.

Số phức z_2 thỏa mãn $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1 \Leftrightarrow (x_2 - 1)^2 + (y_2 + 2)^2 = 1$ suy ra $N(x_2; y_2)$ nằm trên đường tròn tâm $J(1; -2)$ và bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = MN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $R_1 + IJ + R_2 = 2 + \sqrt{34} + 1 = 3 + \sqrt{34}$.

CÂU 6:

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z - (m-1) + i| = 2 \Leftrightarrow$ tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(m-1; -1)$, bán kính $R = 2$.

Ta có: $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow$ tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 2x + 8y - 11 = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ I đến d nhỏ hơn $R \Leftrightarrow |2m - 21| < 8\sqrt{68}$

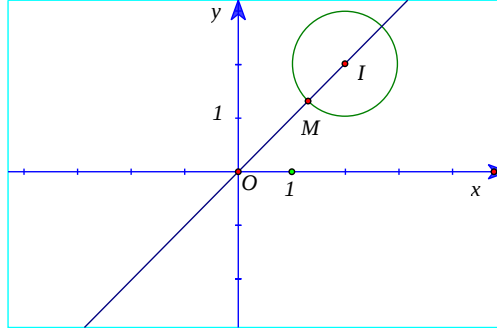
$$\Leftrightarrow \frac{21}{2} - 4\sqrt{68} < m < \frac{21}{2} + 4\sqrt{68}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $-22 \leq m \leq 43 \Rightarrow$ có 66 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 7:

Lời giải

Chọn A



Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z - 2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 2)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2; 2)$ và bán kính $R = 1$.

$|z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = IM$, với $I(2; 2)$ là tâm đường tròn, M là điểm chạy trên đường tròn. Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0; 1) \in Oy, I(2; 2)$ với đường tròn (C) .

$$IM_{\min} = IN - R = \sqrt{5} - 1$$

CÂU 8:

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 + 2i = 0 \\ |(z - 1 - 2i)| = |(z + 3i - 1)| \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $z - 1 + 2i = 0 \Rightarrow w = -1 \Rightarrow |w| = 1$ (1).

Trường hợp 2: $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|$

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) khi đó ta được

$$|a - 1 + (b - 2)i| = |(a - 1) + (b + 3)i| \Leftrightarrow (b - 2)^2 = (b + 3)^2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } w = z - 2 + 2i = a - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2} \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\min |w| = 1$.

CÂU 9:

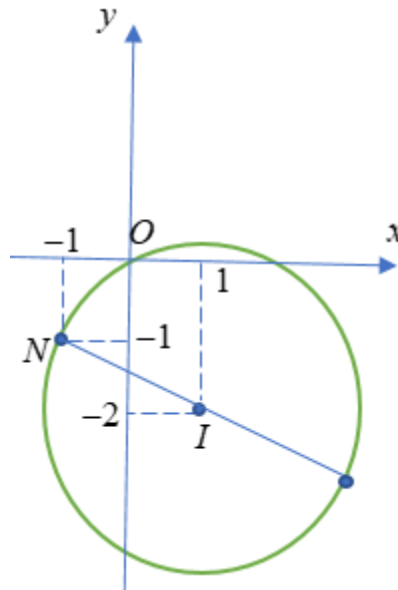
Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i$$

$$\text{Ta có: } |z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ:



Dễ thấy $O \in (C)$, $N(-1; -1) \in (C)$.

Theo đề ta có: $M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x + 1) + (y + 1)i$$

$$\Rightarrow |z + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = |\overrightarrow{MN}|$$

Suy ra $|z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C) .

$$\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow M(3; -3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

CÂU 10:

Lời giải

Chọn B

$$T = |z + i| + |z - 2 - i| = |(z - 1) + (1 + i)| + |(z - 1) - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = z - 1. \text{ Ta có } |w| = 1 \text{ và } T = |w + (1 + i)| + |w - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = x + y.i. \text{ Khi đó } |w|^2 = 2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} T &= |(x + 1) + (y + 1)i| + |(x - 1) + (y - 1)i| \\ &= 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)((x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2)} = \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max T = 4.$$

CÂU 11:

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad \text{thì} \quad |z - 2 + 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x + iy - 2 + 3i| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5.$$

$$\begin{aligned} P &= |z + i|^2 - |z - 2|^2 = |x + iy + i|^2 - |x + iy - 2|^2 = x^2 + (y + 1)^2 - (x - 2)^2 - y^2 \\ &= 4x + 2y - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = 2 + \sqrt{5} \sin t, y = -3 + \sqrt{5} \cos t, t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow P = 4(2 + \sqrt{5} \sin t) + 2(-3 + \sqrt{5} \cos t) - 3 = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t - 1.$$

$$(P + 1)^2 = (4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t)^2 \leq (80 + 20).1 \Rightarrow -10 \leq P + 1 \leq 10 \Rightarrow -11 \leq P \leq 9$$

$$\text{Vậy } A = -11 + 9 = -2.$$

CÂU 12:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

Ta có: $P = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Mà $|z - 3| = |z + i|$

Hay $|a + ib - 3| = |a + ib + i| \Leftrightarrow |(a - 3) + ib| = |a + (b + 1)i| \Leftrightarrow (a - 3)^2 + b^2 = a^2 + (b + 1)^2$
 $\Leftrightarrow b = 4 - 3a$

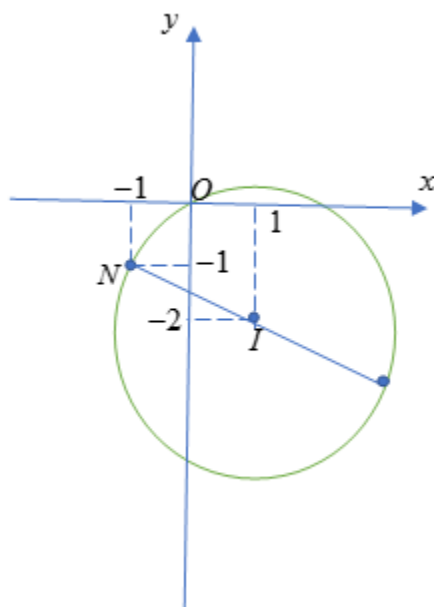
Lúc đó $P = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4 - 3a)^2} = \sqrt{10a^2 - 24a + 16}$

$= \sqrt{10\left(x^2 - \frac{24}{10}x + \frac{144}{100}\right) + \frac{8}{5}} \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$

CÂU 13:

Lời giải

Chọn B



Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i$.

Ta có: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ.

Dễ thấy $O \in (C)$, $N(-1; -1) \in (C)$.

Theo đề ta có: $M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x + 1) + (y + 1)i$$

$$\Rightarrow |z + 1 + i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} = |\overline{MN}|.$$

Suy ra $|z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn $(C) \Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(3; -3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

CÂU 14:

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{z + 2 - i}{z + 1 - i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z + 2 - i|}{|z + 1 - i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 1)i| = \sqrt{2} |(x + 1) + (y - 1)i|.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2[(x + 1)^2 + (y - 1)^2] \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

$$\text{Suy ra } (y - 1)^2 \leq 2 \Rightarrow y \leq 1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có: } x^2 + (y - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2 + 4y$$

$$\Rightarrow |z + i|^2 = 2 + 4y \leq 2 + 4(1 + \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow |z + i| \leq \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy $|z+1| = 2 + \sqrt{2}$ là môđun lớn nhất của số phức $z+i$.

