

CHƯƠNG V. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Một cuộc khảo sát đã tiến hành xác định tuổi (theo năm) của 120 chiếc ô tô. Kết quả điều tra được cho trong bảng 1.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Nhóm	Tần số
$[0 ; 4)$	13
$[4 ; 8)$	29
$[8 ; 12)$	48
$[12 ; 16)$	22
$[16 ; 20)$	8
	$n = 120$

Bảng 1

Tìm các số đặc trưng đo xu thế trung tâm (số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị, mốt) cho mẫu số liệu ghép nhóm đó như thế nào cho thuận lợi?



I. MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

1. Bảng tần số ghép nhóm



Trong Bảng 1 ở phần mở đầu ta thấy:

Có 13 ô tô có độ tuổi dưới 4 ;

Có 29 ô tô có độ tuổi từ 4 đến dưới 8 .

Hãy xác định số ô tô có độ tuổi:

- a) Từ 8 đến dưới 12 ;
- b) Từ 12 đến dưới 16 ;
- c) Từ 16 đến dưới 20 .

Lời giải

- a) Có 48 ô tô có độ tuổi từ 8 đến dưới 12;
- b) Có 22 ô tô có độ tuổi từ 12 đến dưới 16;
- c) Có 8 ô tô có độ tuổi từ 16 đến dưới 20.

- Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.
- mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng $[a;b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải. độ dài nhóm là $b - a$.

• Tần số của một nhóm là số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, \dots, n_m$.

• Bảng tần số ghép nhóm được lập ở Bảng 2, trong đó mẫu số liệu n số liệu được chia thành m nhóm ứng với m nửa khoảng $[a_1; a_2); [a_2; a_3); \dots; [a_m; a_{m+1})$, ở đó

$a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1}$ và $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
...	
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	n

Ví dụ 1: bảng 3 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết :

- Mẫu số liệu đó có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm;
- Tần số của mỗi nhóm.

Giải

Từ Bảng 3 ta thấy:

- Mẫu số liệu đó gồm 120 số liệu và 5 nhóm.
- Tần số của các nhóm 1,2,3,4,5 lần lượt là: 11, 31, 45, 21, 12.

Nhóm	Tần số
$[0; 5)$	11
$[5; 10)$	31
$[10; 15)$	45
$[15; 20)$	21
$[20; 26)$	12
	$n = 120$

Lời giải

- Mẫu số liệu ghép nhóm ở Bảng 1 có 120 số liệu và 5 nhóm
- Tần số của các nhóm lần lượt là: 13, 29, 48, 22, 8.

2. Ghép nhóm mẫu số liệu. Tần số tích lũy



Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimet)

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164
164 165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167
168 168 168 168 169 169 170 171 171 172 172 174

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, hãy ghép các số liệu thành năm nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Lời giải

Để ghép nhóm các số liệu, ta cần tìm giá trị của khoảng cách giữa các số trong mẫu số liệu. Khoảng cách giữa hai số bất kỳ có thể được tính bằng cách lấy hiệu của chúng.

Ta có thể chia mẫu số liệu thành năm nhóm dựa trên các nửa khoảng có độ dài bằng nhau:

[160; 163): 160, 161, 161, 162, 162, 162

[163; 166): 163, 163, 163, 164, 164, 164, 164, 165, 165, 165, 165, 165

[166; 169): 166, 166, 166, 166, 167, 167, 168, 168, 168, 168

[169; 172): 169, 169, 170, 171, 171

[172; 175): 172, 172, 174

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:

- Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.
- Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng tần số ghép nhóm.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, ta thường phân chia các nhóm có độ dài bằng nhau và đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu. Nhóm cuối cùng có thể là $[a_m; a_{m+1}]$

Ví dụ 2: Trong bài toán ở Hoạt động 2, lập bảng tần số ghép nhóm có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[160; 163), [166; 169), [169; 172), [172; 175)$.

Lời giải:

Bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	Tần số
$[160; 163)$	6
$[163; 166)$	12
$[166; 169)$	10
$[169; 172)$	5
$[172; 175)$	3
	$n = 36$

Bảng 4

Luyện tập 2. Một thư viện thống kê người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau:

85 81 65 58 47 30 51 92 85 42
55 37 31 82 63 33 44 93 77 57
44 74 63 67 46 73 52 53 47 35

Lập bảng tần số ghép nhóm có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng sau:

$[25; 34), [34; 43), [43; 52), [52; 61), [61; 70), [70; 79), [79; 88), [88; 97)$

Lời giải

Nhóm	$[25; 34)$	$[34; 43)$	$[43; 52)$	$[52; 61)$	$[61; 70)$	$[70; 79)$	$[79; 88)$	$[88; 97)$
Tần số	3	3	6	5	4	3	4	2

HĐ3. Trong Bảng 4, có bao nhiêu số liệu với giá trị không vượt quá giá trị đầu mút phải:

- a) 163 của nhóm 1 ? b) 166 của nhóm 2 ? c) 169 của nhóm 3 ?
d) 172 của nhóm 4? e) 175 của nhóm 5 ?

Lời giải

Có 6 giá trị không vượt quá giá trị 163 của nhóm 1.

Có 12 giá trị không vượt quá giá trị 166 của nhóm 2.

Có 10 giá trị không vượt quá giá trị 169 của nhóm 3..

Có 5 giá trị không vượt quá giá trị 172 của nhóm 4.

Có 3 giá trị không vượt quá giá trị 175 của nhóm 5.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu gồm n số liệu được ghép nhóm như ở Bảng 2 .

- Tần số tích lũy của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích lũy của nhóm 1 , nhóm 2,..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $cf_1, cf_2, \dots, cf_m$.
- Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được lập như ở bảng 5

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \dots n_m$
	n	

Bảng 5

Ví dụ 3: Trong bài toán ở Hoạt động 2 , lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[160; 163)$, $[163; 166)$, $[166; 169)$, $[169; 172)$, $[172; 175)$.

Lời giải:

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở Bảng 6:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[160; 162]$	6	6
$[163; 165]$	12	18
$[166; 168]$	10	28
$[169; 171]$	5	33
$[172; 174]$	3	36
	$n = 36$	

Bảng 6

Trong bài toán ở Luyện tập 2, lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có tam nhóm ứng với tám nửa khoảng:

$[25;34), [34;43), [43;52), [52;61), [61;70), [70;79), [79;88), [88;97).$

II. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (SỐ TRUNG BÌNH)

1. Định nghĩa

HD 4. Xét mẫu số liệu trong Ví dụ 2 được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm (Bảng 7).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;47)$	$x_1 = ?$	$n_1 = ?$
$[47;54)$	$x_2 = ?$	$n_2 = ?$
$[54;61)$	$x_3 = ?$	$n_3 = ?$
$[61;68)$	$x_4 = ?$	$n_4 = ?$
$[68;75)$	$x_5 = ?$	$n_5 = ?$
		$n = ?$

Bảng 7

a) Tìm trung điểm x_1 của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm 1. Ta gọi trung điểm x_1 là giá trị đại diện của nhóm 1.

b) Bằng cách tương tự, hãy tìm giá trị đại diện của bốn nhóm còn lại. Từ đó, hãy hoàn thiện các số liệu trong bảng 7.

c) Tính giá trị $\bar{x}$ cho bởi công thức sau: $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_5x_5}{n}$

Lời giải:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;47)$	$x_1 = 43,5$	$n_1 = 6$
$[47;54)$	$x_2 = 50,5$	$n_2 = 12$
$[54;61)$	$x_3 = 57,5$	$n_3 = 10$
$[61;68)$	$x_4 = 64,5$	$n_4 = 5$
$[68;75)$	$x_5 = 71,5$	$n_5 = 3$
		$n = 36$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_5x_5}{n} \\ &= \frac{43,5.6 + 50,5.12 + 57,5.10 + 64,5.5 + 71,5.3}{36} \\ &\approx 55\end{aligned}$$

Giá trị $\bar{x}$ gọi là số trung bình cộng của mẫu số liệu đã cho.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 8 .

Nhóm	Giá trị	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó.
- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m}{n}$$

Ví dụ 4: Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây (đơn vị: milimet) và thu được tần số như Bảng 9.

Tính chiều dài trung bình của 74 lá cây trên theo đơn vị milimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[5,45; 5,85)$	5,65	5
$[5,85; 6,25)$	6,05	9
$[6,25; 6,65)$	6,45	15
$[6,65; 7,05)$	6,85	19
$[7,05; 7,45)$	7,25	16
$[7,45; 7,85)$	7,65	8
$[7,85; 8,25)$	8,05	2
		$n = 74$

Bảng 9

Lời giải

Chiều dài trung bình của 74 lá cây mà nhà thực vật học đo xấp xỉ là:

$$\overline{X} = \frac{5.5,659 + 9.6,05 + 15.6,45 + 19.6,85 + 16.7,25 + 8.7,65 + 2.8,05}{74} \approx 6,80(mm).$$



4

Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trong bài toán ở Luyện tập 2

Lời giải

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[25;34)	29,5	3
[34;43)	38,5	3
[43;52)	47,5	6
[52;61)	56,5	5
[61;70)	65,5	4
[70;79)	74,5	3
[79;88)	83,5	4
[88;97)	92,5	2
		n = 30

$$\begin{aligned} \text{Trung bình cộng là: } \bar{x} &= \frac{29,5.3 + 38,5.3 + 47,5.6 + 56,5.5 + 65,5.4 + 74,5.3 + 83,5.4 + 92,5.2}{30} \\ &= 59,2 \end{aligned}$$

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, số trung bình cộng của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu đó, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với số trung bình cộng của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu và có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu.

III. TRUNG VỊ

1. Định nghĩa

HD5. Trong phòng thí nghiệm, người ta chia 99 mẫu vật thành năm nhóm căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị: gam) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như *Bảng 10*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[27,5;32,5)$	16	16
$[32,5;37,5)$	24	40
$[37,5;42,5)$	20	60
$[42,5;47,5)$	30	90
$[47,5;52,5)$	9	99
	$n = 99$	

Bảng 10.

a) Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2} = \frac{99}{2} = 49,5$ có đúng không?

b) Tìm đầu mút trái r , độ dài d , tần số n_3 của nhóm 3; tần số tích lũy cf_2 của nhóm 2.

c) Tính giá trị M_e theo công thức sau: $M_e = r + \left(\frac{49,5 - cf_2}{n_3} \right) \cdot d$.

Lời giải

a) Nhóm 3 có tần số tích lũy là 60 $\Rightarrow$ Lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2} = \frac{99}{2} = 49,5$

b) Nhóm 3 có đầu mút trái r : 37,5 ; độ dài d : 5 ; tần số n_3 : 20

Tần số tích lũy của nhóm 2 là: 40

c) $M_e = r + \left(\frac{49,5 - cf_2}{n_3} \right) \cdot d = 37,5 + \left(\frac{49,5 - 40}{20} \right) \cdot 5 = 39,875$.

Giá trị M_e được gọi là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở *Bảng 5*.

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng

$cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k ; cf_{k-1} là tần số tích lũy của nhóm $k-1$.



Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e , được tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k} \right) \cdot d.$$

Ví dụ 5

Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học, người ta chia mẫu số liệu đó thành năm nhóm căn cứ vào số lượng học sinh của mỗi lớp (đơn vị; học sinh) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như *Bảng 11*. Tìm trung vị của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[36;38)	9	9
[38;40)	15	24
[40;42)	25	49
[42;44)	30	79
[44;46)	21	100
	$n = 99$	

*Bảng 11.***Lời giải**

Số phần tử của mẫu là $n = 100$. Ta có $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

mà $cf_3 = 49 < 50 < cf_4 = 79$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 50.

Xét nhóm 4 là nhóm $[42;44)$ có $r = 42; d = 2; n_4 = 30$ và nhóm 3 là nhóm $[40;42)$ có $cf_3 = 49$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 42 + \left(\frac{50 - 49}{30} \right) \cdot 2 \approx 42 \text{ (học sinh).}$$



5 Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 1*.

Lời giải

Có bảng sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;4)$	13	13

$[4;8)$	29	42
$[8;12)$	48	90
$[12;16)$	22	112
$[16;20)$	8	120

Số phần tử của mẫu là $n = 120$. Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow$ Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hoặc bằng 60.

Xét nhóm 3 là nhóm $[8; 12)$ có $r = 8; d = 4; n_3 = 48$ và nhóm 2 là nhóm $[4; 8)$ có $cf_2 = 42$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 8 + \left(\frac{60 - 42}{48} \right) \cdot 4 = 9,5$$

2. Ý nghĩa

Trung vị của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với trung vị của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đã cho.

IV. TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa



Giáo viên chủ nhiệm chia thời gian sử dụng Internet trong một ngày của 40 học sinh thành năm nhóm (đơn vị: phút) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như *Bảng 12*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;60)$	6	6
$[60;120)$	13	19
$[120;180)$	13	32
$[180;240)$	6	38
$[240;300)$	2	40
	$n = 40$	

Bảng 12.

a) Tìm trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm đó. Trung vị M_e còn gọi là *tứ phân vị thứ hai* Q_2 của mẫu số liệu trên.

b) • Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$ có đúng không?

- Tìm đầu mút trái s , độ dài h , tần số n_2 của nhóm 2; tần số tích lũy f_1 của nhóm 1. Sau đó, hãy tính giá trị Q_1 theo công thức sau: $Q_1 = s + \left(\frac{10 - cf_1}{n_2} \right) \cdot h$.

Giá trị nói trên được gọi là *tứ phân vị thứ nhất* Q_1 của mẫu số liệu đã cho.

c) • Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$ có đúng không?

• Tìm đầu mút trái t , độ dài l , tần số n_3 của nhóm 3; tần số tích lũy cf_2 của nhóm 2. Sau đó, hãy tính giá trị Q_3 theo công thức sau: $Q_3 = t + \left(\frac{30 - cf_2}{n_3} \right) \cdot l$.

Giá trị nói trên được gọi là *tứ phân vị thứ ba* Q_3 của mẫu số liệu đã cho.

Lời giải

a) Số phần tử của mẫu là $n = 40$. Ta có:

$$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow \text{Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.}$$

Xét nhóm 3 là nhóm $[120; 180)$ có $r = 120; d = 60; n_3 = 13$ và nhóm 2 là nhóm $[60; 120)$ có $cf_2 = 19$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 120 + \left(\frac{20 - 19}{13} \right) \cdot 60 \approx 125$ (phút)

b) Nhóm 2 có tần số tích lũy là 19 $\Rightarrow$ Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$.

• Nhóm 2 có đầu mút trái $S : 60$, độ dài $h : 60$, tần số $n_2 : 13$

• Nhóm 1 có tần số tích lũy là: 6

$$\Rightarrow Q_1 = 60 + \left(\frac{10 - 6}{13} \right) \cdot 60 \approx 78 \text{ (phút)}$$

c) Nhóm 3 có tần số tích lũy là 32 $\Rightarrow$ Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$.

• Nhóm 3 có đầu mút trái $t : 120$, độ dài $l : 60$, tần số $n_3 : 13$ của nhóm 3; tần số tích lũy $cf_2 : 19$

$$\Rightarrow Q_3 = 120 + \left(\frac{30 - 19}{13} \right) \cdot 60 \approx 171 \text{ (phút)}$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở *Bảng 5*.

• Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:



Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị M_e .

- Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p ; cf_{p-1} là tần số tích lũy của nhóm $p-1$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) \cdot h.$$

- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q ; cf_{q-1} là tần số tích lũy của nhóm $q-1$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) \cdot l.$$

Ví dụ 6. Bảng 13 cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11 A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30 ; 40)	2	2
[40 ; 50)	10	12
[50 ; 60)	16	28
[60 ; 70)	8	36
[70 ; 80)	2	38
[80 ; 90)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 13

Lời giải

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

- Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$ mà $2 < 10 < 12$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Xét nhóm 2 là nhóm [40;50) có $s = 40; h = 10; n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm [30;40) có $cf_1 = 2$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 40 + \left(\frac{10 - 2}{10} \right) \cdot 10 = 48 \text{ (kg)}.$$

- Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$ mà $12 < 20 < 28$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20. Xét nhóm 3 là nhóm $[50; 60)$ có $r = 50; d = 10; n_3 = 16$ và nhóm 2 là nhóm $[40; 50)$ có $cf_2 = 12$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ hai là:

$$Q_2 = M_e = 50 + \left(\frac{20-12}{16} \right) \cdot 10 = 55 \text{ (kg)}.$$

- Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$ mà $28 < 30 < 36$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét nhóm 3 là nhóm $[60; 70)$ có $t = 60; l = 10; n_4 = 8$ và nhóm 3 là nhóm $[50; 60)$ có $cf_3 = 28$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{30-28}{8} \right) \cdot 10 = 62,5 \text{ (kg)}.$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

$$Q_1 = 48 \text{ (kg)}; Q_2 = 55 \text{ (kg)}; Q_3 = 62,5 \text{ (kg)}.$$

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG 6. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu trong Bảng 1 (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Có bảng sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0; 4)$	13	13
$[4; 8)$	29	42
$[8; 12)$	48	90
$[12; 16)$	22	112
$[16; 20)$	8	120
	$n = 120$	

Số phần tử của mẫu là $n = 120$.

- Ta có $\frac{n}{4} = \frac{120}{4} = 30$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét nhóm 2 là nhóm $[4; 8)$ có $r = 4; d = 4; n_2 = 29$ và nhóm 1 là nhóm $[0; 4)$ có $cf_1 = 13$. Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là

$$\Rightarrow Q_1 = 4 + \left(\frac{30 - 13}{29} \right) \cdot 4 \approx 6,4 \text{ (chiếc)}$$
- Có $\frac{n}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow$ Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 60. Xét nhóm 3 là nhóm $[8; 12)$ có $r = 8; d = 4; n_3 = 48$ và nhóm 2 là nhóm $[4; 8)$ có $cf_2 = 42$. Áp dụng công thức, ta có Q_2 của mẫu số liệu là:

$$Q_2 = M_e = 8 + \left(\frac{60 - 42}{48} \right) \cdot 4 = 9,5 \text{ (chiếc)}$$
- Ta có $\frac{3n}{4} = 90$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 90. Xét nhóm 3 là nhóm $[8; 12)$ có $r = 8; d = 4; n_3 = 48$ và nhóm 2 là nhóm $[4; 8)$ có $cf_2 = 42$. Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 8 + \left(\frac{90 - 42}{48} \right) \cdot 4 = 12 \text{ (chiếc)}$$

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, đối với mẫu số liệu không ghép nhóm đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.

