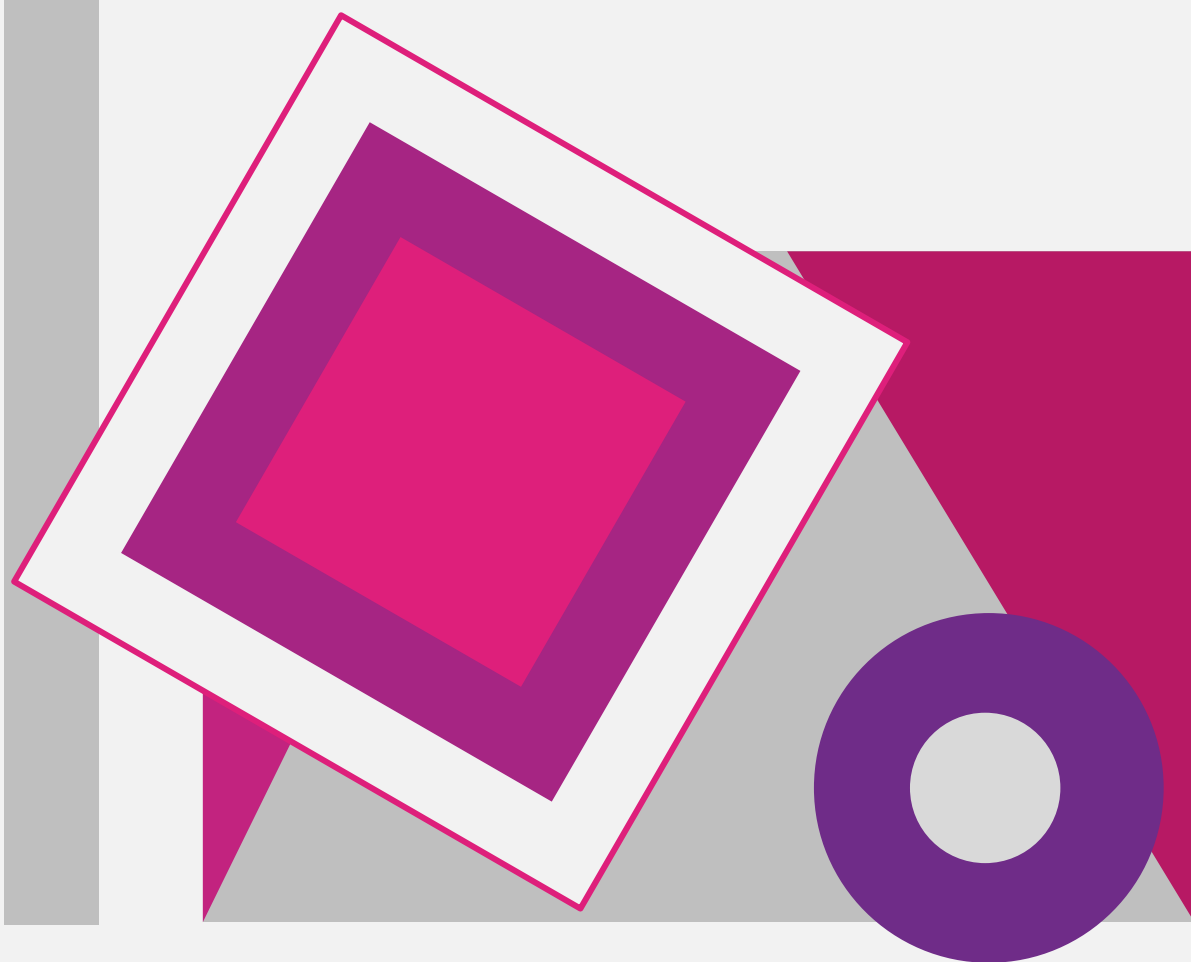




CÁC BÀI TOÁN KHÓ

QUAN HỆ VUÔNG GÓC



TƯ DUY MỞ

CÁC BÀI TOÁN KHÓ VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

LaTeX bởi TƯ DUY MỎ

1 Phương pháp vector.

Đây là một phương pháp rất mạnh để xử lý các bài toán có yếu tố vuông góc ví dụ như hình hộp chữ nhật, hình lập phương, khối tứ diện đều. Trước tiên ta cần phải tìm hiểu các kiến thức nền tảng của phương pháp này.

1.1 Cơ sở của phương pháp vector.

1.1.1 Quy tắc hình hộp.

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.1.2 Quy tắc trọng tâm tứ diện.

G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \forall M$

1.1.3 Quy tắc đồng phẳng.

Điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$$

- Cho hai vector không cùng phương khi đó điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
- Nếu ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vector $\vec{d}$ đều có thể phân tích một cách duy nhất dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

1.2 Các dạng toán và phương pháp giải.

DẠNG 1. Chứng minh đẳng thức vector.

Phương pháp giải. Sử dụng quy tắc cộng, quy tắc trừ ba điểm, quy tắc trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ giác, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp,... để biến đổi về này thành về kia.

Bài tập 1. 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$$

2. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB và CD thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho

$$\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$$

Chứng minh với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

DẠNG 2. Ba vector đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng.

Phương pháp giải. Để chứng minh ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau

1. Chứng minh giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng.
2. Phân tích $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ trong đó $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector không cùng phương.

Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau. Điều kiện cần và đủ để điểm $D \in (ABC)$ là với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$ Tính chất trên gọi là tâm tỉ cự trong không gian.

- Bài tập 2.**
1. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi P, Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$ ($k \neq 1$). Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng.
 2. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$ ($x, y \neq 1$). Tìm điều kiện giữa x và y để ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M, N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NC'}$. Chứng minh $MN \parallel (BC'D)$.
 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh $(MGC') \parallel (AB'N)$.
 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính $\frac{SC'}{SC}$.
 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Chứng minh $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.
 7. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm K, E, F . Các mặt phẳng $(BCF), (CDK), (BDE)$ cắt nhau tại M . Đường thẳng AM cắt (KEF) tại N và cắt mặt phẳng (BCD) tại P . Chứng minh $\frac{NP}{NA} = 3\frac{MP}{MA}$.
 8. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 2$) nằm trong (P) và S là một điểm nằm ngoài (P) . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tại các điểm $B_1, B_2, ..., B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SB_2}{SB_2} + ... + \frac{SA_n}{SB_n} = a$. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một điểm cố định.

DẠNG 3. Tính độ dài đoạn thẳng.

Phương pháp giải. Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vector ta sử dụng cơ sở

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau

1. Chọn ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sao cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
2. Phân tích $\overrightarrow{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ Khi đó

$$\begin{aligned} MN &= |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2} \\ &= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2\sum mn|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} \end{aligned}$$

Bài tập 3. 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC' .

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Lấy M thuộc đoạn $A'D$, N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$). Tính MN theo a và x .

Bài tập 4. 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD , biết rằng $AB = CD = a, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

2. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng AB, BC và CD .

3. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD . Chứng minh $AO \perp CD$.

4. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD . Cho biết $JK = \frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB .

5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$. Gọi O là điểm thỏa mãn $OA = OB = OC = OD$ và G là trọng tâm của tam giác ACD , gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE . Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC .

6. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

- Chứng minh $AB \perp CD$.
- Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA . Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x$ ($0 \leq x \leq a$). Chứng minh rằng

- $AC' \perp B'D'$.
- $AC' \perp MN$.

8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ còn P, Q, R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng.
9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .
- Chứng minh $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
 - Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 - Xác định vị trí của M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.
10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.
11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{B'A'D'} = 60^\circ, \widehat{B'A'A} = \widehat{D'A'A} = 120^\circ$.
- Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.
 - Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.
 - Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA' .
12. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

13. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.
14. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$. Chứng minh S, I, J thẳng hàng và $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$.
15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) .
16. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG lần lượt tại các điểm A', B', C', G' , với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$.
17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.
18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC , cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$.
19. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1 . Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

20. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2}$.
21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}$ ($k \neq 0$), $\overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}$, $\overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.
22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.
23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .
24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.
- Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .
 - Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J .
25. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.
- Chứng minh $AD \perp BC$.
 - Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC .
26. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và thỏa mãn điều kiện $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$. Chứng minh $AC \perp B'D'$.
27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD . Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC .
- Chứng minh $MN \perp RP, MN \perp RQ$.
 - Chứng minh $AB \perp CD$.
29. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.
- Chứng minh các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.
 - Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD .
30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB vuông cân tại A , M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .
- Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.
 - Đặt $AM = x$. Tính diện tích của $MNPQ$ theo a và x ?

Bài tập 5. [Các bài toán khó]

1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AG và cắt các cạnh AB, AC, AD tại các điểm B', C', D' khác A . Gọi h_A, h_B, h_C lần lượt là khoảng cách từ A, B, C, D đến mặt phẳng (α) . Chứng minh rằng $h_B^2 + h_C^2 + h_D^2 \geq 3h_A^2$.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Mặt phẳng (P) thay đổi qua I , cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Biết rằng $SA = SB = \sqrt{2}, SC = \sqrt{7}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.A'B'C'$.
3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt BCD, ACD, ABD, ABC . Chứng minh rằng

$$AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4 \leq \frac{16R}{3}$$

4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , hai điểm M, N chạy tương ứng trên đoạn AB và CD sao cho $BM = DN$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của MN .
5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a, SB = 3a, SC = 4a, \widehat{BSA} = \widehat{SAC} = 90^\circ, \widehat{BSC} = 120^\circ$. Hai điểm M, N thỏa mãn $3\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SN}$. Cho 2 điểm E và F thay đổi, lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và SC . Tìm giá trị nhỏ nhất của EF .
6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1, SB = 2, SC = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I và SG cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$.
7. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi M là một điểm bất kì trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA.h_a + MB.h_b + MC.h_c$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C .
8. Cho tam giác ABC , M là điểm trong tam giác ABC . Các đường thẳng đi qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt các mặt BCD, ACD, ABD lần lượt tại A', B', C' . Tìm điểm M sao cho $S = MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị nhỏ nhất.
9. Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Đặt $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{yOz} = \beta, \widehat{zOx} = \gamma$. Lấy các điểm A, B, C lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a > 0$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$ và I là trung điểm của đoạn thẳng AM . Tính độ dài đoạn thẳng OI theo a trong trường hợp $\alpha = \gamma = 60^\circ, \beta = 90^\circ$. Chứng minh rằng $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$.
10. Cho tứ diện $ABCD$ có góc tam diện vuông tại $A, AB = AC = AD = a$. Tìm điểm M trong không gian để $T = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất?
11. [Khó] Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Các điểm P, Q di động trong không gian thỏa mãn điều kiện $PA = QB, PB = QC, PC = QD, PD = QA$. Tìm khoảng cách lớn nhất từ A với mặt phẳng trung trực của PQ .
12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Các điểm H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, C'D'$. Điểm M thuộc cạnh AB' , điểm N thuộc đoạn BC' sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 45° .
- Chứng minh rằng $AK \perp BH$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của MN .
13. [Khó] Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = a, DB = b, DC = c, AB = c', AC = b', BC = a'$. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng

$$R^2 \geq \frac{1}{4} [(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

14. **[Khó]** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = DC, BC = DA, AC = BD$, với M bất kì, chứng minh rằng $MA + MB + MC + MD \geq 4R$, trong đó R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
15. **[Khó]** Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G và bán kính mặt cầu ngoại tiếp bằng R . Các đường thẳng AG, BG, CG, DG lần lượt cắt các mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng $GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD \leq GA' \cdot GB' \cdot GC' \cdot GD'$.
16. Cho $AB.A_1B_1C_1$ là một hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Xét các đoạn thẳng có hai đầu lần lượt nằm trên 2 đường chéo BC_1 và CA_1 của 2 mặt bên lăng trụ và song song với mặt phẳng (ABB_1A_1) . Tính đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn như thế.
17. Cho tứ diện $O.ABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, P là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2}$.
18. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa đáy. Với M là một điểm trên cạnh AB , tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1 .
19. Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AB = CD, BC = AD, AC = BD$ và một điểm X thay đổi trong không gian. Tìm vị trí của điểm X sao cho tổng $XA + XB + XC + XD$ đạt giá trị nhỏ nhất.
20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh bằng 1, các góc tại đỉnh A bằng 60° , gọi M, N lần lượt là các điểm trên các đoạn thẳng AD_1, BD sao cho $AM = DN = x (0 < x < 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .
21. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm A tạo với mặt phẳng (P) góc 60° . Gọi B là một điểm trên đường thẳng d khác A . Gọi M là điểm di động trên mặt phẳng (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{AM + AB}{BM}$.

2 Ứng dụng của phương pháp Vector trong một số bài toán đặc biệt.

2.0.1 Góc tạo bởi hai cạnh bất kì của một tứ diện.

Cho tứ diện $ABCD$, khi đó góc giữa hai vector tạo bởi cặp cạnh đối $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ được xác định bởi công thức

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot CD}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})}{AB \cdot CD} = \frac{-AB \cdot AC \cdot \cos BAC + AB \cdot AD \cdot \cos BAD}{AB \cdot CD} \\ &= \frac{-AB \cdot AC \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} + AB \cdot AD \cdot \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD}}{AB \cdot CD} \\ &= \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot CD} \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.
Từ kết quả này ta có 2 hệ quả như sau.

□

1. Nếu là góc giữa hai đường thẳng thì $\cos(AB, CD) = \frac{|AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2|}{2 \cdot AB \cdot CD}$.
2. Nếu ta có $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow \cos(AB, CD) = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$.

2.0.2 Bổ đề về đường trung bình.

Nếu đoạn MN là đường trung bình của cặp cạnh đối nhau AB và CD thì ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Từ kết quả này mà ta suy ra được các kết quả sau

1. Các cặp vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ và các cặp vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng với nhau.
2. Khi đó độ dài đường trung bình được tính theo công thức

$$MN^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2 + 2AC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}))$$

3. Khi ta thay công thức 1 vào thì ta được

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2}$$

4. Đặc biệt khi tứ diện $ABCD$ có $AC = BD, AD = BC$ thì đường trung bình MN của cặp cạnh AB và CD chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD ; khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là

$$d(AB, CD) = MN = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2}$$

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = 8, AC = CD = 6, AD = BD = 7$. Tính góc giữa 2 vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và góc giữa 2 đường thẳng AC, BD .

Lời giải.

Áp dụng các công thức ở trên ta có

1. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot CD} = \frac{7^2 + 8^2 - 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{7}{24}$.
2. $\cos(AC, BD) = \frac{|AB^2 + DC^2 - AD^2 - BC^2|}{2 \cdot AC \cdot BD} = \frac{|8^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2|}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{13}{84}$.

Bài toán được giải quyết. □

Bài tập tương tự.

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 8, AC = 6, AD \perp BC$. Tính độ dài cạnh BD ?
2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 6, AC = 6, AD \perp BC$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $AC + 2BD$?
3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = 6, AD = 7, AC \perp BD$. Tính độ dài cạnh CD ?
4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8, AC \perp BD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = AD + 3BC$$

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 8, BD = 6$ và góc tạo bởi 2 vector $(\vec{AC}, \vec{BD}) = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD , P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy tính độ dài các đường trung bình MN và PQ của tứ diện $ABCD$?

Lời giải.

Áp dụng công thức ở trên ta có

$$MN^2 = \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{BD})^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2 + 2AC \cdot BD \cdot \cos(\vec{AC}, \vec{BD})) \Rightarrow MN = \sqrt{37}$$

Tương tự với ý sau, ta tính được $PQ = \sqrt{13}$. □

Bài tập tương tự.

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 8, BD = 6$ và góc tạo bởi 2 vector $(\vec{AC}, \vec{BD}) = \alpha$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Biết rằng $MN = 4$. Xác định góc α ?
2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 8, BD = 6$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD , P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 3MN + 2PQ$
3. Cho tứ diện $ABCD$ có ba đường trung bình MN, PQ, RS thỏa mãn $MN^2 + PQ^2 + RS^2 = 100$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = AB + BC + (AC + CD)\sqrt{2} + (AD + BD)\sqrt{3}$.
4. Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau $AC = BD = 8, AD = BC$, góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BD là 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

2.0.3 Ứng dụng trong một số bài toán cực trị.

Câu 1. Tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (O, R) . Gọi $m_a + m_b + m_c + m_d$ là độ dài các trọng tuyến vẽ từ A, B, C, D . Chứng minh rằng $R \geq \frac{2}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tứ diện, ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ và đồng thời

$$GA = \frac{3}{4}m_a, GB = \frac{3}{4}m_b, GC = \frac{3}{4}m_c, GD = \frac{3}{4}m_d$$

Ta có

$$\begin{aligned} 4R^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 &= 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\quad + 2\vec{OG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) \\ &= 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \leq 4R^2 \\ &\Rightarrow 4R^2 \geq \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \geq \frac{1}{4}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Câu 2. Trong các tứ diện nội tiếp hình cầu có bán kính $R = 1$, tìm tứ diện có diện tích toàn phần lớn nhất.

Lời giải.

Trong mọi tam giác a, b, c , diện tích s thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Áp dụng lần lượt vào các mặt tứ diện $ABCD$ rồi cộng lại thì được

$$2(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2) \geq 4\sqrt{3}S_{tp}$$

Gọi O, G lần lượt là tâm và trọng tâm tứ diện $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA})^2 + (\vec{OC} - \vec{OA})^2 + (\vec{OD} - \vec{OA})^2 + (\vec{OC} - \vec{OB})^2 + (\vec{OD} - \vec{OB})^2 + (\vec{OD} - \vec{OC})^2 \end{aligned}$$

Như vậy ta được

$$16R^2 - (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})^2 = 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2 = 16$$

Do đó ta thu được $S_{tp} \leq \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = BC = CD = AC = AD = BD$ và $O \equiv G$.

Do đó $ABCD$ là tứ diện đều. □

Câu 3. Cho r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp của một tứ diện có thể tích là V .

Chứng minh rằng $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$, từ đó suy ra $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.

Lời giải.

Gọi O, G lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Gọi $BC = a, AD = a', CA = b, BD = b', AB = c, CD = c'$. Gọi $S_a, S_b, S_c, S_d, S_{tp}$ lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và diện tích toàn phần của tứ diện. Ta có

$$AB^2 = (\vec{OB} - \vec{OA})^2 = 2R^2 - 2\vec{OA}\vec{OB} = 2R^2 - AB^2$$

Mặt khác ta lại có

$$4\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$$

Suy ra $16OG^2 = 4R^2 + \sum (2R^2 - AB)$ với $\sum (2R^2 - AB)$ là tổng theo 6 cạnh, ta có

$$16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 \leq 16R^2$$

Trong tam giác ABC ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Tương tự cho các S_a, S_b, S_c rồi cộng lại ta được

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2) \geq 4\sqrt{3} \cdot S_{tp}$$

Do đó $8R^2 \geq \sqrt{3}S_{tp}$, mà $S_{tp} = \frac{3V}{r}$ nên $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$.

Dấu bằng xảy ra khi tứ diện $ABCD$ đều Xét phép vị tự tâm G tỉ số $k = \frac{1}{3}$ thì tứ diện $ABCD$ biến thành tứ diện có 4 đỉnh là 4 trọng tâm $A'B'C'D'$ của 4 mặt và $R = 3R'$, vì $R' > r \Rightarrow R > 3r$, như vậy có điều phải chứng minh. □

Câu 4. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có G là trọng tâm, gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trên. Các đường thẳng $GA_1GA_2GA_3GA_4$ cắt (S) tại $A_1'A_2'A_3'A_4'$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_1'} \leq \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}$$

Lời giải.

Gọi O và R là tâm và bán kính của mặt cầu (S) , ta có

$$GA_iGA_i' = R^2 - OG^2 \Rightarrow GA_i = \frac{R^2 - OG^2}{GA_i'} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 GA_i = (R^2 - OG^2) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i'}$$

Bất đẳng thức trên tương đương

$$\sum_{i=1}^4 GA_i \leq (R^2 - OG^2) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}$$

Ta có

$$GA_i^2 = OA_i^2 + OG^2 + 2\vec{OA_i}\vec{OG} = R^2 + OG^2 + 2\vec{OG}(\vec{GA_i} - \vec{GO})$$

Từ đây suy ra được

$$\sum_{i=1}^4 GA_i^2 = 4(R^2 - OG^2)^2 = \sum_{i=1}^n GA_i^2$$

Và đồng thời $4 \sum_{i=1}^4 GA_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^4 GA_i \right)^2$. Do đó ta có

$$\sum_{i=1}^4 GA_i \leq \frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^4 GA_i \right)^2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 GA_i^2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 GA_i \leq (R^2 - OG^2) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 5. Tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CA đều nhỏ hơn DA, DB, DC . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của PD , trong đó P là điểm thỏa điều kiện $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } O \text{ là điểm sao cho } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OD} = \vec{0} \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 &\Leftrightarrow (\vec{OA} - \vec{OP})^2 + (\vec{OB} - \vec{OP})^2 + (\vec{OC} - \vec{OP})^2 - (\vec{OD} - \vec{OP})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2OP^2 - 2\vec{OP}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OD}) \\ &= OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2) \\ &\Leftrightarrow 2OP^2 = OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Bình phương 2 vế của (1), ta suy ra

$$2OD^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2) = DA^2 + DB^2 + DC^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2) \quad (3)$$

Đặt $DA^2 + DB^2 + DC^2 = x, AB^2 + BC^2 + CA^2 = y$.

Từ (2) và (3) suy ra $OP^2 = \frac{x-y}{4} > 0$ do giả thiết.

Do đó P thuộc mặt cầu (O) tâm O bán kính $\frac{\sqrt{x-y}}{2}$.

Từ (1) ta có $OD^2 = \frac{3x-y}{4}$, suy ra D nằm ngoài (O) .

Đường thẳng OD cắt (O) tại P_1, P_2 ($DP_1 < DP_2$).