CÂU 15:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z-1| = |z+2-i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0$.

Tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): 3x - y + 2 = 0$.

Để đoạn AM nhỏ nhất thì M là hình chiếu của A trên d .

d' qua A và vuông góc với d có phương trình $x + 3y - 16 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y - 16 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy $M(1; 5)$.

ĐỀ SỐ 4

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT

- Câu 1.** [Cụm 1 HCM - 2017] Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng ?
- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.
- Câu 2.** [SỞ GD-ĐT HÀ TĨNH L2 - 2017] Gọi T là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - i| \geq 2$ và $|z + 1| \leq 4$. Gọi $z_1, z_2 \in T$ lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất trong T . Khi đó $z_1 - z_2$ bằng:
- A. -5 . B. $4 - i$. C. $5 - i$. D. $-5 + i$.
- Câu 3.** [THPT Chuyên Hà Tĩnh - 2017] Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3i| + |z - 3i| = 10$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn số phức z có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Gọi M là trung điểm của M_1M_2 , $M(a; b)$ biểu diễn số phức w , tổng $|a| + |b|$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. $\frac{7}{2}$. B. 5. C. 4. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 4. [Sở Hải Dương - 2017] Cho số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

- A. $\frac{15}{4}$. B. 3. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 5: (Sở Quảng Bình - 2018) Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

- A. $3\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{5}$

Câu 6: (SGD VĨNH PHÚC - 2018) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z - z_1| \leq |z - z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

- A. 6 B. -2 C. 1 D. 9

Câu 7: [THPT Chuyên Thái Bình) Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$, $|iw + 4 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

- A. $\sqrt{554} + 5$ B. $\sqrt{578} + 13$ C. $\sqrt{578} + 5$ D. $\sqrt{554} + 13$

Câu 8: (THPT THÁI PHIÊN-HẢI PHÒNG) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - (m - 1) + i| = 8$ và $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

- A. 131. B. 63. C. 66. D. 130.

Câu 9. (Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 12 - 2017) Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $\frac{13}{4}$. D. 5.

Câu 10. (TRƯỜNG CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH) Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

- A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2$. C. $|w| = \sqrt{2}$. D. $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

- Câu 11:** (THPT Lê Hồng Phong - Nam Định) Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.
- A. $\max T = \sqrt{176}$. B. $\max T = 14$. C. $\max T = 4$. D. $\max T = \sqrt{106}$.
- Câu 12:** (Chuyên Thái Bình) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 2| + |(1+i)z - 2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max |z|$, $n = \min |z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$.
- A. 4^{1009} . B. 5^{1009} . C. 6^{1009} . D. 2^{1009} .
- Câu 13:** (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An) Cho số phức z thỏa mãn $5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z - 2 + 3i|$?
- A. $M = \frac{10}{3}$ B. $M = 1 + \sqrt{13}$ C. $M = 4\sqrt{5}$ D. $M = 9$
- Câu 14:** (THPT Chuyên Hà Tĩnh) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w} - 2 - 3i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$.
- A. $\sqrt{13} - 3$ B. $\sqrt{17} - 3$ C. $\sqrt{17} + 3$ D. $\sqrt{13} + 3$
- Câu 15:** [THPT Lê Hồng Phong-HCM] Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M - m$.
- A. $m = -4, n = 3$. B. $m = 4, n = 3$ C. $m = -4, n = 4$. D. $m = 4, n = -4$.

❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 4

CÂU 1:

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z^2 + 4| = |z(z + 2i)| \Leftrightarrow |z^2 - (2i)^2| = |z(z + 2i)| \Leftrightarrow |(z - 2i)(z + 2i)| = |z(z + 2i)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2i = 0 & (1) \\ |z - 2i| = |z| & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = -2i. \text{ Suy ra } |z+i| = |-2i+i| = |-i| = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow |x+yi-2i| = |x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4 = x^2+y^2 \\ \Leftrightarrow y=1.$$

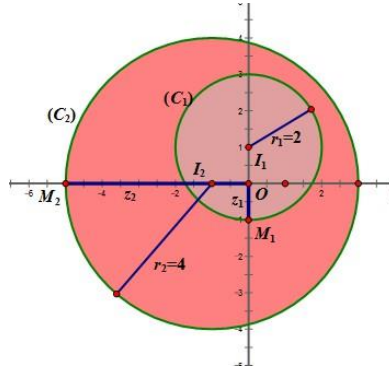
$$\text{Suy ra } |z+i| = |x+yi+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+4} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1.

CÂU 2:

Lời giải

Chọn C



Đặt $z = x + yi$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} |z-i| \geq 2 \\ |z+1| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+(y-1)i| \geq 2 \\ |(x+1)+yi| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \geq 4 \\ (x+1)^2+y^2 \leq 16 \end{cases}.$$

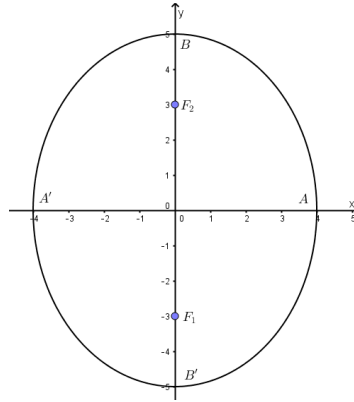
Vậy T là phần mặt phẳng giữa hai đường tròn (C_1) tâm $I_1(0;1)$ bán kính $r_1=2$ và đường tròn (C_2) tâm $I_2(-1;0)$ bán kính $r_2=4$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $z_1 = 0-i$, $z_2 = -5$ là hai số phức có điểm biểu diễn lần lượt là $M_1(0;-1)$, $M_2(-5;0)$ có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Do đó $z_1 - z_2 = -i - (-5) = 5-i$.

CÂU 3:

Lời giải

Chọn D



Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có $|z + 3i| + |z - 3i| = 10$.

$$\Leftrightarrow |x + (y + 3)i| + |x + (y - 3)i| = 10.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 10 \quad (*).$$

Gọi $E(x; y)$, $F_1(0; -3)$ và $F_2(0; 3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 6$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2 . Và độ dài trục lớn bằng 10.

Ta có $c = 3$; $2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$ và $a^2 = b^2 - c^2 = 16$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Vậy $\max|z| = OB = OB' = 5$ khi $z = \pm 5i$ có điểm biểu diễn là $M_1(0; \pm 5)$.

và $\min|z| = OA = OA' = 4$ khi $z = \pm 4$ có điểm biểu diễn là $M_2(\pm 4; 0)$.