Bằng cách ghép nhóm mẫu số liệu và tính toán tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta nhận được ba giá trị mới cũng có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đã cho.

Lưu ý rằng bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm *xấp xỉ* với bộ ba giá trị trong tứ phân vị của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu.

V. MỐT

1. Định nghĩa

HD7. Quan sát bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy ở Ví dụ 6 và cho biết:

- Nhóm nào có tần số lớn nhất;
- Đầu mút trái và độ dài của nhóm có tần số lớn nhất bằng bao nhiêu.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i ; n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$.

Lời giải

- Nhóm 3 có tần số lớn nhất.
- Đầu mút trái: 50, độ dài: 10.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o , được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right) \cdot g.$$

Chú ý: • Khi $i = 0$ thì $n_0 = 0$; • Khi $i = m$ thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 7. Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau:

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng: $[3;5), [5;7), [7;9), [9;11)$.
- b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

- a) Bảng 14 là bảng tần số ghép nhóm cho kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D.

Nhóm	Tần số
$[3 ; 5)$	5
$[5 ; 7)$	18
$[7 ; 9)$	10
$[9 ; 11)$	7
	$n = 40$

Bảng 14

- b) Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng $[5 ; 7)$ là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 5; g = 2; n_2 = 18$. Nhóm 1 có tần số $n_1 = 5$, nhóm 3 có tần số $n_3 = 10$.

Áp dụng công thức, ta có mốt của mẫu số liệu là:

$$M_o = 5 + \left(\frac{18 - 5}{2 \cdot 18 - 5 - 10} \right) \cdot 2 \approx 6,2.$$

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG 7. Tìm mốt của mẫu số liệu trong Ví dụ 6 (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[30 ; 40)$	2	2
$[40 ; 50)$	10	12
$[50 ; 60)$	16	28
$[60 ; 70)$	8	36
$[70 ; 80)$	2	38
$[80 ; 90)$	2	40
	$n = 40$	

Bảng 13

Có nhóm 3 là nhóm có tần số lớn nhất

$$\Rightarrow M_o = 50 + \left(\frac{16 - 10}{2 \cdot 16 - 10 - 8} \right) \cdot 10 \approx 54,3$$

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, một của một mẫu số liệu không ghép nhóm đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một giá trị của mẫu số liệu đó. Vì thế, có thể dùng một để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Bằng cách ghép nhóm mẫu số liệu và tính toán một của mẫu số liệu ghép nhóm, ta nhận được giá trị mới cũng có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đã cho.

Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu. Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều một.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Số trung bình – Một của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Phương pháp

I. Số liệu ghép nhóm.

- Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Chú ý:

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm **giá trị đại diện** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là **độ dài** của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

❖ Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k.L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

II. Số trung bình.

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Nhóm 1	Nhóm 2	...	Nhóm k
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau:

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

❖ Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

III. Mốt

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó mốt của **mẫu số liệu ghép nhóm**, kí hiệu là M_o , được xác

định bởi công thức
$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

❖ Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

- Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ở bảng sau:

Khoảng tuổi	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Số khách hàng nữ	3	?	?	?	?

Lời giải

Khoảng tuổi	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Giá trị đại diện	25	35	45	55	65
Độ dài của nhóm	10	10	10	10	10

Ví dụ 2. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9

49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6 Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 63,6 - 45,1 = 18,5$.

Độ dài mỗi nhóm $L > \frac{R}{k} = \frac{18,5}{5} = 3,7$.

Ta chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành các nhóm $[45;49), [49;53), [53;57), [57;61), [61;65)$.

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Cân nặng	[45;49)	[49;53)	[53;57)	[57;61)	[61;65)
----------	---------	---------	---------	---------	---------

Giá trị đại diện	47	51	55	59	63
Số học sinh	4	5	7	7	5

Ví dụ 3. Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12 29 12 19 15 21 19 29 28 12 15 25 16 20 29
21 12 24 14 10 12 10 23 27 28 18 16 10 20 21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 29 - 10 = 19$.

Độ dài mỗi nhóm $L > \frac{R}{k} = \frac{19}{5} = 3,8$.

Ta chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành các nhóm :

$[10;14)$, $[14;18)$, $[18;22)$, $[22;26)$, $[26;30)$

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Số ba lô	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Giá trị đại diện	12	16	20	24	28
Số ngày	8	5	8	3	6

Ví dụ 4. Các bạn học sinh lớp 11A1 trả lời 40 câu hỏi trong một bài kiểm tra. Kết quả được thống kê ở bảng sau:

Số câu trả lời đúng	$[16;21)$	$[21;26)$	$[26;31)$	$[31;36)$	$[36;41)$
Số học sinh	4	6	8	18	4

a) Tính giá trị đại diện c_i $1 \leq i \leq 5$, của từng nhóm số liệu.

b) Tính $n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5$

c) Tính $\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5}{40}$.

Lời giải

a) $c_1 = 18,5; c_2 = 23,5; c_3 = 28,5; c_4 = 33,5; c_5 = 38,5$

b) $n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5 = 1200$

c) $\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5}{40} = \frac{1200}{40} = 30$

Ví dụ 5. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Lời giải

a) Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Cân nặng đại diện(g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A xấp xỉ bằng

$$(2.152,5 + 6.157,5 + 12.162,5 + 4.167,5 + 1.172,5) : 25 = 161,7 \text{ (g)}.$$

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng B xấp xỉ bằng

$$(1.152,5 + 3.157,5 + 7.162,5 + 10.167,5 + 4.172,5) : 25 = 165,1 \text{ (g)}.$$

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A .

Ví dụ 6. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9

49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6 a) Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của học sinh lớp 11

Lời giải

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 63,6 - 45,1 = 18,5$.

$$\text{Độ dài mỗi nhóm } L > \frac{R}{k} = \frac{18,5}{5} = 3,7.$$

Ta chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành các nhóm $[45;49), [49;53), [53;57), [57;61), [61;65)$.

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Cân nặng	[45;49)	[49;53)	[53;57)	[57;61)	[61;65)
Giá trị đại diện	47	51	55	59	63
Số học sinh	4	5	7	7	5

b) Cân nặng trung bình của học sinh trong lớp 11 xấp xỉ là:

$$(47.4 + 51.5 + 55.7 + 59.7 + 63.5) : 28 = 55,6 \text{ (kg)}$$

Ví dụ 7. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/ m^2)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Lời giải

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[18;22)$.

Do đó $u_m = 18, n_{m-1} = 78, n_m = 120, n_{m+1} = 45, u_{m+1} - u_m = 22 - 18 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 18 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{758}{39} \approx 19,4$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá 19,4 triệu đồng/ m^2 thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất.

Ví dụ 8. Hãy sử dụng dữ liệu ở để tư vấn cho đại lí bảo hiểm xác định khách hàng nam và nữ ở tuổi nào hay mua bảo hiểm nhất.

Số khách hàng mua bảo hiểm ở từng độ tuổi được thống kê như sau:

Độ tuổi	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Số khách hàng nam	4	6	10	7	3
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	2

Lời giải

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu khách hàng nam là $[40;50)$.

Do đó $u_m = 40, n_{m-1} = 6; n_{m+1} = 7; u_{m+1} - u_m = 50 - 40 = 10$

Mốt của mẫu số liệu nhóm khách hàng nam là:

$$M_o = 40 + \frac{10 - 6}{(10 - 6) + (10 - 7)} \cdot 10 = 45,7$$

Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán được khách hàng nam 46 tuổi có nhu cầu mua bảo hiểm cao nhất

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu khách hàng nữ là $[30;40)$

Do đó $u_m = 30, n_{m-1} = 3; n_{m+1} = 6; u_{m+1} - u_m = 40 - 30 = 10$

Mốt của mẫu số liệu nhóm khách hàng nam là:

$$M_o = 30 + \frac{9 - 3}{(9 - 3) + (9 - 6)} \cdot 10 = 36,7$$

Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán được khách hàng nữ 37 tuổi có nhu cầu mua bảo hiểm cao nhất

Ví dụ 9. Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3;5]	[6;8]	[9;11]	[12;14]	[15;17]
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Lời giải

Hiệu chỉnh bảng lại như sau:

Số cuộc gọi	[2,5;5,5)	[5,5;8,5)	[8,5;11,5)	[11,5;14,5)	[14,5;17,5)
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[5,5;8,5)$.

Do đó $u_m = 5,5; n_{m-1} = 5; n_m = 13; n_{m+1} = 7; u_{m+1} - u_m = 8,5 - 5,5 = 3$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 5,5 + \frac{13-5}{(13-5)+(13-7)} \cdot 3 = \frac{101}{14} \approx 7,2$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng khả năng người đó thực hiện 7 cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Ví dụ 10. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Lời giải

a) Cự li trung bình của mỗi lần ném là 71,6 (m)

b) Bảng tần số ghép nhóm

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	4	2	9	10	5

c)

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Giá trị đại diện	69,6	70,4	71,2	72	72,8
Số lần	4	2	9	10	5

Cự li trung bình mỗi lần ném xấp xỉ bằng $\frac{69,6 \cdot 4 + 70,4 \cdot 2 + 71,2 \cdot 9 + 72 \cdot 10 + 72,8 \cdot 5}{30} = 71,5$ (m)

d) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là $[71,6;72,4)$

Do đó: $u_m = 71,6; n_{m-1} = 9; n_{m+1} = 5; u_{m+1} - u_m = 72,4 - 71,6 = 0,8$

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$M_o = 71,6 + \frac{10-9}{(10-9)+(10-5)} \cdot 0,8 = 71,7 \text{ (m)}$$

Vậy khả năng anh Văn ném được 71,7 m là cao nhất

Dạng 2: Xác Định Trung Vị Của Mẫu Số Liệu Ghép Nhóm

1. Phương pháp:

I. Trung vị.

- Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng trung vị.

- Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa.

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Kết quả khảo sát cân nặng của 1 thùng táo ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	0;155)	5;160)	0;165)	5;170)	0;175)
Số quả táo	4	7	12	6	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{31}$ là cân nặng của 31 quả táo xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1; x_2; \dots; x_4 \in [150; 155)$; $x_5; x_6; \dots; x_{11} \in [155; 160)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{31}$ là $x_{16} \in [160; 165)$.

Ta xác định được $n = 31, n_m = 12, C = 4 + 7 = 11, u_m = 160, u_{m+1} = 165$.

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 160 + \frac{\frac{31}{2} - 11}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

Ví dụ 2. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 12 tiến hành thu nhặt vỏ lon nước ngọt để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ lon nước ngọt của học sinh khối 12 ở bảng sau:

Số vỏ lon	[11;15]	[16;20]	[21;25]	[26;30]	[31;35]
Số học sinh	58	87	54	44	23

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ lon	$[10,5;15,5)$	$[15,5;20,5)$	$[20,5;25,5)$	$[25,5;30,5)$	$[30,5;35,5)$
Số học sinh	58	87	54	44	23

Số học sinh tham gia thu nhật vỏ lon nước ngọt là $n = 58 + 87 + 54 + 44 + 23 = 266$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{266}$ lần lượt là số vỏ chai 266 học sinh khối 12 thu nhật được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1; x_2; \dots; x_{58} \in [10,5;15,5)$; $x_{59}; x_{55}; \dots; x_{145} \in [15,5;20,5)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{240}$ là $\frac{1}{2}(x_{133} + x_{134}) \in [15,5;20,5)$.

Ta xác định được $n = 266, n_m = 87, C = 58, u_m = 15,5, u_{m+1} = 20,5$ và $u_{m+1} = 20,5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{266}{2} - 58}{87} \cdot (20,5 - 15,5) \approx 19,81.$$

Dạng 3: Xác Định Tứ Phân Vị Của Mẫu Số Liệu Ghép Nhóm

1. Phương pháp:

Tứ phân vị

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu

Q_3 , ta thực hiện

như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j)$$

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.
- Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tiền lương nhận được trong 1 giờ làm việc của nhân viên công ty A được thống kê theo mẫu số liệu ghép nhóm sau (đơn vị: ngàn đồng):

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
[50; 60)	8
[60; 70)	10
[70; 80)	16
[80; 90)	14
[90; 100)	10
[100; 110)	5
[110; 120)	2

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải

Gọi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{65}$ là tiền lương của 65 nhân viên nhận được trong 1 giờ.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{33} \in [70; 80)$. Do đó tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 70 + \frac{\frac{2 \cdot 65}{4} - (8+10)}{16} \cdot (80 - 70) = 79,0625$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{17} \in [60; 70)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{1 \cdot 65}{4} - 8}{10} \cdot (70 - 60) = 68,25$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{49} \in [90; 100)$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 90 + \frac{\frac{3 \cdot 65}{4} - (8+10+16+14)}{10} \cdot (100 - 90) = 90,75.$$

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thuộc hai nhóm liên tiếp thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ví dụ 2. Mức lương hàng tháng ở 1 công ty được Công đoàn thu thập theo bảng sau(đơn vị triệu đồng):

Mức lương	[6;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Nhân viên	17	38	27	21	7

- a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
 b) Chủ tịch Công đoàn muốn đề nghị hỗ trợ cho nhóm 25% số nhân viên có mức lương thấp nhất và ước lượng rằng số nhân viên này không ít hơn 10. Nhận định của chủ tịch có hợp lí hay không?

Lời giải

a) Gọi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{110}$ là mức lương của 110 nhân viên nhận được công ty trả trong 1 tháng.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{110}$ là $\frac{1}{2}(x_{55} + x_{56})$. Do $x_{55} \in [10;15)$ và $x_{56} \in [15;20)$.

Nên đó tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 15$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{110}$ là $\frac{1}{2}(x_{27} + x_{28})$. Do $x_{27} \in [10;15)$ và $x_{28} \in [10;15)$ đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 10 + \frac{\frac{1 \cdot 110}{4} - 17}{38} \cdot (15 - 10) \approx 11,38$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{110}$ là $\frac{1}{2}(x_{82} + x_{83})$. Do $x_{82} \in [15;20)$ và $x_{83} \in [20;25)$ đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 20$.

b) Do tứ phân vị thứ nhất $\approx 11,38$ nên nhận định trên là không hợp lí.

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Mẫu số liệu đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h)

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65
 51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5
 61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61
 49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:
 $[40;45), [45;50), [50;55), [55;60), [60;65), [65;70)$
 b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
 c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40;45)	42,5	4
[45;50)	47,5	11
[50;55)	52,5	7
[55;60)	57,5	8
[60;65)	62,5	8
[65;70)	67,5	n

b) Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{42,5 \cdot 4 + 47,5 \cdot 11 + 52,5 \cdot 7 + 57,5 \cdot 8 + 62,5 \cdot 8 + 67,5 \cdot 2}{40} = 53,875$$

Trung vị là:

Có bảng ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy là

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[40;45)	4	4
[45;50)	11	15
[50;55)	7	22
[55;60)	8	30
[60;65)	8	38
[65;70)	2	40

Số phần tử của mẫu là $n = 40$. Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow$ Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm $[50; 55)$ có $r = 50; d = 5; n_3 = 7$ và nhóm 2 là nhóm $[45; 50)$ có $cf_2 = 15$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 50 + \left(\frac{20-15}{7} \right) \cdot 5 \approx 53,6 \text{ (km / h)}$

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Xét

nhóm 2 là nhóm $[45; 50)$ có $r = 45; d = 5; n\{2\} = 11$ và nhóm 1 là nhóm $[40; 45)$ $cf_1 = 4$

Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là $Q_1 = 45 + \left(\frac{10-4}{11} \right) \cdot 5 \approx 47,7 \text{ (km / h)}$

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 53,6 \text{ (km / h)}$

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 30$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét

nhóm 4 là nhóm $[55; 60)$ có $r = 55; d = 5; n_4 = 8$ và nhóm 3 là nhóm $[50; 55)$ có $cf_3 = 22$

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là: $Q_3 = 55 + \left(\frac{30-22}{8} \right) \cdot 5 = 60 \text{ (km / h)}$

c) Mốt của mẫu số liệu là

Có nhóm 2 là nhóm có tần số lớn nhất $\Rightarrow M_o = 45 + \left(\frac{11-4}{2 \cdot 11 - 4 - 7} \right) \cdot 5 \approx 43,2$

Bài 2. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30
40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41
38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng :

$[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55)$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[15; 20)$	17,5	1

$[20;25)$	22,5	0
$[25;30)$	27,5	0
$[30;35)$	32,5	1
$[35;40)$	37,5	10
$[40;45)$	42,5	17
$[45;50)$	47,5	0
$[50;55)$	52,5	030

b) Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{17,5 + 32,5 + 37,5 \cdot 10 + 42,5 \cdot 17 + 52,5}{30} = 40$$

Trung vị là:

Có bảng ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy là:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[15;20)$	1	1
$[20;25)$	0	1
$[25;30)$	0	1
$[30;35)$	1	2
$[35;40)$	10	12
$[40;45)$	17	29
$[45;50)$	0	29
$[50;55)$	1	0

Số phần tử của mẫu là $n = 30$. Ta có:

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 40 + \left(\frac{15-12}{17} \right) \cdot 5 \approx 40,9$ (kilôgam)

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 30$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$. Suy ra nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 7,5.