Ta có $DP \geq DO - PO = DO - P_1O = DP_1$, dấu bằng khi $P \equiv P_1$ và $DP \leq DO + PO = DO + P_2O = DP_2$ dấu bằng khi $P \equiv P_2$. Vậy $\min PD = DP_1, \max PD = DP_2$. $\square$

Câu 6. Tứ diện $ABCD$ gần đều. Tìm điểm M sao cho

$$f(M) = MA^{2004} + MB^{2004} + MC^{2004} + MD^{2004}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện, vì tứ diện gần đều nên G cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp, do vậy $GA = GB = GC = GD$. Ta có bất đẳng thức với n nguyên dương

$$a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n, c^n + d^n \geq 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n, \forall a, b, c, d > 0$$

Bất đẳng thức trên tương đương

$$a^n + b^n + c^n + d^n \geq \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n \right] \geq 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n$$

Lấy $a = MA^2, b = MB^2, c = MC^2, d = MD^2, n = 1002$, ta có

$$f(M) \geq 4^{1-n}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2)^n$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \end{aligned}$$

Ta có $f(M)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) \min \\ MA = MB = MC = MD \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv G$$

Vậy $f(M)$ nhỏ nhất khi M trùng trọng tâm G . $\square$

3 Tuyển tập các bài toán trắc nghiệm khó.

Các bài toán sau đây chủ yếu lấy từ các đề thi thử trên cả nước, bên cạnh đó một số bài có nguồn gốc từ các nhóm toán học trên facebook.

Câu 1. Cho hình trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ là

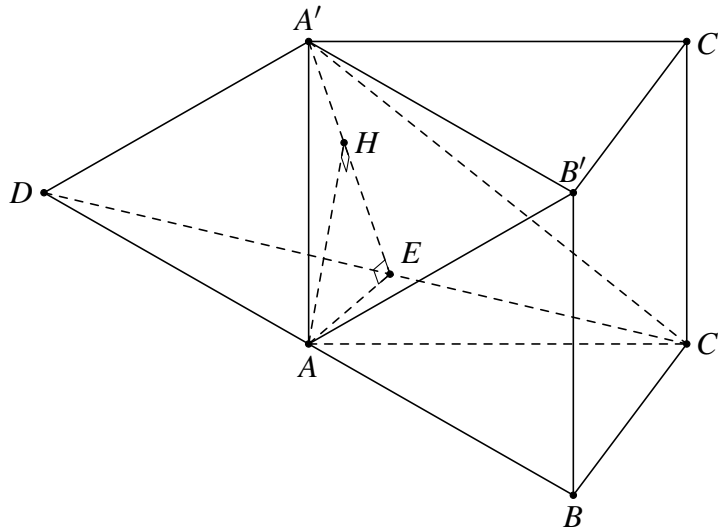
(A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(B) $d = \frac{2\sqrt{17}}{17}a$.

(C) $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

(D) $d = \frac{a\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng với B qua $A \Rightarrow A'D \parallel AB'$.

Suy ra $AB' \parallel (A'CD) \Rightarrow d(AB', A'C) = d(A, (A'CD))$.

Kẻ AE vuông góc với $CD (E \in CD) \Rightarrow AE = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Kẻ AH vuông góc với $A'E$, suy ra $AH \perp (A'CD) \Rightarrow d(A, (A'CD)) = AH$.

Trong tam giác $A'AE$ vuông tại A , có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \Leftrightarrow d = \frac{2\sqrt{17}}{17}a.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° . Tính khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng $AB'C'$ theo a .

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

(B) $\frac{a\sqrt{5}}{14}$.

(C) $\frac{a\sqrt{35}}{21}$.

(D) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

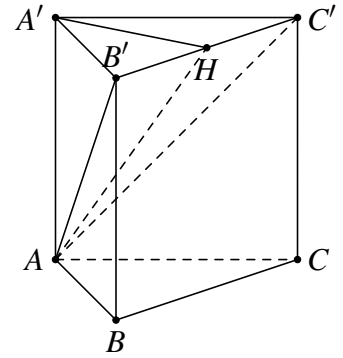
Lời giải.

Gọi H là trung điểm $B'C'$ suy ra $A'H \perp B'C'$. Do đó góc giữa $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc $\widehat{AHA'} = 60^\circ$.

$\triangle A'B'C'$ là tam giác cân, $A'B' = A'C' = a$, $\widehat{B'A'C'} = 120^\circ$ nên $A'H = \frac{a}{2}$ suy ra $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC \parallel (AB'C')$ nên $d[BC, (AB'C')] = d[B, (AB'C')] = d[A', (AB'C')]$ vì $A'B$ cắt $(AB'C')$ tại trung điểm của $A'B$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A' lên AH , suy ra $A'I \perp (AB'C')$ (vì $B'C' \perp (AA'H)$).

$$\text{Ta có } A'I = \frac{AA' \cdot A'H}{\sqrt{A'A^2 + A'H^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án (A)



Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bằng

(A) $4MG^2 + 2(a^2 + b^2) + 4c^2$.

(B) $4MG^2 + 2c^2$.

(C) $4MG^2 + 2b^2$.

(D) $4MG^2 + 2a^2$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tứ diện nên G là trung điểm của $EF \Rightarrow \vec{GE} + \vec{GF} = \vec{0}$.

Ta có $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GE}$ và $\vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GF}$.

Suy ra $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

Đặt $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

$$\begin{aligned} P &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 + \vec{MD}^2 \\ &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 + (\vec{MG} + \vec{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

Xét tam giác ABG có GE là đường trung tuyến

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 = 2GE^2 + \frac{AB^2}{2} = 2c^2 + \frac{(2a)^2}{2} = 2c^2 + 2a^2$$

Xét tam giác CDG có GF là đường trung tuyến

$$\Rightarrow GC^2 + GD^2 = 2GF^2 + \frac{CD^2}{2} = 2c^2 + \frac{(2b)^2}{2} = 2c^2 + 2b^2$$

Suy ra $P = 4MG^2 + 2(a^2 + b^2) + 4c^2$.

Chọn đáp án (A)



Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC = \sqrt{3}, CD' = 2, D'A = \sqrt{5}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(A'B'C'D')$ là α , $\tan \alpha$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.

Để thấy D là hình chiếu vuông góc của D' trên $(ABCD)$. Suy ra $\triangle ACD$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle ACD'$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó, $\cos \alpha = \frac{S_{ACD}}{S_{ACD'}}$.

Ta có
$$\begin{cases} DA^2 + DC^2 = 3 \\ DC^2 + DD'^2 = 4 \\ DA^2 + DD'^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA^2 = 2 \\ DC^2 = 1 \\ DD'^2 = 3 \end{cases}$$

Diện tích tam giác ACD là $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dùng công thức Hê-rông ta tính được diện tích tam giác ACD' là $S_{ACD'} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{11}} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{9}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC và α là góc giữa MN với (ABC) . Tính $\cos \alpha$.

(A) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{11}}{11}$. (B) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. (C) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$. (D) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$ mà ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Ta có

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD \text{ và } \begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp SD. \text{ Vậy } SD \perp (ABCD).$$

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$.

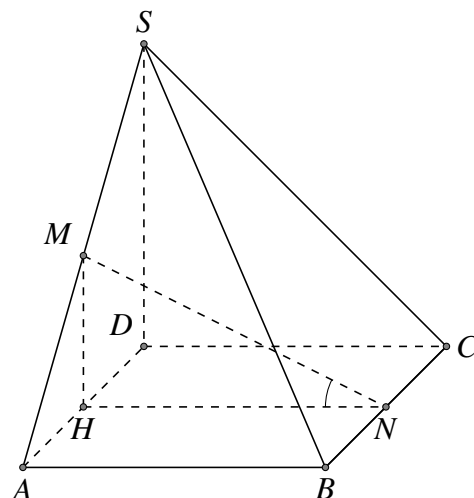
Vậy góc giữa đường thẳng MN với (ABC) là góc $\widehat{MNH} = \alpha$.

Xét tam giác vuông MNH có

$$\cos \alpha = \frac{HN}{MN} = \frac{HN}{\sqrt{HN^2 + MH^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh C , $AB = AA' = a$ và $AC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MAC) .

(A) $\frac{a\sqrt{37}}{7}$. (B) $\frac{a\sqrt{35}}{14}$. (C) $\frac{a\sqrt{35}}{7}$. (D) $\frac{a\sqrt{37}}{14}$.

Lời giải.

Gọi $Q = MC \cap BC'$.

Gọi P và N lần lượt là hình chiếu của B và C' lên mặt phẳng (MAC)

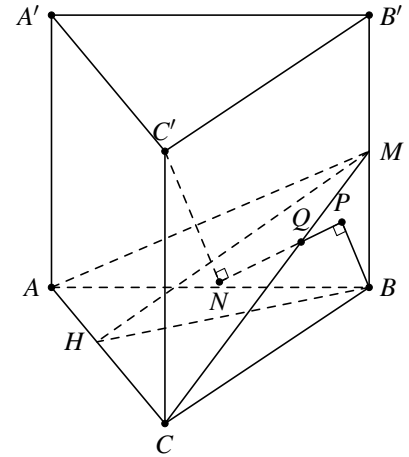
Ta có

$$\frac{BP}{C'N} = \frac{BQ}{QC'} = \frac{BM}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(C', (MAC)) = 2d(B, (MAC)).$$

Kẻ $BH \perp AC$. Có $(MAC) \perp (BHM) = HM$.

$$\text{Từ } B, \text{ kẻ } BK \perp HM \Rightarrow d(B, (MAC)) = BK = \frac{a\sqrt{35}}{14}.$$

$$\Rightarrow d(C', (MAC)) = \frac{a\sqrt{35}}{7}.$$



Chọn đáp án (C)

□

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

(A) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

(B) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

(C) $2a$.

(D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dựng điểm D sao cho $ACBD$ là hình bình hành.

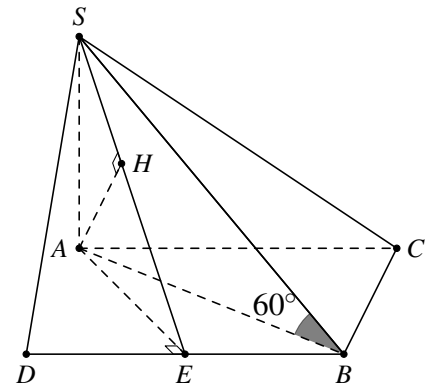
Khi đó, $AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.

Suy ra $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $SA \cap (ABC) = A$ nên góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Vì tam giác ABC đều nên ABD cũng là tam giác đều.



Gọi E là trung điểm của BD thì $AE \perp BD$ và $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAE)$.

Dựng $AH \perp SE, H \in SE$.

Khi đó, $BD \perp AH$. Như thế $AH \perp (SBD)$.

$$\text{Tam giác } SAE \text{ vuông tại } A \text{ có } AH \text{ là đường cao nên } AH = \sqrt{\frac{AE^2 \cdot SA^2}{AE^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm O của cạnh AB . Số đo của góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ là 60° . Gọi I là trung điểm cạnh $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CI và AB' bằng

Ⓐ $\frac{a}{2}$.

Ⓑ $\frac{a}{4}$.

Ⓒ $\frac{a\sqrt{7}}{14}$.

Ⓓ $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ là góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'AB} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow CI \parallel B'M$

$\Rightarrow CI \parallel (AB'M)$

$\Rightarrow d(CI, AB') = d(CI, AB'M) = d(C, (AB'M)) = d(B, (AB'M)) = 2 \cdot d(O, (AB'M))$.

Gọi E là trung điểm AM , F là giao điểm của AB' và $A'O$.

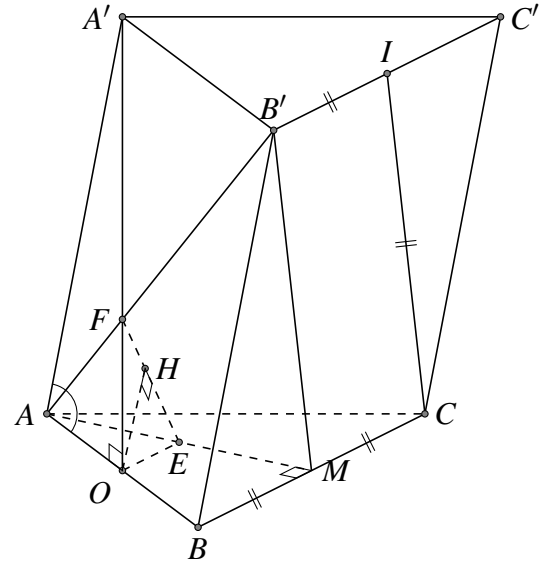
Kẻ $OH \perp EF$ tại H .

Ta có

- $\begin{cases} AM \perp OE \\ AM \perp OF \end{cases} \Rightarrow AM \perp (OEF).$
- $\begin{cases} OH \perp EF \\ OH \perp AM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (AB'M).$
 $\Rightarrow d(O, (AB'M)) = OH.$
- $\triangle AA'B$ đều (do $\widehat{A'AB} = 60^\circ$, $A'O \perp AB$) nên $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OF = \frac{A'O}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
- $OE = \frac{BC}{4} = \frac{a}{4}$.
- $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OF^2} = \frac{28}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{7}}{14}.$

Vậy $d(CI, AB') = 2OH = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án Ⓓ



□

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

Ⓐ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ⓑ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ⓒ $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC .

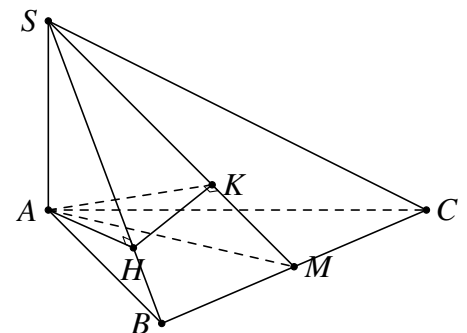
Kẻ $AK \perp SM$ tại K .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM).$

Lại có $AK \perp SM = (SBC) \cap (SAM)$

Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$. Kẻ $AH \perp SB$ tại H .

Suy ra $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.



Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ AH \perp SB \\ HK \perp SB \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SBC)) = (AH, HK) = \widehat{AHK}.$

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ có } AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAM \text{ có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHK \text{ vuông tại } K \text{ có } \sin \widehat{AHK} = \frac{AK}{AH} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{AHK} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{AHK}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \cos((SAB), (SBC)) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

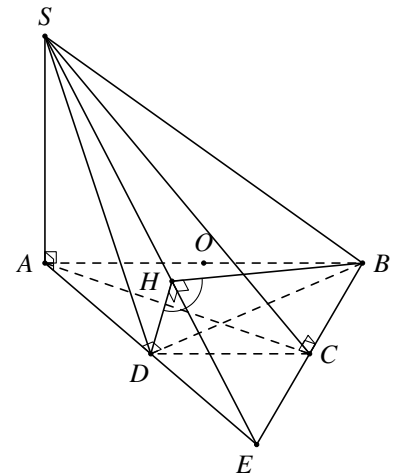
Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AB .

Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB nên ta có $OA = OB = OC = OD = a$. Khi đó suy ra $AD = BC = CD = a$, $BD \perp AD$, $AC \perp BC$.

Gọi E là giao điểm của AD và BC , H là hình chiếu vuông góc của B trên SE , ta có

- $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow SE \perp BD.$
- $\begin{cases} SE \perp BD \\ SE \perp BH \end{cases} \Rightarrow SE \perp (HBD) \Rightarrow HD \perp SE.$



Suy ra $((SAD), (SBC)) = (DH, BH)$.

Ta có $\triangle ABE$ đều cạnh $2a$, $\triangle SAE$ vuông tại A nên $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

Do $\triangle SAE \sim \triangle DHE$ nên $DH = \frac{DE \cdot SA}{SE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Tam giác ABD vuông tại D , có $AD = a$, $AB = 2a$ suy ra $BD = a\sqrt{3}$. Tương tự $AC = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAC vuông tại S , có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Trong tam giác SBE , có $SC \cdot BE = BH \cdot SE \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6} \cdot 2a}{a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Trong tam giác HBD có $\cos \widehat{BHD} = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HD \cdot BD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\cos((SAD), (SBC)) = \cos(DH, BH) = \cos \widehat{BHD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$ thì ta có khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

(A) $\alpha = 30^\circ$.

(B) $\alpha = 90^\circ$.

(C) $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

(D) $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.

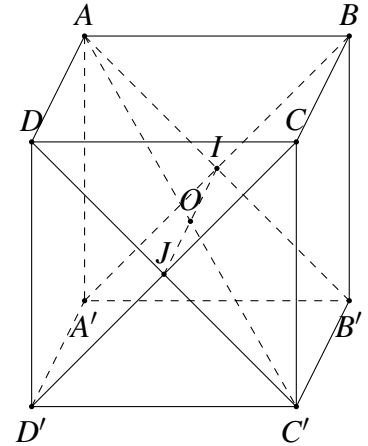
Để thấy $AB' \perp (A'BCD')$ và $C'D \perp (A'BCD')$.

Khi đó IJ là hình chiếu của AC' lên mặt phẳng $(A'BCD')$.

$$\Rightarrow (AC', (A'BCD')) = (AC', IJ) = \widehat{AOI}.$$

Gọi cạnh hình lập phương là a khi đó $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IO = \frac{a}{2}$.

$$\text{Xét } \triangle AOI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \widehat{AOI} = \frac{AI}{IO} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (C)



Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh $SA = a$ vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD , α là góc giữa đường thẳng MN và (SAC) . Giá trị $\tan \alpha$ là

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

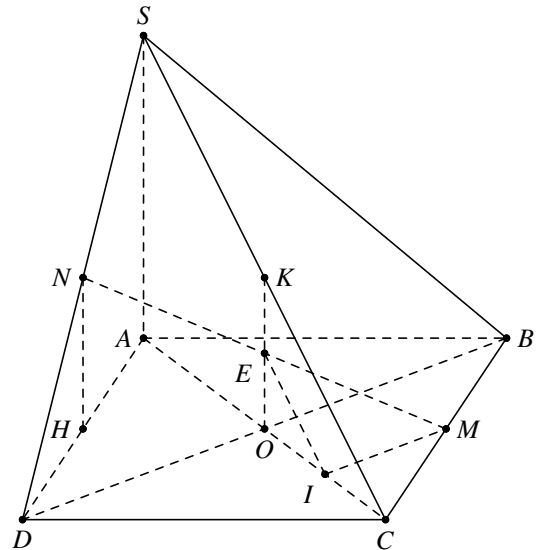
Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, SC . Khi đó $NK \parallel MH$.

Khi đó $MN \subset (MHNK)$ và giao tuyến của $(MHNK)$ với (SAC) là OK (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

Gọi $E = MN \cap OK$ (trong mặt phẳng $(MHNK)$), hay giao điểm của MN với (SAC) là E .

Gọi I là trung điểm OC , suy ra $MI \perp OC$. Lại có $SA \perp MI$ nên $MI \perp (SAC)$.

Khi đó EI là hình chiếu của MN lên (SAC) . Do đó góc giữa MN với (SAC) cũng chính là góc giữa MN với EI chính là góc $\widehat{MEI}$ (vì tam giác MIE vuông tại I).



$$\text{Ta có } ME = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \sqrt{MH^2 + NH^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{và } MI = \frac{1}{2} \cdot OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \text{ suy ra } EI = \sqrt{ME^2 - MI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{MI}{EI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

(A) 30° .

(B) 90° .

(C) 45° .

(D) 60° .

Lời giải.

Vẽ $DE \perp SC$ tại E .

Vì các tam giác SBC và SDC là các tam giác vuông có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $BE \perp SC$ và $BE = DE$.

$$\triangle SBC \text{ vuông tại } B \text{ và } BE \text{ là đường cao nên } \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\Rightarrow BE^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SC = (SCD) \cap (SBC) \\ DE \perp SC, DE \subset (SCD) \\ BE \perp SC, BE \subset (SBC) \end{cases}$$

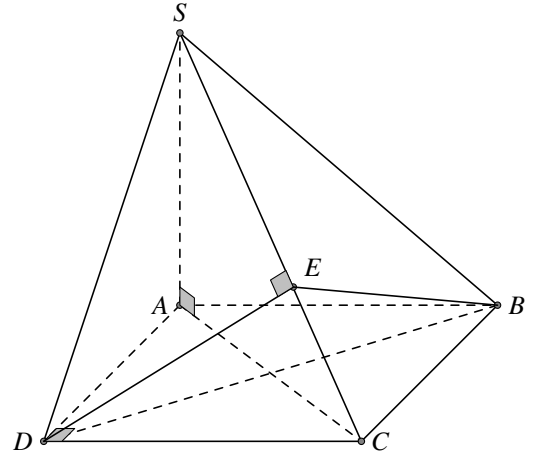
Vậy $((SCD), (SBC)) = (DE, BE)$.

* Tính $\widehat{DEB}$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{DEB} = \frac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2 \cdot BE \cdot DE} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DEB} = 120^\circ.$$

Khi đó $(DE, BE) = 60^\circ$. Vậy $((SCD), (SBC)) = 60^\circ$.

Chọn đáp án (D)

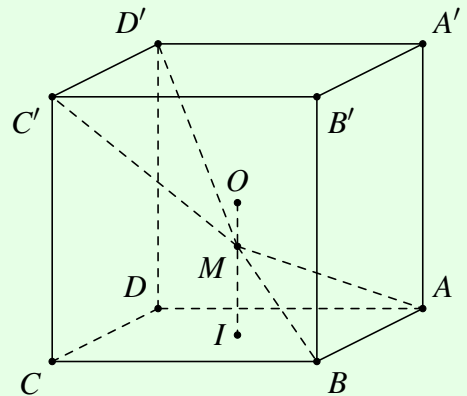


□

Câu 14.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc đoạn OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) .