Tọa độ trung điểm của M_1M_2 là $M\left(\pm 2; \pm \frac{5}{2}\right)$.

$$\text{Vậy } |a| + |b| = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

CÂU 4:

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z + \bar{z} = 2a$; $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Khi đó $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}| = \left| z \left(z^2 + 3 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \right| - |z + \bar{z}|$.

$$P = |z| \cdot \left| z^2 + 3 + \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right| - |z + \bar{z}| = |z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 1| - |z + \bar{z}|.$$

$$P = \left| (z + \bar{z})^2 + 1 \right| - |z + \bar{z}| = |4a^2 + 1| - 2|a| = 4a^2 + 1 - 2|a| = \left(2|a| - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{3}{4}.$$

CÂU 5:

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i}$.

$$\text{Mặt khác } |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left| \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - 1 + 2i| = 5\sqrt{5}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; -2)$ và bán kính $5\sqrt{5}$.

$$\text{Do đó } \min |w| = R - OI = 4\sqrt{5}.$$

CÂU 6:

Lời giải

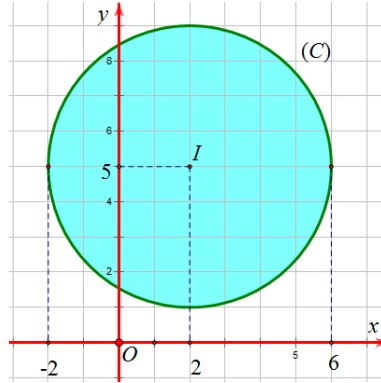
Chọn B

Ta có $z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 + 3i$ hoặc $z_2 = 2 - 3i$.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, $2|z - z_1| \leq |z - z_2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$
 $\Leftrightarrow 4[(x-2)^2 + (y-3)^2] \leq (x-2)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 16.$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình tròn (C) có tâm $I(2; 5)$, bán kính $R = 4$, kể cả hình tròn đó.



Do đó, phần thực nhỏ nhất của z là $x_{\min} = -2$.

CÂU 7:

Lời giải

Chọn D

$|z - 5 + 3i| = 3 \Rightarrow |3iz - 15i - 9| = 9$ là đường tròn có tâm $I(9; 15)$ và $R = 9$.

$|iw + 4 + 2i| = 2 \Rightarrow |2w - 8i + 4| = 4$ là đường tròn có tâm $J(4; -8)$ và $R' = 4$.

$T = |3iz + 2w|$ đạt giá trị lớn nhất khi $T = IJ + R + R' = \sqrt{554} + 13$.

CÂU 8:

Lời giải

Chọn C

- Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

- Từ giả thiết $|z - (m-1) + i| = 8 \Rightarrow (x - (m-1))^2 + (y+1)^2 = 64$, do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (T) có tâm $I(m-1; -1)$, bán kính $R = 8$.

- Từ giả thiết $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2$

$\Leftrightarrow 2x + 8y - 11 = 0$ hay M nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + 8y - 11 = 0$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta$ cắt (T) tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2(m-1) - 8 - 11|}{2\sqrt{17}} < 8 \Leftrightarrow |2m - 21| < 16\sqrt{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21 - 16\sqrt{17}}{2} < m < \frac{21 + 16\sqrt{17}}{2}, \text{ do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-22; -21; \dots; 42; 43\}.$$

Vậy có tất cả 66 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 9:

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Do $|z| = 1$ nên $a^2 + b^2 = 1$.

Sử dụng công thức: $|u \cdot v| = |u| |v|$ ta có: $|z^2 - z| = |z| |z - 1| = |z - 1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{2-2a}$.

$$\begin{aligned} |z^2 + z + 1| &= |(a+bi)^2 + a + bi + 1| = |a^2 - b^2 + a + 1 + (2ab + b)i| = \sqrt{(a^2 - b^2 + a + 1)^2 + (2ab + b)^2} \\ &= \sqrt{a^2(2a+1)^2 + b^2(2a+1)^2} = |2a+1| \text{ (vì } a^2 + b^2 = 1). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = |2a+1| + \sqrt{2-2a}.$$

$$\text{TH1: } a < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = -2a - 1 + \sqrt{2-2a} = (2-2a) + \sqrt{2-2a} - 3 \leq 4 + 2 - 3 = 3 \text{ (vì } 0 \leq \sqrt{2-2a} \leq 2).$$

$$\text{TH2: } a \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = 2a + 1 + \sqrt{2-2a} = -(2-2a) + \sqrt{2-2a} + 3 = -\left(\sqrt{2-2a} - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 + \frac{1}{4} \leq \frac{13}{4}.$$

$$\text{Xảy ra khi } a = \frac{7}{16}.$$

CÂU 10:

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $|z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |(a + bi)^2 + 1| = 2|a + bi|$

$$\Leftrightarrow |a^2 - b^2 + 1 + 2abi| = 2|a + bi| \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 1 - 2a^2 - 6b^2 + 2a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1)^2 - 4b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1 - 2b)(a^2 + b^2 - 1 + 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \end{cases}$$

TH1: $a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 2.$

Khi đó tập hợp điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_1(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_1(0; \sqrt{2} + 1)$ và $M_2(0; 1 - \sqrt{2})$

$$\Rightarrow w = (\sqrt{2} + 1)i + (1 - \sqrt{2})i \Rightarrow w = 2i \Rightarrow |w| = 2$$

TH2: $a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b + 1)^2 = 2.$

Khi đó tập hợp điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_2(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_3(0; \sqrt{2} - 1)$ và $M_4(0; -\sqrt{2} - 1)$

$$\Rightarrow w = (\sqrt{2} - 1)i + (-1 - \sqrt{2})i \Rightarrow w = -2i \Rightarrow |w| = 2.$$

CÂU 11:

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Do $z + w = 3 + 4i$ nên $w = (3 - x) + (4 - y)i$.

Mặt khác $|z-w|=9$ nên

$$|z-w| = \sqrt{(2x-3)^2 + (2y-4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y + 25} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 28 \quad (1). \text{ Suy ra } T = |z| + |w| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $T^2 \leq 2(2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 25) \quad (2).$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}.$

Từ (1) và (2) ta có $T^2 \leq 2(28 + 25) \Leftrightarrow -\sqrt{106} \leq T \leq \sqrt{106}$. Vậy $\max T = \sqrt{106}$.

CÂU 12:

Lời giải

Chọn C

Ta có $|(1+i)z+2| + |(1+i)z-2| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1-i| + |z-1+i| = 4.$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $F_1(-1;1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = -1+i$ và $F_2(1;-1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2 = 1-i$. Khi đó ta có $MF_1 + MF_2 = 4$. Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip nhận F_1 và F_2 làm hai tiêu điểm.