Xét nhóm 5 là nhóm $[35; 40)$ có $r = 35; d = 5; n_5 = 10$ và nhóm 4 là nhóm $[30; 35)$ có $cf_4 = 2$ Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là $Q_1 = 35 + \left(\frac{7,5-2}{10} \right) \cdot 5 = 37,75$ (kilôgam)

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 40,9$ (kilôgam)

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 22,5$. Suy ra nhóm 6 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 22,5. Xét nhóm 6 là nhóm $[40; 45)$ có $r = 40; d = 5; n_6 = 17$ và nhóm 5 là nhóm $[35; 40)$ có $cf_5 = 12$

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 40 + \left(\frac{22,5-12}{17} \right) \cdot 5 = 43,1 \text{ (kilôgam)}$$

c) Mốt của mẫu số liệu là:

Có nhóm 6 là nhóm có tần số lớn nhất $M_o = 40 + \left(\frac{17-10}{2 \cdot 17 - 10} \right) \cdot 5 \approx 41,46$

Bài 3. Bảng 15 cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét)

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 15

Lời giải

a) Có bảng ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
------	------------------	--------

$[30;40)$	35	4
$[40;50)$	45	10
$[50;60)$	55	14
$[60;70)$	65	6
$[70;80)$	75	4
$[80;90)$	85	2

Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{35.4 + 45.10 + 55.14 + 65.6 + 75.4 + 85.2}{40} = 55,5$$

Trung vị là

Số phần tử của mẫu là $n = 40$. Ta có:

$$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow \text{Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hoặc bằng 20.}$$

Xét nhóm 3 là nhóm $[50;60)$ có $r = 50; d = 10; n_3 = 14$ và nhóm 2 là nhóm $[45;50)$ có $cf_2 = 14$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 50 + \left(\frac{20-14}{14} \right) \cdot 10 \approx 54,3$ (centimét)

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Xét

nhóm 2 là nhóm $[40;50)$ có $r = 40; d = 10; n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm $[30; 40)$ có $cf_1 = 4$

Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là: $Q_1 = 40 + \left(\frac{10-4}{10} \right) \cdot 10 \approx 46$ (centimét)

Q_2 là Có $Q_2 = M_e \approx 54,3$ (centimét).

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 30$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét

nhóm 4 là nhóm $[60;70)$ có $r = 60; d = 10; n_4 = 6$ và nhóm 3 là nhóm $[50;60)$ có $cf_3 = 28$.

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là: $Q_3 = 60 + \left(\frac{30-28}{6} \right) \cdot 10 = 63,3$ (centimét)

c) Mốt của mẫu số liệu là:

Có nhóm 3 là nhóm có tần số lớn nhất $M_o = 50 + \left(\frac{14-10}{2.14-10-6} \right) \cdot 10 \approx 53,3$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

(Dựa vào mẫu số liệu ghép nhóm trên, hãy trả lời các câu hỏi từ 1 đến 5).

Câu 1: Giá trị đại diện của nhóm [60; 80) là

- A. 40. B. 70. C. 60. D. 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có giá trị đại diện là $\frac{60+80}{2} = 70$.

Câu 2: Nhóm [20; 40) có tần số là

- A. 5. B. 9. C. 12. D. 10.

Lời giải

Chọn B

Tần số của nhóm [20; 40) là 9.

Câu 3: Nhóm chứa một của mẫu số liệu này là

- A. [80; 100). B. [20; 40). C. [40; 60). D. [60; 80).

Lời giải

Chọn C

Tần số lớn nhất là 12 nên nhóm chứa một là [40; 60).

Câu 4: Nhóm chứa trung vị là

- A. [0; 20). B. [20; 40). C. [40; 60). D. [60; 80).

Lời giải

Chọn C

Cỡ mẫu là: $n = 5 + 9 + 12 + 10 + 6 = 42$.

Trung vị là $\frac{x_{21} + x_{22}}{2}$. Do hai giá trị x_{21}, x_{22} thuộc nhóm [40; 60) nên nhóm chứa trung vị là [40; 60).

Câu 5: Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [0; 20). B. [20; 40). C. [40; 60). D. [60; 80).

Lời giải

Chọn B

Tứ phân vị thứ nhất là x_1 . Do x_1 thuộc nhóm $[20; 40)$ nên nhóm chưa tứ phân vị thứ nhất là $[20; 40)$.

Câu 6: Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (phút)	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	2	4	7	4	3

Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành bài tập của các em học sinh là

- A.** 7. **B.** 11,3. **C.** 10,4. **D.** 12,5.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Thời gian (phút)	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	2	4	7	4	3
Giá trị đại diện	2	6	10	14	18

Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành bài tập của các em học sinh là:

$$\bar{x} = \frac{2.2 + 4.6 + 7.10 + 4.14 + 3.18}{20} = 10,4 \text{ (phút)}.$$

Dựa vào mẫu số liệu ghép nhóm sau đây, hãy trả lời các câu hỏi từ 7 đến 9.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau:

Chiều cao (cm)	$[0; 10)$	$[10; 20)$	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$
Số cây	4	6	7	5	3

Câu 7: Một của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A.** $M_o = \frac{70}{3}$. **B.** $M_o = \frac{50}{3}$. **C.** $M_o = \frac{70}{2}$. **D.** $M_o = \frac{80}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tần số lớn nhất là 7 nên nhóm chưa một là $[20; 30)$. Ta có:

$j = 3$, $a_3 = 20$, $m_3 = 7$, $m_2 = 6$, $m_4 = 5$, $h = 10$. Do đó:

$$M_o = 20 + \frac{7 - 6}{(7 - 6) + (7 - 5)} \cdot 10 = \frac{70}{3}.$$

Câu 8: Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A.** $M_e = \frac{175}{7}$. **B.** $M_e = \frac{165}{5}$. **C.** $M_e = \frac{165}{7}$. **D.** $M_e = \frac{165}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cỡ mẫu: $n = 4 + 6 + 7 + 5 + 3 = 25$.

$x_1, x_2, \dots, x_{25}$ là chiều cao của 25 cây dừa giống được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó, trung vị là x_{13} . Do x_{13} thuộc nhóm $[20; 30)$ nên nhóm này chứa trung vị. Do đó:

$p = 3, a_3 = 20, m_3 = 7, m_1 + m_2 = 10, a_4 - a_3 = 10$. Do đó:

$$M_e = 20 + \frac{\frac{25}{2} - 10}{7} \cdot 10 = \frac{165}{7}.$$

Câu 9: Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $Q_1 = 13,5$.

B. $Q_1 = 13,9$.

C. $Q_1 = 15,75$.

D. $Q_1 = 13,75$.

Lời giải

Chọn D

Cỡ mẫu: $n = 4 + 6 + 7 + 5 + 3 = 25$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_6 + x_7}{2}$. Do x_6, x_7 đều thuộc nhóm $[10; 20)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

Do đó: $p = 2, a_2 = 10, m_2 = 6, m_1 = 4, a_3 - a_2 = 10$. Ta có:

$$Q_1 = 10 + \frac{\frac{25}{4} - 4}{6} \cdot 10 = 13,75.$$

Câu 10: Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (phút)	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	2	4	7	4	3

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $Q_3 = 13$.

B. $Q_3 = 14$.

C. $Q_3 = 15$.

D. $Q_3 = 12$.

Lời giải

Chọn B

Cỡ mẫu: $n = 2 + 4 + 7 + 4 + 3 = 20$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{15} + x_{16}}{2}$. Do x_{15}, x_{16} đều thuộc nhóm $[12; 16)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

Do đó: $p = 4, a_4 = 12, m_4 = 4, m_1 + m_2 + m_3 = 2 + 4 + 7 = 13, a_5 - a_4 = 4$. Ta có:

$$Q_3 = 12 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - 13}{4} \cdot 4 = 14.$$

Câu 11: Mẫu số liệu (T) được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm	$[0; 5)$	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$
Tần số	12	20	5	14	7

Điền từ thích hợp vào chỗ trống: “Mẫu số liệu (T) là mẫu số liệu ...”

A. Ghép cặp.

B. Ghép nhóm.

C. Không ghép cặp.

D. Không ghép nhóm.

Lời giải

Chọn B

Mẫu số liệu (T) là mẫu số liệu *ghép nhóm*.

Câu 12: Cho mẫu số liệu về chiều cao (cm) của các học sinh nữ trong khối 11 của một trường như sau:

Chiều cao	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	20	45	34	27	15	4

Mẫu số liệu trên có bao nhiêu số liệu, bao nhiêu nhóm?

A. 145 số liệu; 6 nhóm. **B.** 30 số liệu; 5 nhóm. **C.** 6 số liệu; 145 nhóm. **D.** 5 số liệu; 30 nhóm.

Lời giải

Chọn A

Mẫu số liệu (T) có:

$$20 + 45 + 34 + 27 + 15 + 4 = 145 \text{ (số liệu).}$$

$$6 \text{ nhóm: } [145;150); [150;155); [155;160); [160;165); [165;170); [170;175).$$

Câu 13: Cho mẫu số liệu về chiều cao (cm) của các học sinh nữ trong khối 11 của một trường như sau:

Chiều cao	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	20	45	34	27	15	4

Số học sinh nữ cao từ 150 cm đến 155 cm là:

A. 20. **B.** 65. **C.** 34. **D.** 45.

Lời giải

Chọn D

Theo bảng số liệu trên, số học sinh nữ cao từ 150 cm đến 155 cm là 45 học sinh.

Câu 14: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của các học sinh trong một lớp 11 của một trường như sau:

Thời gian	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số học sinh	7	12	7	5	3	2

Tần số tích lũy của nhóm [10;15) là:

A. 12. **B.** 19. **C.** 26. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Tần số tích lũy của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó.

$$\text{Tần số tích lũy của nhóm } [10;15) \text{ là } 7 + 12 + 7 = 26.$$

Câu 15: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian hoàn thành (phút) một bài kiểm tra trực tuyến của 100 học sinh, ta có bảng số liệu sau:

Thời gian (phút)	[33; 35)	[35; 37)	[37; 39)	[39; 41)	[41; 43)	[43; 45)
Số học sinh	4	13	38	27	14	4

Thời gian trung bình để 100 học sinh hoàn thành bài kiểm tra là:

- A. 38,92 phút. B. 38,29 phút. C. 39,28 phút. D. 39,82 phút.

Lời giải

Chọn A

Giá trị đại diện của mỗi nhóm số liệu là *trung bình cộng* của hai đầu mút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm theo giá trị đại diện của mỗi nhóm:

Nhóm	[33; 35)	[35; 37)	[37; 39)	[39; 41)	[41; 43)	[43; 45)
Giá trị đại diện	34	36	38	40	42	44
Tần số	4	13	38	27	14	4

Thời gian trung bình để 100 học sinh hoàn thành bài kiểm tra là:

$$\bar{x} = \frac{4.34 + 13.36 + 38.38 + 27.40 + 14.42 + 4.44}{100} = 38,92 \text{ (phút)}.$$

Câu 16: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê chiều cao (mét) của 35 cây bạch đàn trong rừng, ta có bảng số liệu sau:

Khoảng chiều cao (m)	[6, 5; 7, 0)	[7, 0; 7, 5)	[7, 5; 8, 0)	[8, 0; 8, 5)
Số cây	6	15	11	3

Tính chiều cao trung bình của 35 cây bạch đàn trên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. 7,407(m). B. 4,707(m). C. 7,704(m). D. 7,5(m).

Lời giải

Chọn A

Giá trị đại diện của mỗi nhóm số liệu là *trung bình cộng* của hai đầu mút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm theo giá trị đại diện của mỗi nhóm:

Nhóm	[6, 5; 7, 0)	[7, 0; 7, 5)	[7, 5; 8, 0)	[8, 0; 8, 5)
Giá trị đại diện	6,75	7,25	7,75	8,25
Tần số	6	15	11	3

Chiều cao trung bình của 35 cây bạch đàn là:

$$\bar{x} = \frac{6.6,75 + 15.7,25 + 11.7,75 + 3.8,25}{35} = 7,407(m).$$

Câu 17: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 30 ngày, ta có bảng số liệu sau:

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	$[18; 21)$	$[21; 24)$	$[24; 27)$	$[27; 30)$
Số ngày	6	12	9	3

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. 24. B. 25. C. 22. D. 23.

Lời giải

Chọn D

Nhóm 2 ứng với nửa khoảng $[21; 24)$ là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 21$; $g = 3$; $n_2 = 12$ (với u, g, n_2 lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm 2).

Nhóm 1 có tần số $n_1 = 6$; Nhóm 3 có tần số $n_3 = 9$.

Ta có một của mẫu số liệu là:

$$M_o = 21 + \left(\frac{12 - 6}{2 \cdot 12 - 6 - 9} \right) \cdot 3 = 23.$$

Câu 18: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian chạy 50m của 20 học sinh, ta có bảng số liệu sau:

Thời gian (giây)	$[7, 8; 8, 0)$	$[8, 0; 8, 2)$	$[8, 2; 8, 4)$	$[8, 4; 8, 6)$	$[8, 6; 8, 8)$
Số học sinh	9	3	5	2	1

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. 9,72. B. 9,27. C. 7,92. D. 7,29.

Lời giải

Chọn C

Nhóm 1 ứng với nửa khoảng $[7, 8; 8, 0)$ là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 7,8$; $g = 0,2$; $n_1 = 9$ (với u, g, n_1 lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm 1).

Nhóm 0 có tần số $n_0 = 0$; Nhóm 2 có tần số $n_2 = 3$.

Ta có một của mẫu số liệu là:

$$M_o = 7,8 + \left(\frac{9 - 0}{2 \cdot 9 - 0 - 3} \right) \cdot 0,2 = 7,92.$$

Câu 19: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê điểm số (thang điểm 20) của 100 học sinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi toán, ta có bảng số liệu sau:

Điểm	$[8; 10)$	$[10; 12)$	$[12; 14)$	$[14; 16)$	$[16; 18)$	$[18; 20)$
Số học sinh	6	21	30	25	14	4

Tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 12,18. B. 12,81. C. 13,35. D. 13,53.

Lời giải

Chọn D

Ta có bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)	[18;20)
Tần số	6	21	30	25	14	4
Tần số tích lũy	6	27	57	82	96	100

Số phần tử của mẫu là $n = 100$. Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

Mà $cf_2 = 27 < 50 < cf_3 = 57$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 50.

Xét nhóm 3 là nhóm [12;14) có $r = 12$; $d = 2$; $n_3 = 30$ (với $r; d; n_3$ lần lượt là đầu mút trái; độ dài; tần số của nhóm 3).

Nhóm 2 là nhóm [10;12) có $cf_2 = 27$ (với cf_2 là tần số tích lũy của nhóm 2).

Ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 12 + \left(\frac{50 - 27}{30} \right) \cdot 2 = 13,53.$$

Câu 20: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê huyết áp của 20 người, ta có bảng số liệu sau:

Huyết áp (mmHg)	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)	[120;130)
Số người	4	2	3	6	3	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

A. 74.

B. 85.

C. 96.

D. 101.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)	[120;130)
Tần số	4	2	3	6	3	2
Tần số tích lũy	4	6	9	15	18	20

Số phần tử của mẫu là $n = 20$. Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{20}{4} = 5$.

Mà $cf_1 = 4 < 5 < cf_2 = 6$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 5.

Xét nhóm 2 là nhóm [80;90) có $s = 80$; $h = 10$; $n_2 = 2$ (với $s; h; n_2$ lần lượt là đầu mút trái; độ dài; tần số của nhóm 2).

Nhóm 1 là nhóm [70;80) có $cf_1 = 4$ (với cf_1 là tần số tích lũy của nhóm 1).

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là:

$$Q_1 = 80 + \left(\frac{5-4}{2} \right) \cdot 10 = 85.$$



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 1

BÀI 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ BIẾN CỐ GIAO. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT.

Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất một lần (Hình 1). Xét các biến cố ngẫu nhiên:

A: “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn”

B: “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia hết cho 3”

Ta có thể thực hiện những phép toán nào trên hai biến cố A và B

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

1. Biến cố hợp

HD 1: Xét phép thử “Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất một lần”. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Xét hai biến cố A và B nêu trong bài toán ở phần mở đầu.

- Viết các tập con A, B của tập hợp Ω tương ứng với các biến cố A, B .
- Đặt $C = A \cup B$. Phát biểu biến cố C dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Lời giải

a) Có $A = \{2; 4; 6\}; B = \{3; 6\}$.

b) Biến cố C là “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn hoặc chia hết cho 3”.

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $C = A \cup B$, ta có C là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cup B$

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi α cho biến cố C , tức là $\alpha \in C$. Vì $C = A \cup B$ nên $\alpha \in A$ hoặc $\alpha \in B$. Nói cách khác, α là một kết quả thuận lợi cho biến cố A hoặc biến cố B . Điều đó có nghĩa là biến cố A hoặc biến cố B xảy ra. Vì vậy, biến cố C có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện là “ A xảy ra hoặc B xảy ra” hay “có ít nhất một trong các biến cố A, B xảy ra”.

Ví dụ 1: Trong hộp kín có 10 quả bóng màu xanh và 8 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng. Xét các biến cố :

A : “Hai quả bóng lấy ra có màu xanh”.

B : “Hai quả bóng lấy ra có màu đỏ”.

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây :

- Biến cố hợp của hai biến cố A và B là “Hai quả bóng lấy ra cùng có màu đỏ hoặc màu xanh”.

b) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là “Hai quả bóng lấy ra khác nhau”.

c) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là “Hai quả bóng lấy ra có cùng màu”.

Giải

Phát biểu a) đúng ; phát biểu b) sai ; phát biểu c) đúng.

Luyện tập 1. Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3” và biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4”. Phát biểu biến cố $A \cup B$ dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Lời giải

Biến cố hợp của hai biến cố A và B là: “Chiếc thẻ rút ra là số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 4”.