(A) $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. (B) $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. (C) $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. (D) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \alpha = ((MC'D'), (A'B'C'D')) \\ \beta = ((MAB), (ABCD)) \end{cases}$$

Khi đó, do $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng $|\alpha - \beta|$.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và $C'D'$.

Gọi I' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

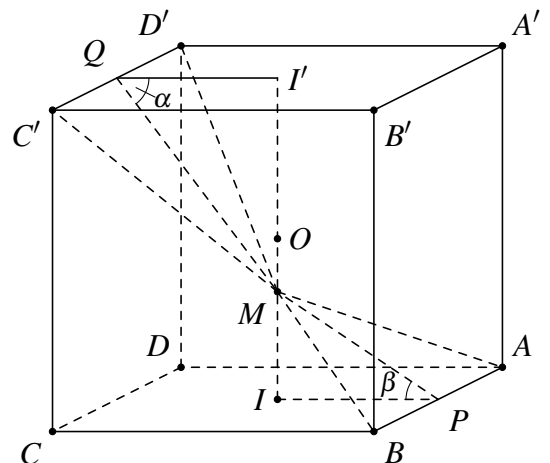
Ta giả sử cạnh hình lập phương bằng 6. Khi đó,

$$QI' = 3, I'M = 4 \Rightarrow QM = 5.$$

$$PI = 3, IM = 2 \Rightarrow PM = \sqrt{13}.$$

Ta có

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{QI'}{QM} = \frac{3}{5} \\ \cos \beta = \frac{PI}{PM} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$



Suy ra

$$\cos|\alpha - \beta| = |\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của CD . Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

- (A) $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$. (B) $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. (C) $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. (D) $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm tam giác ABD . Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy nên $SI \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AM . Khi đó $BH \perp (SAM)$ hay $d[B, (SAM)] = BH$.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin\widehat{ABC} \Leftrightarrow \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, suy

$$\text{ra } \cos\widehat{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2 \cdot AD \cdot DM \cdot \cos\widehat{ADC} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Ta có $S_{BCM} = S_{ADM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Hay $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = a^2 = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AM$ suy ra $AM = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác ABD . Theo giả thiết tứ diện $SABD$ đều

nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $DO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

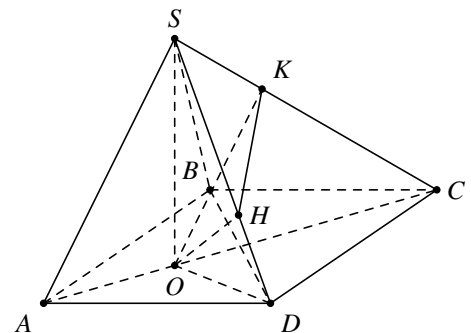
Gọi H là hình chiếu của O trên SD và K là điểm trên cạnh SC sao cho $CK = 2SK$. Khi đó, do $DO \perp CD$ nên $CD \perp (SOD)$, suy

ra $DO \perp OH$, do đó $OH \perp (SCD)$. Lại có $\frac{CK}{CS} = \frac{2}{3} = \frac{CO}{AO}$ nên

$OK \parallel SA$ và $OK = \frac{2}{3}SA = \frac{2a}{3}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \sin(SA, (SCD)) &= \sin(OK, (SCD)) = \sin\widehat{OKH} \\ &= \frac{OH}{OK} = \frac{SO \cdot OD}{OK\sqrt{SO^2 + OD^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $(SA, (SCD)) = 45^\circ$.



Chọn đáp án (B)



Câu 17. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách giữa MN và AC' là

(A) $\frac{a}{3}$.

(B) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

(C) $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

(D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $\widehat{C'BC}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{C'BC} = \alpha$; Do $BA \perp (AA'C'C)$ nên $\widehat{AC'B}$ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C) \Rightarrow \widehat{AC'B} = 30^\circ$.

Gọi P là trung điểm của AA' , $I = NC \cap AC'$.

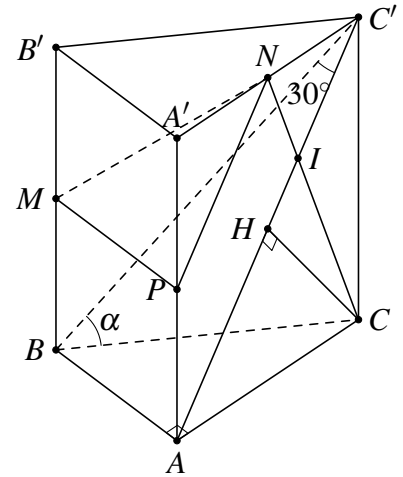
Có $(MNP) \parallel (ABC')$

$\Rightarrow MN \parallel (ABC') \Rightarrow d(MN, AC') = d(MN, (ABC')) = d(N, (ABC'))$.

Có $NC \cap (ABC') = I \Rightarrow \frac{d(N, (ABC'))}{d(C, (ABC'))} = \frac{NI}{CI} = \frac{NC'}{AC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(N, (ABC')) = \frac{1}{2} \cdot d(C, (ABC'))$.

Có $BA \perp (AA'C'C) \Rightarrow (ABC') \perp (AA'C'C)$. Kẻ $CH \perp AC' \Rightarrow CH \perp (ABC')$. Vậy CH là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') .



Đặt $CC' = x (x > 0)$. Xét $\triangle BCC'$ có $BC' = \frac{CC'}{\sin \alpha} = \frac{4x}{\sqrt{6}}$;

Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{3a^2 + x^2}$.

Xét $\triangle ABC'$ vuông tại A có $\cos 30^\circ = \frac{AC'}{BC'} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2}}{4x} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2$.

Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có CH là đường cao nên $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d(N, (ABC')) = \frac{1}{2}CH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

(A) $\frac{a\sqrt{6}}{7}$.

(B) $\frac{a\sqrt{42}}{3}$.

(C) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.

(D) $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Lời giải.

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ$. Ta có

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

và

$$SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{21}}{3}a.$$

Dựng qua A đường thẳng d song song với BC ; $HE \perp d, E \in d$, $HK \perp SE, K \in SE$.

$\Rightarrow d(H, (SAE)) = HK$.

Do tam giác đều cạnh a nên $AH = \frac{2}{3}a$, $\widehat{HAE} = 60^\circ$. Khi đó:

$$HE = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

và

$$HK = \sqrt{\frac{HE^2 \cdot HS^2}{HE^2 + HS^2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}a.$$

Do đó

$$\frac{d(B, (SAE))}{d(H, (SAE))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SAE)) = \frac{3}{2}d(H, (SAE)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}a = \frac{\sqrt{42}}{8}a.$$

Mà $d(BC, SA) = d(B, (SAE))$. Vậy $d(BC, SA) = \frac{\sqrt{42}}{8}a$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

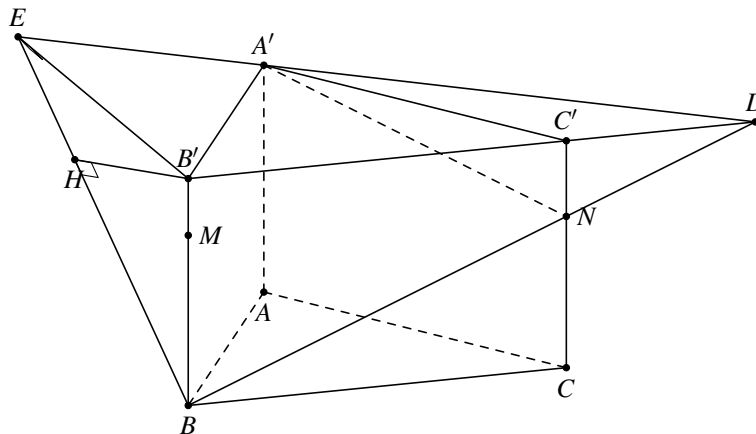
(A) $\frac{9\sqrt{138}}{184}$.

(B) $\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$.

(C) $\frac{9\sqrt{138}}{46}$.

(D) $\frac{3\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ = 7$. Suy ra $BC = \sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos \widehat{A'B'C'} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Gọi $D = BN \cap B'C'$, suy ra $\frac{DC'}{DB'} = \frac{C'N}{BB'} = \frac{1}{3}$, nên $DB' = \frac{3}{2}B'C' = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Từ đó ta có $A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2 \cdot A'B' \cdot B'D \cos \widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{43}{4}$. Suy ra

$$A'D = \frac{\sqrt{43}}{2}.$$

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$, suy ra $B'H \perp (A'BN)$. Do đó $d(B', (A'BN)) = B'H$.

$$\text{Từ } \cos \widehat{A'B'C'} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \widehat{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Do đó } S_{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'D \cdot \sin \widehat{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

$$\text{Từ } BM = 3B'M \text{ suy ra } d(M, (A'BN)) = \frac{3}{4}d(B', (A'BN)) = \frac{3}{4} \cdot B'H = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là 4π . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần với giá trị nào nhất sau đây?

(A) $\frac{2}{7}$ dm.

(B) $\frac{6}{7}$ dm.

(C) $\frac{4}{7}$ dm.

(D) $\frac{3}{7}$ dm.

Lời giải.

Gọi $x > 0$ là cạnh của hình vuông $ABCD$ và H là trung điểm cạnh AD . Do ΔSAD đều nên $SH \perp AD$. Mặt khác $(SAD) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AD nên

$$SH \perp (ABCD). \text{ Ta có } SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm ΔSAD thì O, G lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và tam giác SAD , đồng thời d_1, d_2 lần lượt là 2 trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và tam giác SAD (d_1 qua O và song song SH , d_1 qua G và song song OH).

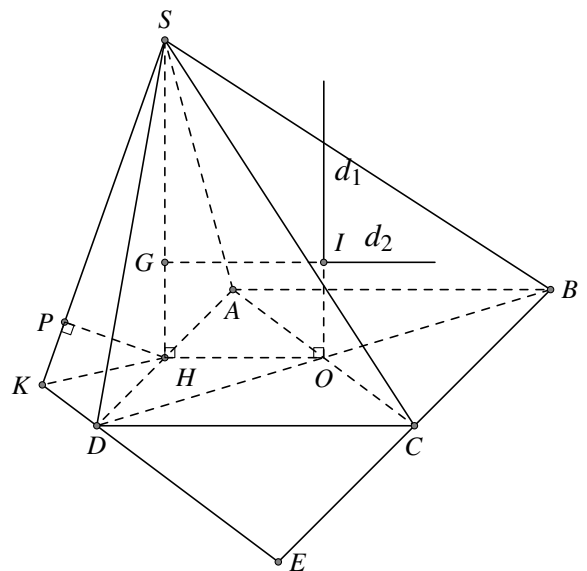
$\Rightarrow I = d_1 \cap d_2$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

$$\Rightarrow R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2}.$$

$$\text{Ta lại có } S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 1 = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ dm.}$$

Dựng hình bình hành $ADEC$.

Kẻ $HK \perp ED$ và $HP \perp SK \Rightarrow HP \perp (SED)$.



Ta có $AC \parallel (SED)$.

$$\Rightarrow d(AC; SD) = d(AC; (SED)) = d(A; (SED)) = 2d(H; (SED)) = 2HP.$$

Do ΔSHK vuông tại H nên $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{KH^2} \Rightarrow HP = \frac{3}{7} \text{ dm}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .

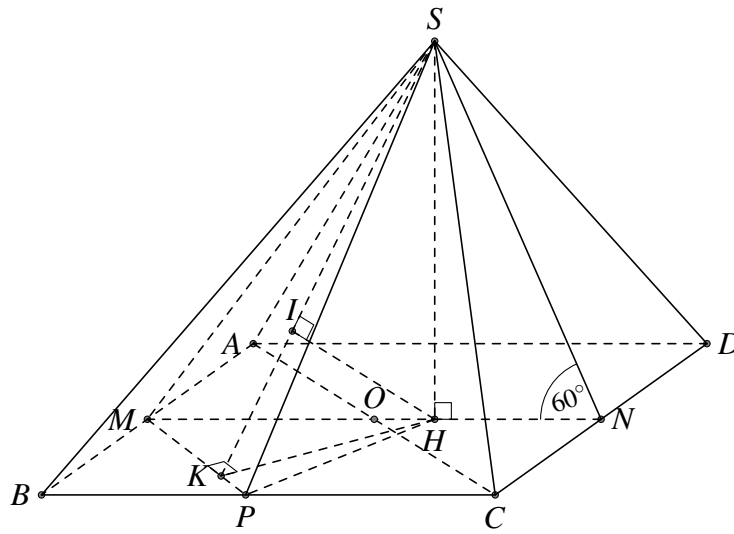
(A) $\frac{a\sqrt{5}}{5}.$

(B) $\frac{2a\sqrt{15}}{3}.$

(C) $\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

(D) $\frac{5a\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, vì $SA = SB$ nên $HA = HB$. Do đó H nằm trên đường trung trực của AB , mà M là trung điểm AB suy ra MH là trung trực của AB . Gọi $N = MH \cap CD$ suy ra N là trung điểm của CD .

Xét ΔSMN ta có $SM = a\sqrt{3}, MN = 2a, \widehat{SNM} = 60^\circ$. Áp dụng định lí sin ta được

$$\frac{MN}{\sin(\widehat{MSN})} = \frac{SM}{\sin(\widehat{SNM})} \Rightarrow \sin(\widehat{MSN}) = 1 \Rightarrow \widehat{MSN} = 90^\circ.$$

Vậy ΔSMH vuông tại S và SH là đường cao. Suy ra

$$MH \cdot MN = MS^2 \Rightarrow MH = \frac{MS^2}{MN} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2a} = \frac{3}{4} \cdot 2a \Rightarrow MH = \frac{3}{4} \cdot MN. \quad (1)$$

Gọi P là trung điểm của BC , suy ra $MP \perp BD$. (2)

Gọi K là điểm thuộc MP sao cho $MK = \frac{3}{4} \cdot MP$. (3)

Từ (1) và (3), áp dụng định lí Talet cho tam giác MNP , suy ra $HK \parallel PN \parallel BD$. (4)

Từ (2) và (4), suy ra $HK \perp MP$.

Gọi I là hình chiếu của H lên SK , suy ra $IH \perp (SMP)$. Ta lại có

$$SH = HN \tan 60^\circ = \frac{1}{4} MN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } HK = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{3a}{2\sqrt{5}}.$$

Vì $AC \parallel MP \Rightarrow AC \parallel (SMP)$ nên

$$d(AC, SM) = d(AC, (SMP)) = d(O, (SMP)) = \frac{2}{3}d(H, (SMP)) = \frac{2}{3}IH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

- (A) 45° . (B) 60° . (C) 90° . (D) 120° .

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ ($M \in SC$).

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.

Vậy $(SBC), (SCD) = \widehat{BMD}$.

Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

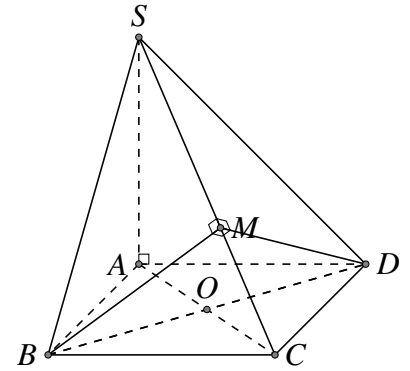
Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC , ta có:

$$\cos \widehat{BCS} = \frac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45^\circ \text{ hay } \triangle BMC \text{ vuông cân tại } M. \text{ Suy ra } DM = BM = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Trong tam giác BMD , ta có: $BM^2 + DM^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Vậy $(SBC), (SCD) = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Chọn đáp án (C) □



Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) .

- (A) $\frac{5a}{12}$. (B) $\frac{6a}{5}$. (C) $\frac{12a}{5}$. (D) $\frac{5a}{6}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SHC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SHC) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Kẻ $BK \perp HC$ tại K .

Mặt khác $BK \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$).

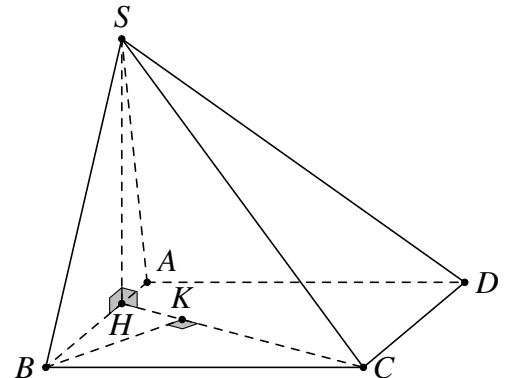
Suy ra $BK \perp (SHC) \Rightarrow d(B, (SHC)) = BK$.

Do $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$ nên $HB = 3HA \Rightarrow HB = 3a$.

Ta có

$$BK = \frac{BH \cdot BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{9a^2 + 16a^2}} = \frac{12a}{5}.$$

Chọn đáp án (C) □



Câu 24. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

- (A) $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$. (B) $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$. (C) $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$. (D) $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$.

Lời giải.

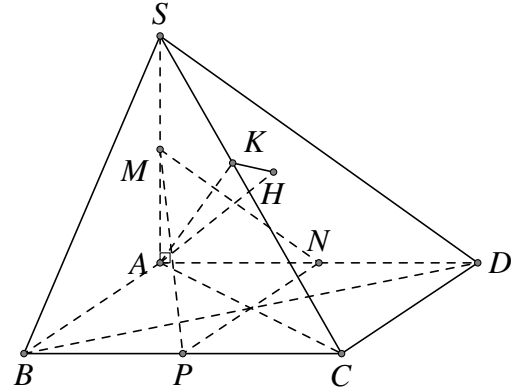
$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel SD \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$$

$$\Rightarrow ((SAC), (MNP)) = ((SAC), (SCD)) = \alpha.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD) , K là hình chiếu vuông góc của H xuống SC , suy ra $\alpha = \widehat{AKH}$.

$$\text{Ta có } V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} \text{ hay}$$

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$



Trong tam giác ABC có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13,$$

$$\text{suy ra } SC^2 = AC^2 + SA^2 = 13 + 12 = 25.$$

$$\text{Và } SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}. \text{ Khi đó}$$

$$\cos \widehat{CSD} = \frac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2 \cdot SC \cdot SD} = \frac{11\sqrt{7}}{35}.$$

$$\text{Hay } \sin \widehat{CSD} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{CSD}} = \frac{3\sqrt{42}}{35}.$$

Do đó diện tích tam giác SCD là

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SD \cdot \sin \widehat{CSD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{3\sqrt{42}}{35} = 3\sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có } S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot SC \text{ nên}$$

$$AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{5} = \frac{2\sqrt{39}}{5}.$$

$$\text{Theo công thức tính thể tích khối chóp } A.SCD \text{ thì } AH = \frac{3V_{A.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{AH}{AK} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{39}}{5}} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha \in (60^\circ; 90^\circ).$$

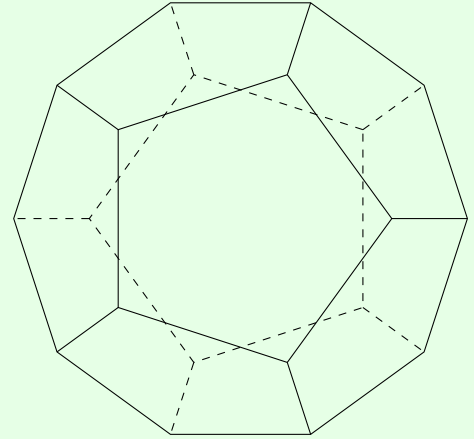
Chọn đáp án (A)

□

Câu 25.

Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
(C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.



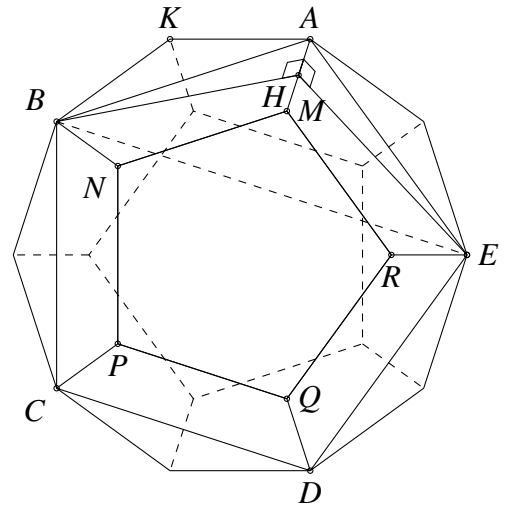
Lời giải.

Giả sử mỗi cạnh của đa diện đều có độ dài bằng 1 và ký hiệu các đỉnh như hình vẽ.

Mỗi mặt của khối đa diện đều là một ngũ giác đều nên dễ thấy $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (MNPQR)$. Tương tự ta có BC, CD, DE, EA song song với mặt phẳng $(MNPQR)$, dẫn tới A, B, C, D, E đồng phẳng và ngũ giác $ABCDE$ đều.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{\sin \widehat{AKB}} = \frac{AK}{\sin \widehat{ABK}} \text{ hay } \frac{AB}{\sin 108^\circ} = \frac{AK}{\sin 36^\circ}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sin 108^\circ}{36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ.$$



$$\text{Lại có } BE = 2AB \cos \widehat{ABE} = 2AB \cos 36^\circ \Rightarrow BE = 4 \cos^2 36^\circ.$$

Lấy H là trung điểm AM , khi đó ta có $BH \perp AM$ và $EH \perp AM$.