Ta có $F_1F_2 = 2c \Leftrightarrow 2c = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}.$

Mặt khác $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$ suy ra $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}.$

Do đó Elip có độ dài trục lớn là $A_1A_2 = 2a = 4$, độ dài trục bé là $B_1B_2 = 2b = 2\sqrt{2}.$

Mặt khác O là trung điểm của AB nên $m = \max|z| = \max OM = OA_1 = a = 2$ và $n = \min|z| = \min OM = OB_1 = b = \sqrt{2}.$

Do đó $w = 2 + \sqrt{2}i$ suy ra $|w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = 6^{1009}.$

CÂU 13:

Lời giải

Gọi $A(0;1), B(-1;3), C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

$$\text{Ta lại có : } 5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$$

$$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2}$$

$$\Rightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Rightarrow MC \leq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Mà } |z-2+3i| = |(z-i) + (-2+4i)| \leq |z-i| + |2-4i| \leq |z-i| + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} \end{cases}, \text{ với } z = a+bi; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-3i \text{ (loại)} \\ z = -2+5i \end{cases}.$$

CÂU 14:

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 1$.

$N(x'; y')$ biểu diễn số phức $w = x' + iy'$ thì N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; -3)$, bán kính $R_2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Ta có $\overline{I_1 I_2} = (1; -4) \Rightarrow I_1 I_2 = \sqrt{17} > R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

$$\Rightarrow MN_{\min} = I_1 I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{17} - 3$$

CÂU 15:

Lời giải

Chọn A

Vì $|z| = 1$ và $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ nên ta có $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Từ đó, $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1| = |z||z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1| = |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1|$.

Đặt $z^4 = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Do $|z| = 1$ nên $|z^4| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ và $-1 \leq x, y \leq 1$.

Khi đó $P = |x + iy + x - iy + 6| - 2|x + iy + 1| = |2x + 6| - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
 $= 2x + 6 - 2\sqrt{2x + 2} = (\sqrt{2x + 2} - 1)^2 + 3$.

Do đó $P \geq 3$. Lại có $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2x + 2} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{2x + 2} - 1 \leq 1 \Rightarrow P \leq 4$.

Vậy $M = 4$ khi $z^4 = \pm 1$ và $m = 3$ khi $z^4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Suy ra $M - m = 1$.

ĐỀ SỐ 5

THỜI GIAN LÀM BÀI: 90 PHÚT

Câu 1: (THPT Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

- A. $m = \sqrt{2} - 1$. B. $m = 2\sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 2\sqrt{2} - 2$

Câu 2: (SGD Hà Nam - Năm) Xét các số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính $F = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. $F = 7$. B. $F = 6$. C. $F = 5$. D. $F = 4$.

Câu 3: (SỞ GD VÀ ĐT HƯNG YÊN NĂM 2018) Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{4}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 4: (CHUYÊN VINH LẦN 3-2018) Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

- A. $6\sqrt{7}$. B. $4+2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{53}$. D. $4\sqrt{13}$.

Câu 5: (THPT Chuyên Quốc Học Huế) Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

- A. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. B. $60 - 20\sqrt{10}$. C. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$. D. $60 + 2\sqrt{10}$.

Câu 6: (THPT HAU LOC 2 THANH HOA) Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1|$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\sqrt{41}$. B. 6. C. $2\sqrt{5}$. D. 8.

Câu 7: [SGD NINH BINH] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị biểu thức $S = [5(a + b) + 2]^{2018}$ khi biểu thức $P = |2 + z| + 3|2 - z|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $S = 1$. B. $S = 2^{2018}$. C. $S = 2^{1009}$. D. $S = 0$.

Câu 8: (Sở GD Thanh Hoá) Cho số phức z thỏa mãn $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

- A. $S = 9$. B. $S = 8$. C. $S = 2\sqrt{21}$. D. $S = 2\sqrt{21} - 1$.

Câu 9: (SỞ GD-ĐT HẬU GIANG) Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z + 5| = 5$ và $|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\sqrt{10}$. D. $3\sqrt{10}$.

Câu 10. (Chuyên Thái Nguyên) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$ và biểu thức $T = |z - 7 - 9i| + 2|z - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $z = 5 - 2i$. B. $z = 1 + 6i$.
C. $z = 1 + 6i$ và $z = 5 - 2i$. D. $z = 4 + 5i$.

Câu 11: [Đề thi thử-Liên trường Nghệ An] Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$$|z_1 - 3 - 4i| = 1 \text{ và } |z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}. \text{ Số phức } z \text{ có phần thực là } a \text{ và phần ảo là } b \text{ thỏa}$$

mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.

Câu 12: (THPT Chuyên Võ Nguyên) Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là:

A. 0. B. 2 C. 7 D. 17

Câu 13: (THPT Ninh Giang - Hải Dương) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 4 + 3i| = 2$. Giả

sử biểu thức $P = |z|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khi z lần lượt bằng

$$z_1 = a_1 + b_1i \text{ (} a_1, b_1 \in \mathbb{R} \text{) và } z_2 = a_2 + b_2i \text{ (} a_2, b_2 \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Tính } S = a_1 + a_2$$

A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 8$. D. $S = 10$.

Câu 14: (THPT Ninh Giang - Hải Dương) Cho các số phức z thỏa mãn

$$|z^2 + 4| = |(z - 2i)(z - 1 + 2i)|. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = |z + 3 - 2i|.$$

A. $P_{\min} = 4$. B. $P_{\min} = 2$. C. $P_{\min} = \frac{7}{2}$. D. $P_{\min} = 3$.

Câu 15: (THPT Ninh Giang - Hải Dương) Cho các số phức z thỏa mãn

$$|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53}. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } P = |z + 1 + 2i|.$$

A. $P_{\max} = 53$. B. $P_{\max} = \frac{\sqrt{185}}{2}$. C. $P_{\max} = \sqrt{106}$. D. $P_{\max} = \sqrt{53}$

Câu 16: (SGD - Quảng Nam - Lần 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng:

A. $4 + 2\sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. D. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.

Câu 17: (PTNK Cơ Sở 2 - TPHCM) Nếu z là số phức thỏa $|\bar{z}| = |z + 2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - i| + |z - 4|$ là

- A. 2. B. $\sqrt{3}$. C. 4. D. 5.

Câu 18: (THPT Vũng Tàu - BRVT) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |z - 3i|$ và số phức $w = \frac{1}{z}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|w|$.

- A. $|w|_{\max} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$. B. $|w|_{\max} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$. C. $|w|_{\max} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$. D. $|w|_{\max} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$.

Câu 19. [THPT Hoàng Văn Thụ] Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$, thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng.

- A. $\frac{31}{5}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 5. D. $\frac{56}{5}$.

Câu 20: (THPT-Chuyên Ngữ Hà Nội) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

- A. $\sqrt{313} + 16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313} + 8$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Câu 21: (Chuyên Vinh - Lần 1 - 2018) Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.

Câu 22: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u - 6i| + 3|u - 1 - 3i| = 5\sqrt{10}$, $|v - 1 + 2i| = |\bar{v} + i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u - v|$ là:

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

Câu 23: (THPT Kim Liên-Hà Nội) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4 - \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. 3. D. $4 + \sqrt{3}$.