2. Biến cố giao

HD2: Đối với các tập hợp A, B trong Hoạt động 1, ta đặt $D = A \cap B$. Phát biểu biến cố D dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Lời giải

Biến cố D là: “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn chia hết cho 3”.

Ta có định nghĩa như sau:

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $D = A \cap B$, ta có D là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cap B$ hay AB .

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi β cho biến cố D , tức là $\beta \in D$. Vì $D = A \cap B$ nên $\beta \in A$ và $\beta \in B$. Nói cách khác, β là một kết quả thuận lợi cho cả hai biến cố A và B . Điều đó có nghĩa là cả hai biến cố A và B cùng xảy ra. Vì vậy, biến cố D có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện là “Cả A và B cùng xảy ra”.

Ví dụ 2. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 52$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3” và biến cố B : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4”. Viết các tập con của không gian mẫu tương ứng với các biến cố $A, B, A \cap B$.

Lời giải

Ta có $A = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 48; 51\}$; $B = \{4; 8; 12; 16; 20; \dots; 48; 52\}$; $A \cap B = \{12; 24; 36; \dots; 48\}$.

Luyện tập 2. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố: A : “Số chấm xuất hiện ở lần thứ nhất là số lẻ” và B : “Số chấm xuất hiện ở lần thứ hai là số lẻ”. Phát biểu biến cố $A \cap B$ dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Lời giải

Biến cố giao của hai biến cố A và B là: “Sau khi gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp, số chấm xuất hiện ở lần thứ nhất là số chẵn và số chấm xuất hiện ở lần thứ hai là số lẻ”.

3. Biến cố xung khắc

HD3. Xét phép thử “Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp”.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Xét các biến cố:

A: “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ”;

B: “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số chẵn”.

a) Viết các tập con A, B của không gian mẫu Ω tương ứng với các biến cố A, B .

b) Tìm tập hợp $A \cap B$.

Lời giải

a) $A = \{1; 3; 5\}; B = \{2; 4; 6\}$.

b) $A \cap B = \emptyset$

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc.

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi γ cho biến cố A , tức là $\gamma \in A$. Vì $A \cap B = \emptyset$ nên $\gamma \notin B$, tức là γ không là một kết quả thuận lợi cho biến cố B . Do đó, hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Ví dụ 3. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: “Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất”;

B: “Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ nhất”.

Hai biến cố trên có xung khắc hay không?

Lời giải

Ta thấy: $A = \{SS, NN\}; B = \{NS, SN\}$.

Suy ra $A \cap B = \emptyset$. Do đó, A và B là hai biến cố xung khắc.

Luyện tập 3. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Hai biến cố sau có xung khắc không?

A: “Tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 5”;

B: “Tổng số chấm trong hai lần gieo lớn hơn 6”;

Lời giải

Có $A = \{2; 3; 4\}; B = \{7; 8; 9; 10; 11; 12\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Vậy A và B là hai biến cố xung khắc.

4. Biến cố độc lập

HD4. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: “Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất”;

B: “Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ hai”.

Đối với hai biến cố A, B , hãy cho biết một kết quả thuận lợi cho biến cố này có ảnh hưởng gì đến xác suất xảy ra của biến cố kia hay không.

Lời giải

Một kết quả thuận lợi cho biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B ; $\bar{A}$ và $\bar{B}$.

Ví dụ 4. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

A : “Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất”;

B : “Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai”.

a) Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

b) Hai biến cố A và B có xung khắc không? Vì sao?

Lời giải

a) Trước hết, biến cố B xảy ra sau biến cố A nên việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố A .

Mặt khác, ta có: xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{4}{7}$; xác suất của biến cố B khi biến

cố A không xảy ra cũng bằng $\frac{4}{7}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B . Vậy hai biến cố A và B là độc lập.

b) Ta thấy kết quả (xanh ; đỏ) là kết quả thuận lợi cho cả hai biến cố A và B . Vì thế A và B không là hai biến cố xung khắc.

Luyện tập 4. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Hai biến cố sau có xung khắc không?

A : “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số nguyên tố”;

B : “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là hợp số”.

Hai biến cố A và B có độc lập không? Có xung khắc không? Vì sao?

Lời giải

Ta có $A = \{2; 3; 5\}$; $B = \{4; 6\}$

$\Rightarrow$ Biến cố A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Điều này có nghĩa là xảy ra biến cố A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B , và ngược lại. Việc gieo xúc xắc cân đối và đồng chất là một quá trình độc lập và không liên quan đến nhau.

$\Rightarrow$ Biến cố A và B là hai biến cố xung khắc vì $A \cap B = \emptyset$.

III. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

1. Công thức cộng xác suất



Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không vượt quá 20. Xét biến cố A : “Số được viết ra là số chia hết cho 2” và biến cố B : “Số được viết ra là số chia hết cho 7”.

a) Tính $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ và $P(A \cap B)$.

b) So sánh $P(A \cup B)$ và $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Lời giải

Có $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$, $B = \{7; 14\}$

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}; P(A \cup B) = \frac{11}{20}$$

$$\text{Có } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ta có định lý sau: Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $A \cap B = \emptyset$, suy ra $P(A \cap B) = 0$.

Vì thế, ta có hệ quả sau:

Hệ quả: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ví dụ 5 Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét biến cố A : "Số được viết ra là số chia hết cho 8" và biến cố B : "Số được viết ra là số chia hết cho 9". Tính $P(A \cup B)$

Lời giải

Trong 90 số có hai chữ số, có 11 số chia hết cho 8, có 10 số chia hết cho 9 và có 1 số chia hết cho cả 8 và 9. Vì thế, ta có: $P(A) = \frac{11}{90}$, $P(B) = \frac{10}{90}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{90}$.

$$\text{Vậy } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{90} + \frac{10}{90} - \frac{1}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}.$$

Ví dụ 6 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5". Tính $P(A \cup B)$.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử trên có 12 phần tử, tức là: $n(\Omega) = 12$.

Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố A , B lần lượt là $n(A) = 4$, $n(B) = 2$. Suy ra

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$, không có số nào chia hết cho cả 3 và 5. Vì thế A , B là hai biến cố xung khắc.

$$\text{Suy ra: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Luyện tập 5: Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 52$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 7" và biến cố B : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 11". Tính $P(A \cup B)$.

Lời giải

$$\text{- Có } A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}; B = \{11, 22, 33, 44\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

$$\text{Đây là hai biến cố xung khắc.} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{52} + \frac{4}{52} = \frac{11}{52}$$

2. Công thức nhân xác suất

HD 6: Xét các biến cố độc lập A và B trong Ví dụ 4.

- Tính $P(A), P(B)$ và $P(A \cap B)$.
- So sánh $P(A \cap B)$ và $P(A) \cdot P(B)$.

Lời giải

a) Có $P(A) = \frac{3}{7}, P(B) = \frac{4}{7}, P(A \cap B) = \frac{12}{49}$.

b) Ta thấy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ta có định lí sau:

Cho hai biến cố A và B .

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Chú ý: Nếu $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Ví dụ 7 Hai bạn Hạnh và Hà cùng chơi trò chơi bắn cung một cách độc lập. Mỗi bạn chỉ bắn một lần. Xác suất để bạn Hạnh và bạn Hà bắn trúng bia lần lượt là 0,6 và 0,7 trong lần bắn của mình. Tính xác suất của biến cố C : "Bạn Hạnh và bạn Hà đều bắn trúng bia"

Lời giải

Xét biến cố A : "Bạn Hạnh bắn trúng bia", ta có: $P(A) = 0,6$.

Xét biến cố B : "Bạn Hà bắn trúng bia", ta có: $P(B) = 0,7$.

Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập và $C = A \cap B$. suy ra:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42.$$

Luyện tập 6. Một xưởng sản xuất có hai máy chạy độc lập với nhau. Xác suất để máy I và máy II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,9. Tính xác suất của biến cố C : "Cả hai máy của xưởng sản xuất đều chạy tốt".

Lời giải

Theo đề bài, ta thấy hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập.

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$$

Ví dụ 8: Hai bạn Trung và Dũng của lớp 11A tham gia giải bóng bàn đơn nam do nhà trường tổ chức. Hai bạn đó không cùng thuộc một bảng đấu loại chỉ chọn một người vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng loại để vào chung kết của Trung và Dũng lần lượt là 0,8 và 0,6. Tính xác suất của biến cố sau:

- A : "Cả hai bạn lọt vào chung kết".
- B : "Có ít nhất một bạn lọt vào chung kết".
- C : "Chỉ có bạn Trung lọt vào vòng chung kết".

Lời giải

Xét các biến cố E : "Bạn Trung lọt vào vòng chung kết" và G : "Bạn Dũng lọt vào vòng chung kết".

Từ giả thiết, ta suy ra E, G là hai biến cố độc lập và $P(E) = 0,8; P(G) = 0,6$.

a) Do $A = E \cap G$ nên $P(A) = P(E) \cdot P(G) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$.

b) Ta thấy $B = E \cup G$, suy ra

$$P(B) = P(E \cup G) = P(E) + P(G) - P(E \cap G) = 0,8 + 0,6 - 0,48 = 0,92.$$

c) Xét biến cố đối $\bar{G}$ của biến cố G . Ta thấy $P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,6 = 0,4$ và $E, \bar{G}$ là hai biến cố độc lập. Vì $C = E \cap \bar{G}$ nên $P(C) = P(E) \cdot P(\bar{G}) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$.

IV. TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

1. Tính xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp

Ví dụ 9. Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm 3 học sinh sao cho có cả nam và nữ cùng tham gia.

- a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?
b) Tính xác suất của biến cố H : "Trong 3 học sinh chọn ra có cả nam và nữ".

Lời giải

Xét các biến cố:

H : "Trong 3 học sinh chọn ra có cả nam và nữ";

A : "Trong 3 học sinh chọn ra có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ";

B : "Trong 3 học sinh chọn ra có 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ".

Khi đó $H = A \cup B$ và $A \cap B = \emptyset$.

Do hai biến cố A và B là xung khắc nên $n(H) = n(A) + n(B)$

$$\text{a) Số các kết quả thuận lợi cho biến cố } A \text{ là: } n(A) = C_4^2 \cdot C_5^1 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 6 \cdot 5 = 30.$$

$$\text{Số các kết quả thuận lợi cho biến cố } B \text{ là: } n(B) = C_4^1 \cdot C_5^2 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$\text{Số các kết quả thuận lợi cho biến cố } H \text{ là: } n(H) = n(A) + n(B) = 30 + 40 = 70.$$

Vậy giáo viên phụ trách có 70 cách chọn một đội tốp ca như dự định.

b) Đội văn nghệ có 9 học sinh. Mỗi cách chọn 3 học sinh trong 9 học sinh đó là một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 9 phần tử và

$$n(\Omega) = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } H \text{ là: } P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$$

Luyện tập 7. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm, tính xác suất để các điểm này tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

Lời giải

Xét các biến cố:

H : "Ba đỉnh của tam giác là 3 điểm của cả hai đường thẳng d_1 và d_2 ";

A : "Trong ba đỉnh của tam giác có 1 điểm thuộc d_1 , 2 điểm thuộc d_2 ";

B : "Trong ba đỉnh của tam giác có 2 điểm thuộc d_1 , 1 điểm thuộc d_2 ".

Do hai biến cố A và B xung khắc nên: $n(H) = n(A) + n(B)$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = C_1^{17} \cdot C_2^{20} = 3230$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố B là: $n(B) = C_2^{17} \cdot C_1^{20} = 2720$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố H là: $n(H) = n(A) + n(B) = 3230 + 2720 = 5950$

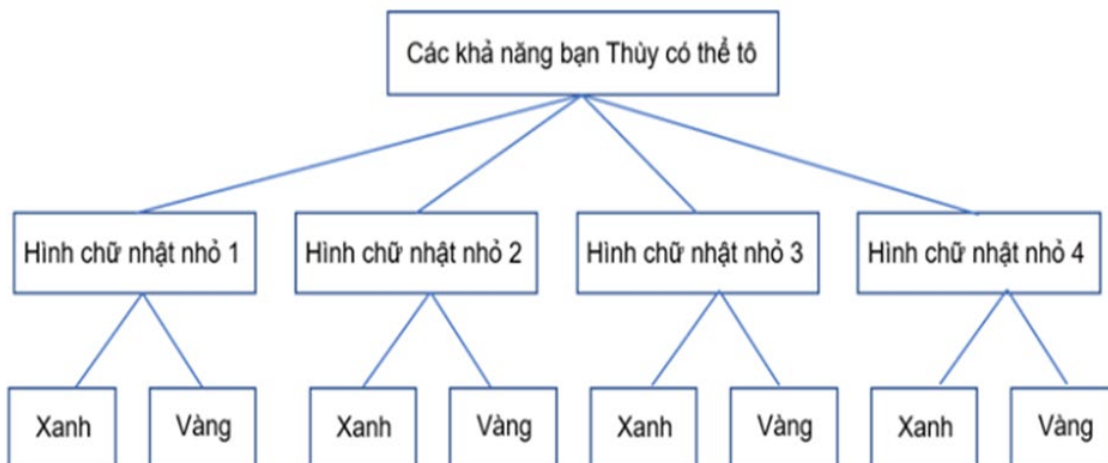
Có $n(\Omega) = C_3^{37} = 7770$

$$\Rightarrow P(H) = \frac{5950}{7770} = \frac{85}{111}.$$

2. Tính xác suất của biến cố bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây

HD 7: Để trang trí một tờ giấy có dạng hình chữ nhật, bạn Thủy chia tờ giấy đó thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau. Mỗi hình chữ nhật nhỏ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc vàng. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng mà bạn Thủy có thể tô màu trang trí cho tờ giấy đó.

Lời giải



Ví dụ 10. Câu lạc bộ nghệ thuật của một trường trung học phổ thông gồm học sinh của cả ba khối 10,11,12, mỗi khối có 5 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia biểu diễn. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn chỉ thuộc hai khối.

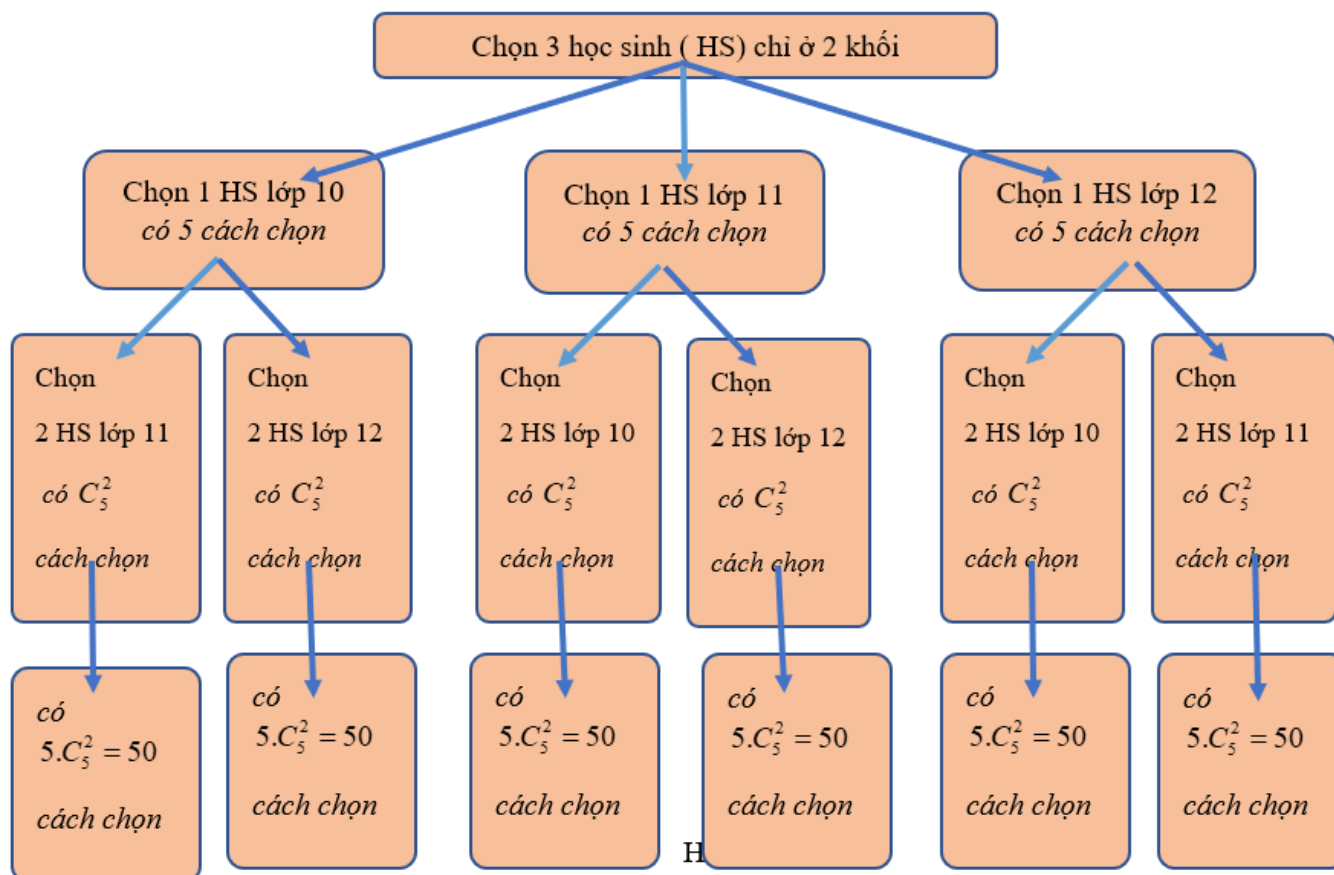
Lời giải

- Mỗi cách chọn ra đồng thời 3 học sinh trong câu lạc bộ cho ta một tổ hợp chập 3 của 15 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 15 phần tử và

$$n(\Omega) = C_{15}^3 = \frac{15!}{3!.12!} = 455.$$

- Xét biến cố A : "Chọn được 3 học sinh chỉ thuộc hai khối".