Góc giữa hai mặt chung cạnh AM là $\alpha = (BH, HE)$.

$$\text{Ta có } \frac{BH}{AH} = \tan \widehat{BAH} = \tan 72^\circ \Rightarrow BH = \frac{\tan 72^\circ}{2}.$$

$$\text{Trong tam giác } BHE \text{ cân tại } H, \cos \frac{\widehat{BHE}}{2} = \frac{BE}{2BH} = \frac{4 \cos^2 36^\circ}{\tan 72^\circ} = \frac{4 \cos^2 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}.$$

$$\text{Từ đó dẫn tới } \cos \widehat{BHE} = \frac{2 \cos^2 36^\circ}{\cos^2 18^\circ} - 1 = \frac{4 \cos^2 36^\circ}{1 + \cos 36^\circ} - 1.$$

Ta có

$$\cos 108^\circ + \cos 72^\circ = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^3 36^\circ + 2 \cos^2 36^\circ - 3 \cos 36^\circ - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ (vì } \cos 36^\circ > 0 \text{)}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{BHE} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ dẫn đến } \cos(BH, HE) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

- (A) $\frac{a}{3}$. (B) $a\sqrt{5}$. (C) $3a$. (D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

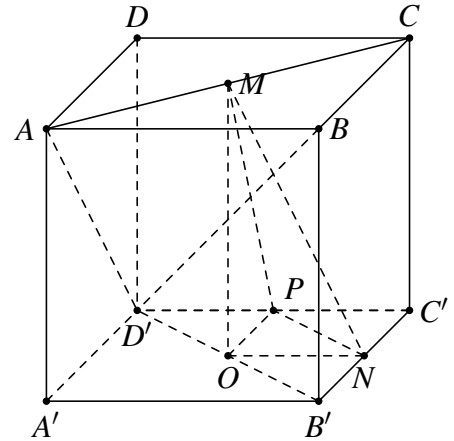
Gọi O, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $B'D', BC', C'D'$. Vì $B'D' \parallel NP$ nên

$$d(B'D', MN) = d(B'D', (MNP)) = d(O, (MNP)).$$

Tứ diện $O.MNP$ có OM, ON, OP đôi một vuông góc, do đó

$$\frac{1}{d(O, (MNP))^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2}$$

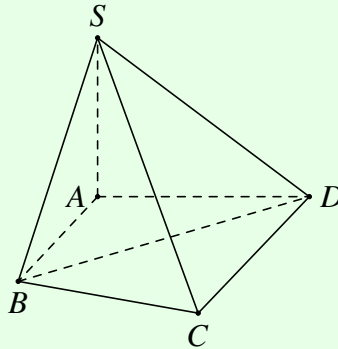
$$\Rightarrow d(O, (MNP)) = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } d(B'D', MN) = \frac{a}{3}.$$



Chọn đáp án (A)

□

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, $SA = 9$ và SA vuông góc với mặt đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



(A) $\frac{3\sqrt{273}}{20}$.

(B) $\frac{9\sqrt{91}}{91}$.

(C) $\frac{20\sqrt{273}}{819}$.

(D) $\frac{\sqrt{91}}{9}$.

Lời giải.

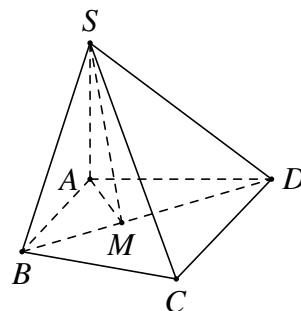
Đặt $AD = x$, $CD = y$. Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 22\sqrt{3}$.

Mà $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \Leftrightarrow 5x + 3y = 44 \Leftrightarrow y = \frac{44 - 5x}{3}$ (1).

Mặt khác $BC^2 + CD^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 75 + x^2 = 27 + y^2$ (2).

Thế (1) vào (2) ta được $16x^2 - 440x + 1504 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{47}{2} \text{ (loại do } y < 0) \\ x = 4 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Với $x = 4$ thì $y = 8$ (thỏa mãn).



Kẻ $AM \perp BD$, mà $BD \perp SA$ nên $BD \perp SM$.

Do đó $((SBD), (ABCD)) = \widehat{SMA}$.

Xét $\triangle ABD$ ta có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AM = \frac{20\sqrt{273}}{91}$.

Nên $\cot \widehat{SMA} = \frac{AM}{SA} = \frac{20\sqrt{273}}{819}$.

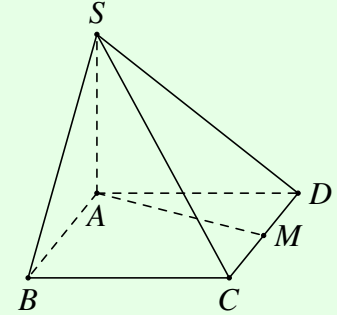
Chọn đáp án (C)



Câu 28.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD . Tính $\cos \alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM .

- (A) $\frac{4}{5}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $-\frac{2}{5}$. (D) $\frac{1}{2}$.



Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB . Ta thấy $NP \parallel SB, PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC .

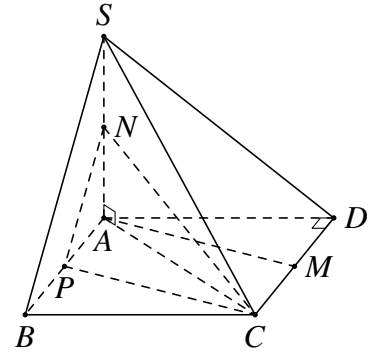
Ta có $NP = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, PC = AM = \sqrt{5}$.

$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 8} = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra $\cos \widehat{NPC} = \frac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \frac{\frac{5}{4} + 5 - \frac{33}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

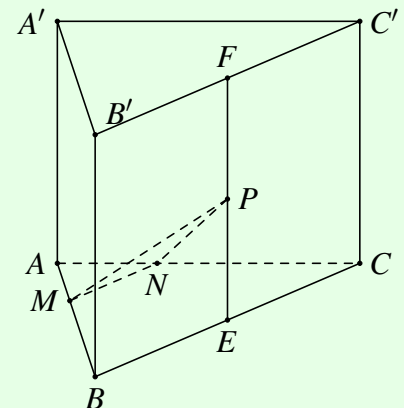
Chọn đáp án (B)



Câu 29.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 4. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, AC sao cho $MB = 2MA; NC = 2NA$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C', BC$; P là trung điểm của EF . Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$.

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 90° .



Lời giải.

Gọi Q là giao điểm của AE và MN .

Kẻ $AH \perp A'E$. Vì $BC \perp (A'AE) \Rightarrow BC \perp AH$

$\Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

Kẻ $AK \perp PQ$. Vì $MN \perp (AEP) \Rightarrow MN \perp AK$

$\Rightarrow AK \perp (MNP)$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{PQE} = \frac{PE}{QE} = \frac{2}{\frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan \widehat{AEA'} = \frac{A'A}{AE} = \frac{4}{\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\widehat{PQE} + \widehat{AEA'} = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp A'E \Rightarrow AH \perp AK$.

Vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$ bằng 90° .

Cách 2:

Dựng hệ trục tọa độ $vdxyz$ như hình bên, khi đó ta có tọa độ các điểm $E(0;0;0)$, $A(2\sqrt{3};0;0)$, $B(0;2;0)$, $F(0;0;4)$, $C(0;-2;0)$, $A'(2\sqrt{3};0;4)$.

$$\text{Vậy } M\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}; 0\right), N\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right), P(0;0;2).$$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BC)$ là

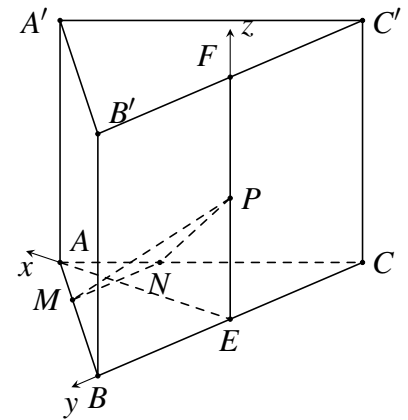
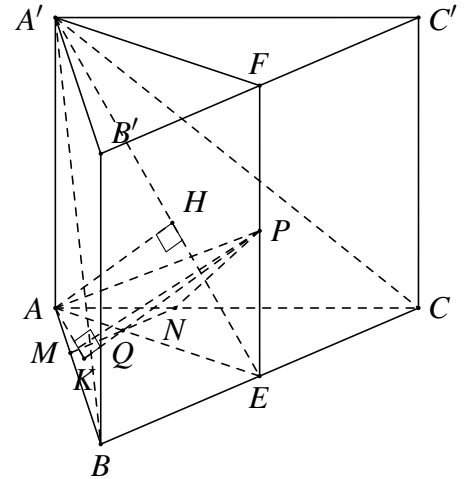
$$\vec{n}_{(A'BC)} = [\vec{EA'}, \vec{j}] = (4;0;-2\sqrt{3}) \parallel (2;0;-\sqrt{3}).$$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) là

$$\vec{n}_{(MNP)} = [\vec{j}, \vec{MP}] = \left(-2;0;-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(A'BC)} \cdot \vec{n}_{(MNP)} = 0 \Rightarrow (MNP) \perp (A'BC).$$

Chọn đáp án (D)



□

Câu 30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3MD$. Đặt $x = d[AD'; B'C]$ và $y = d[M; (AB'C)]$. Tính $x \cdot y$.

- (A) $\frac{5a^5}{3\sqrt{6}}$. (B) $\frac{3a^5}{2\sqrt{6}}$. (C) $\frac{3a^2}{4}$. (D) $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$x = d[AD'; B'C] = d((ADD'A'); (BCC'B')) = AB = a.$$

$$\text{Theo định lý Pitago ta có } AC = B'C = a\sqrt{5}, AM = \frac{3a}{2}, MC = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$AB' = a\sqrt{2}.$$

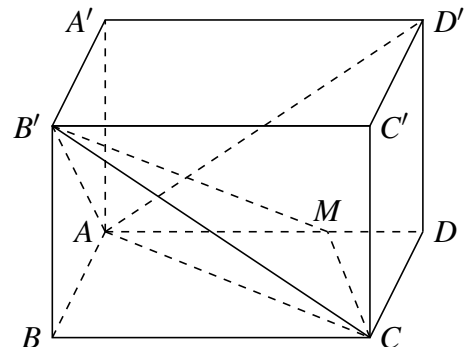
$$\text{Theo công thức Hê-rông ta có } S_{\Delta AMC} = \frac{3a^2}{4} \text{ (đvdt)}, S_{\Delta AB'C} = \frac{3a^2}{2} \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Ta có } V_{M.AB'C} = V_{B'.AMC} = \frac{1}{3} \cdot B'A \cdot S_{\Delta AMC} = \frac{a^3}{4} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy } y = d[M; (AB'C)] = \frac{3 \cdot V_{M.AB'C}}{S_{\Delta AB'C}} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Từ đó } x \cdot y = \frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án (D)



□

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ với $a > 0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc AC . M là một điểm thuộc đoạn OD ; $MD = x$ với $x > 0$. M khác O và D . Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SD và AC cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?

- (A) $a\frac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) a .

Lời giải.

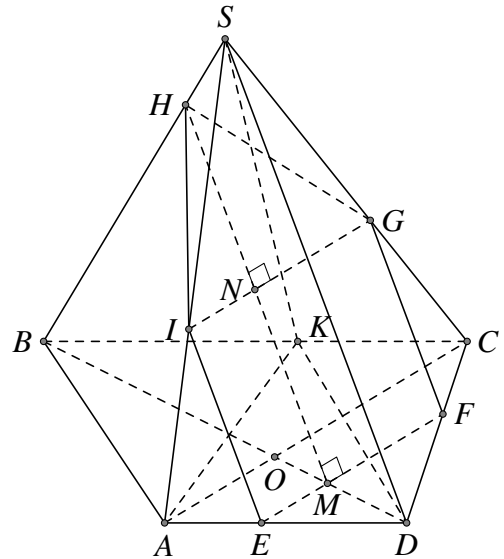
Trong mp(SBD) kẻ đường thẳng qua M song song với SD , cắt cạnh SB tại H .

Trong mp($ABCD$) kẻ đường thẳng qua M song song với AC , cắt các cạnh DA và DC lần lượt tại E và F .

Trong mp(SDA) kẻ đường thẳng qua E song song với SD , cắt cạnh SA tại I .

Trong (SDC) kẻ đường thẳng qua F song song với SD , cắt cạnh SC tại G .

Khi đó thiết diện của khối chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $EFGHI$.



Ta có $ABCD$ là nửa lục giác đều có tâm là trung điểm K của BC . Do đó $ADCK$ và $ABND$ là hình thoi nên $AC \perp KD$. Mặt khác $AC \perp SD$ nên $AC \perp (SKD) \Rightarrow AC \perp SK$.

Lại có $SK \perp BC$ (vì $\triangle SBC$ đều), suy ra $SK \perp (ABCD) \Rightarrow SK \perp KD$.

Ta có IG là giao tuyến của (α) với (SAC) , mà $AC \parallel (\alpha)$, suy ra $IG \parallel AC$.

Mặt khác $HM \parallel SD$ và $SD \perp AC$, suy ra $HM \perp IG$ và $HM \perp EF$ và $IGEF$ là hình chữ nhật. Diện tích thiết diện $EFGHI$ bằng $S = S_{EFGI} + S_{HGI} = IG \cdot NM + \frac{1}{2}IG \cdot HN$.

Ta có $AK = KD = AD = a$ nên $\triangle AKD$ đều.

Mà $BD \perp AK$, $AC \perp KD$ nên O là trọng tâm tam giác $\triangle ADK$. Suy ra $OD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AC = BD = a\sqrt{3}$ ($\triangle BAC$ vuông tại A , do $KA = KB = KC$).

$SD = \sqrt{SK^2 + KD^2} = 2a$.

Ta có $\frac{DM}{DO} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow EF = \frac{DM}{DO} \cdot AC = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot a\sqrt{3} = 3x$.

$\frac{GF}{SD} = \frac{CF}{CD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow GF = \frac{OM}{OD} \cdot SD = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot 2a = 2a - 2\sqrt{3}x$.

$\frac{HM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow HM = \frac{BM}{BD} \cdot SD = \frac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $HN = HM - NM = HM - GF = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3} - (2a - 2\sqrt{3}x) = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot 3x + (2a - 2\sqrt{3}x) \cdot 3x = -4\sqrt{3}x^2 + 6ax = -\sqrt{3} \left(2x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $S \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, cạnh bên $SA = 10a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

- (A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Qua S kẻ đường thẳng song song BC , cắt AM tại K . Dễ thấy $KSAD$ và $KSBC$ là các hình chữ nhật.

Vậy ta có $KC = (AMC) \cap (SBC)$.

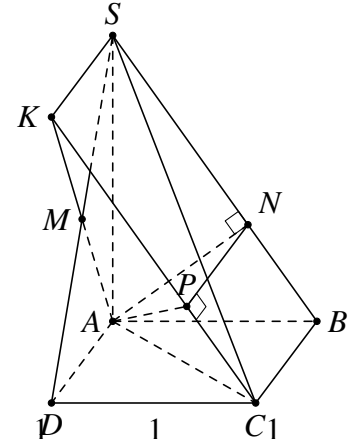
Từ A dựng $AN \perp SB$, $N \in SB$.

Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SB$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AN$.

Ta có $AN \perp BC$, $AN \perp SB \Rightarrow AN \perp (SBC)$.

Từ N dựng $NP \perp KC$, $N \in KC$.

Khi đó $[(AMC), (SBC)] = [\widehat{AP, NP}] = \widehat{APN}$.



- Tính AN . Xét $\triangle SAB$ vuông ở A , đường cao AN suy ra $\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(10a)^2} + \frac{1}{(5a)^2}$
 $\Rightarrow AN = 2\sqrt{5}a$.

- Tính PN . Ta có $PN \perp KC \Rightarrow PNBC$ là hình chữ nhật, suy ra $PN = CB = 5a$.

Xét $\triangle ANP$ vuông ở N có $\tan \widehat{APN} = \frac{AN}{PN} = \frac{2\sqrt{5}a}{5a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 33. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SMN) bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. (B) $\frac{a}{7}$. (C) $\frac{5a}{7}$. (D) $\frac{3a}{7}$.

Lời giải.

Ta có $AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle SGA$ vuông tại G có $\widehat{SAG} = 60^\circ$, suy ra

$SG = GA \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của G trên MN và SE .

Khi đó $d(A, (SMN)) = 3d(G, (SMN)) = 3GF$.

Ta có $\widehat{GNE} = 30^\circ$ nên $GE = \frac{NG}{2} = \frac{AN}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{12}$.

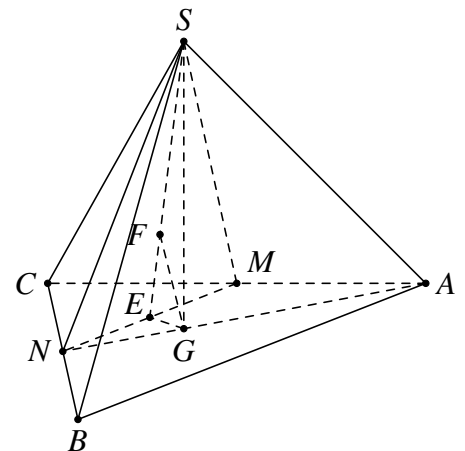
Trong $\triangle SGE$ vuông tại G ta có

$$\frac{1}{GF^2} = \frac{1}{GE^2} + \frac{1}{SG^2} = \frac{48}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{49}{a^2} \Rightarrow GF = \frac{a}{7}.$$

Suy ra $d(A, (SMN)) = 3GF = \frac{3a}{7}$.

Chọn đáp án (D)

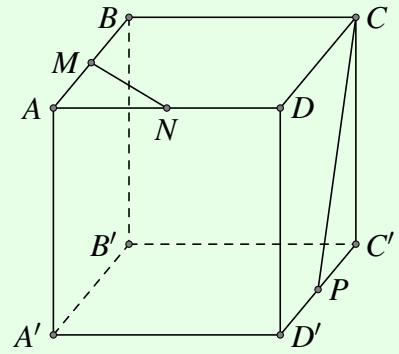
□



Câu 34.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP .

- Ⓐ $\frac{\sqrt{10}}{5}$. Ⓑ $\frac{3}{\sqrt{10}}$. Ⓒ $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

**Lời giải.**

Gọi Q là trung điểm của $B'C'$. Ta có $MN \parallel PQ$, do đó $(\widehat{MN, CP}) = (\widehat{PQ, CP}) = \widehat{CPQ}$.

Gọi K là trung điểm PQ , khi đó $CK \perp PQ$ (do $\triangle CPQ$ cân tại C).

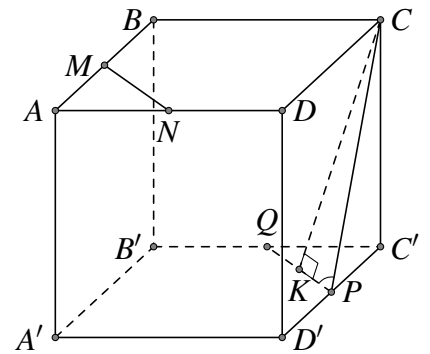
Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.

$$\text{Khi đó } KP = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, CP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Có } \cos \widehat{CPQ} = \frac{KP}{CP} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{MN, CP} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án Ⓒ

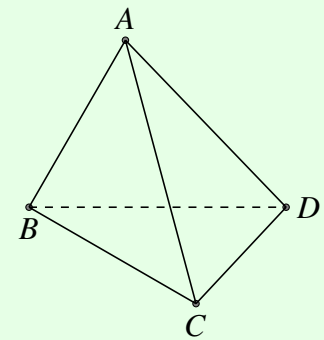


□

Câu 35.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a, AC = a\sqrt{15}, BD = a\sqrt{10}, CD = 4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD . Tính độ dài đoạn thẳng AD .

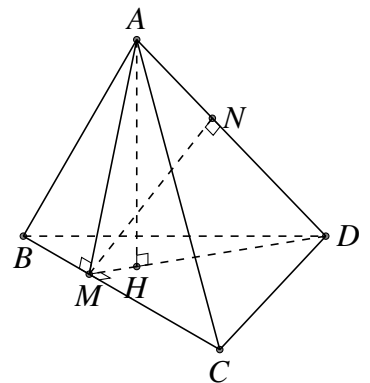
- Ⓐ $2a$. Ⓑ $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. Ⓒ $2\sqrt{2}a$. Ⓓ $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải.**

Ta chứng minh $AD \perp BC$. Thật vậy, xét tích vô hướng

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} \\ &= \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2} \\ &= \frac{15a^2 + 10a^2 - 16a^2 - 9a^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC. \end{aligned}$$

Dựng $AH \perp (BCD)$ tại H nằm trong tam giác BCD . Gọi M là giao điểm của DH và $BC \Leftrightarrow M$ nằm giữa B và C .



$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp DM.$$

Trong mặt phẳng (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại $N \Rightarrow \begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp AD \end{cases} \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AD

$$\text{và } BC \Leftrightarrow MN = \frac{5a}{4}.$$

Lại thấy $\widehat{ADH} = 45^\circ$ là góc giữa AD và mặt phẳng (BCD) , đồng thời H nằm giữa D và M nên $\widehat{AMD} < 90^\circ \Rightarrow N$ nằm giữa A và D .

$$\text{Ta có } DM = \sqrt{2}MN = \frac{5\sqrt{2}a}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \frac{a\sqrt{110}}{4}$$

$$\Rightarrow AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \sqrt{AB^2 - BM^2 - MN^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{110a^2}{16} - \frac{25a^2}{16}} = \frac{3a}{4},$$

$$DN = MN = \frac{5a}{4}. \text{ Do đó } AD = AN + DN = 2a.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$ và chu vi tam giác SBD là $3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

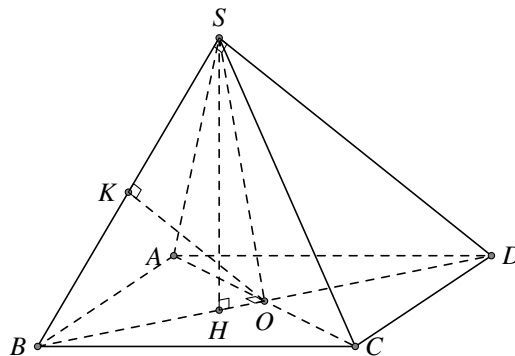
(A) $\frac{a}{2}$.