- Câu 24:** (THPT Sơn Tây - Hà Nội) Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz + 1 + 2i| = 3$ và biểu thức $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị tích của $M.n$ là
- A. $10\sqrt{21}$ B. $6\sqrt{13}$ C. $5\sqrt{21}$ D. $2\sqrt{13}$

❖ ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ SỐ 5

CÂU 1:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } z_1 = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a + b) + (b - a)i.$$

$$\text{Nên } |z_1 - z_2| = \sqrt{(a + b)^2 + (b - a)^2} = \sqrt{2} \cdot |z_1|$$

$$\text{Ta lại có } 2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}. \text{ Suy ra } |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{1} = \frac{b}{-1} < 0.$$

$$\text{Vậy } m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2.$$

CÂU 2:

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow 4(a + bi - a - bi) - 15i = i(a + bi + a - bi - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 8b - 15 = (2a - 1)^2 \text{ suy ra } b \geq \frac{15}{8}.$$

$$\left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(2a - 1)^2 + (2b + 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8b - 15 + 4b^2 + 24b + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + 32b + 21}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + 32x + 21$ với $x \geq \frac{15}{8}$

$f'(x) = 8x + 32 > 0, \forall x \geq \frac{15}{8}$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$ nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{4353}{16}.$$

Do đó $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4353}{16}}$ khi $b = \frac{15}{8}; a = \frac{1}{2}$.

Khi đó $F = -a + 4b = 7$.

CÂU 3:

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = a + bi \Rightarrow M(a; b), M'(a; -b)$.

Ta có: $z(4 + 3i) = (a + bi)(4 + 3i) = 4a - 3b + (3a + 4b)i$

$\Rightarrow N(4a - 3b; 3a + 4b), N'(4a - 3b; -3a - 4b)$.

Vì MM' và NN' cùng vuông góc với trục Ox nên M, M', N, N' là bốn đỉnh của

hình chữ nhật khi $\begin{cases} MM' = NN' \\ MN \perp MM' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b)^2 = (6a + 8b)^2 \\ (3a - 3b) \cdot 0 + (3a + 3b) \cdot (-2b) = 0 \\ b \neq 0, 3a + 4b \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b \neq 0, 3a + 4b \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó: $|z + 4i - 5| = |(a - 5) + (b + 4)i| = \sqrt{(a - 5)^2 + (b + 4)^2} = \sqrt{(a - 5)^2 + (4 - a)^2}$

$$= \sqrt{2a^2 - 18a + 41} = \sqrt{2\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$ là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $a = \frac{9}{2} \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$.

CÂU 4:

Lời giải

Chọn C

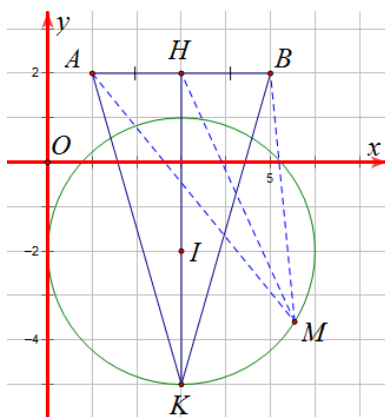
Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $5w = (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5(w + i) = (2 + i)(z - 4) + 5i$

$$\Leftrightarrow (2 - i)(w + i) = z - 3 + 2i$$

$\Leftrightarrow |z - 3 + 2i| = 3$. Suy ra $M(x; y)$ thuộc đường tròn $(C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Ta có $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i| = MA + MB$, với $A(1; 2)$ và $B(5; 2)$.



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $H(3; 2)$ và khi đó:

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \text{ hay } P \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

Mặt khác, $MH \leq KH$ với mọi $M \in (C)$ nên $P \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2}$

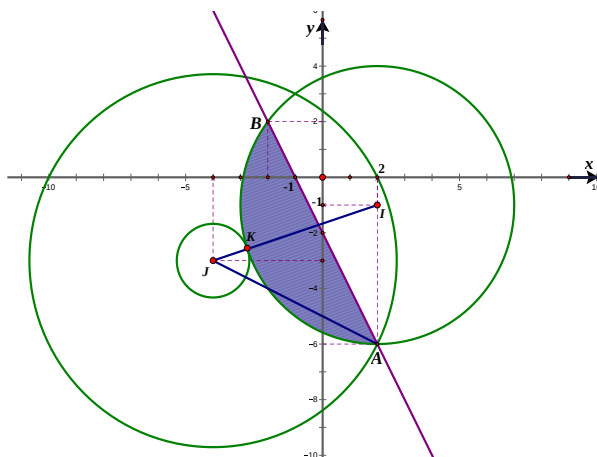
$$= \sqrt{4(IH + R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases}$ hay $z = 3 - 5i$ và $w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$.

CÂU 5:

Lời giải

Chọn B



- Theo bài ra: $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (-y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

- Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25$.

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P + 25}$.

- Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi

$$JK \leq R \leq JA \Leftrightarrow IJ - IK \leq R \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{25 + P} \leq 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

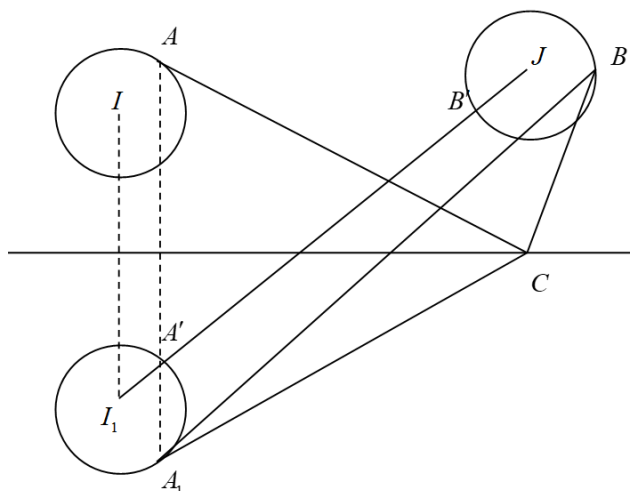
$$\Rightarrow M = 20 \text{ và } m = 40 - 20\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 60 - 20\sqrt{10}.$$

CÂU 6:

Lời giải

Chọn C



Gọi $I(4;5)$, $J(1;0)$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Khi đó A nằm trên đường tròn tâm I bán kính $R=1$, B nằm trên đường tròn tâm J bán kính $R=1$.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$\begin{aligned} |\bar{z} + 4i| &= |z - 8 + 4i| \\ \Leftrightarrow |x - yi + 4i| &= |x + yi - 8 + 4i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (4 - y)^2 &= (x - 8)^2 + (y + 4)^2 \\ \Leftrightarrow 16x - 16y - 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta: x - y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Gọi C là điểm biểu diễn số phức z thì $C \in (\Delta)$.

Ta có: $P = |z - z_1| + |z - z_2| = CA + CB$.

$$d(I, \Delta) = \frac{|4 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} > 1 = R, \quad d(J, \Delta) = \frac{|1 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = R.$$

$(x_I - y_I - 4)(x_J - y_J - 4) = (4 - 5 - 4)(1 - 0 - 4) > 0 \Rightarrow$ hai đường tròn không cắt Δ và nằm cùng phía với Δ .