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A (Hình 2).



Hình 2

Như vậy, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = 50.6 = 300$.

Vậy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{300}{455} = \frac{60}{91}.$$

Luyện tập 8. Một hộp có 5 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ ba màu và số bi màu đỏ bằng số bi màu vàng.

Lời giải

$$\text{Có } n(\Omega) = C_{18}^5 = 8568$$

Xét biến cố A : "Trong 5 viên bi có 1 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu vàng, 2 viên bi màu đỏ"

$$n(A) = C_1^5 \cdot C_2^6 \cdot C_2^7 = 1575$$

Xét biến cố B : "Trong 5 viên bi có 3 viên bi màu xanh, 1 viên bi màu vàng, 1 viên bi màu đỏ"

$$n(B) = C_3^5 \cdot C_1^6 \cdot C_1^7 = 420$$

Vậy xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi màu đỏ bằng số bi màu vàng

$$\text{là: } \frac{1575 + 420}{8568} = \frac{95}{408}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định các biến cố

Ví dụ 1. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là một số lẻ”, B là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là một số chẵn”.

- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB .
- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố $\overline{AB}$.
- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố $A\overline{B}$.
- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố $\overline{A\overline{B}}$.
- Hãy xác định cặp biến cố xung khắc trong các cặp biến cố A và B ; A và $\overline{B}$.

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu.

Suy ra $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1; 2; \dots; 6\}$.

- $\bullet(i, j)$ là số lẻ khi và chỉ khi cả hai số i và j đều là số lẻ.
- $\bullet(i, j)$ là số chẵn khi và chỉ khi ít nhất một trong hai số i hoặc j là số chẵn.
- $\bullet(i + j)$ là số chẵn khi và chỉ khi hai số i, j đều là số lẻ hoặc đều là số chẵn.
- $\bullet(i + j)$ là số lẻ khi và chỉ khi trong hai số i, j có đúng một số lẻ và một số chẵn.

- Biến cố $A = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}$.

$$\text{Biến cố } B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5); \\ (2, 2); (2, 4); (2, 6); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2); (6, 4); (6, 6) \end{array} \right\}.$$

$$\text{Biến cố } AB = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}.$$

- Biến cố $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

$$\text{Biến cố } \overline{AB} = \{(2, 2); (2, 4); (2, 6); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2); (6, 4); (6, 6)\}.$$

- Biến cố $\overline{B} = \Omega \setminus B$.

$$\text{Biến cố } \overline{AB} = \emptyset.$$

- Biến cố $\overline{AB} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 1); (2, 3); (2, 5); (3, 2); (3, 4); (3, 6); \\ (4, 1); (4, 3); (4, 5); (5, 2); (5, 4); (5, 6); (6, 1); (6, 3); (6, 5) \end{array} \right\}.$

- Vì $A \cap B \neq \emptyset$ nên A và B là hai biến cố không xung khắc.

Vì $A \cap \overline{B} = \emptyset$ nên A và $\overline{B}$ là hai biến cố xung khắc.

Ví dụ 2. Một hộp chứa 30 quả cầu cùng kích thước được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên quả cầu được chọn là một số lẻ”, B là biến cố “Số ghi trên quả cầu được chọn là một số chia hết cho 5”.

- Hãy mô tả bằng lời biến cố $\overline{AB}$.
- Hai biến cố $\overline{A}$ và B có độc lập không? Vì sao?

Lời giải

- Biến cố $\overline{A}$: “Số ghi trên quả cầu được chọn là một số chẵn”.

Biến cố $\overline{AB}$: “Số ghi trên quả cầu được chọn chia hết cho 10”.

- Nếu $\overline{A}$ xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{1}{5}$.

Nếu $\overline{A}$ không xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{1}{5}$.

Vậy $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập với nhau.

Dạng 3: Quy tắc cộng cho 2 biến cố xung khắc

1. Phương pháp

Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Một lớp học 40 học sinh gồm có 15 học sinh nam giỏi toán và 8 học sinh nữ giỏi. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Hãy tính xác suất để chọn được một nam sinh giỏi toán hay một nữ sinh giỏi lý

Lời giải

Gọi A là biến cố chọn một nam sinh giỏi toán và B là biến cố chọn một nữ sinh giỏi lý thì $A \cup B$ là biến cố chọn một nam sinh giỏi toán hay một nữ sinh giỏi lý.

Ta có $P(A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ và $P(B) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ A và B là hai biến cố xung khắc nên

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{5} = \frac{23}{40}$$

Ví dụ 2: Chọn ngẫu nhiên 8 lá bài trong cỗ bài 32 lá. Tính xác suất để được ít nhất 3 lá già.

Lời giải

Gọi A là biến cố chọn được 3 lá già và B là biến cố chọn được 4 lá già thì $A \cup B$ là biến cố chọn được ít nhất 3 lá già

$$\text{Ta có : } P(A) = \frac{C_4^3 \cdot C_{28}^5}{C_{32}^8} \text{ và } P(B) = \frac{C_4^4 \cdot C_{28}^4}{C_{32}^8}$$

A và B là hai biến cố xung khắc.

$$\text{Vậy } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_4^3 \cdot C_{28}^5 + C_4^4 \cdot C_{28}^4}{C_{32}^8} = 0,04$$

Ví dụ 3: Một tổ công nhân có 5 nam và 6 nữ. Cần chọn ngẫu nhiên hai công nhân đi thực hiện một nhiệm vụ mới. Tính xác suất của biến cố “Cả hai công nhân được chọn cùng giới tính”.

Lời giải

Số kết quả chọn được hai công nhân bất kì là $C_{11}^2 = 55$

Gọi A là biến cố “Hai công nhân được chọn là nam”, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_5^2 = 10$.

Gọi B là biến cố “Hai công nhân được chọn là nữ”, số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $C_6^2 = 15$.

Do đó $A \cup B$ là biến cố “Cả hai công nhân được chọn có cùng giới tính”. Do A và B là hai biến cố xung

khắc nên: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{55} + \frac{15}{55} = \frac{5}{11}$.

Ví dụ 4: Trên kệ sách đang có 4 cuốn sách Toán và 5 cuốn sách Văn. Lần lượt lấy xuống ngẫu nhiên ba cuốn sách, tính xác suất của biến cố “Ba cuốn sách được chọn cùng loại”.

Lời giải

Số kết quả chọn được hai cuốn sách bất kì là $C_9^3 = 84$

Gọi A là biến cố “Ba cuốn sách được chọn là sách Toán”, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_4^3 = 4$.

.

Gọi B là biến cố “Ba cuốn sách được chọn là sách Văn”, số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $C_5^3 = 10$.

.

Do đó $A \cup B$ là biến cố “Cả ba cuốn sách được chọn cùng loại”. Do A và B là hai biến cố xung khắc nên:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{84} + \frac{10}{84} = \frac{1}{6}.$$

Dạng 4: Quy tắc cộng cho 2 biến cố bất kì

1. Phương pháp

Cho hai biến cố A và B bất kì. Khi đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1 : Gieo một con xúc sắc .Gọi A là biến cố được số chẵn và B là biến cố được một bội số của 2. Kiểm lại rằng : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Lời giải

Ta có $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}$.Do đó $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ và $AB = \{6\}$

Vậy $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ và $P(AB) = \frac{1}{6}$

Suy ra : $P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{2}{3} = P(A \cup B)$

Ví dụ 2: Một lớp học gồm 40 học sinh trong đó có : 15 học sinh giỏi toán , 10 học sinh giỏi Lý và 5 học sinh giỏi Toán lẫn Lý.Chọn ngẫu nhiên một học sinh.Hãy tính xác suất để học sinh đó giỏi toán hay giỏi lý

Lời giải

A là biến cố học sinh giỏi toán

B là biến cố học sinh giỏi lý

Ta có : AB là biến cố học sinh giỏi toán và lý

$A \cup B$ là biến cố học sinh giỏi toán hay lý

Ta có : $P(A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}; P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}; P(AB) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 3: Trong một thùng phiếu bốc thăm trúng thưởng có 30 lá phiếu được đánh số thứ tự từ 1 đến 30 . Người ta rút ra từ thùng phiếu một lá thăm bất kì. Tính xác suất của biến cố “Lá thăm rút được có số thứ tự chia hết cho 4 hoặc 5”

Lời giải

Gọi A là biến cố “Lá thăm rút được có số thứ tự chia hết cho 4”.

Từ 1 đến 30 có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố A , nên $P(A) = \frac{7}{30}$.

Gọi B là biến cố “Lá thăm rút được có số thứ tự chia hết cho 5”.

Từ 1 đến 30 có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố B , nên $P(B) = \frac{6}{30}$.

Một số chia hết cho cả 4 và 5 thì nó chia hết cho 20, từ 1 đến 30 có 1 kết quả, nên $P(A.B) = \frac{1}{30}$.

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B) = \frac{7}{30} + \frac{6}{30} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$.

Dạng 5: Quy tắc nhân xác suất

1. Phương pháp

- + Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B)$.
- + Nếu $P(AB) \neq P(A).P(B)$ thì A và B là hai biến cố không độc lập.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- a) Biết $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất các biến cố $AB, \overline{AB}, A\overline{B}$ và $\overline{A}B$.
- b) Biết $P(A) = 0,3$ và $P(AB) = 0,12$. Hãy tính xác suất các biến cố $B, \overline{AB}$ và $\overline{AB}$.

Lời giải

Vì hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập nên $\overline{A}$ và B ; A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

- a) $\bullet P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4; P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,8$.
- $\bullet P(AB) = P(A)P(B) = 0,6.0,2 = 0,12$.
- $\bullet P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(B) = 0,4.0,2 = 0,08$.
- $\bullet P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0,6.0,8 = 0,48$.
- $\bullet P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0,4.0,2 = 0,08$.
- b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,7$.
- $\bullet P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4$.
- $\bullet P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(B) = 0,7.0,4 = 0,28$.
- $\bullet P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0,7.0,4 = 0,28$.

Ví dụ 2. Một xạ thủ bắn lần lượt hai viên đạn vào bia. Xác suất bắn không trúng đích của viên thứ nhất và viên thứ hai lần lượt là $0,2$ và $0,3$. Biết rằng kết quả các lần bắn độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau

- a) “Cả hai lần bắn đều không trúng đích”.
- b) “Cả hai lần bắn đều trúng đích”.
- c) “Lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích”.
- d) “Có ít nhất một lần bắn trúng đích”.

Lời giải

Gọi biến cố A_i : “Lần bắn thứ i không trúng đích” với $i = 1, 2$.

Biến cố $\overline{A_i}$: “Lần bắn thứ i trúng đích” với $i = 1, 2$.

Ta có $P(A_1) = 0,2, P(A_2) = 0,3; P(\overline{A_1}) = 0,8, P(\overline{A_2}) = 0,7$.

- a) Gọi biến cố A : “Cả hai lần bắn đều không trúng đích”.

Ta có $A = A_1A_2$ và $A_1; A_2$ là hai biến cố độc lập.

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1).P(A_2) = 0,2.0,3 = 0,06.$$

b) Gọi biến cố B : “Cả hai lần bắn đều trúng đích”.

Ta có $B = \overline{A_1} \overline{A_2}$ và $\overline{A_1}; \overline{A_2}$ là hai biến cố độc lập.

$$\Rightarrow P(B) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

c) Gọi biến cố C : “Lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích”.

Ta có $C = A_1 \overline{A_2}$ và $A_1; \overline{A_2}$ là hai biến cố độc lập.

$$\Rightarrow P(C) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14.$$

d) Gọi biến cố D : “Có ít nhất một lần bắn trúng đích”.

biến cố $\overline{D}$: “Cả hai lần bắn đều không trúng đích”.

$$\Rightarrow \overline{D} = A \Rightarrow P(\overline{D}) = P(A) = 0,06.$$

$$\Rightarrow P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0,94.$$

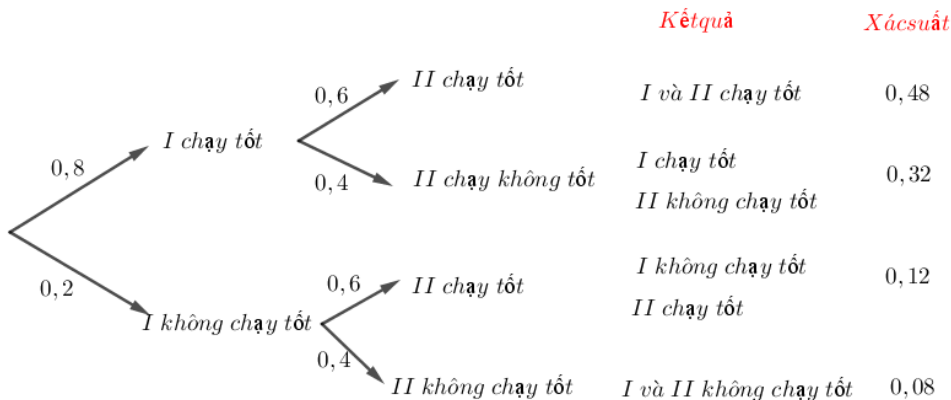
Ví dụ 3. Một chiếc xe máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt tương ứng là $0,8$ và $0,6$. Bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây, hãy tính xác suất để

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt.

b) Cả hai động cơ đều không chạy tốt.

c) Động cơ I chạy tốt, động cơ II chạy không tốt.

Lời giải



Theo sơ đồ trên, ta có

a) Xác suất cả hai động cơ đều chạy tốt là $0,48$.

b) Xác suất cả hai động cơ đều không chạy tốt là $0,08$.

c) Xác suất động cơ I chạy tốt, động cơ II chạy không tốt là $0,32$.

Ví dụ 4. Một trò chơi có xác suất thắng mỗi ván là $0,2$. Nếu một người chơi 10 ván thì xác suất để người này thắng ít nhất một ván là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố “Người ấy thắng ít nhất một ván khi chơi 10 ván”.

$\overline{A}$ là biến cố “Người ấy chơi 10 ván mà không thắng ván nào cả”.

Xác suất thua mỗi ván là $1 - 0,2 = 0,8$.

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = (0,8)^{10}.$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0,8)^{10} = 0,8926258176.$$

Ví dụ 5. Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,7 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,2 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Bình ít nhất một lần bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó trong mỗi trường hợp sau.

- Anh Bình tiếp xúc người bệnh 5 lần đều không mang khẩu trang.
- Anh Bình tiếp xúc người bệnh 2 lần, trong đó có 1 lần không mang khẩu trang và có 1 lần mang khẩu trang.

Lời giải

- Gọi biến cố A : “Anh Bình ít nhất một lần bị lây bệnh khi tiếp xúc người bệnh cả 5 lần đều không mang khẩu trang”.

Biến cố $\overline{A}$: “Anh Bình không bị lây bệnh khi tiếp xúc người bệnh cả 5 lần đều không mang khẩu trang”.

Xác suất nhiễm bệnh nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang là 0,7.

Xác suất không bị nhiễm bệnh nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang là $1 - 0,7 = 0,3$.

$$P(\overline{A}) = (0,3)^5.$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0,3)^5 = 0,99757.$$

- Gọi biến cố B : “Anh Bình ít nhất một lần bị lây bệnh khi tiếp xúc người bệnh 2 lần, trong đó có 1 lần không mang khẩu trang và có 1 lần mang khẩu trang”.

Biến cố $\overline{B}$: “Anh Bình không bị lây bệnh khi tiếp xúc người bệnh cả 2 lần, trong đó có 1 lần không mang khẩu trang và có 1 lần mang khẩu trang”.

Xác suất nhiễm bệnh nếu tiếp xúc với người bệnh mà không khẩu trang là 0,2.

Xác suất không bị nhiễm bệnh nếu tiếp xúc với người bệnh mà đeo khẩu trang là $1 - 0,2 = 0,8$.

$$P(\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24.$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,24 = 0,76.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố: A : “Lần thứ nhất xuất hiện mặt ngửa”;

B : “Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa”;

C : “Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa”;

D : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

Trong hai biến cố C, D biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố A, B ? Biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố A, B ?

Lời giải

Biến cố hợp (A và B): “Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa”. (C) là kết quả của việc ghép lại hai biến cố A và B , tức là xảy ra cùng lúc cả A và B .

Biến cố giao (A giao B): “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”. (D) là kết quả của việc giao của hai biến cố A và B , tức là ít nhất một trong A hoặc B xảy ra.

Bài 2. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 4";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 4";

C : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 4".

Trong các biến cố trên, hãy:

a) Tìm cặp biến cố xung khắc;

b) Tìm cặp biến cố độc lập.

Lời giải

a) Cặp biến cố xung khắc là A và C , vì nếu A xảy ra thì C không thể xảy ra, và ngược lại, nếu C xảy ra thì A không thể xảy ra.

b) Cặp biến cố độc lập là A và B , vì xảy ra hay không xảy ra biến cố A không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố B , và ngược lại, xảy ra hay không xảy ra biến cố B cũng không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố A .

Bài 3. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của biến cố M : "Số tự nhiên có hai chữ số được viết ra chia hết cho 11 hoặc chia hết cho 12".

Lời giải

Có $n(\Omega) = 90$.

Xét biến cố A : "Số tự nhiên có hai chữ số được chọn chia hết cho 11". Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

Xét biến cố B : "Số tự nhiên có hai chữ số được chọn chia hết cho 12". Số kết quả thuận lợi cho biến cố

$$B \text{ là } n(B) = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

$$\text{Vậy } P(M) = \frac{1}{10} + \frac{4}{45} = \frac{17}{90}.$$

Bài 4. Một hộp có 12 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng.