(B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{3a}{4}$.

(D) $\frac{3a}{8}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Vì $SA = SB = SC = a$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mặt khác, tam giác ABC cân tại B nên H thuộc đường thẳng BD . Ta lại có $\triangle BAC = \triangle SAC$ nên $OB = OD = OS$ (O là tâm $ABCD$), từ đó suy ra tam giác SBD vuông tại S . Đặt $SD = x$ ta có chu vi tam giác SBD bằng $x + a + \sqrt{x^2 + a^2} = 3a$ nên $x = \frac{3a}{4}$. Ta thấy $AC \perp (SBD)$ nên dựng $OK \perp SB$ thì OK là đoạn vuông góc chung của AC và SB , K là trung điểm của đoạn SB . Từ đó $d(AC, SB) = OK = \frac{1}{2}SD = \frac{3a}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $A'A = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC . Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm H của AN và BM . Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$ bằng

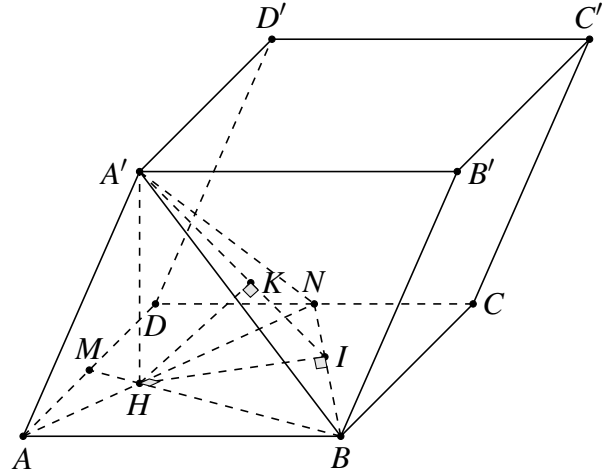
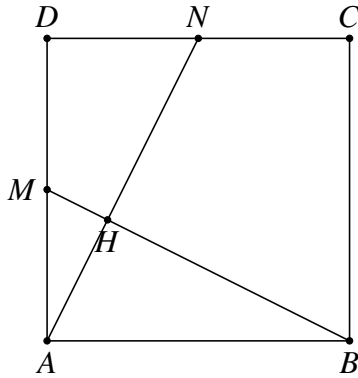
(A) $\frac{3a\sqrt{173}}{68}$.

(B) $\frac{3a\sqrt{175}}{68}$.

(C) $\frac{3a\sqrt{172}}{68}$.

(D) $\frac{3a\sqrt{170}}{68}$.

Lời giải.



Xét hình vuông $ABCD$ có $\triangle ABM = \triangle DAN$ suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{DNA}$.

Do đó: $\widehat{MAH} + \widehat{AMB} = \widehat{MAH} + \widehat{DNA} = 90^\circ$ suy ra $AN \perp BM$.

Do $\triangle ABH \sim \triangle MBA$ nên: $BH = \frac{AB^2}{BM} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông MAB có: $AH = \frac{AM \cdot AB}{\sqrt{AM^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ có: $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông BNH có: $HN = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$.

Kẻ $HI \perp BN, HK \perp A'I$. Khi đó: $d(H, (A'BN)) = HK$.

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{5}{4a^2} + \frac{20}{9a^2} = \frac{85}{18a^2}.$$

$$d(H, (A'BN)) = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{85}}.$$

$$d(M, (A'BN)) = \frac{MB}{HB} \cdot d(H, (A'BN)) = \frac{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{4a} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{85}} = \frac{3a\sqrt{170}}{68}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 38.

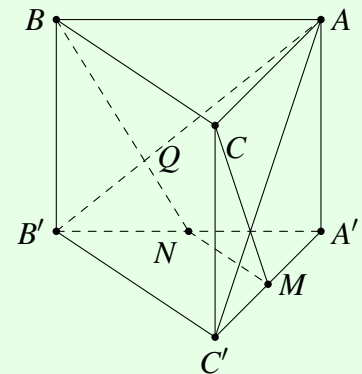
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

(A) $\frac{\sqrt{13}}{130}$.

(B) $-\frac{\sqrt{13}}{65}$.

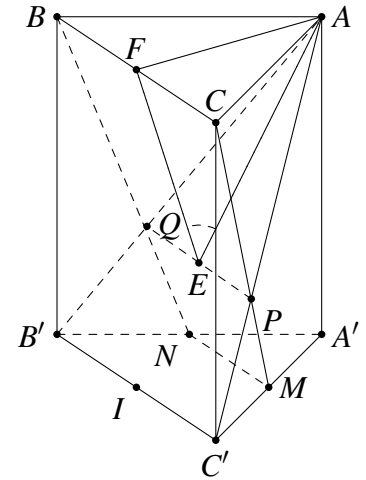
(C) $-\frac{\sqrt{13}}{130}$.

(D) $\frac{\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AC' với MC và giao điểm của BN với $B'A$. Ta có PQ là giao tuyến của $(AB'C')$ với $(BCMN)$. Dễ dàng thấy được $PQ \parallel B'C'$. Vì $\triangle AB'C'$ cân tại A nên gọi I là trung điểm của $B'C'$ thì AI vuông góc với $B'C'$ và do đó $AI \perp PQ$. Gọi E là giao điểm của AI với PQ , ta được E là trung điểm của PQ . Ta có tứ giác $BCMN$ là hình thang cân nên lấy F, K lần lượt là trung điểm của BC và MN . Ta có $FK \perp PQ$ và đi qua trung điểm E của PQ . Vậy góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$ là góc tạo bởi hai đường thẳng FK và AI . Ta có $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = 4a$, $AF = 3a$.



Ta tính được $AI = \sqrt{AC'^2 - IC'^2} = \sqrt{16a^2 - 3a^2} = a\sqrt{13}$.

$$\text{Do } \frac{AP}{AC'} = \frac{AE}{AI} = \frac{2}{3} \text{ nên } AE = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Ta có độ dài FK bằng độ dài đường cao kẻ từ C của hình thang $BCMN$. Do đó $FK = \frac{5a}{2}$.

$$\text{Vậy } EF = \frac{2}{3} \cdot \frac{5a}{2} = \frac{5a}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle EFA, \text{ ta có } \cos \widehat{EFA} = \frac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2AE \cdot AF} = -\frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi I là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CI = 2BI$; N là trung điểm của SI ; hình chiếu của đỉnh S trên (ABC) là điểm H thuộc đoạn thẳng AI sao cho $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$; góc $(SB, (ABC)) = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (NAB) và (ABC) , biết $\tan \alpha = \frac{m\sqrt{n}}{p}$, với $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$.

(A) 53.

(B) 26.

(C) 46.

(D) 9.

Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, HB) = \widehat{SBH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{3}HB.$$

Xét $\triangle AIC$

$$\begin{aligned} AI^2 &= AC^2 + IC^2 - 2AC \cdot IC \cos 60^\circ \\ &= 4a^2 + \frac{16a^2}{9} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{28a^2}{9} \\ \Rightarrow AI &= \frac{2\sqrt{7}a}{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = \frac{4\sqrt{7}a}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Xét tam giác } ABI: \cos \widehat{BAI} = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \cdot AI} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

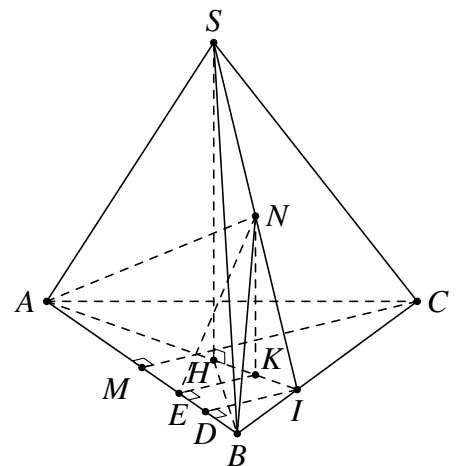
$$\text{Xét tam giác } BAH: BH^2 = AB^2 + AH^2 - 2AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAI} = \frac{76}{81}a^2$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{19}a}{9} \Rightarrow SH = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{19}a}{9} = \frac{2\sqrt{57}a}{9}.$$

$$\text{Gọi } K \text{ là trung điểm } HI \Rightarrow NK \parallel SH \Rightarrow NK \perp (ABCD), NK = \frac{1}{2}SH = \frac{2\sqrt{57}a}{18}.$$

Gọi M, D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, I, K trên AB . Có $(NAB) \cap (ABC) = AB$ và

$$\begin{cases} AB \perp NK \\ AB \perp KE \end{cases} \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow ((NAB), (ABC)) = (NE, EK) = \widehat{KEN}.$$



Do $KE \parallel CM, ID \parallel CM$ nên $\frac{ID}{CM} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = \frac{CM}{3}$.

$$\frac{KE}{ID} = \frac{AK}{AI} = \frac{5}{6} \Rightarrow KE = \frac{5}{6}ID = \frac{5}{18}CM = \frac{5\sqrt{3}a}{18}.$$

Tam giác NKE vuông tại K có $\tan \widehat{KEN} = \frac{NK}{KE} = \frac{2\sqrt{57}a}{18} \cdot \frac{18}{5\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{19}}{5}$.

Do đó $m = 2, n = 19, p = 5$ và $m + n + p = 2 + 19 + 5 = 26$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

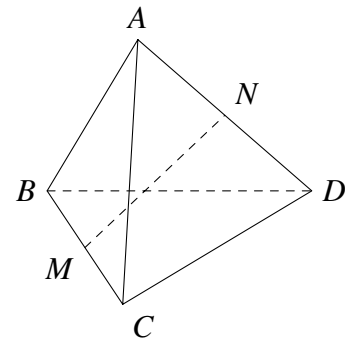
- (A) 30° . (B) 60° . (C) 120° . (D) 90° .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{AB} + \vec{DC} &= 2\vec{NM} \\ \Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{DC} &= 4MN^2 \\ \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{DC} &= 4a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{AB}, \vec{DC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{DC}}{AB \cdot CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{DC}) = 60^\circ.$$

Vậy $(AB, CD) = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B)

□

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm của AB , hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm I của CI , góc giữa SA và đáy là 45° . Khoảng cách giữa SA và CI bằng

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. (D) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng Ax song song với IC . Kẻ HE vuông góc với Ax tại E . Vì $IC \parallel (SAE)$ nên

$$d(IC; SA) = d(IC; (SAE)) = d(H; (SAE)).$$

Kẻ $HK \perp SE$ tại $K, K \in SE$. (1).

$Ax \perp HE, Ax \perp SH$

$\Rightarrow Ax \perp (SHE) \Rightarrow Ax \perp HK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $HK \perp (SAE)$. Vậy $d(H; (SAE)) = HK$, ta có

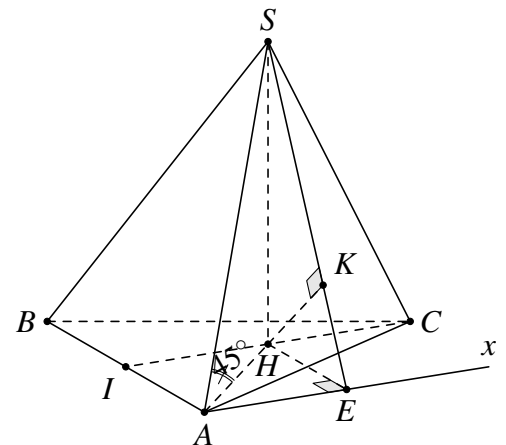
$$CH = IH = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$

$$AH = \sqrt{IH^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

$(\widehat{SA; (ABC)}) = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H nên $SH = AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. Ta có $HE = IA = \frac{a}{2}$ (vì tứ giác $AIHE$ là hình chữ nhật), suy ra $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{77}}{22}$.

Chọn đáp án (C)

□



Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD' . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD .

- (A) $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. (B) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. (C) $\sqrt{3}a$. (D) $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD, BB' , ta có $MP \parallel NQ \parallel BD$. Mặt khác $BD \perp (AA'C'C)$ nên $MP \perp (AA'C'C)$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MP và AC, OO' và NQ . Ta có $(AA'C'C)$ cắt $(MPNQ)$ theo giao tuyến IJ . Ta tính được

$$OI = \frac{a\sqrt{2}}{4}, OJ = \frac{a}{2}.$$

Kẻ $OH \perp IJ$ tại H suy ra $OH \perp (MPNQ)$.

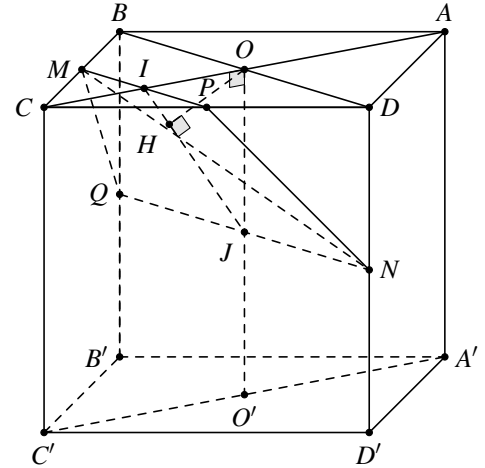
$$\triangle OIJ \text{ vuông tại } O \text{ nên } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{12}{a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vì $BD \parallel MP$ nên $BD \parallel (MNP)$.

$$\text{Vậy } d(BD, MN) = d(BD, (MNP)) = d(O, (MNP)) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

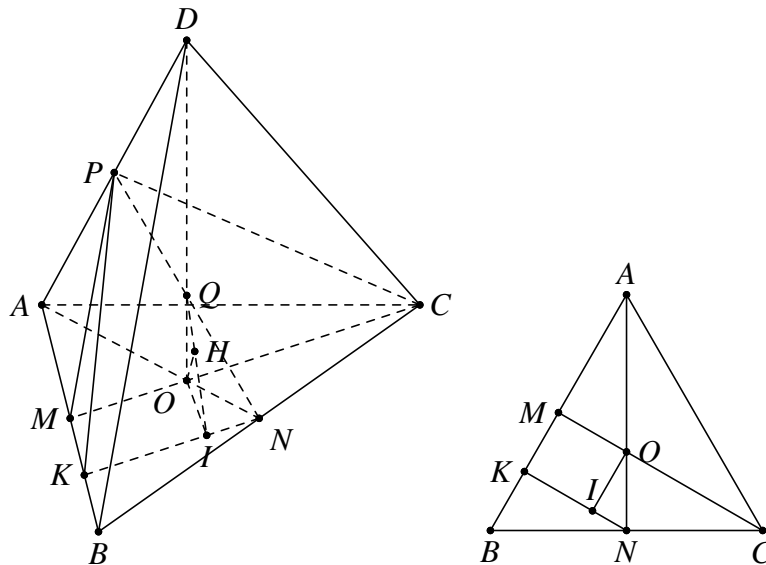
Chọn đáp án (A)



Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB = 1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và NP .

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. (B) $\frac{\sqrt{10}}{20}$. (C) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$. (D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của tam giác ABC , K là trung điểm của BM và có $MK \parallel (CMP)$ nên

$$d(CM, NP) = d(CM, (PNK)) = d(O, (PNK))$$

Từ O dựng $OI \perp NK$. Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $DO \perp NK \Rightarrow NK \perp (DOI) \Rightarrow (PNK) \perp (DOI)$ mà $(PNK) \cap (DOI) = IQ$ với Q là giao điểm của DO và PN nên từ O , dựng OH vuông góc IQ tại H thì

$$OH \perp (PNK) \Rightarrow OH = d(O, (PNK)).$$

Ta có $OI = MK = \frac{AB}{4} = \frac{1}{4}$ (vì $MKIO$ là hình chữ nhật). Theo cách dựng thì Q là trọng tâm của tứ diện nên

$$OQ = \frac{OD}{4} \text{ và } OD = \sqrt{DA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ hay } OD = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } OIQ \text{ ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 40 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{10}}{20}.$$

$$\text{Vậy } d(CM, NP) = \frac{\sqrt{10}}{20}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

(A) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

(B) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

(C) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

(D) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

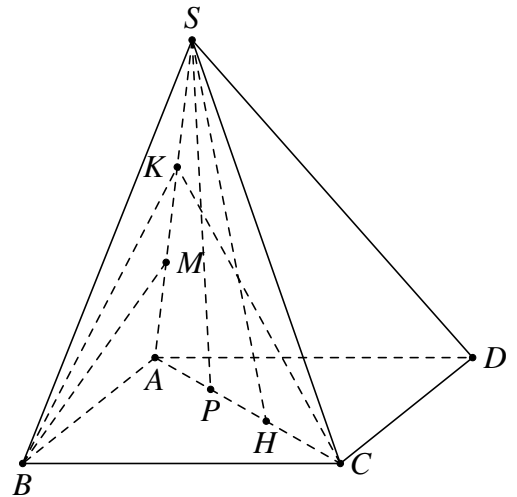
Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống SA . Xét $\triangle CAK$ vuông tại K ta có

$$AK = \sqrt{CA^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$.

Vì $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \cap (ABCD) = AC$ nên $SA \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ và $KP // SH$, $P \in AC$ thì $KP \perp (ABCD)$.



Xét $\triangle BAC$ vuông tại B và $\triangle KAC$ vuông tại K ta thấy các cạnh tương ứng bằng nhau và KP là đường cao của $\triangle KAC$ nên BP là đường cao của $\triangle BAC$.

Kẻ $PM \perp KA$, $M \in KA$. Vì $KA \perp PB$ và $KA \perp PM$ nên $KA \perp (PMB)$. Suy ra $KA \perp MB$.

Như vậy, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc $\widehat{PMB}$.

$$\text{Xét } \triangle KAC \text{ vuông tại } K \text{ ta có } KP \cdot AC = KA \cdot KC \Rightarrow KP = \frac{KA \cdot KC}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Suy ra } BP = KP = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Xét } \triangle KPA \text{ vuông tại } P \text{ ta có } PA = \sqrt{KA^2 - KP^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Lại có } PM \cdot AK = PA \cdot PK \Rightarrow PM = \frac{PA \cdot PK}{AK} = \frac{36}{25}.$$

$$\text{Xét } \triangle PMB \text{ vuông tại } P \text{ ta có } MB = \sqrt{PB^2 + PM^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{25}\right)^2} = \frac{12\sqrt{34}}{25}.$$

Ta có $\cos \widehat{PMB} = \frac{MP}{MB} = \frac{36}{25} \cdot \frac{25}{12\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 45. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CC' . Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') .

- (A) $\frac{\sqrt{21}}{5}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi $I = A'B \cap AB'$, $J = B'C \cap BC'$, khi đó IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') .

Gọi K là trung điểm AC , kẻ $BH \perp B'K \Rightarrow BH \perp (ACB')$. Ta có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Tam giác $A'BM$ cân tại M và $A'M = BM = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow BJ = \frac{2}{3}BM = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $A'B = 2 \Rightarrow BI = 1$.

Từ đó ta có $\cos \widehat{MBA'} = \frac{BI}{BM} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Xét tam giác BIJ , ta có

$$\begin{aligned} IJ^2 &= BI^2 + BJ^2 - 2BI \cdot BJ \cos \widehat{MBA'} \\ &= 1 + \frac{7}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{4}{9} \Rightarrow IJ = \frac{2}{3}; \\ \cos \widehat{BIJ} &= \frac{BI^2 + IJ^2 - BJ^2}{2BI \cdot IJ} = \frac{1 + \frac{4}{9} - \frac{7}{9}}{2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}; \\ \Rightarrow \sin \widehat{BIJ} &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Kẻ $BL \perp IJ$ tại L , ta có $BL = BI \cdot \sin \widehat{BIJ} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

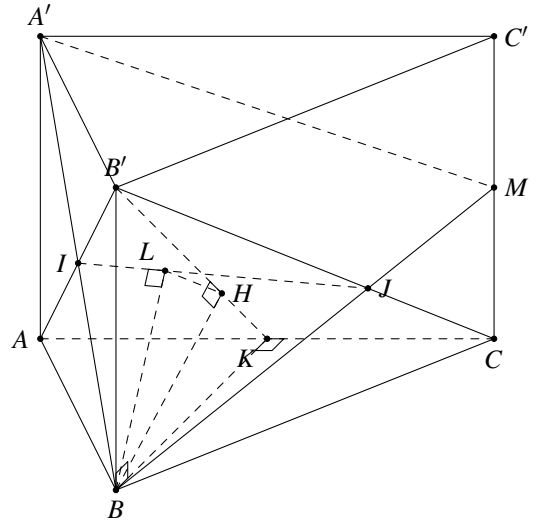
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ACB') và (BMA') , ta có

$$\sin \varphi = \sin \widehat{BLH} = \frac{BH}{BL} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A trên $(A'B'C')$ là trung điểm cạnh $B'C'$. Biết khoảng cách giữa C' và $(ABB'A')$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính sin



của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC')$ và $(AB'C')$.

- Ⓐ $\frac{\sqrt{39}}{13}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{130}}{13}$. Ⓒ $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.

Gọi M, E lần lượt là trung điểm của $A'B'$, MB' và D là hình chiếu vuông góc của H trên AE . Ta có

$$A'B' \perp HE, A'B' \perp AH \Rightarrow A'B' \perp (AHE).$$

Từ đó suy ra $HD \perp (ABB'A')$, cho nên

$$HD = d(H; (ABB'A')) = \frac{1}{2}d(C'; (ABB'A')) = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

Tam giác AHE vuông tại H , $HE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, đường cao HD nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HD^2} - \frac{1}{HE^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $A'H \perp B'C'$, $A'H \perp AH$ nên $A'H \perp (AB'C')$.