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Δ , suy ra A_1 nằm trên đường tròn tâm I_1 bán kính $R=1$ (với I_1 là điểm đối xứng với I qua Δ). Ta có $I_1(9;0)$.

Khi đó: $P = CA + CB = CA_1 + CB \geq A_1B$ nên $P_{\min} \Leftrightarrow A_1B_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \equiv A' \\ B \equiv B' \end{cases}$.

Khi đó: $\overrightarrow{I_1A} = \frac{1}{8}\overrightarrow{I_1J} \Rightarrow A'(8;0); \overrightarrow{I_1B} = \frac{7}{8}\overrightarrow{I_1J} \Rightarrow B'(2;0)$.

Như vậy: $P_{\min}$ khi A đối xứng A' qua Δ và $B \equiv B' \Leftrightarrow \begin{cases} A(4;4) \\ B(2;0) \end{cases}$. Vậy

$$M = |z_1 - z_2| = AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

CÂU 7:

Lời giải

Chọn D

$$z = a + bi; |z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

$$P = |2 + z| + 3|2 - z| = \sqrt{(a+2)^2 + b^2} + 3\sqrt{(2-a)^2 + b^2} = \sqrt{4a+8} + 3\sqrt{8-4a}.$$

$$\sqrt{4a+8} + 3\sqrt{8-4a} \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(8+4a+8-4a)} = 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{\sqrt{4a+8}}{1} = \frac{\sqrt{8-4a}}{3} \Leftrightarrow 9(4a+8) = 8-4a \Leftrightarrow a = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{Với } a = -\frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{6}{5} \text{ (do } b > 0 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow z = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i. \text{ Khi đó } S = \left[5\left(-\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) + 2 \right]^{2018} = 0.$$

CÂU 8:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

$$\text{Chia hai vế cho } |i| \text{ ta được: } |z + 2 - i| + |\bar{z} - 2 + i| = 10.$$

$$\text{Đặt } M(a; b), N(a; -b), A(-2; 1), B(2; -1), C(2; 1) \Rightarrow NB = MC.$$

Ta có: $MA + MC = 10 \Rightarrow M \in (E): \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{21} = 1.$

Elip này có phương trình chính tắc với hệ trục tọa độ IXY , $I(0;1)$ là trung điểm AC .

Áp dụng công thức đổi trục $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1.$

Đặt $\begin{cases} a = 5 \sin t \\ b - 1 = \sqrt{21} \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi) \Rightarrow |z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2$

$$= 25 \sin^2 t + (1 + \sqrt{21} \cos t)^2$$

$$= 26 + (-4 \cos^2 t + 2\sqrt{21} \cos t).$$

$$|z|_{\max} = 1 + \sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 + \sqrt{21} \end{cases}.$$

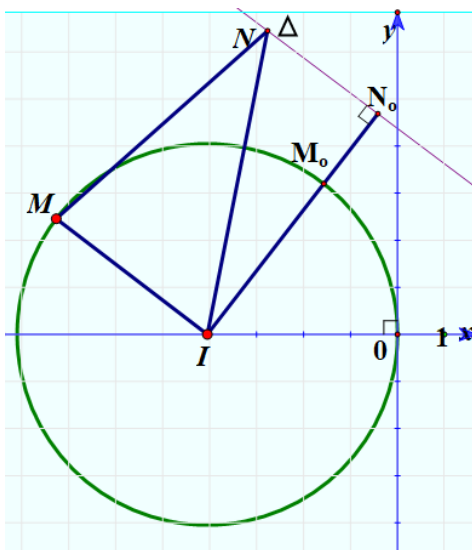
$$|z|_{\min} = -1 + \sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 - \sqrt{21} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow M + m = 2\sqrt{21}.$$

CÂU 9:

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, $N(x'; y')$ là điểm biểu diễn của số phức $z' = x' + y'i$.

$$\text{Ta có } |z + 5| = 5 \Leftrightarrow |x + 5 + yi| = 5 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + y^2 = 5^2.$$

Vậy M thuộc đường tròn $(C): (x + 5)^2 + y^2 = 5^2$

$$|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i| \Leftrightarrow |(x' + 1) + (y' - 3)i| = |(x' - 3) + (y' - 6)i|$$

$$\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = (x' - 3)^2 + (y' - 6)^2 \Leftrightarrow 8x' + 6y' = 35$$

Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y = 35$

Để thấy đường thẳng Δ không cắt (C) và $|z - z'| = MN$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, cho bộ ba điểm (I, M, N) ta có.

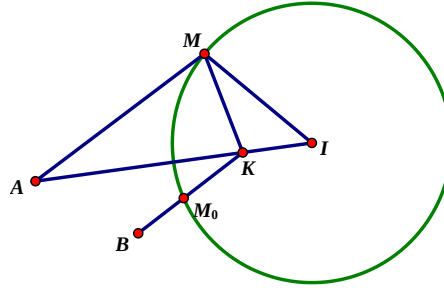
$$MN \geq |IN - IM| = |IN - R| \geq |IN_0 - R| = |d(I, \Delta) - R| = \left| \frac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 \right| = \frac{5}{2}$$

Dấu bằng đạt tại $M \equiv M_0; N \equiv N_0$.

CÂU 10:

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết $|z - 1 - i| = 5$ suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 5$.

Xét các điểm $A(7;9)$ và $B(0;8)$. Ta thấy $IA = 10 = 2.IM$.

Gọi K là điểm trên tia IA sao cho $IK = \frac{1}{4}IA \Rightarrow K = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$

Do $\frac{IM}{IA} = \frac{IK}{IM} = \frac{1}{2}$, góc MIK chung $\Rightarrow \triangle IKM \sim \triangle IMA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{MK}{MA} = \frac{IK}{IM} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2.MK$.

Lại có: $T = |z - 7 - 9i| + 2|z - 8i| = MA + 2.MB = 2(MK + MB) \geq 2.BK = 5\sqrt{5}$

$\Rightarrow T_{\min} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow M = BK \cap (C)$, M nằm giữa B và $K \Rightarrow 0 < x_M < \frac{5}{2}$.

Ta có: phương trình đường thẳng BK là: $2x + y - 8 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M = (1;6).$$

Vậy $z = 1 + 6i$ là số phức cần tìm.