Lời giải

Có $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$

Xét biến cố A : "Trong 5 viên bi được chọn không có viên bi màu vàng nào".

$$\Rightarrow n(A) = C_7^5 = 21$$

Xét biến cố B : "Trong 5 viên bi được chọn có 1 viên bi màu vàng, 4 viên bi màu xanh

$$\Rightarrow n(B) = C_5^1 \cdot C_7^4 = 175$$

Xét biến cố M : "Trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng".

Xét biến cố $\bar{M}$: "Trong 5 viên bi được chọn có nhiều nhất 1 viên bi màu vàng".

$$\text{Có } P(\bar{M}) = \frac{21+175}{792} = \frac{49}{198} \Rightarrow P(M) = 1 - P(\bar{M}) = 1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}.$$

Bài 5. Hai bạn Việt và Nam cùng tham gia một kì thi trắc nghiệm môn Toán và môn Tiếng Anh một cách độc lập nhau. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã đề khác nhau và các môn khác nhau thì mã đề cũng khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai bạn Việt và Nam có chung đúng một mã đề thi trong kì thi đó.

Lời giải

Giả sử xác suất để Việt và Nam chọn cùng một mã đề là $\frac{1}{N}$, với N là tổng số mã đề khác nhau. Vậy

xác suất để Việt chọn một mã đề và Nam chọn cùng mã đề đó là $\frac{1}{N}$, và xác suất để cả hai chọn đúng

mã đề là $\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N}$

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Bài 6. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu.

Lời giải

Ta có: $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đúng hai màu"

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đúng 1 màu hoặc có cả ba màu"

$$\text{Có } n(\bar{A}) = (C_9^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1) + C_9^3 + C_6^3 + C_5^3 = 384$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{384}{1140} = \frac{32}{95}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai biến cố A và B . Biến cố " A hoặc B xảy ra" được gọi là

A. Biến cố giao của A và B .

B. Biến cố đối của A .

C. Biến cố hợp của A và B .

D. Biến cố đối của B .

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa, biến cố " A hoặc B xảy ra" được gọi là biến cố hợp của A và B .

Câu 2: Cho hai biến cố A và B . Biến cố " $Cả A và B đều xảy ra$ " được gọi là

A. Biến cố giao của A và B .

B. Biến cố đối của A .

C. Biến cố hợp của A và B .

D. Biến cố đối của B .

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa, biến cố “Cả A và B đều xảy ra” được gọi là biến cố giao của A và B .

Câu 3: Cho hai biến cố A và B . Nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia thì hai biến cố A và B được gọi là

- A. Xung khắc với nhau. B. Biến cố đối của nhau.
C. Độc lập với nhau. D. Không giao với nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa, nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia thì hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau.

Câu 4: Cho A và B là hai biến cố độc lập. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hai biến cố A và $\bar{B}$ không độc lập. B. Hai biến cố $\bar{A}$ và $\bar{B}$ không độc lập.
C. Hai biến cố $\bar{A}$ và B độc lập. D. Hai biến cố A và $A \cup B$ độc lập.

Lời giải

Chọn C

Nếu A và B độc lập thì các cặp biến cố A và $\bar{B}$, $\bar{A}$ và B , $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập.

Câu 5: Câu lạc bộ cờ vua của một trường THPT có 20 thành viên ở ba khối, trong đó khối 10 có 3 nam và 2 nữ, khối 11 có 4 nam và 4 nữ, khối 12 có 5 nam và 2 nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một thành viên của câu lạc bộ để tham gia thi đấu giao hữu. Xét các biến cố sau:

A : “Thành viên được chọn là học sinh khối 11”;

B : “Thành viên được chọn là học sinh nam”.

Khi đó biến cố $A \cup B$ là

- A. “Thành viên được chọn là học sinh khối 11 và là học sinh nam”.
B. “Thành viên được chọn là học sinh khối 11 và không là học sinh nam”.
C. “Thành viên được chọn là học sinh khối 11 hoặc là học sinh nam”.
D. “Thành viên được chọn không là học sinh khối 11 hoặc là học sinh nam”.

Lời giải

Chọn C

Biến cố $A \cup B$ bao gồm việc chọn thành viên là học sinh khối 11 hoặc là học sinh nam.

Câu 6: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ 1 đến 20. Xét các biến cố A : “Số được chọn chia hết cho 3”; B : “Số được chọn chia hết cho 4”. Khi đó biến cố $A \cap B$ là

- A. $\{3; 4; 12\}$. B. $\{3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20\}$.
C. $\{12\}$. D. $\{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

Lời giải

Chọn C

Các phần tử của biến cố $A \cap B$ là số tự nhiên từ 1 đến 20 thỏa mãn vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 4, tức là số đó chia hết cho 12.

Câu 7: Một hộp có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Xét các biến cố sau:

P : “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2”.

Q : “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4”.

Khi đó biến cố $P \cap Q$ là

- A. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 8”.
- B. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2”.
- C. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 6”.
- D. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4”.

Lời giải

Chọn D

Biến cố $P \cap Q$: “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho cả 2 và 4”, tức là chia hết cho 4.

Câu 8: Hai xạ thủ tham gia thi đấu bắn súng, mỗi người bắn vào bia của mình một viên đạn một cách độc lập với nhau. Gọi A và B lần lượt là các biến cố “Người thứ nhất bắn trúng bia”; “Người thứ hai bắn trúng bia”. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai biến cố A và B bằng nhau.
- B. Hai biến cố A và B đối nhau.
- C. Hai biến cố A và B độc lập với nhau.
- D. Hai biến cố A và B không độc lập với nhau.

Lời giải

Chọn C

Do hai xạ thủ thi đấu một cách độc lập nên việc xảy ra biến cố A không ảnh hưởng đến việc xác suất xảy ra biến cố B và ngược lại, do đó hai biến cố A và B độc lập với nhau.

Câu 9: Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố sau:

P : “Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo là số chẵn”;

Q : “Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo là số lẻ”;

R : “Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo khác tính chẵn lẻ”.

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Hai biến cố P và Q độc lập với nhau.
- B. Hai biến cố P và R không độc lập với nhau.
- C. Hai biến cố Q và R không độc lập với nhau.
- D. R là biến cố hợp của P và Q .

Lời giải

Chọn D

Biến cố hợp của hai biến cố P và Q là “Số chấm ở cả hai lần gieo có cùng tính chẵn lẻ”, do đó mệnh đề ở đáp án **D** là sai.

Câu 10: Có hai hộp đựng bi. Hộp thứ nhất có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 5 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Xét các biến cố sau:

A : “Viên bi được lấy ở hộp thứ nhất có màu đỏ, ở hộp thứ hai có màu xanh”;

B : “Viên bi được lấy ở hộp thứ nhất có màu xanh, ở hộp thứ hai có màu đỏ”.

Khi đó hai biến cố A và B là

- A.** Hai biến cố độc lập với nhau.
- B.** Hai biến cố bằng nhau.
- C.** Hai biến cố đối của nhau.
- D.** Hai biến cố xung khắc.

Lời giải

Chọn A

Việc xảy ra biến cố A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B nên hai biến cố này độc lập với nhau.

Câu 11: Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- B.** $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$
- C.** $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$
- D.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên $A \cap B = \emptyset$. Từ đó suy ra $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Câu 12: Cho hai biến cố A và B có $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Ta kết luận hai biến cố A và B là:

- A.** Độc lập.
- B.** Không xung khắc.
- C.** Xung khắc.
- D.** Không rõ.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ nên $P(A \cap B) = \frac{1}{12} \neq 0$

Suy ra hai biến cố A và B là hai biến cố không xung khắc.

Câu 13: Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \frac{1}{5}, P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Tính $P(B)$.

- A.** $\frac{3}{5}$.
- B.** $\frac{8}{15}$.
- C.** $\frac{2}{15}$.
- D.** $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

A, B là hai biến cố xung khắc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Câu 14: Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$. Tính $P(A \cup B)$

- A.** $\frac{7}{12}$
- B.** $\frac{1}{12}$
- C.** $\frac{1}{7}$
- D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{12}$$

Câu 15: Cho A, B là hai biến cố. Biết $P = \frac{1}{2}$, $P = \frac{3}{4}$, $P = \frac{1}{4}$. Biến cố $A \cup B$ là biến cố

A. Có xác suất bằng $\frac{1}{4}$. **B.** Chắc chắn.

C. Không xảy ra.

D. Có xác suất bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$A, B \text{ là hai biến cố bất kỳ ta luôn có: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

Vậy $A \cup B$ là biến cố chắc chắn.

Câu 16: Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.

A. $P(\bar{X}) = \frac{13}{18}$.

B. $P(\bar{X}) = \frac{5}{18}$.

C. $P(\bar{X}) = \frac{3}{18}$.

D. $P(\bar{X}) = \frac{11}{18}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 viên bi xanh"; B là biến cố "Chọn được 2 viên bi đỏ", C là biến cố "Chọn được 2 viên bi vàng" và X là biến cố "Chọn được 2 viên bi cùng màu".

Ta có $X = A \cup B \cup C$ và các biến cố A, B, C đôi một xung khắc.

Do đó, ta có: $P(X) = P(A) + P(B) + P(C)$.

$$\text{Mà: } P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{1}{12}; P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Vậy } P(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}.$$

Biến cố "Chọn được 2 viên bi khác màu" chính là biến cố $\bar{X}$.

$$\text{Vậy } P(\bar{X}) = 1 - P(X) = \frac{13}{18}.$$

Câu 17: Một hộp đựng 40 viên bi trong đó có 20 viên bi đỏ, 10 viên bi xanh, 6 viên bi vàng, 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên hai bi, tính xác suất biến cố A : "hai viên bi cùng màu".

A. $P(A) = \frac{4}{195}$.

B. $P(A) = \frac{6}{195}$.

C. $P(A) = \frac{4}{15}$.

D. $P(A) = \frac{64}{195}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } |\Omega| = C_{40}^2$$

Gọi các biến cố: D: "lấy được 2 bi viên đỏ" ta có: $|\Omega_D| = C_{20}^2 = 190$;

X: "lấy được 2 bi viên xanh" ta có: $|\Omega_X| = C_{10}^2 = 45$;

V: "lấy được 2 bi viên vàng" ta có: $|\Omega_V| = C_6^2 = 15$;

T: "lấy được 2 bi màu trắng" ta có: $|\Omega_T| = C_4^2 = 6$.

Ta có D, X, V, T là các biến cố đôi một xung khắc và $A = D \cup X \cup V \cup T$

$$P(A) = P(D) + P(X) + P(V) + P(T) = \frac{256}{C_{40}^2} = \frac{64}{195}.$$

Câu 18: Một hộp đựng 10 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh, 2 viên bi vàng, 1 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi tính xác suất biến cố A: "2 viên bi cùng màu".

A. $P(C) = \frac{1}{9}$. **B.** $P(C) = \frac{2}{9}$. **C.** $P(C) = \frac{4}{9}$. **D.** $P(C) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $n(\Omega) = C_{10}^2$

Gọi các biến cố: D: "lấy được 2 viên đỏ"; X: "lấy được 2 viên xanh";

V: "lấy được 2 viên vàng"

Ta có D, X, V là các biến cố đôi một xung khắc và $C = D \cup X \cup V$

$$P(C) = P(D) + P(X) + P(V) = \frac{2}{5} + \frac{C_3^2}{45} + \frac{1}{15} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}.$$

Câu 19: Một lớp có 60 sinh viên trong đó 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sinh viên được chọn không học tiếng Anh và tiếng Pháp.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn C

Gọi A: "Sinh viên được chọn học tiếng Anh";

B: "Sinh viên được chọn chỉ học tiếng Pháp";

D: "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và tiếng Pháp".

Ta có:

$$\text{Rõ ràng } P(A) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \text{ và } P(A \cap B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ đó } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\text{và } P(D) = P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Câu 20: Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập X . Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

- A. $\frac{12}{25}$. B. $\frac{12}{23}$. C. $\frac{21}{25}$. D. $\frac{21}{23}$.

Lời giải

Chọn A

Số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập X là: $5.4.3 = 60$.

Trong đó số các số không có mặt chữ số 5 là $4.3.2 = 24$ và số các số có mặt chữ số 5 là $60 - 24 = 36$.

Gọi A là biến cố hai số được viết lên bảng đều có mặt chữ số 5; B là biến cố hai số được viết lên bảng đều không có mặt chữ số 5.

Rõ ràng A và B xung khắc. Do đó áp dụng quy tắc cộng xác suất ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_{36}^1 \cdot C_{36}^1}{C_{60}^1 \cdot C_{60}^1} + \frac{C_{24}^1 \cdot C_{24}^1}{C_{60}^1 \cdot C_{60}^1} = \frac{13}{25}.$$

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là } P = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}.$$

Câu 21: Gieo hai hạt súc sắc màu xanh và trắng. Gọi x là số nút hiện ra trên hạt xanh và y là số nút hiện ra trên hạt trắng. Gọi A là biến cố $(x < y)$ và B là biến cố $5 < x + y < 8$. Khi đó $P(A \cup B)$ có giá trị là:

- A. $\frac{11}{8}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{12}$

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu có 36 phần tử.

Số phần tử của biến cố A là $\frac{36-6}{2} = 15$

Biến cố $B = \{(1;6);(6,1);(1;5);(5,1);(2;4);(4,2);(2,5);(5,2);(3,3);(3,4);(4,3)\}$

Biến cố giao A và B gồm các phần tử $\{(1;6);(1;5);(2;4);(2,5);(3,4)\}$

$$\text{Vậy } P = P(A \cup B) = \frac{15+11-5}{36} = \frac{7}{12}$$

Câu 22: Gieo hai con súc sắc xanh, đỏ. Gọi x, y là số nút xuất hiện ra hạt xanh và đỏ. Gọi A, B là hai biến cố sau đây. $A = \{(x; y) / x : y\}, B = \{(x; y) / 3 \leq x + y \leq 8\}$. Tìm $P(A \cup B)$

- A. $\frac{19}{24}$ B. $\frac{59}{72}$ C. $\frac{29}{36}$ D. $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn B

$$P(A) = \frac{14}{36}, P(B) = \frac{25}{36}, P(A \cap B) = \frac{10}{36} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{29}{36}$$

- Câu 23:** Trong một lớp 10 có 50 học sinh. Khi đăng ký cho học phụ đạo thì có 38 học sinh đăng ký học Toán, 30 học sinh đăng ký học Lý, 25 học sinh đăng ký học cả Toán và Lý. Nếu chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của lớp đó thì xác suất để em này không đăng ký học phụ đạo môn nào cả là bao nhiêu
- A. 0,07 B. 0,14 C. 0,43 D. Kết quả khác

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố “học sinh đăng ký Toán”

Gọi B là biến cố “học sinh đăng ký Lý”

$A \cap B$ “học sinh đăng ký Toán, Lý”

$A \cup B$ là biến cố “học sinh có đăng ký học phụ đạo”

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{38}{50} + \frac{30}{50} - \frac{25}{50} = \frac{43}{50}$$

$\overline{A \cup B}$ là biến cố “học sinh không đăng ký môn nào cả”

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{8}{50} = 0,14$$

- Câu 24:** Cho A, B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$. Tính $P(B)$

- A. $\frac{7}{36}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{36}$.

Lời giải

Chọn C

$$A, B \text{ là hai biến cố độc lập nên: } P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{4}.P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{9}.$$

- Câu 25:** Cho A và B là 2 biến cố độc lập với nhau, $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$. Khi đó $P(A.B)$ bằng
- A. 0,58 B. 0,7 C. 0,1 D. 0,12

Lời giải

Chọn D

$$\text{Do A và B là 2 biến cố độc lập với nhau nên } P(A.B) = P(A).P(B) = 0,12$$

- Câu 26:** Trong một kì thi có 60% thí sinh đỗ. Hai bạn A, B cùng dự kì thi đó. Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là:
- A. 0,24. B. 0,36. C. 0,16. D. 0,48.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } P(A) = P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 0,4$$

$$\text{Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là: } P = P(\overline{A}).P(B) + P(A).P(\overline{B}) = 0,48.$$

Câu 27: Có hai hộp đựng bi. Hộp I có 9 viên bi được đánh số 1, 2, ..., 9. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II là $\frac{3}{10}$. Xác suất để lấy được cả hai viên bi mang số chẵn là:

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{1}{15}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi X là biến cố: “lấy được cả hai viên bi mang số chẵn. “

Gọi A là biến cố: “lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp I “

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{4}{9}$$

Gọi B là biến cố: “lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II “ $P(B) = \frac{3}{10}$

Ta thấy biến cố A, B là 2 biến cố độc lập nhau, theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(X) = P(A.B) = P(A).P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{15}.$$

Câu 28: Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Gọi A là biến cố: “Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ”. Khi đó, xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

- A. $P(A) = \frac{12}{35}$. B. $P(A) = \frac{1}{25}$. C. $P(A) = \frac{4}{49}$. D. $P(A) = \frac{2}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố: “Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ. “

Gọi X là biến cố: “người thứ nhất ném trúng rổ” $\Rightarrow P(X) = \frac{1}{5}$.

Gọi Y là biến cố: “người thứ hai ném trúng rổ” $\Rightarrow P(Y) = \frac{2}{7}$.

Ta thấy biến cố X, Y là 2 biến cố độc lập nhau, theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(A) = P(X.Y) = P(X).P(Y) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}.$$

Câu 29: Xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm các suất sao cho 3 lần sinh có ít nhất một con trai.

- A. $P(A) \approx 0,88$. B. $P(A) \approx 0,23$. C. $P(A) \approx 0,78$. D. $P(A) \approx 0,32$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố ba lần sinh có ít nhất 1 con trai, suy ra $\bar{A}$ là xác suất 3 lần sinh toàn con gái.