Gọi $K = AB' \cap A'B$, $G = AH \cap C'K$ ta có $G \in (A'BC')$ và G là trọng tâm tam giác $AB'C'$. Do đó $GH \perp (A'BC')$

$$\text{và } GH = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Gọi F, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên $A'C'$ và GF .

$$\text{Để thấy } HI \perp (A'BC') \Rightarrow HI \perp A'I, HF = \frac{a\sqrt{3}}{4}, HI = \frac{HF \cdot HG}{\sqrt{HF^2 + HG^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Vì $A'H \perp (AB'C')$, $HI \perp (A'BC')$ nên $((A'BC'), (AB'C')) = (A'H, HI) = \widehat{A'HI}$.

$$\text{Tam giác } A'HI \text{ vuông tại } I \text{ nên } \sin \widehat{A'HI} = \frac{A'I}{A'H} = \frac{\sqrt{A'H^2 - HI^2}}{A'H} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$ và $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB .

- Ⓐ $d = \frac{a\sqrt{22}}{22}$. Ⓑ $d = \frac{a\sqrt{22}}{11}$. Ⓒ $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ASB$ đều nên $AB = a$.

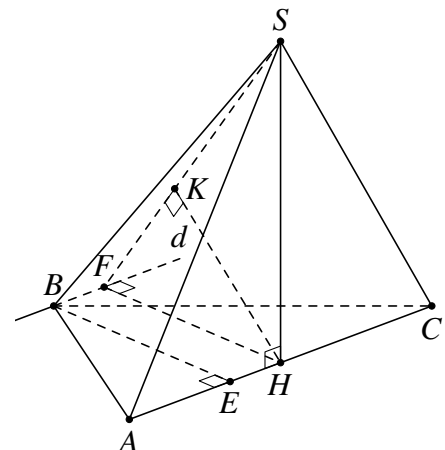
Tam giác BSC vuông tại S nên $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác CSA ta có

$$AC^2 = AS^2 + SC^2 + AS \cdot SC = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi H là trung điểm của AC , ta có $HA = HB = HC$ và $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$.



Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC , (α) là mặt phẳng chứa SB và d .

Khi đó $AC \parallel (\alpha) \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (\alpha)) = d(H, (\alpha))$.

Kẻ $HF \perp d$ với $F \in d$ và kẻ $HK \perp SF$ với $K \in SF$.

Ta có $SH \perp d, HF \perp d \Rightarrow d \perp (SHF) \Rightarrow d \perp HK \Rightarrow HK \perp (\alpha) \Rightarrow d(H, (\alpha)) = HK$.

Kẻ $BE \perp AC$ với $E \in AC$, khi đó $\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{3}{2a^2}$.

Vì $\widehat{SAC} = 30^\circ$ nên $SH = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$, suy ra $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy $d(AC, BD) = HK = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = a\sqrt{15}$, $BD = a\sqrt{10}$, $CD = 4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD . Tính độ dài đoạn thẳng AD biết rằng $AD > a$.

(A) $2a$.

(B) $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

(C) $2\sqrt{2}a$.

(D) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta chứng minh $AD \perp BC$. Thật vậy, xét tích vô hướng

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} \\ &= \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2} \\ &= \frac{15a^2 + 10a^2 - 16a^2 - 9a^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC. \end{aligned}$$

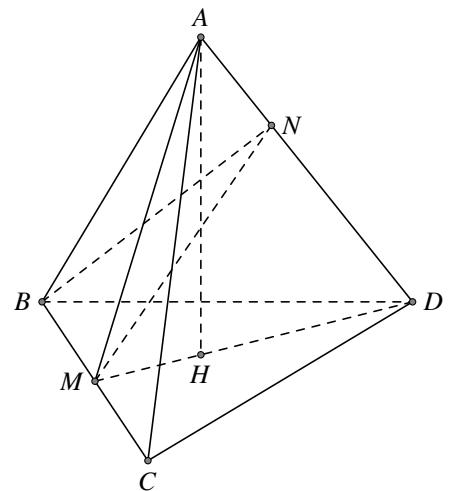
Dựng $AH \perp (BCD)$ tại H nằm trong tam giác BCD . Gọi M là giao điểm của DH và BC suy ra M nằm giữa B và C .

Do $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp DM$.

Trong mặt phẳng (ADM) , dựng $MN \perp AD$ tại N

$\Rightarrow \begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp AD \end{cases} \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AD và $BC \Rightarrow$

$$MN = \frac{5a}{4}.$$



$\widehat{ADH} = 45^\circ$ là góc giữa AD và mặt phẳng (BCD) .

Ta có $DM = MN \cdot \sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

$$AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \sqrt{9a^2 - \left(\frac{110a^2}{16} + \frac{25a^2}{16}\right)} = \frac{3a}{4}.$$

$$DN = MN = \frac{5a}{4}.$$

Nếu N nằm giữa A và D thì $AD = AN + DN = 2a$.

Nếu A nằm giữa N và D thì $AD = DN - AN = \frac{a}{2}$ (loại).

Chọn đáp án (A)

□

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, $AC \perp BD$ với $AB = a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD) bằng b và khoảng cách từ D đến (ABC) bằng $2b$. Gọi M là điểm thay đổi trên đoạn AB . Tính S là giá trị nhỏ nhất của tổng $MC + MD$ theo a, b .

(A) $S = \sqrt{a^2 + 9b^2}$.

(B) $S = b + \sqrt{a^2 + 4b^2}$.

(C) $S = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4b^2}$.

(D) $S = 2b + \sqrt{a^2 + 4b^2}$.

Lời giải.

Có $AC \perp (ABD)$, suy ra $d(C, (ABD)) = CA \Rightarrow CA = b$.

Lại có $BD \perp AB$, $AC \perp BD$ suy ra $BD \perp (ABC) \Rightarrow d(D, (ABC)) = DB = 2b$.

Do các tam giác MBD và MAC vuông nên ta có

$$MC + MD = \sqrt{MA^2 + AC^2} + \sqrt{MB^2 + BD^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

Suy ra

$$MC + MD = \sqrt{MA^2 + AC^2} + \sqrt{MB^2 + BD^2} \geq \sqrt{(AM + BM)^2 + (AC + BD)^2} = \sqrt{a^2 + 9b^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD} \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{3}AB$.

Vậy $\min S = \sqrt{a^2 + 9b^2}$ khi M thuộc đoạn AB sao cho $AM = \frac{a}{3}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng 60° .

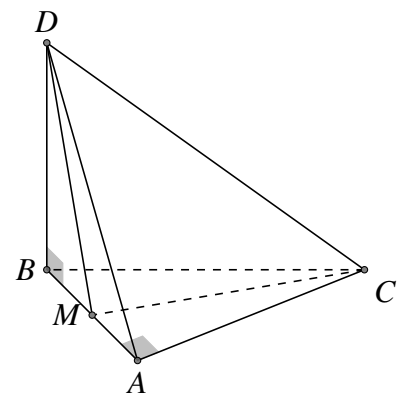
(A) $2a$.

(B) $a\sqrt{3}$.

(C) $a\sqrt{2}$.

(D) a .

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Trong (SAC) , kẻ $OI \perp SC$ ($I \in SC$)

(1).

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

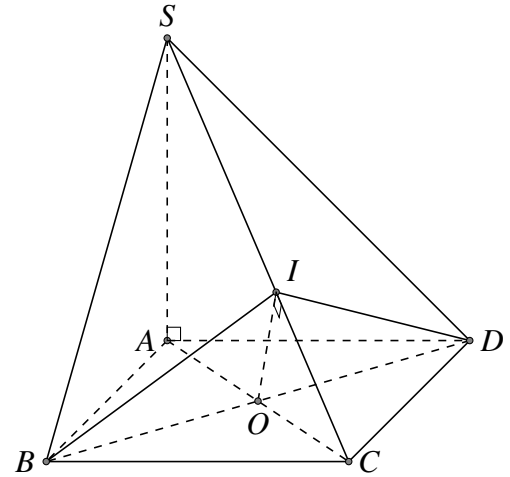
Do đó $BD \perp SC$

(2).

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (IBD)$. Từ đó suy ra

$$[(SBC), (SCD)] = (IB, ID).$$

Để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) là 60° thì $\widehat{BID} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BID} = 120^\circ$.



TH1. $\widehat{BID} = 60^\circ$. Khi đó $\widehat{BIO} = 30^\circ$.

Xét tam giác $\triangle BOI$ vuông tại O . Ta có $BI = \frac{BO}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{2}$.

$\triangle BIC$ vuông tại I có cạnh huyền $BC = a < BI = a\sqrt{2}$ (Vô lí).

TH2. $\widehat{BIC} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{BIO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle BIO$ vuông tại O . Ta có $IO = BO \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ta có $\triangle SAC \sim \triangle OIC$ (g-g), suy ra

$$\frac{SA}{OI} = \frac{SC}{OC} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{OC}. \quad (3)$$

Với $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$. Đặt $SA = x > 0$ thì (3) trở thành

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2a^2} \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án **(D)**



Câu 51. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài 1. Gọi M là trung điểm của AB . Góc giữa hai vectơ $\vec{OM}, \vec{BC}$ bằng

(A) 90° .

(B) 120° .

(C) 60° .

(D) 45° .

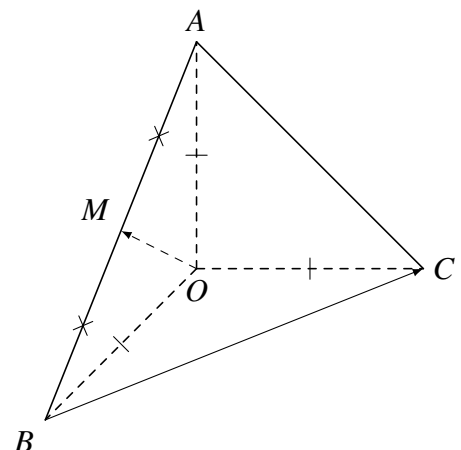
Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{OM}$ và $\vec{BC}$. Dễ thấy $\triangle ABC$ là tam giác đều và $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$. Như vậy ta có:

$$\vec{OM} \cdot \vec{BC} = (\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot \vec{BC} = \vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{AM} \cdot \vec{BC} = \vec{AM} \cdot \vec{BC}.$$

$$\Rightarrow \vec{OM} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \cos \alpha = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{BC}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } \alpha = 120^\circ.$$



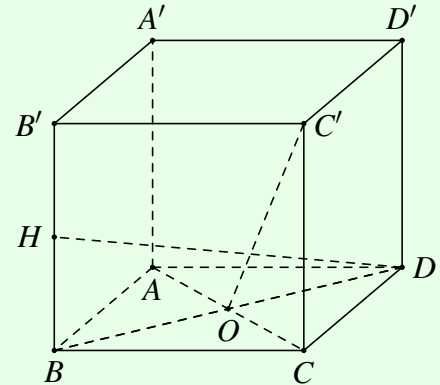
Chọn đáp án (B)



Câu 52.

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Gọi H là trung điểm cạnh BB' . Giá trị cô-sin của góc giữa HD và OC' bằng

- (A) $\cos(HD, OC') = \frac{2\sqrt{14}}{21}$. (B) $\cos(HD, OC') = \frac{4\sqrt{14}}{21}$.
(C) $\cos(HD, OC') = \frac{\sqrt{14}}{21}$. (D) $\cos(HD, OC') = \frac{1}{3}$.



Lời giải.

Dựng $AK \perp A'O$, dễ dàng chứng minh được $AK \perp (A'BD)$.

Ta có $AK = d(A, (A'BD)) = d(C, (A'BD)) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác ABD có $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow AO = \frac{a}{2}$.

Xét $\Delta A'AO$ ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{AA'^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $HB \Rightarrow OI \parallel HD$ và $BI = \frac{1}{4}AA' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

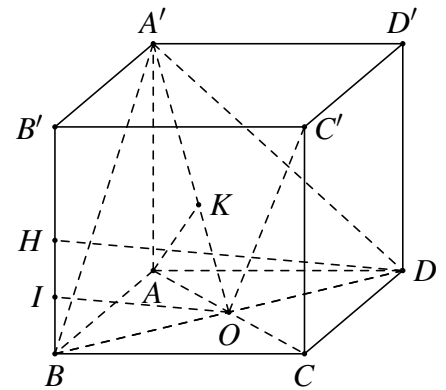
Xét ΔOBI ta có $OI^2 = OB^2 + BI^2 = \frac{7a^2}{8}$,

Xét $\Delta C'CO$ ta có $OC'^2 = OC^2 + CC'^2 = \frac{9a^2}{4}$.

Xét $\Delta C'B'I$ ta có $C'I^2 = C'B'^2 + B'I^2 = \frac{17a^2}{8}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin trong $\Delta C'OI$ suy ra

$$\cos(HD, OC') = \cos(OI, OC') = \frac{OI^2 + OC'^2 - C'I^2}{2OI \cdot OC'} = \frac{2\sqrt{14}}{21}.$$



Chọn đáp án (A)

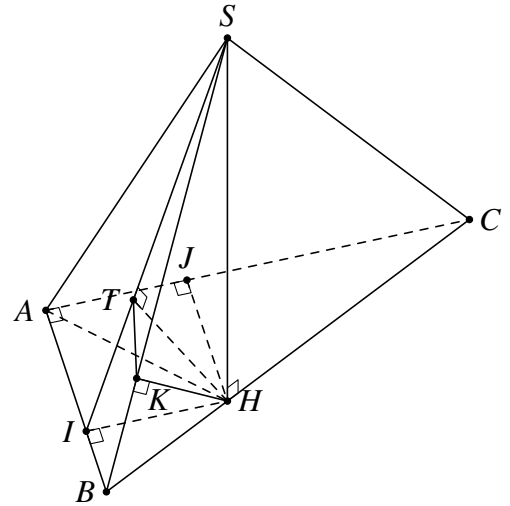


Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$.

- (A) $\frac{\sqrt{51}}{17}$. (B) $\frac{\sqrt{51}}{3}$. (C) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. (D) $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

Lời giải.

- Kẻ $HI \perp AB$ ($I \in AB$), $HJ \perp AC$ ($J \in AC$). Dễ thấy $HI \parallel AC$ và $HJ \parallel AB$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) nên $AIHJ$ là hình bình hành.
- Có $HI \perp AB$ và $SH \perp AB$ (vì $SH \perp (ABC)$) nên $AB \perp (SHI)$
 $\Rightarrow$ góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SIH} = 60^\circ$.
 Tương tự thì $\widehat{SJH} = 60^\circ$.
 Kẻ $HK \perp SB$ ($K \in SB$) và $HT \perp SI$ ($I \in SI$).
 Ta có $HT \perp AB$ và $HT \perp SI \Rightarrow HT \perp (SAB) \Rightarrow HT \perp SB$
 và $HK \perp SB \Rightarrow$ góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{HKT}$.



- Ta có $HI = SH \cot \widehat{SIH} = SH \cot 60^\circ$ và $HJ = SH \cot \widehat{SJH} = SH \cot 60^\circ$
 $\Rightarrow HI = HJ \Rightarrow AIHJ$ là hình thoi $\Rightarrow AH$ là phân giác $\widehat{BAC}$.
 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5}a$, $\frac{BH}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{5}}{3}a$, $CH = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$.
 $\frac{BH}{BC} = \frac{HI}{AC} \Rightarrow HI = HJ = \frac{2}{3}a$, $SH = HI \tan \widehat{SIH} = HI \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$,
 $HT = HI \sin \widehat{SIH} = HI \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{6}a$.
 Tam giác SHB vuông tại H ($SH \perp (ABC)$) có đường cao HK
 $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{10}{\sqrt{255}}a$.
 Vì $HT \perp (SAB)$ nên $HT \perp TK$ từ đó $TK = \sqrt{HK^2 - HT^2} = \frac{1}{\sqrt{17}}a$
 $\Rightarrow \tan \widehat{HKT} = \frac{HT}{TK} = \frac{\sqrt{51}}{3}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Cho $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

(A) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

(B) $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$.

(C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SC . Do $SA = AC = 2a$ nên

$$AM \perp SC. \quad (1)$$

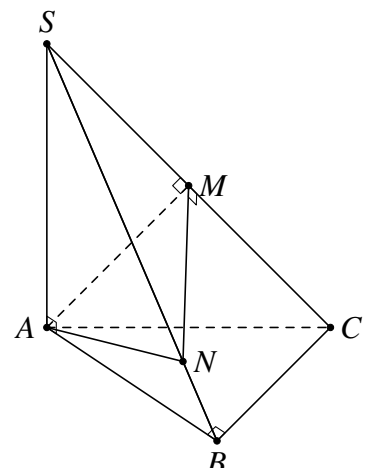
Trong (SBC) , gọi điểm N thuộc cạnh SB sao cho

$$MN \perp SC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AMN)$. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác AMN .

Ta có $AM = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$.

(3)



Vì $\triangle SMN \sim \triangle SBC$ nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow MN = \frac{SM \cdot BC}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}. \quad (4)$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow SN = \frac{SC \cdot MN}{BC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 1.

Xét $\triangle SAB$, $\cos S = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle SAB$,

$$AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos S = 4a^2 + \frac{16a^2}{5} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2}{5}.$$

$$\Leftrightarrow AN = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) đặt $p = \frac{AM + MN + AN}{2}$. Ta tính được

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-MN)(p-AN)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} &= \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow \frac{SM \cdot S_{AMN}}{SA \cdot S_{ACB}} &= \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow S_{AMN} &= \frac{S_{ACB} \cdot SA \cdot SN}{SC \cdot SB} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ có SO vuông góc với đáy và O là giao điểm của AC và BD . Giả sử $SO = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$. Gọi M là trung điểm của SC . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MOB) là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

(A) 4.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 3. □

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của OC . Suy ra $MK \perp (ABCD)$.

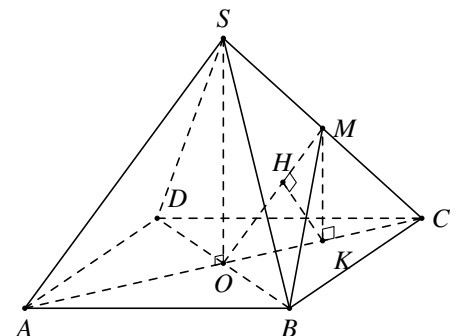
Kẻ $KH \perp OM$ với $H \in OM$, suy ra $HK \perp (MOB)$.

Ta có

$$d(S, (MOB)) = d(C, (MOB)) = 2d(K, (MOB)) = 2KH.$$

Mặt khác $OK = 1$, $MH = \sqrt{2}$. Do đó $HK = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(S, (MOB)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Do đó $a + b = 5$.

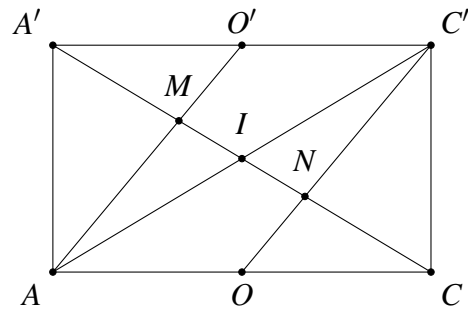
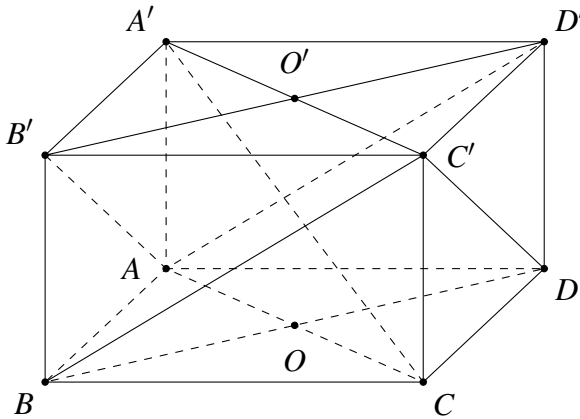


Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AD'B')$ và $(C'BD)$.

- (A) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ (B) $\frac{abc}{3\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$
 (C) $\frac{abc}{6\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ (D) $\frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Lời giải.



Gọi thêm các điểm như hình vẽ. khi đó M, N là giao điểm của $A'C$ với mặt phẳng $(AD'B')$ và mặt phẳng $(C'BD)$.

Do I là trung điểm $A'C$ và M, N là trọng tâm $\triangle AA'O'$ và $\triangle CC'O$ nên suy ra $A'M = MN = NC$.

Lại có $(AB'D') \parallel (C'BD)$. Từ đó ta có $d(A', (AB'D')) = d((AB'D'), (C'BD))$.

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2(A', (AB'D'))} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} \Rightarrow d(A', (AB'D')) = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $C'B', C'D'$. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (AEF) .

- (A) $\frac{a^2\sqrt{17}}{4}$ (B) $\frac{7a^2\sqrt{17}}{12}$ (C) $\frac{a^2\sqrt{17}}{8}$ (D) $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$

Lời giải.

Gọi $E' = EF \cap A'B'$, $F' = EF \cap A'D'$,

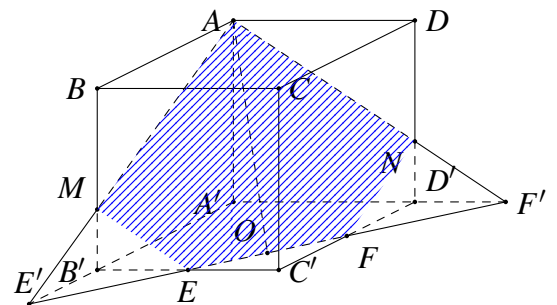
$M = AE' \cap BB'$, $N = AF' \cap DD'$.