CÂU 11:

Hướng dẫn giải

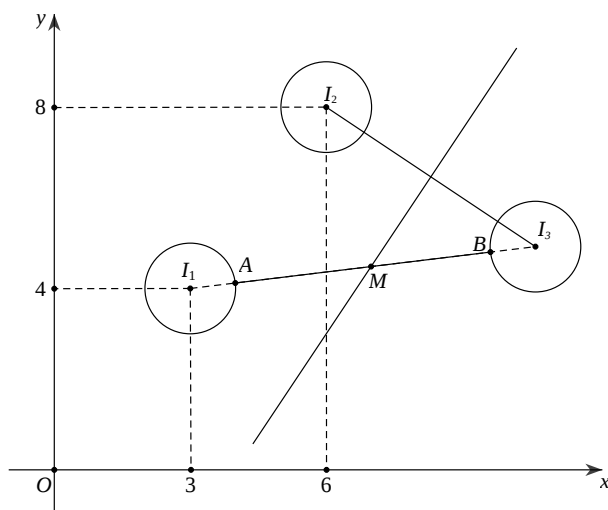
Chọn C

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z_1, 2z_2, z$ trên hệ trục tọa độ Oxy . Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MM_1 + MM_2 + 2$.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d . Khi

đó $\min(MM_1 + MM_2 + 2) = \min(MM_1 + MM_3 + 2)$ với $M_3 \in (C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với $(C_1), (C_3)$. Khi đó với mọi điểm $M_1 \in (C_1), M_3 \in (C_3), M \in d$ ta có $MM_1 + MM_3 + 2 \geq AB + 2$, dấu "=" xảy ra

khi $M_1 \equiv A, M_3 \equiv B$. Do đó $P_{\min} = AB + 2 = I_1I_3 - 2 + 2 = I_1I_3 = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

CÂU 12:

Lời giải

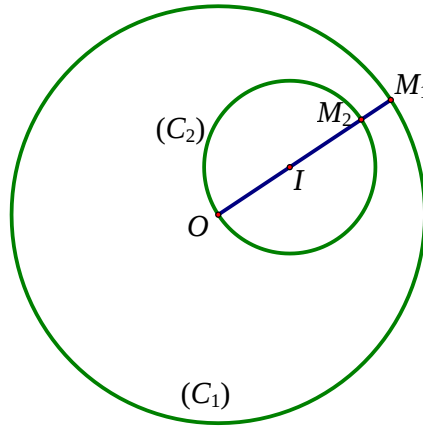
Chọn B

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$, trong đó $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$; đồng thời $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 .

Theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 144 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

Do đó M_1 thuộc đường tròn (C_1) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_1 = 12$, M_2 thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} O \in (C_2) \\ OI = 5 < 7 = R_1 - R_2 \end{cases}$ nên (C_2) chứa trong (C_1) .



Khi đó $|z_1 - z_2| = M_1M_2$. Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow (M_1M_2)_{\min} \Leftrightarrow M_1M_2 = R_1 - 2R_2 = 2$.

CÂU 13:

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$|z - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |a + ib - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |a - 4 + (b + 3)i| = 2$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b + 3)^2 = 4$$

Khi đó tập hợp các điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ thuộc vào đường tròn

(C) có tâm $I(4; -3)$, $R = 2$. Ta có $OI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Suy ra $|z|_{\max} = OI + R = 5 + 2 = 7$, $|z|_{\min} = |OI - R| = 5 - 2 = 3$.

Gọi Δ là đường thẳng qua hai điểm OI ta có

phương trình của $(\Delta): 3x + 4y = 0$. Gọi M và N lần lượt là hai giao điểm của (Δ)

và (C)

sao cho $OM = 3$ và $ON = 7$ khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OI} \Rightarrow M\left(\frac{12}{5}; -\frac{9}{5}\right) \\ \overrightarrow{ON} = \frac{7}{5}\overrightarrow{OI} \Rightarrow N\left(\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{28}{5} - \frac{21}{5}i \\ z_2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}i \end{cases} \Rightarrow S = \frac{28}{5} + \frac{12}{5} = 8.$$

CÂU 14:

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |z^2 + 4| = |(z - 2i)(z - 1 + 2i)| \Leftrightarrow |z - 2i|(|z + 2i| - |z - 1 + 2i|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 2i| = 0 \\ |z + 2i| = |z - 1 + 2i| \end{cases}$$

Do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $A(0; 2)$ và đường trung trực của đoạn thẳng BC với $B(0; -2)$, $C(1; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 0)$, $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm BC nên phương trình đường trung trực của BC là $\Delta: 2x - 1 = 0$.

$$\text{Đặt } D(-3; 2), DA = 3, d(D, \Delta) = \frac{7}{2}.$$

Khi đó $P = |z + 3 - 2i| = DN$, với N là điểm biểu diễn cho z .

$$\text{Suy ra } \min P = \min \{DA, d(D, \Delta)\} = 3.$$

CÂU 15:

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } A(1; 1), B(8; 3) \text{ ta có } AB = \sqrt{53}$$

$\Rightarrow$ các điểm biểu diễn z là đoạn thẳng AB

$P = |z + 1 + 2i| = MM'$ với M là điểm biểu diễn số phức z , M' là điểm biểu diễn số phức $z' = -1 - 2i$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: -2x + 7y - 5 = 0$$

$$\text{Hình chiếu vuông góc của } M' \text{ lên } AB \text{ là } M_1 = \left(-\frac{87}{53}; \frac{13}{53}\right)$$

Ta có A nằm giữa M_1 và B nên $P = MM'$ lớn nhất $\Leftrightarrow MM_1$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow z = 8 + 3i$$

$$\Rightarrow P_{\max} = \sqrt{106}.$$

CÂU 16:

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

Suy ra $-2 \leq x, y \leq 2$.

$$\text{Khi đó, } P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} + |y-2|\right)$$

$$\Leftrightarrow P = 2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(1-x)^2+y^2} + |y-2|\right) \geq 2(2\sqrt{1+y^2} + 2-y).$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2-y$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}; f(-2) = 4 + 2\sqrt{5}; f(2) = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-2; 2]} f(y) = 2 + \sqrt{3} \text{ khi } y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } P \geq 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}. \text{ Vậy } P_{\min} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ khi } z = \frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

CÂU 17:

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ theo giả thiết $|\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow y = -1. (d)$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d) .

Gọi $A(0;1), B(4;0)$ suy ra $|z-i| + |z-4| = P$ là tổng khoảng cách từ điểm $M(x;-1)$ đến hai điểm A, B .

Thấy ngay $A(0;1)$ và $B(4;0)$ nằm cùng phía với (d) . Lấy điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng (d) ta được điểm $A'(0;-3)$.

$$\text{Do đó khoảng cách ngắn nhất là } A'B = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

CÂU 18:

Lời giải

Chọn B.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z + 1 - i| = |z - 3i| \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 1)^2 = a^2 + (b - 3)^2 \Leftrightarrow a = -2b + \frac{7}{2}.$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-2b + \frac{7}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{5b^2 - 14b + \frac{49}{4}} = \sqrt{5\left(b - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{49}{20}} \geq \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow |w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \leq \frac{2\sqrt{5}}{7}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } b = \frac{7}{5} \text{ và } a = \frac{63}{10}.$$

$$\text{Vậy } |w|_{\max} = \frac{2\sqrt{5}}{7}.$$

$$\min |w| = 1.$$

CÂU 19:

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } |6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 24 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 1 \Leftrightarrow |z - (3 + 4i)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1 - (3 + 4i)| = 1 \\ |z_2 - (3 + 4i)| = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta lại có: } 2 \left[|z_1 - (3 + 4i)|^2 + |z_2 - (3 + 4i)|^2 \right] \stackrel{hbh}{=} |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2 - (6 + 8i)|^2.$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + 1) = \frac{64}{25} + |z_1 + z_2 - (6 + 8i)|^2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 - (6 + 8i)|^2 = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Ta có: } |z_1 + z_2| = |z_1 + z_2 - (6 + 8i) + (6 + 8i)| \leq |z_1 + z_2 - (6 + 8i)| + |6 + 8i| \leq \frac{6}{5} + 10 = \frac{56}{5}.$$

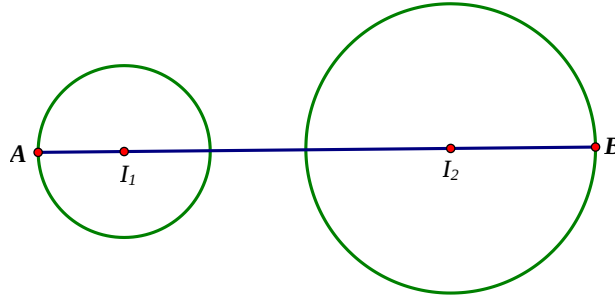
CÂU 20:

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4 \quad (1); |iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12 \quad (2).$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$ và bán kính $R_1 = 4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$ và bán kính $R_2 = 12$.



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$.

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

CÂU 21:

Lời giải

Chọn A

Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i\sqrt{2})| = 1$. Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I(1; \sqrt{2})$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên I là trung điểm của AB .

Ta có $|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4$.

Dấu bằng khi $OA = OB$.

CÂU 22:

Lời giải

Chọn B

▪ Ta có: $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10} \Leftrightarrow |u-6i|+|u-1-3i|=\frac{5\sqrt{10}}{3} S$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = \frac{5\sqrt{10}}{3}.$$

$\Rightarrow u$ có điểm biểu diễn M thuộc elip với hai tiêu điểm $F_1(0;6), F_2(1;3)$, tâm

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right) \text{ và độ dài trục lớn là } 2a = \frac{5\sqrt{10}}{3} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{10}}{6}.$$

$$\overrightarrow{F_1F_2} = (1; -3) \Rightarrow F_1F_2 : 3x + y - 6 = 0.$$

▪ Ta có: $|v-1+2i| = |\bar{v}+i| = |v-i| \Rightarrow NA = NB$

$\Rightarrow v$ có điểm biểu diễn N thuộc đường thẳng d là trung trực của đoạn AB với $A(1;-2), B(0;1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 3), K\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow d : x - 3y - 2 = 0.$$

$$d(I, d) = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{27}{2} - 2\right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Để thấy } F_1F_2 \perp d \Rightarrow \min|u-v| = \min MN = |d(I, d) - a| = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

CÂU 23:

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Đặt $z-3-2i=w$ với $w=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo bài ra ta có $|w|=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Ta

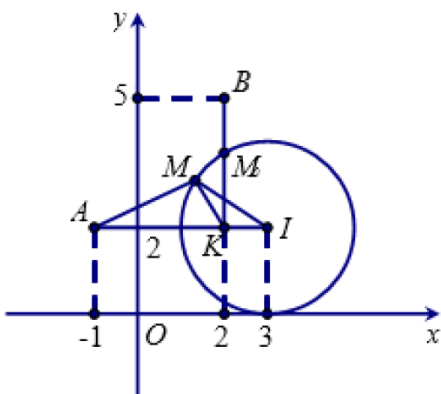
có

$$\begin{aligned} P &= |z+1-2i| + 2|z-2-5i| = |w+4| + 2|w+1-3i| = \sqrt{(x+4)^2+y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} \\ &= \sqrt{20+8x} + 2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 2\sqrt{5+2x} + 2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} \\ &= 2\left(\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right) = 2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\geq 2(|y| + |y-3|) \geq 2|y+3-y| = 6.$$

$$P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y(3-y) \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z = 2 + (2 + \sqrt{3})i$.



Cách 2:

$$|z - 3 - 2i| = 2 \Rightarrow MI = 2 \Rightarrow M \in (I; 2) \text{ với } I = (3; 2).$$

$$P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = MA + 2MB \text{ với } A = (1; 2), B = (2; 5).$$

Ta có $IM = 2$; $IA = 4$. Chọn $K(2; 2)$ thì $IK = 1$. Do đó ta có $IA \cdot IK = IM^2$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{IM}{IK}$$

$$\Rightarrow \triangle IAM \text{ và } \triangle IMK \text{ đồng dạng với nhau} \Rightarrow \frac{AM}{MK} = \frac{IM}{IK} = 2 \Rightarrow AM = 2MK.$$

$$\text{Từ đó } P = MA + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2BK.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK .

$$\text{Từ đó tìm được } M = (2; 2 + \sqrt{3}).$$

Cách 3:

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$. Đặt $I = (3; 2)$, $A(-1; 2)$ và $B(2; 5)$

.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I , bán kính $R = 2$ sao cho biểu thức $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x; y)$ sao cho $MA = 2MK \forall M \in (C)$.

$$\text{Ta có } MA = 2MK \Leftrightarrow MA^2 = 4MK^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK})^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 4(MI^2 + IK^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IK}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK}) = 3R^2 + 4IK^2 - IA^2$$

$$(*)$$

$$(*) \text{ luôn đúng } \forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3) = -4 \\ 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử trực tiếp ta thấy $K(2; 2)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 3^2 = 10 > R^2 = 4$ nên B nằm ngoài (C) .

Vì $KI^2 = 1 < R^2 = 4$ nên K nằm trong (C) .

Ta có $MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK .

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK .

Phương trình đường thẳng $BK: x = 2$.

Phương trình đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}.$$

Thử lại thấy $M(2; 2+\sqrt{3})$ thuộc đoạn BK .

$$\text{Vậy } a=2, b=2+\sqrt{3} \Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}.$$

CÂU 23:

Lời giải

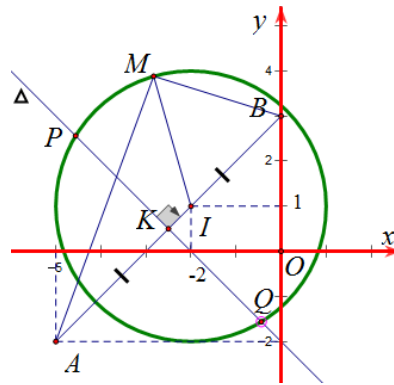
Chọn A

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $|iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Ta có $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i| = 2MA + 3MB$, với $A(-5; -2)$ và $B(0; 3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$.



Cách 1:

Gọi Δ là đường trung trực của AB , ta có $\Delta: x + y + 5 = 0$.

$T = 2MA + 3MB \leq PA + PB$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow P\left(\frac{-8-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } Q\left(\frac{-8+\sqrt{2}}{2}; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right).$$

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

Cách 2:

Ta có A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$ nên $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 105.$$

$$\text{Do đó } T^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}MA + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}MB)^2 \leq 5(2MA^2 + 3MB^2) = 525 \text{ hay } T \leq 5\sqrt{21}.$$

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$. Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.