Gọi B_i là biến cố lần thứ i sinh con gái ($i = 1, 2, 3$)

Suy ra $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 0,49$

Ta có: $\overline{A} = B_1 \cap B_2 \cap B_3$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 1 - (0,49)^3 \approx 0,88.$$

Câu 30: Hai cầu thủ sút phạt đền. Mỗi người đá 1 lần với xác suất làm bàn tương ứng là 0,8 và 0,7. Tính xác suất để có ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

- A. $P(X) = 0,42$. B. $P(X) = 0,94$. C. $P(X) = 0,234$. D. $P(X) = 0,9$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố cầu thủ thứ nhất làm bàn

B là biến cố cầu thủ thứ hai làm bàn

X là biến cố ít nhất 1 trong hai cầu thủ làm bàn

$$\text{Ta có: } X = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(X) = P(A).P(\overline{B}) + P(B).P(\overline{A}) + P(A).P(B) = 0,94.$$

Câu 31: Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được sinh con trai. Xác suất sinh được con trai trong một lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2.

- A. $P(C) = 0,24$. B. $P(C) = 0,299$. C. $P(C) = 0,24239$. D. $P(C) = 0,2499$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố: “ Sinh con gái ở lần thứ nhất”, ta có:

$$P(A) = 1 - 0,51 = 0,49.$$

Gọi B là biến cố: “ Sinh con trai ở lần thứ hai”, ta có: $P(B) = 0,51$

Gọi C là biến cố: “Sinh con gái ở lần thứ nhất và sinh con trai ở lần thứ hai”

Ta có: $C = AB$, mà A, B độc lập nên ta có:

$$P(C) = P(AB) = P(A).P(B) = 0,2499.$$

Câu 32: Ba người cùng bắn vào 1 bia Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích bằng:

- A. 0,24. B. 0,96. C. 0,46. D. 0,92.

Lời giải

Chọn C

Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là: $P(A_1) = 0,8$;

$$P(A_2) = 0,6; P(A_3) = 0,5$$

Xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích bằng:

$$P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3) = 0,46.$$

Câu 33: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Kí hiệu A : "Lần đầu xuất hiện mặt chẵn chấm";

B : "Lần thứ hai xuất hiện mặt chẵn chấm";

C : "Tổng số chấm trong hai lần gieo là chẵn".

Ta có $C = AB \cup \overline{A}\overline{B}$. Dễ thấy AB và $\overline{A} \cdot \overline{B}$ xung khắc nên

$$P(C) = P(AB) + P(\overline{A}\overline{B})$$

Vì A và B độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập, do đó

$$P(C) = P(A)P(B) + P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Câu 34: Một xạ thủ bắn bia. Biết rằng xác suất bắn trúng vòng tròn 10 là 0,2; vòng 9 là 0,25 và vòng 8 là 0,15. Nếu trúng vòng k thì được k điểm. Giả sử xạ thủ đó bắn ba phát súng một cách độc lập. Xạ thủ đạt loại giỏi nếu anh ta đạt ít nhất 28 điểm. Xác suất để xạ thủ này đạt loại giỏi là

A. ,00935

B. 0,0755

C. 0,0365

D. 0,0855

Lời giải

Chọn A

Gọi H là biến cố "Xạ thủ bắn đạt loại giỏi". A ; B ; C ; D là các biến cố sau.

A : "Ba viên trúng vòng 10"

B : "Hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 9"

C : "Một viên trúng vòng 10 và hai viên trúng vòng 9"

D : "Hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 8"

Các biến cố A ; B ; C ; D là các biến cố xung khắc từng đôi một và $H = A \cup B \cup C \cup D$

+ Suy ra theo quy tắc cộng mở rộng ta có $P(H) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

Mặt khác $P(A) = (0,2).(0,2).(0,2) = 0,008$

$$P(B) = (0,2).(0,2).(0,25) + (0,2)(0,25)(0,2) + (0,25)(0,2)(0,2) = 0,03$$

$$P(C) = (0,2).(0,25).(0,25) + (0,25)(0,2)(0,25) + (0,25)(0,25)(0,2) = 0,0375$$

$$P(D) = (0,2).(0,2).(0,15) + (0,2)(0,15)(0,2) + (0,15)(0,2)(0,2) = 0,018$$

+ Do đó $P(H) = 0,008 + 0,03 + 0,0375 + 0,018 = 0,0935$

Câu 35: Ba người xạ thủ A_1 , A_2 , A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1 , A_2 , A_3 tương ứng là 0,7; 0,6 và 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

A. 0,45

B. 0,21

C. 0,75

D. 0,94

Lời giải

Chọn D

Gọi $\overline{X}$ là biến cố: "Không có xạ thủ nào bắn trúng mục tiêu".

Khi đó $P(\overline{X}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0,3.0,4.0,5 = 0,14$

$$\Rightarrow P = 1 - P(\bar{X}) = 0,94.$$

Câu 36: Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng mục tiêu và một viên trượt mục tiêu là

A. 0,45.

B. 0,4.

C. 0,48.

D. 0,24.

Lời giải

Chọn C

Gọi A_1 là biến cố viên thứ nhất trúng mục tiêu

Gọi A_2 là biến cố viên thứ hai trúng mục tiêu

Do A_1, A_2 là hai biến cố độc lập nên xác suất để có một viên trúng mục tiêu và một viên trượt mục tiêu là $p = p(A_1 \bar{A}_2) + p(\bar{A}_1 A_2) = p(A_1)p(\bar{A}_2) + p(\bar{A}_1)p(A_2) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,8$.

Câu 37: Hai xạ thủ cùng bắn, mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D

Xác suất để xạ thủ thứ nhất bắn không trúng bia là: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Xác suất để xạ thủ thứ hai bắn không trúng bia là: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Gọi biến cố A: "Có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia".

Khi đó biến cố A có 3 khả năng xảy ra:

+) Xác suất người thứ nhất bắn trúng bia, người thứ hai không bắn trúng bia: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

+) Xác suất người thứ nhất không bắn trúng bia, người thứ hai bắn trúng bia: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

+) Xác suất cả hai người đều bắn không trúng bia:

$$\text{Khi đó } P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 38: Ba xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là 0,7; 0,6 và 0,5. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

A. 0,45.

B. 0,21.

C. 0,75.

D. 0,94.

Lời giải

Chọn D

Gọi A_i : “Xạ thủ thứ i bắn trúng mục tiêu” với $i = \overline{1,3}$.

Khi đó $\overline{A_i}$: “Xạ thủ thứ i bắn không trúng mục tiêu”.

Ta có $P(A_1) = 0,7 \Rightarrow P(\overline{A_1}) = 0,3$; $P(A_2) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{A_2}) = 0,4$; $P(A_3) = 0,5 \Rightarrow P(\overline{A_3}) = 0,5$.

Gọi B : “Cả ba xạ thủ bắn không trúng mục tiêu”.

Và $\overline{B}$: “có ít nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu”.

Ta có $P(B) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,06$.

Khi đó $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,06 = 0,94$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Câu 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm 100. Kết quả được trình bày trong *Bảng 16*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[50;60)	4	4
[60;70)	5	9
[70;80)	23	32
[80;90)	6	38
[90;100)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 16.

a) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị:

- A.** 74. **B.** 75. **C.** 76. **D.** 77.

b) Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

- A.** $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 78$. **B.** $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 78$.
C. $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 79$. **D.** $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 79$.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

- A.** 73. **B.** 74. **C.** 75. **D.** 76.

Lời giải

a) Trung vị là: $M_e = 70 + \left(\frac{20-9}{23} \right) \cdot 10 \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn B.**

b) $Q_1 = 70 + \left(\frac{10-9}{23} \right) \cdot 10 \approx 70$, $Q_2 = M_e \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn D.**

c) $M_o = 70 + \left(\frac{23-5}{2 \cdot 23 - 5 - 6} \right) \cdot 10 \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng:

- A.** $\frac{11}{21}$. **B.** $\frac{221}{441}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Có $n(\Omega) = C_{21}^2 = 210$.

Để hai số có tổng là một số chẵn là thì có các trường hợp sau:

TH1: Cả hai số là số chẵn.

TH2: Cả hai số là số lẻ.

Xét biến cố A : "Cả hai số là số chẵn". $\Rightarrow n(A) = C_{10}^2 = 45$

Xét biến cố B : "Cả hai số là số lẻ". $\Rightarrow n(B) = C_{11}^2 = 55$

Vậy xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là: $\frac{45+55}{210} = \frac{10}{21}$

Câu 3. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$[100;120)$; $[120;140)$; $[140;160)$; $[160;180)$; $[180;200)$.

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu.

Lời giải

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[100;120)$	4	4
$[120;140)$	15	19
$[140;160)$	14	33
$[160;180)$	5	38
$[180;200)$	2	40

b) Trung bình cộng là: $\bar{x} = \frac{110.4+130.15+150.14+170.5+190.2}{40} = 143$

• Trung vị là: $M_e = 140 + \left(\frac{20-19}{14} \right) \cdot 20 \approx 141$

• Q_1 là $Q_1 = 120 + \left(\frac{10-4}{15} \right) \cdot 20 = 128$

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 141$

$$Q_3 \text{ là: } Q_3 = 140 + \left(\frac{30-19}{15} \right) \cdot 20 = 155,6$$

c) Một của mẫu số liệu là:

$$\text{Có nhóm 2 là nhóm có tần số lớn nhất} \Rightarrow M_o = 120 + \left(\frac{15-4}{2 \cdot 15 - 4 - 14} \right) \cdot 20 \approx 138,3$$

Câu 4. Bạn Dũng và bạn Hương tham gia đội văn nghệ của nhà trường. Nhà trường chọn từ đội văn nghệ đó một bạn nam và một bạn nữ để lập tiết mục song ca. Xác suất được nhà trường chọn vào tiết mục song ca của Dũng và Hương lần lượt là 0,7 và 0,9.

Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : "Cả hai bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- b) B : "Có ít nhất một bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- c) C : "Chỉ có bạn Hương được chọn vào tiết mục song ca"

Lời giải

$$\text{a) } P(A) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

$$\text{b) Xét biến cố } D: \text{"Dũng không được chọn"}. P(D) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$\text{Xét biến cố } E: \text{"Hương không được chọn"}. P(E) = 1 - 0,9 = 0,1 \Rightarrow P(B) = 1 - (0,3 \cdot 0,1) = 0,97$$

$$\text{c) } P(C) = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27.$$

Câu 5. Hai bạn Mai và Thi cùng tham gia một kì kiểm tra ngoại ngữ một cách độc lập nhau. Xác suất để bạn Mai và bạn Thi đạt từ điểm 7 trở lên lần lượt là 0,8 và 0,9.

Tính xác suất của biến cố C : "Cả hai bạn đều đạt từ điểm 7 trở lên".

Lời giải

$$P(C) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Câu 6. Một người chọn ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Lời giải

$$\text{Có } n(\Omega) = 3! = 6.$$

Có biến cố A : "Có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó".

Xét biến cố A' : "Không có lá thư nào được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó".

$$n(A') = 2! = 2 \Rightarrow P(A') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 7. Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng. Trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số từ 1 đến 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Lời giải

$$\text{Có } n(\Omega) = C_9^2 = 36$$

Gọi biến cố A : "2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số"

Khi đó biến cố A' : "2 quả cầu được lấy cùng màu hoặc khác màu cùng số"

$$\Rightarrow n(A') = C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 + 7 = 17$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{17}{36}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$$

Câu 8. Bạn An vẽ trên đất một bảng gồm 9 ô vuông như *Hình 3*. Sau đó, bạn An cầm 4 viên bi giống nhau đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông trong bảng đó. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi.

Hình 3

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_9^4 = 126$.

Gọi A là biến cố: "bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi", khi đó ta có biến cố đối: $\bar{A}$: "có 1 hàng hoặc 1 cột không có viên bi".

Gọi B là biến cố: 1 hàng không có viên bi

- Chọn 1 hàng trong 3 hàng có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 2 hàng còn lại có C_6^4 cách.
 $\Rightarrow n(B) = C_3^1 \cdot C_6^4 = 45$ cách.

Gọi C là biến cố: 1 cột không có viên bi.

- Chọn 1 cột trong 3 cột có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 2 cột còn lại có C_6^4 cách.
 $\Rightarrow n(C) = C_3^1 \cdot C_6^4 = 45$ cách.

Ta có: $B \cap C$ = "1 hàng không có viên bi và 1 cột không có viên bi".

X	X	
X	X	

- Chọn 1 hàng không có viên bi có C_3^1 cách.

- Chọn 1 cột không có viên bi có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 4 ô còn lại có 1 cách.
 $\Rightarrow n(B \cap C) = 9$.
 $\Rightarrow n(A) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 45 + 45 - 9 = 81$.
 Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{81}{126} = \frac{5}{14}$.

BÀI TẬP TỔNG ÔN

A. TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Chọn đáp án thích hợp điền vào chỗ trống: “Mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng ..., trong đó a là đầu mút phải, b là đầu mút trái”.
- A.** $[a;b]$. **B.** $[a;b)$. **C.** $(a;b]$. **D.** $(a;b)$.

Lời giải

Chọn B

Mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng $[a;b)$, trong đó a là đầu mút phải, b là đầu mút trái.

- Câu 2:** Mẫu số liệu (T) được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
Tần số	12	20	5	14	7

Mẫu số liệu (T) có bao nhiêu số liệu, bao nhiêu nhóm?

- A.** 58 số liệu; 5 nhóm. **B.** 24 số liệu; 6 nhóm.
C. 5 số liệu; 58 nhóm. **D.** 6 số liệu; 24 nhóm.

Lời giải

Chọn A

Mẫu số liệu (T) có:

$$12 + 20 + 5 + 14 + 7 = 58 \text{ (số liệu).}$$

$$5 \text{ nhóm: } [0;5); [5;10); [10;15); [15;20); [20;25).$$

- Câu 3:** Cho mẫu số liệu về thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của các học sinh trong một lớp 11 của một trường như sau:

Thời gian	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Số học sinh	7	12	7	5	3	2

Có bao nhiêu học sinh có thời gian đi từ nhà đến trường là 15 phút đến 20 phút?

- A.** 20. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Theo bảng số liệu, có 5 học sinh có thời gian đi từ nhà đến trường là 15 phút đến 20 phút.

Câu 4: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (cm) của các học sinh nữ trong khối 11 của một trường như sau:

Chiều cao	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	20	45	34	27	15	4

Trong mẫu số liệu trên, tần số tích lũy của nhóm [160;165) là:

- A. 99. B. 45. C. 126. D. 34.

Lời giải

Chọn C

Tần số tích lũy của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó.

Tần số tích lũy của nhóm [160;165) là $20 + 45 + 34 + 27 = 126$.

Câu 5: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 30 ngày, ta có bảng số liệu sau:

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
Số ngày	6	12	9	3

Nhiệt độ trung bình trong 30 ngày trên là:

- A. $24(^{\circ}\text{C})$. B. $25,4(^{\circ}\text{C})$. C. $24,3(^{\circ}\text{C})$. D. $23,4(^{\circ}\text{C})$.

Lời giải

Chọn D

Giá trị đại diện của mỗi nhóm số liệu là *trung bình cộng* của hai đầu mút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm theo giá trị đại diện của mỗi nhóm:

Nhóm	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
Giá trị đại diện	19,5	22,5	25,5	28,5
Tần số	6	12	9	3

Nhiệt độ trung bình trong 30 ngày trên là:

$$\bar{x} = \frac{6.19,5 + 12.22,5 + 9.25,5 + 3.28,5}{30} = 23,4(^{\circ}\text{C}).$$

Câu 6: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian chạy 50 m của 20 học sinh, ta có bảng số liệu sau:

Thời gian (giây)	[7, 8; 8, 0)	[8, 0; 8, 2)	[8, 2; 8, 4)	[8, 4; 8, 6)	[8, 6; 8, 8)
Số học sinh	9	3	5	2	1

Tính thời gian chạy trung bình của 20 học sinh.

- A. 8,31 giây. B. 8,13 giây. C. 7,13 giây. D. 7,31 giây.

Lời giải

Chọn B

Giá trị đại diện của mỗi nhóm số liệu là *trung bình cộng* của hai đầu mút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm theo giá trị đại diện của mỗi nhóm:

Nhóm	[7, 8; 8, 0)	[8, 0; 8, 2)	[8, 2; 8, 4)	[8, 4; 8, 6)	[8, 6; 8, 8)
Giá trị đại diện	7,9	8,1	8,3	8,5	8,7
Tần số	9	3	5	2	1

Thời gian chạy trung bình của 20 học sinh là:

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 7,9 + 3 \cdot 8,1 + 5 \cdot 8,3 + 2 \cdot 8,5 + 1 \cdot 8,7}{20} = 8,13 \text{ (giây)}.$$

Câu 7: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của 100 học sinh, ta có bảng số liệu sau:

Thời gian (phút)	[33; 35)	[35; 37)	[37; 39)	[39; 41)	[41; 43)	[43; 45)
Số học sinh	4	13	38	27	14	4

Tính mốt của mẫu số liệu trên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 38,93. B. 38,39. C. 39,28. D. 39,82.

Lời giải

Chọn B

Nhóm 3 ứng với nửa khoảng [37; 39) là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 37$; $g = 2$; $n_3 = 38$ (với u, g, n_3 lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm 3).

Nhóm 2 có tần số $n_2 = 13$; Nhóm 4 có tần số $n_4 = 27$.

Ta có mốt của mẫu số liệu là:

$$M_o = 37 + \left(\frac{38 - 13}{2 \cdot 38 - 13 - 27} \right) \cdot 2 = 38,39.$$

Câu 8: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê chiều cao của 35 cây bạch đàn trong rừng, ta có bảng số liệu sau:

Khoảng chiều cao (m)	[6, 5; 7, 0)	[7, 0; 7, 5)	[7, 5; 8, 0)	[8, 0; 8, 5)
Số cây	6	15	11	3

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 7,35.

B. 7,34.

C. 3,75.

D. 7,43.

Lời giải

Chọn A

Nhóm 2 ứng với nửa khoảng $[7,0; 7,5)$ là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 7,0$; $g = 0,5$; $n_2 = 15$ (với u, g, n_2 lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm 2).