Ngũ giác $AMEFN$ là thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (AEF) . Gọi O là trung điểm của EF . Ta có

$$AO = \sqrt{AA'^2 + A'O^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}.$$

Ta có $\triangle B'E'E = \triangle C'FE = \triangle D'FF'$ nên ta có

$$E'E = EF = FF' = \frac{\sqrt{2}a}{2}; B'E' = C'F = D'F' = \frac{a}{2}.$$



Do $B'E' \parallel AB$ nên $\frac{ME'}{AM} = \frac{B'E'}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ME'}{AE'} = \frac{1}{3}$.

Ta có $S_{AE'F'} = \frac{1}{2}AO \cdot E'F' = \frac{3a^2\sqrt{17}}{8}$.

Ta có $\frac{S_{E'ME}}{S_{AE'F'}} = \frac{E'M \cdot E'E}{E'A \cdot E'F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Do $\triangle MEE' = \triangle NFF'$ nên ta có $S_{MEE'} = S_{NFF'} = \frac{1}{9}S_{AE'F'}$.

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là $S_{AMEFN} = \frac{7}{9}S_{AE'F'} = \frac{7}{9} \cdot \frac{3a^2\sqrt{17}}{8} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 58. Cho hình tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O , $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$. Cạnh OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) , $OA = a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM .

(A) $h = \frac{a\sqrt{3}}{15}$.

(B) $h = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

(C) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(D) $h = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

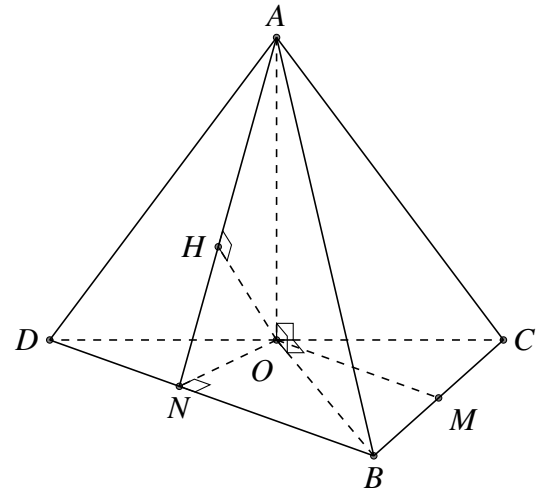
Lời giải.

Trên tia CO lấy điểm D sao cho O là trung điểm của CD , kết hợp với M là trung điểm của BC suy ra MO là đường trung bình của tam giác BCD , suy ra $MO \parallel BD$.

Từ đó ta có $OM \parallel (ABD)$ suy ra

$$d(OM; AB) = d(OM; (ABD)) = d(O; (ABD))$$

Trong mặt phẳng (BCD) , kẻ $ON \perp BD$ tại N . Do $OA \perp (OBC)$ suy ra $AO \perp BD$, từ đó suy ra $(OAN) \perp BD$, mà $BD \subset (ABD)$ suy ra $(OAN) \perp (ABD)$.



Trong mặt phẳng (AON) , kẻ $OH \perp AN$ tại H suy ra $OH \perp (ABD)$. Từ đó suy ra $d(O; (ABD)) = OH$.

Trong tam giác vuông OBD có $\frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OD^2}$.

Trong tam giác vuông OAN có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OD^2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d(AB; OM) = d(O; (ABD)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

(A) a .

(B) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{a}{2}$.

Lời giải.

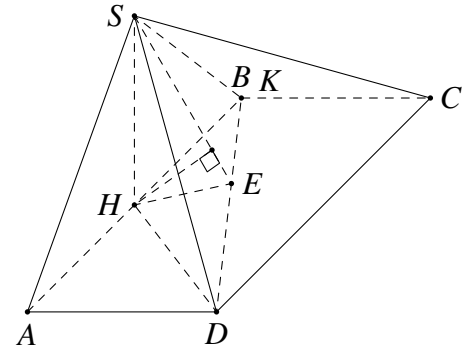
Gọi H là trung điểm cạnh AB , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh BD , gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh SE .

Ta có $BD \perp HE$ và $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHE)$.

Khi đó $(SHE) \perp (SBD) \Rightarrow HK \perp (SBD)$.

Vậy $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HK$.



Tam giác ABD có $\sin B = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{HE}{HB} \Leftrightarrow HE = HB \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông SHE ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $d(A, (SBD)) = 2HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân có $AB = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Gọi M là điểm nằm trên đường thẳng AC sao cho $\vec{AC} = 2\vec{CM}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AB .

(A) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

(B) $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

(C) $\frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

(D) $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

Lời giải.

Qua điểm M , kẻ đường thẳng Δ song song với AB . Khi đó $AB \parallel (SM, \Delta)$.

Suy ra

$$d(AB, SM) = d(AB, (SM, \Delta)) = d(A, (SM, \Delta)).$$

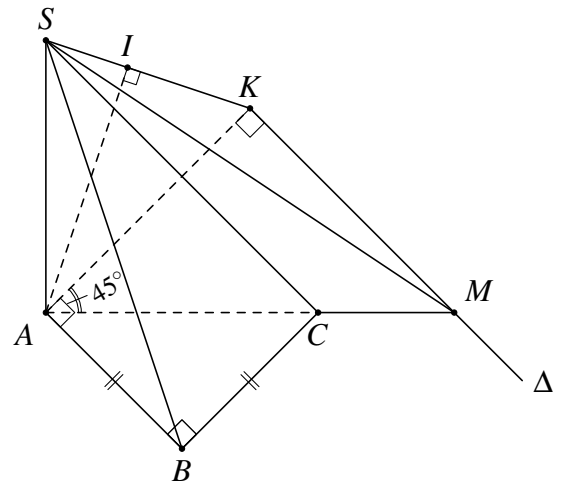
Kẻ $AK \perp \Delta$ tại K , $AI \perp SK$ tại I .

Suy ra $d(A, (SM, \Delta)) = AI$.

Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

$$AK = AM \cdot \cos 45^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$



Tam giác SAK vuông tại A , suy ra $AI = \frac{AS \cdot AK}{\sqrt{AS^2 + AK^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

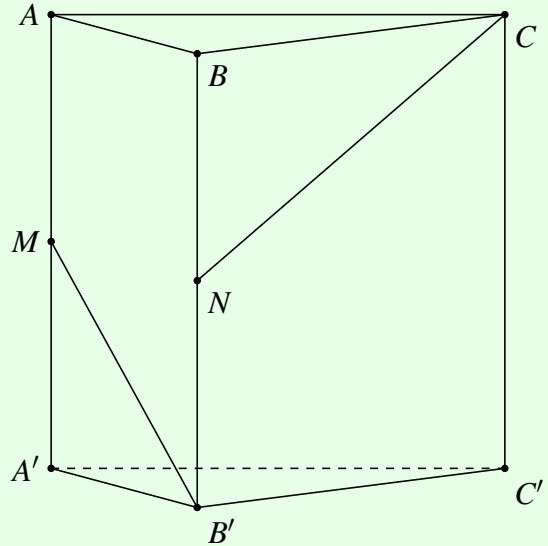
Chọn đáp án (C)

□

Câu 61.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách của hai đường thẳng $B'M$ và CN .

- (A) $d(B'M, CN) = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2 + 12b^2}}$.
 (B) $d(B'M, CN) = \frac{a}{2}$.
 (C) $d(B'M, CN) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 (D) $d(B'M, CN) = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}$.



Lời giải.

Gọi P, I lần lượt là trung điểm của CC', MP .

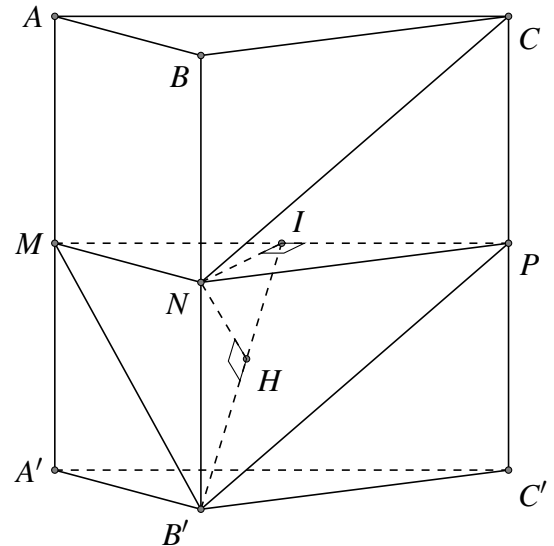
Gọi H là hình chiếu của N lên $B'I$.

Ta có $\begin{cases} MP \perp NI \\ MP \perp B'I \end{cases} \Rightarrow MP \perp (B'NI)$.

Ta có $\begin{cases} NH \perp B'I \\ NH \perp MP \end{cases} \Rightarrow NH \perp (MPB')$.

Vì $CN \parallel B'P$ nên

$$\begin{aligned} d(B'M, CN) &= d(CN, (MPB')) \\ \Rightarrow d(B'M, CN) &= d(N, (MPB')) \\ \Rightarrow d(B'M, CN) &= NH. \end{aligned}$$



$$\text{Ta có } \frac{1}{NH^2} = \frac{1}{B'N^2} + \frac{1}{NI^2} = \frac{4}{b^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow NH = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2 + 4b^2}}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45° . Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng

- (A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $AC' \perp SC$ với $C' \in SC$.

Gọi $AC' \cap SO = I$ và qua I vẽ đường thẳng

$B'D' \parallel BD$ (với $B' \in SB; D' \in SD$).

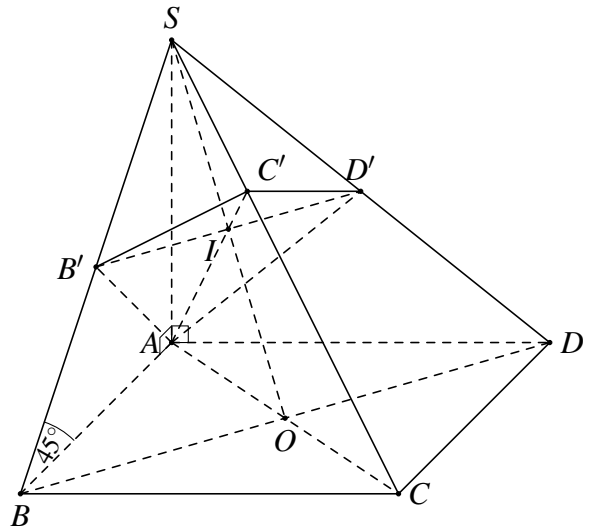
Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là tứ giác $AB'C'D'$.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp (SAC)$

$\Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Diện tích thiết diện là $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D'$.

Góc của SB với đáy là $\widehat{SBA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AB = a$.



Trong tam giác vuông SAC có $\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AC' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AB' \perp BC \\ AB' \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do đó B' là trung điểm SB (do tam giác SAB vuông cân tại A).

Tương tự D' là trung điểm SD (do tam giác SAD vuông cân tại A).

Do đó $B'D' = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 63. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a, AD = 3a, AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

(A) $\frac{29}{61}$.

(B) $\frac{137}{169}$.

(C) $\frac{27}{34}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A', A'B'C'D'$.

Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.

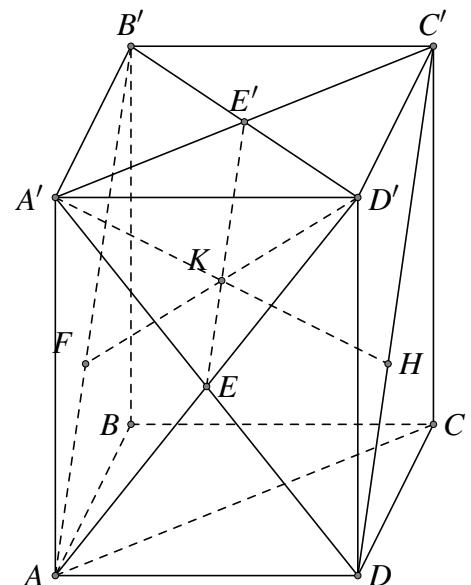
Dựng $A'H, D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C', AB'D'$.

Dễ thấy: $A'H, D'F, EE'$ đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE' \end{cases}$.

Khi đó ta có góc giữa $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'F$.

Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.

Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.



Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \frac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \frac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \frac{\sqrt{305}}{10}a.$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta có: } D'K = \frac{\sqrt{305}}{10}a.$$

$$\text{Trong tam giác } A'D'K \text{ có: } \cos \widehat{A'KD'} = \frac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\frac{29}{61}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \left| \cos \widehat{A'KD'} \right| = \frac{29}{61}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 64. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của α .

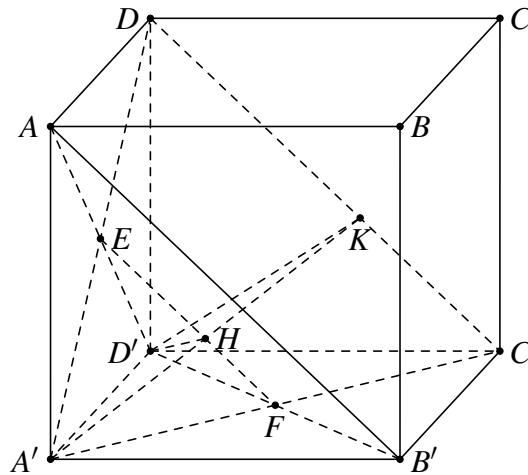
(A) $45,2^\circ$.

(B) $38,1^\circ$.

(C) $61,6^\circ$.

(D) $53,4^\circ$.

Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:

Phần 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:

• **Bước 1: Tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:**

Trong mặt phẳng $(ADD'A')$ gọi E là giao điểm của AD' và $A'D$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi F là giao điểm của $B'D'$ và $A'C'$.

Khi đó EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$.

• **Bước 2: Trong mỗi mặt phẳng, ta cần tìm đường thẳng vuông góc với giao tuyến:**

Trong mặt phẳng $(DA'C')$ kẻ $A'H \perp EF$ tại H , $A'H$ cắt DC' tại K .

Ta chứng minh $D'H \perp EF$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} DC' \perp A'K \\ DC' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow DC' \perp (A'D'K) \Rightarrow DC' \perp D'H.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} DC' \perp D'H \\ D'C \parallel EF \end{cases} \Rightarrow D'H \perp EF.$$

• **Bước 3: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:**

$$\text{Ta có } \begin{cases} D'H \subset (AB'D') \\ D'H \perp EF \\ A'H \subset (DA'C') \\ A'H \perp EF \\ (AB'D') \cap (DA'C') = EF \end{cases} \Rightarrow \alpha = ((AB'D'), (DA'C')) = (D'H, A'H).$$

Phần 2: Tính góc α : Ta sẽ sử dụng định lý cosin trong tam giác $A'HD'$:

• **Bước 1: Chứng minh tam giác $A'HD'$ cân:**

Trong tam giác $\triangle A'DC'$ ta có EF là đường trung bình, nên suy ra H là trung điểm $A'K$.

Vì $A'D' \perp (DD'C'C)$ nên $A'D' \perp D'K$. Do đó tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D' .

Xét tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D' có $D'K$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $D'H = A'H = \frac{A'K}{2}$.

• **Bước 2: Tính độ dài cạnh $A'K$:**

Ta tính đường cao $A'K$ của tam giác $\triangle A'DC'$ thông qua diện tích.

Áp dụng định lý Pytago ta tính được độ dài các cạnh tam giác $\triangle A'DC'$ là: $A'D = 5$, $A'C' = \sqrt{13}$, $DC' = 2\sqrt{5}$.

Sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{A'DC'} = \sqrt{61}$.

$$\text{Mặt khác } S_{A'DC'} = \frac{1}{2} A'K \times DC' \Rightarrow \sqrt{61} = \frac{1}{2} A'K \times 2\sqrt{5} \Rightarrow A'K = \frac{\sqrt{305}}{5}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } D'H = A'H = \frac{A'K}{2} = \frac{\sqrt{305}}{10}.$$

• **Bước 3: Tính góc α bằng định lý cosin:**

Trong tam giác $\triangle A'HD'$ ta có:

$$\cos \widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA' \times HD'} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{305}}{10} \right)^2 - 3^2}{2 \left(\frac{\sqrt{305}}{10} \right)^2} = \frac{-29}{61}$$

Suy ra $\widehat{A'HD'} = 118,4^\circ$. Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$ bằng $61,6^\circ$.

Vậy $\alpha = 61,6^\circ$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 65. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết $AB' \perp A'M$ và $AB' = AM$. Cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$.

(A) $\frac{13}{2}$.

(B) $\sqrt{3}$.

(C) $\frac{13}{8}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

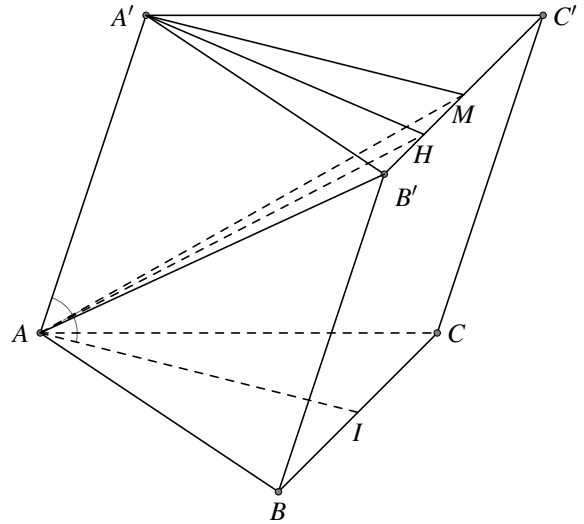
Vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$. Suy ra $A'M \perp (AB'C') \Rightarrow (AB'C') \perp (A'B'C')$.

Gọi H là trung điểm $B'M$, vì tam giác $AB'M$ cân tại A nên $AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp (A'B'C')$.

Suy ra góc giữa AA' và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{AA'H} = 60^\circ \Rightarrow$

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{39}}{4}.$$

Do $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) .



Gọi N là trung điểm của BC suy ra $BC \perp (AHN)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{ANH} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AH}{AN} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án (A)



Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .

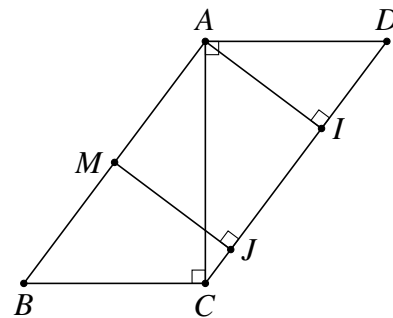
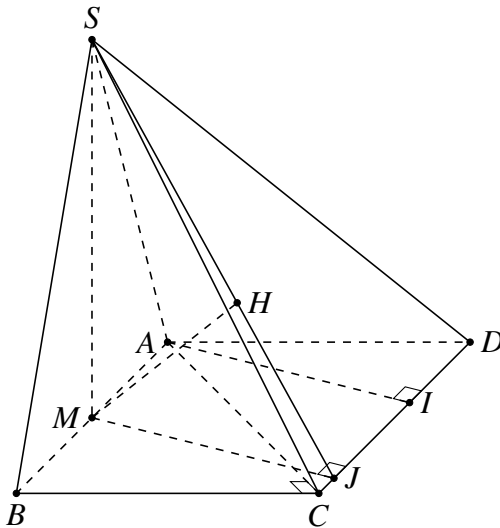
(A) $d = 4\sqrt{11}$.

(B) $d = \sqrt{22}$.

(C) $d = 2\sqrt{22}$.

(D) $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

Lời giải.



Tam giác SBC có $SB = SC = 11$ và $\widehat{SBC} = 60^\circ$ nên SBC là tam giác đều, suy ra $BC = 11$.

Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{SAB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Khi đó

$$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = 11\sqrt{3}.$$

Tam giác SAC cân tại S có $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên SAC là tam giác vuông tại S . Khi đó

$$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 11\sqrt{2}.$$

Lại có $BC^2 + AC^2 = 11^2 + (11\sqrt{2})^2 = (11\sqrt{3})^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C .

Gọi M là trung điểm của AB , khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra $SM \perp (ABCD)$.

Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD)).$$

Từ M kẻ $MJ \perp CD$ tại J , kẻ $MH \perp SJ$ tại H .

Ta có $CD \perp MJ$ và $CD \perp SM$ nên $CD \perp (SMJ)$, suy ra $CD \perp MH$.

Lại có $MH \perp SJ$ và $MH \perp CD$ nên $MH \perp (SJD)$ hay $MH \perp (SCD)$.

Vì vậy $d(M, (SCD)) = MH$.

Tam giác SAM vuông tại M nên

$$\tan \widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} \Leftrightarrow SM = AM \tan \widehat{SAM} = \frac{11\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{2}.$$

$$\text{Kẻ } AI \perp CD \text{ tại } I, \text{ khi đó } MJ = AI = \frac{AD \cdot AC}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \frac{11 \cdot 11\sqrt{2}}{\sqrt{11^2 + (11\sqrt{2})^2}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác SMJ vuông tại M ta có

$$MH = \frac{SM \cdot MJ}{\sqrt{SM^2 + MJ^2}} = \frac{\frac{11}{2} \cdot \frac{11\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{11\sqrt{6}}{3}\right)^2}} = \sqrt{22}.$$

Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 67. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a . Trên các đường thẳng vuông góc (P) tại B và C lần lượt lấy các điểm D, E nằm cùng một bên đối với (P) sao cho $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CE = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ADE) .

(A) 60° .

(B) 30° .

(C) 45° .

(D) 90° .

Lời giải.