Nhóm 1 có tần số $n_1 = 6$; Nhóm 3 có tần số $n_3 = 11$.

Ta có mốt của mẫu số liệu là:

$$M_o = 7,0 + \left(\frac{15 - 6}{2 \cdot 15 - 6 - 11} \right) \cdot 0,5 = 7,35.$$

Câu 9: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê huyết áp của 20 người, ta có bảng số liệu sau:

Huyết áp (mmHg)	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)	[120;130)
Số người	4	2	3	6	3	2

Tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 100,67.

B. 101,67.

C. 101,76.

D. 100,76.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)	[120;130)
Tần số	4	2	3	6	3	2
Tần số tích lũy	4	6	9	15	18	20

Số phần tử của mẫu là $n = 20$. Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

Mà $cf_3 = 9 < 10 < cf_4 = 15$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10.

Xét nhóm 4 là nhóm $[100;110)$ có $r = 100$; $d = 10$; $n_4 = 6$ (với $r; d; n_4$ lần lượt là đầu mút trái; độ dài; tần số của nhóm 4).

Nhóm 3 là nhóm $[90;100)$ có $cf_3 = 9$ (với cf_3 là tần số tích lũy của nhóm 3).

Ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 100 + \left(\frac{10 - 9}{6} \right) \cdot 10 = 101,67.$$

Câu 10: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê điểm số (thang điểm 20) của 100 học sinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi toán, ta có bảng số liệu sau:

Điểm	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)	[18;20)
Số học sinh	6	21	30	25	14	4

Tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A.** 15,44 . **B.** 13,29 . **C.** 13,92 . **D.** 14,54 .

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)	[18;20)
Tần số	6	21	30	25	14	4
Tần số tích lũy	6	27	57	82	96	100

Số phần tử của mẫu là $n = 100$. Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75$.

Mà $cf_3 = 57 < 75 < cf_4 = 82$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 75.

Xét nhóm 4 là nhóm $[14;16)$ có $s = 14$; $h = 2$; $n_4 = 25$ (với $s; h; n_4$ lần lượt là đầu mút trái; độ dài; tần số của nhóm 4).

Nhóm 3 là nhóm $[12;14)$ có $cf_3 = 57$ (với cf_3 là tần số tích lũy của nhóm 3).

Ta có tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 14 + \left(\frac{75 - 57}{25} \right) \cdot 2 = 15,44.$$

Câu 11: Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Nếu A và B xung khắc thì có bao nhiêu mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

(I). $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

(II). $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

(III). $A \cap B = \phi$.

(IV). $A \cap B \neq \phi$.

- A.** 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Câu 12: Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Xác suất người thứ nhất bắn trúng là 80%. Xác suất người thứ hai bắn trúng là 70%. Xác suất để cả hai người cùng bắn trúng là

- A.** 50% . **B.** 32,6% . **C.** 60% . **D.** 56% .

Lời giải

Chọn D

Gọi A_i là biến cố người thứ i bắn trúng ($i = 1; 2$)

A là biến cố cả hai người cùng bắn trúng. Lúc đó: $A = A_1 \cap A_2$.

Vì A_1, A_2 là hai biến cố độc lập nên:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56 = 56\%.$$

Câu 13: 3 hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

A. $\frac{91}{135}$.

B. $\frac{44}{135}$.

C. $\frac{88}{135}$.

D. $\frac{45}{88}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi biến cố A : “Hai viên bi được lấy ra có cùng màu”.

A_1 : “ Hai viên bi lấy ra màu trắng”. Lúc đó: $P(A_1) = \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{18}$.

A_2 : “ Hai viên bi lấy ra màu đỏ”. Lúc đó: $P(A_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{18}$.

A_3 : “ Hai viên bi lấy ra màu xanh”. Lúc đó: $P(A_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{18}$.

Lúc đó: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ và A_1, A_2, A_3 là các biến cố xung khắc nên:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{44}{135}.$$

Câu 14: Xác suất sinh con trai trong một lần sinh là 0,51. Một người sinh hai lần, mỗi lần một con. Tính xác suất P để người đó sau khi sinh 2 lần có ít nhất một con trai.

A. $P = \frac{2499}{10000}$

B. $P = \frac{7599}{10000}$

C. $P = \frac{51}{100}$

D. $P = \frac{2601}{10000}$

Lời giải

Chọn B

Gọi X là biến cố: “ Sau khi sinh hai lần có ít nhất người đó sinh được một con trai”

A_1 là biến cố: “ Người đó sinh được một con trai lần thứ nhất”

A_2 là biến cố: “ Người đó sinh được một con trai lần thứ hai”

Khi đó $X = A_1 \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2 \cup A_1 A_2$

$$\Rightarrow P(X) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{7599}{10000}$$

Câu 15: Hai xạ thủ bắn súng độc lập. Xác suất bắn trúng của xạ thủ A là 0,9 và xác suất bắn trúng của xạ thủ B là 0,8. Hai xạ thủ mỗi người bắn một viên đạn. Tính xác suất để chỉ có một xạ thủ bắn trúng bia.

A. 0,18

B. 0,72

C. 0,26

D. 0,98

Lời giải

Chọn C

Gọi A và B là bến cổ xạ thủ A và xạ thủ B bắn trúng

Ta có xác suất cần tìm là: $P = P(\overline{AB} \cup \overline{AB}) = 0.08 + 0.18 = 0.26$

Câu 16: Có hai hộp đựng bi. Hộp I có 9 viên bi được đánh số 1, 2, ..., 9. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II là $\frac{3}{10}$. Xác suất để lấy được cả hai viên bi mang số chẵn là

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{1}{15}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi X là biến cố: "lấy được cả hai viên bi mang số chẵn. "

Gọi A là biến cố: "lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp I "

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{4}{9}.$$

Gọi B là biến cố: "lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II " $P(B) = \frac{3}{10}$.

Ta thấy biến cố A, B là 2 biến cố độc lập nhau, theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(X) = P(A.B) = P(A).P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{15}.$$

Câu 17: Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Gọi A là biến cố: "Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ". Khi đó, xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

- A. $P(A) = \frac{12}{35}$. B. $P(A) = \frac{1}{25}$. C. $P(A) = \frac{4}{49}$. D. $P(A) = \frac{2}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố: "Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ. "

Gọi X là biến cố: "người thứ nhất ném trúng rổ." $\Rightarrow P(X) = \frac{1}{5}$.

Gọi Y là biến cố: "người thứ hai ném trúng rổ." $\Rightarrow P(Y) = \frac{2}{7}$.

Ta thấy biến cố X, Y là 2 biến cố độc lập nhau, theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(A) = P(X.Y) = P(X).P(Y) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}.$$

Câu 18: Trong một kì thi có 60% thí sinh đỗ. Hai bạn A, B cùng dự kì thi đó. Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là:

- A. 0,24. B. 0,36. C. 0,16. D. 0,48.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P(A) = P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 0,4$

Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là: $P = P(\bar{A}).P(B) + P(A).P(\bar{B}) = 0,48$.

Câu 19: Ba người cùng bắn vào 1 bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích bằng:

- A. 0,24. B. 0,96. C. 0,46. D. 0,92.

Lời giải

Chọn C

Gọi X là biến cố: “có đúng 2 người bắn trúng đích”

Gọi A là biến cố: “người thứ nhất bắn trúng đích” $\Rightarrow P(A) = 0,8$; $P(\bar{A}) = 0,2$.

Gọi B là biến cố: “người thứ hai bắn trúng đích” $\Rightarrow P(B) = 0,6$, $P(\bar{B}) = 0,4$.

Gọi C là biến cố: “người thứ ba bắn trúng đích” $\Rightarrow P(C) = 0,5$, $P(\bar{C}) = 0,5$.

Ta thấy biến cố A, B, C là 3 biến cố độc lập nhau, theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(X) = P(A.B.\bar{C}) + P(A.\bar{B}.C) + P(\bar{A}.B.C) = 0,8.0,6.0,5 + 0,8.0,4.0,5 + 0,2.0,6.0,5 = 0,46.$$

Câu 20: Ba người cùng bắn vào 1 bia Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích bằng

- A. 0,24. B. 0,96. C. 0,46. D. 0,92.

Lời giải

Chọn C

Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là: $P(A_1) = 0,8$;

$$P(A_2) = 0,6; P(A_3) = 0,5$$

Xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích bằng:

$$P(A_1).P(A_2).\overline{P(A_3)} + P(A_1).\overline{P(A_2)}.P(A_3) + \overline{P(A_1)}.P(A_2).P(A_3) = 0,46.$$

Câu 21: Trong một kì thi có 60% thí sinh đỗ. Hai bạn A, B cùng dự kì thi đó. Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là

- A. 0,24. B. 0,36. C. 0,16. D. 0,48.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P(A) = P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 0,4$.

Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là: $P = P(\bar{A}).P(B) + P(A).P(\bar{B}) = 0,48$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 22: Cho bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

Nhóm	Tần số
$[30; 40)$	4
$[40; 50)$	10

[50;60)	14
[60;70)	6
[70;80)	4
[80;90)	2
	$n = 40$

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

Lời giải

a)

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[30;40)	35	4
[40;50)	45	10
[50;60)	55	14
[60;70)	65	6
[70;80)	75	4
[80;90)	85	2
		$n = 40$

❖ Tìm giá trị trung bình

Giá trị trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{35.4 + 45.10 + 55.14 + 65.6 + 75.4 + 85.2}{40} = 55,5$$

❖ Tìm trung vị

- Khoảng chứa trung vị [50;60)

Trung vị của mẫu số liệu là $M_e = 50 + \frac{20-14}{14} \cdot 10 \approx 54,29$

❖ Tìm tứ phân vị

Nhóm chứa trung vị thứ nhất Q_1 và nhóm chứa trung vị thứ hai Q_3 lần lượt là [40;50), [60;70).

Khi đó:

$$Q_1 = 40 + \frac{10-4}{10} \cdot 10 = 46$$

$$Q_3 = 60 + \frac{30-28}{6} \cdot 10 = 63,3$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu là $Q_1 = 46$, $Q_2 = 54,29$, $Q_3 = 63,3$.

❖ Tìm mốt

Nhóm chứa mốt: [50;60)

Mốt của mẫu số liệu: $M_0 = 50 + \frac{4}{4+8} \cdot 10 \approx 53,3$

Câu 23: Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilogam)

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30
 40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41
 38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng

[15;20), [20;25), [25;30), [30;35), [35;40), [40;45), [45;50), [50;55).

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu

Lời giải

a)

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[15; 20)	17,5	1
[20; 25)	22,5	0
[25; 30)	27,5	0
[30; 35)	32,5	1
[35; 40)	37,5	10
[40; 45)	42,5	17
[45; 50)	47,5	0
[50; 55)	52,5	1
		$n = 30$

b)

$$\text{Số trung bình cộng: } \bar{x} = \frac{17,5 + 32,5 + 37,5 \cdot 10 + 42,5 \cdot 17 + 52,5}{30} = 40$$

$$\text{Trung vị: } Q_2 = 40 + \frac{15-12}{17} \cdot 5 \approx 40,9$$

Trung vị Q_1 và Q_3 :

$$Q_1 = 35 + \frac{7,5-2}{10} \cdot 5 = 37,75$$

$$Q_3 = 40 + \frac{22,5-12}{17} \cdot 5 \approx 43,1$$

Tứ phân vị: $Q_1 = 37,75$, $Q_2 = 40,9$, $Q_3 = 43,1$

c) Mốt của mẫu số liệu

$$M_0 = 40 + \frac{7}{7+17} \cdot 5 \approx 41,5$$

Câu 24: Gieo một đồng xu 2 lần liên tiếp. Tính xác suất để có một lần lật ngửa.

Lời giải

Gọi A là biến cố được lần thứ nhất ngửa

B là biến cố lần 2 ngửa

A và B là hai biến cố độc lập.

$\overline{AB}$ là biến cố lần 1 ngửa và lần 2 sấp

$\overline{AB}$ là biến cố lần 1 sấp và lần 2 ngửa Xác suất để một lần lật ngửa là

$$P = P(A) \times P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.5$$

Câu 25: Gieo 3 đồng xu cân đối. Gọi A là biến cố có ít nhất một đồng xu lật ngửa và B là biến cố có đúng 2 đồng xu lật ngửa.

a) Tính xác suất để có ít nhất một đg xu ngửa.

b) Tính $P(A \cap B)$

Lời giải

Gieo 3 đồng xu thì không gian mẫu là

$$E = \{NNN, NNS, NSN, SNN, NSS, SNS, SSN, SSS\}$$

a) Xác suất để ít nhất một đồng xu lật ngửa là $P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

b) Ta có $P(B) = \frac{3}{8}$.

A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{64}$

Câu 26: Cho $P(A) = 2/5$; $P(B) = 5/12$ và $P(AB) = 1/6$. Hỏi 2 biến cố A và B có:

a) Xung khắc hay không?

b) Độc lập với nhau hay không?

Lời giải

a) Vì $P(AB) = \frac{1}{6} \neq 0$ nên A và B không xung khắc

b) Ta có $P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{6} = P(AB)$

Vậy A và B là 2 biến cố độc lập

Câu 27: Cho hai biến cố A và B biết $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$ và $P(A \cap B) = 0,1$.

Tính $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(\overline{A \cap B})$, $P(\overline{A \cup B})$.

Lời giải

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,3 + 0,5 - 0,1 = 0,7$

Ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$

$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0,1 = 0,9$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$

Câu 28: Chọn ngẫu nhiên một lá bài trong cỗ bài 32 lá, trả lá bài trong cỗ bài và rút lá bài khác.

a) Tính xác suất để hai lá bài rút được là lá già và lá đầm

b) Tính xác suất trong hai lá bài r được không có lá cơ

Lời giải

Trong cỗ bài 32 lá có 4 lá già và 4 lá đầm.

Gọi A là biến cố được lá già và B là biến cố được lá đầm

Rút lá bài thứ nhất và trả lại vào cỗ bài rồi rút lá thứ hai nên hai biến cố A và B độc lập a)

$$P(AB) = P(A) \times P(B) = \frac{C_4^1}{C_{32}^1} \times \frac{C_4^1}{C_{32}^1} = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{64}$$

b) Trong cỗ bài 32 lá có 8 lá cơ. Do đó xác suất rút được 2 lá cơ là

$$\frac{8}{32} \times \frac{8}{32} = \frac{1}{16}$$

Vậy xác suất để 2 lá bài rút được không có lá cơ là $P = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Câu 29: Một bình đựng 2 bi xanh và 4 bi đỏ. Lần lượt lấy một bi liên tiếp 3 lần và mỗi lần trả lại bi đã lấy vào bình.

- a) Tính xác suất để được 3 bi xanh
- b) Tính xác suất để được 3 bi đỏ
- c) Tính xác suất để được 3 bi không cùng một màu

Lời giải

$$a) P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{27}$$

$$b) P(B) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}.$$

$$c) \text{Xác suất được 3 bi cùng màu là } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 30: Có 3 chiếc hộp. Hộp A chứa 3 bi đỏ, 5 bi trắng. Hộp B chứa 2 bi đỏ, 2 bi vàng. Hộp C chứa 2 bi đỏ, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi lấy một bi từ hộp đó. Xác suất để được một bi đỏ

Lời giải

Lấy ngẫu nhiên một hộp

Gọi C_1 là biến cố lấy được hộp A

Gọi C_2 là biến cố lấy được hộp B

Gọi C_3 là biến cố lấy được hộp C

$$\text{Vậy } P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$$

Gọi C là biến cố “lấy ngẫu nhiên một hộp, trong hộp đó lại lấy ngẫu nhiên một viên bi và được bi đỏ”. Xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} E &= (C \cap C_1) \cup (C \cap C_2) \cup (C \cap C_3) \Rightarrow P(E) = P(C \cap C_1) + P(C \cap C_2) + P(C \cap C_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{17}{40}. \end{aligned}$$

Câu 31: Ba cầu thủ sút phạt đến 11m, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là x , y và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

Lời giải

Gọi A_i là biến cố “người thứ i ghi bàn” với $i = 1, 2, 3$.

Ta có các A_i độc lập với nhau và $P(A_1) = x$, $P(A_2) = y$, $P(A_3) = 0,6$.

Gọi A là biến cố: “ Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn”

B: “ Cả ba cầu thủ đều ghi bàn”

C: “Có đúng hai cầu thủ ghi bàn”

Ta có: $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,4(1-x)(1-y)$

Nên $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,4(1-x)(1-y) = 0,976$

Suy ra $(1-x)(1-y) = \frac{3}{50} \Leftrightarrow xy - x - y = -\frac{47}{50}$ (1).

Tương tự: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, suy ra:

$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6xy = 0,336$ hay là $xy = \frac{14}{25}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} xy = \frac{14}{25} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$, giải hệ này kết hợp với $x > y$ ta tìm được

$x = 0,8$ và $y = 0,7$.

Ta có: $C = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3}$

Nên $P(C) = (1-x)y \cdot 0,6 + x(1-y) \cdot 0,6 + xy \cdot 0,4 = 0,452$.

Câu 32: Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hù họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

Lời giải

Ta có xác suất để học sinh trả lời câu đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất trả lời câu sai là $\frac{3}{4}$.

Gọi x là số câu trả lời đúng, khi đó số câu trả lời sai là $10 - x$

Số điểm học sinh này đạt được là: $4x - 2(10 - x) = 6x - 20$

Nên học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $6x - 20 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{21}{6}$

Mà x nguyên nên x nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3.

Gọi A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) là biến cố: “Học sinh trả lời đúng i câu”

A là biến cố: “ Học sinh nhận điểm dưới 1”

Suy ra: $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ và $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

Mà: $P(A_i) = C_{10}^i \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$ nên $P(A) = \sum_{i=0}^3 C_{10}^i \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{10-i} = 0,7759$.