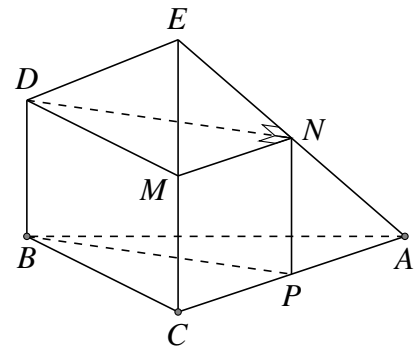
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EC, EA, AC . Dễ thấy mặt phẳng (DMN) song song với mặt phẳng ABC nên góc giữa mặt phẳng (ADE) và mặt phẳng (P) là góc giữa (ADE) và mặt phẳng (DMN) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BP \perp AC \\ BP \perp CE \end{cases} \Rightarrow BP \perp (ACE).$$

Mặt khác $NP \parallel BD$ và $NP = \frac{1}{2}EC = BD$ nên $BPNM$ là hình bình hành. Do đó $BP \parallel DN \Rightarrow DN \perp (EAC)$. Suy ra $DN \perp EN$ và $DN \perp MN$. Vậy góc giữa (P) và mặt phẳng (DMN) là góc giữa EN và MN . Dễ thấy $\widehat{ENM} = \widehat{EAC} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A)

□



Câu 68. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

(A) $\frac{7}{8}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{5}{8}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

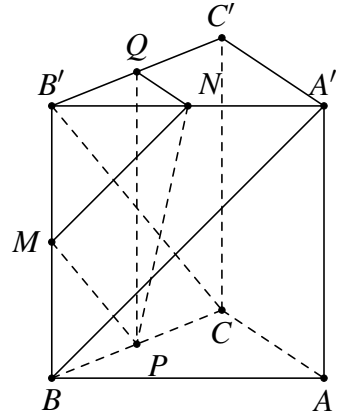
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BB', A'B'$ và BC . Khi đó ta có $MN \parallel A'B$ và $MP \parallel B'C$ nên suy ra $\alpha = (A'B, B'C) = (MN, MP)$. Đồng thời ta có

$$MN = \frac{A'B}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + A'A^2}}{2} = a, MP = \frac{B'C}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}{2} = a.$$

Gọi Q là trung điểm $B'C'$. Ta có $PQ \parallel B'C' \Rightarrow PQ \perp (A'B'C') \Rightarrow PQ \perp QN$

$$\text{nên } NP = \sqrt{NQ^2 + QP^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 3a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = -\frac{5}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{8}.$$



Chọn đáp án (C)



Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = \sqrt{2}, SA \perp (ABCD), SA = 3$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$. (C) 1. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c) nên } \widehat{MBA} = \widehat{ACB}$$

suy ra $\widehat{MBA} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $BM \perp AC$.

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

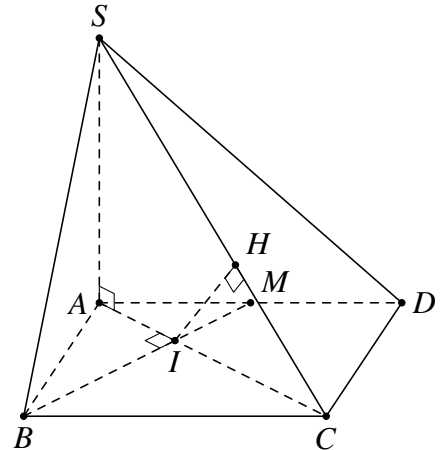
Gọi I là giao điểm của BM và AC , kẻ $IH \perp SC$ tại H .

Khi đó $BM \perp IH$ nên IH là đường vuông góc chung của BM và SC .

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{3} \text{ và } \frac{AI}{IC} =$$

$$\frac{AM}{BC} = \frac{1}{2} \text{ nên } IC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có } \triangle IHC \sim \triangle SAC \text{ (g.g) nên } IH = \frac{IC \cdot SA}{SC} = 1.$$



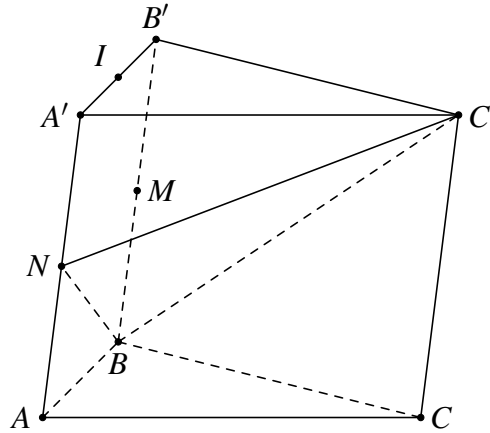
Chọn đáp án (C)



Câu 70. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại $C, AB = 2a, AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là 60° . Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB' . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

- (A) $\frac{a\sqrt{74}}{37}$. (B) $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$. (C) $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$. (D) $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Khi đó $IC' \perp (ABB'A')$, suy ra $(BC', \widehat{ABB'A'}) = \widehat{IBC'} = 60^\circ$.

Ta có $IB = \sqrt{B'B^2 + B'I^2} = a\sqrt{2}$, $BC' = \frac{IB}{\cos 60^\circ} = 2a\sqrt{2}$, $IC' = BC' \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{6}$,

$NB = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, $NC' = \sqrt{A'N'^2 + A'C'^2} = \sqrt{A'N'^2 + A'I^2 + IC'^2} = \frac{a\sqrt{29}}{2}$.

Kí hiệu $p = \frac{1}{2}(NB + BC' + NC')$ thì $S_{\triangle BC'N} = \sqrt{p(p - NB)(p - BC')(p - NC')} = a^2 \frac{\sqrt{111}}{4}$.

Diện tích tam giác ABN là $S_{\triangle ABN} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $d(M, (BC'N)) = d(A', (BC'N)) = d(A, (BC'N)) = \frac{3 \cdot V_{ABC'N}}{S_{\triangle BC'N}} = \frac{S_{\triangle ABN} \cdot IC'}{S_{\triangle BC'N}} = \frac{2a\sqrt{74}}{37}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

(A) $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

(B) $d = a\sqrt{3}$.

(C) $d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

(D) $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Vì H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ nên HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi SD và $(ABCD)$ bằng góc giữa SD và HD chính là $\widehat{SDH}$. Khi đó $\widehat{SDH} = 30^\circ$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

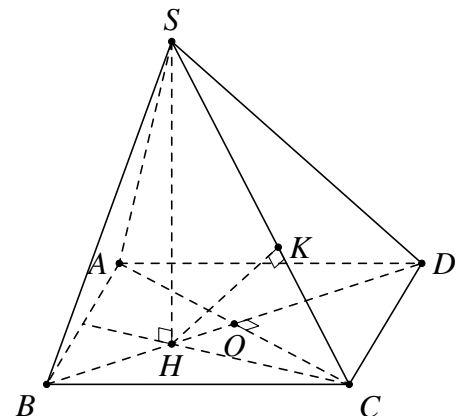
$$BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác $BH = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$.

Suy ra $DH = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}BO = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SHD ta có $SH = DH \tan \widehat{SDH} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{3}$.

Ta có $HC \perp AB$, $AB \parallel CD$ nên $HC \perp CD$.



Lại có $CD \perp SH$. Do đó $CD \perp (SHC)$, suy ra $(SHC) \perp (SCD)$.

Kẻ $HK \perp SC$ tại K . Suy ra $HK \perp (SCD)$.

$$\text{Vậy } d(H, (SCD)) = HK = \frac{HC \cdot SH}{\sqrt{HC^2 + SH^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Ta lại có

$$\frac{d(B, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{BD}{DH} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 72.

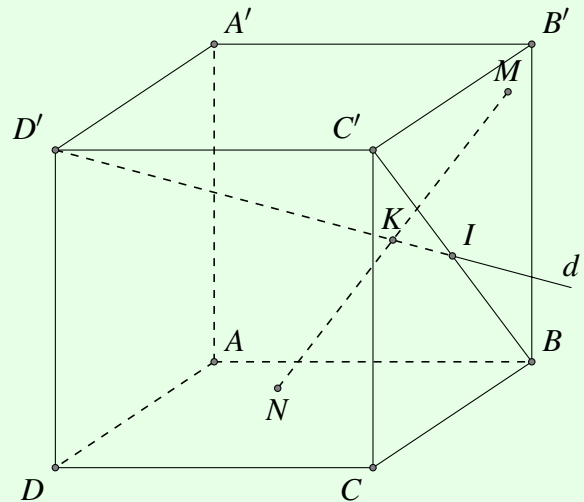
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

(A) $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

(D) $\frac{2\sqrt{3}a}{5}$.



Lời giải.

Kẻ ME vuông góc với CB , tam giác MEN vuông tại E nên $MN = 2EK$.

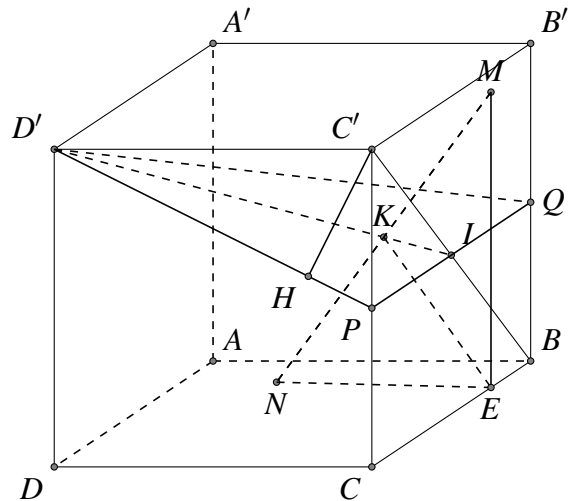
Vậy MN bé nhất khi và chỉ khi EK bé nhất. Lúc này EK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và đường thẳng CB .

Qua I kẻ PQ song song với BC (như hình vẽ).

Vậy $d(BC, d) = d(BC, (D'PQ)) = d(C, (D'PQ)) = d(C', (D'PQ)) = C'H$ (trong đó $C'H$ vuông góc với $D'P$).

$$\text{Ta có } \frac{1}{C'H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}$$

$$\Rightarrow C'H = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d(BC, d) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$



Chọn đáp án (A)



Câu 73. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

(A) $\frac{4\sqrt{43}}{43}$.

(B) $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

(C) $\frac{2\sqrt{43}}{43}$.

(D) $\frac{\sqrt{43}}{86}$.

Lời giải.

Dựng điểm E trong mặt phẳng (BCD) sao cho $BCDE$ là hình bình hành. Từ giả thiết $\widehat{BCD} = 90^\circ$ suy ra $BCDE$ là hình chữ nhật.

Ta có $AB \perp BC \Rightarrow ED \perp AB$, mà $ED \perp EB$ suy ra $DE \perp AE$. Tương tự ta có $BE \perp AE$ nên $AE \perp (BCDE)$.

Lại có $(AD, BC) = (AD, ED) = \widehat{ADE} = 60^\circ$, tam giác AED vuông tại E nên

$$AE = DE \tan \widehat{ADE} = BC \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AB, AD . Khi đó

$$\begin{cases} BC \perp BE \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AEB) \Rightarrow EH \perp BC.$$

Mà $EH \perp AB \Rightarrow EH \perp (ABC)$. Tương tự $EK \perp (ACD)$.

Do đó $((ABC), (ACD)) = (EH, EK)$. Tam giác AEB vuông tại E , đường cao EH có $AE = 3\sqrt{3}$, $EB = 4$ nên

$$AB = \sqrt{43}, AH = \frac{AE^2}{AB} = \frac{27}{\sqrt{43}}, EH = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

Tương tự với tam giác vuông AED , ta có $AD = 6$, $AK = \frac{9}{2}$, $EK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Tam giác } ABD \text{ có } \cos \widehat{BAD} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{9\sqrt{43}}{86}.$$

$$\text{Mặt khác } HK^2 = AH^2 + AK^2 - 2AH \cdot AK \cdot \cos \widehat{HAK} = \frac{2025}{172}.$$

$$\text{Tam giác } EHK \text{ có } \cos \widehat{HEK} = \frac{EH^2 + EK^2 - HK^2}{2EH \cdot EK} = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$$

$$\text{Vậy } \cos((ABC), (ACD)) = \cos(EH, EK) = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều và $AB = BC = CD = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính sin góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

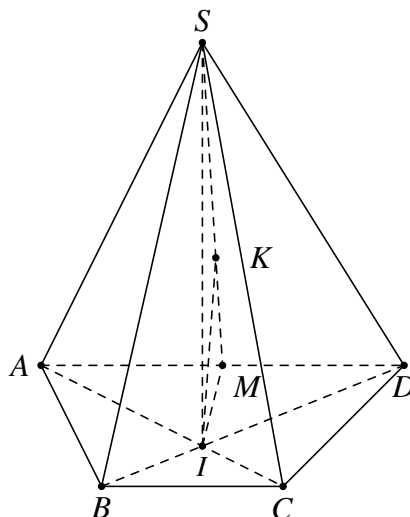
(A) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



- Gọi I là giao của AC và BD , vì mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
- Góc giữa SC và $ABCD$ là góc $\widehat{SCI} = 60^\circ$.
- Có $ABCD$ là nửa lục giác đều nên có $AD = 2a, \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{3}a$.
- Vì $BC \parallel AB \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{CI}{AI} = \frac{1}{2} \Rightarrow CI = \frac{\sqrt{3}}{3}a; AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}a; SI = IC \cdot \tan \widehat{SCI} = a; SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.
- Gọi M là trung điểm của AB , dễ thấy $IM \perp AD$ và

$$IM = AM \cdot \tan \widehat{DAI} = a \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

- Kẻ $IK \perp SM$. Có $\triangle SIM$ vuông tại I có đường cao $IK \Rightarrow \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IM^2} \Rightarrow IK = \frac{a}{2}$.
- Có $\frac{d(C; (SAD))}{d(I; (SAD))} = \frac{CA}{IA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C; (SAD)) = \frac{3}{4}a$.
- Gọi α là góc tạo bởi SC và $(SAD) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(C; (SAD))}{SC} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A)



Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45° . Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

(D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $AC' \perp SC$ với $C' \in SC$.

Gọi $AC' \cap SO = I$ và qua I vẽ đường thẳng

$B'D' \parallel BD$ (với $B' \in SB; D' \in SD$).

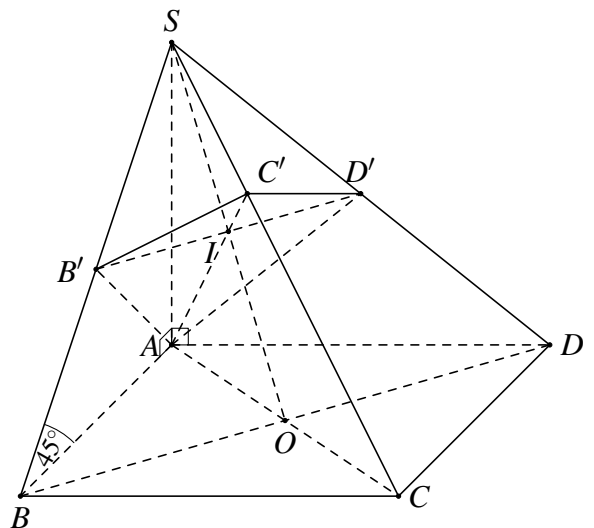
Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là tứ giác $AB'C'D'$.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp (SAC)$

$\Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Diện tích thiết diện là $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC' \cdot B'D'$.

Góc của SB với đáy là $\widehat{SBA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AB = a$.



Trong tam giác vuông SAC có $\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AC' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AB' \perp BC \\ AB' \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do đó B' là trung điểm SB (do tam giác SAB vuông cân tại A).

Tương tự D' là trung điểm SD (do tam giác SAD vuông cân tại A).

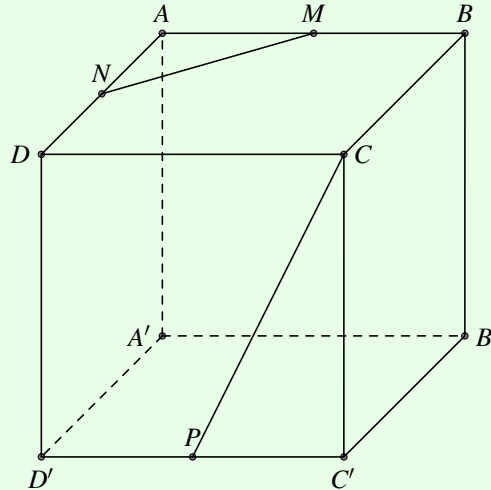
$$\text{Do đó } B'D' = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP .



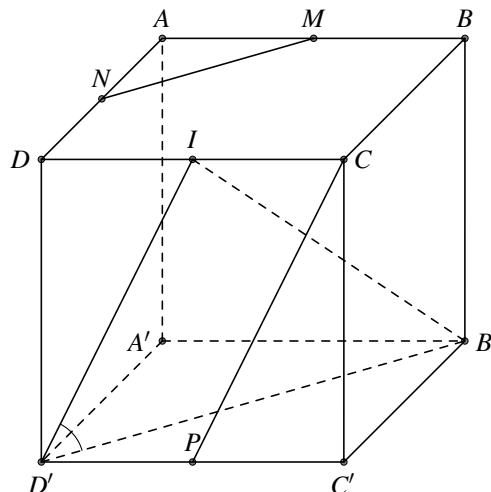
(A) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

(D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD , dễ thấy $D'ICP$ là hình bình hành do có $CI = D'P$ và $CI \parallel D'P$, từ đó $CP \parallel D'I$, mặt khác ta có $MN \parallel D'B'$ nên $(MN, CP) = (D'B', D'I) = \widehat{ID'B'} = \alpha$.

Không mất tính tổng quát gọi a ($a > 0$) là độ dài của cạnh hình lập phương. Khi đó tính được

$$\bullet IB' = \sqrt{IC^2 + CB'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\bullet B'D' = \sqrt{2}a; ID' = \sqrt{DD'^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{D'I^2 + D'B'^2 - IB'^2}{2 \cdot ID' \cdot D'B'} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa SC và $mp(ABC)$ là 45° . Hình chiếu của S lên $mp(ABC)$ là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

(A) $\frac{a\sqrt{210}}{30}$.

(B) $\frac{a\sqrt{210}}{45}$.

(C) $\frac{a\sqrt{210}}{15}$.

(D) $\frac{a\sqrt{210}}{20}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

Do đó

$$d(SA; BC) = d[BC; (SAD)] = d[B; (SAD)].$$

$$\text{Từ } \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d[B; (SAD)] = \frac{3}{2} d[H; (SAD)].$$

Ta có $SH \perp (ABC)$ nên suy ra

$$(\widehat{SC; (ABC)}) = (\widehat{SC; HC}) = \widehat{SCH}.$$

Suy ra $\widehat{SCH} = 45^\circ$.

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos \widehat{HBC} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Tam giác SHC vuông tại H và $\widehat{SCH} = 45^\circ$ nên tam giác SHC vuông cân tại H . Từ đó ta có $SH = HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Kẻ $HK \perp AD$ tại $K \Rightarrow \widehat{HAK} = 60^\circ$. Do đó

$$HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{2a}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $HI \perp SK$ tại K , suy ra $HI \perp (SAD) \Rightarrow d[H; (SAD)] = HI$.

Xét tam giác SHA vuông tại H , ta có

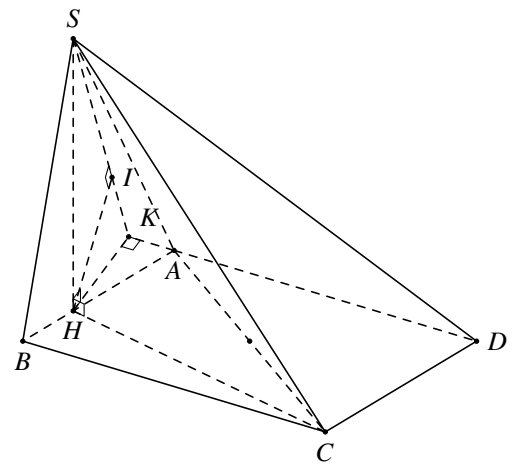
$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{30}{7a^2}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{3}{2} d[H; (SAD)] = \frac{3}{2} HI = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{210}}{30} = \frac{\sqrt{210}}{20}.$$

Chọn đáp án (D)

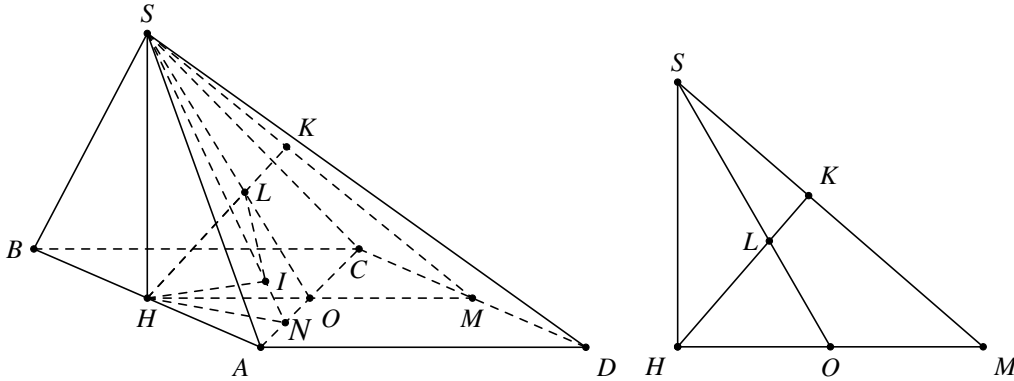
□



Câu 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{7}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$. (C) $\frac{5}{7}$. (D) $\frac{\sqrt{6}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H, M, O lần lượt là trung điểm AB, CD, HM ; K, N, I lần lượt là hình chiếu của H trên SM, AC, SN ; L là giao điểm của HK và SO .

Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$ mà $CD \perp HM$ nên $HK \perp CD$, suy ra $HK \perp (SCD)$. Tương tự, $HI \perp (SAC)$. Khi đó $\varphi = (HK, HI) = \widehat{LHI}$.

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}$, $HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$, $\frac{KS}{KM} = \frac{HS^2}{HM^2} = \frac{3}{4}$. Lại có

$$\frac{HK}{HL} \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HK} = \frac{4}{7} \overrightarrow{HS} + \frac{3}{7} \overrightarrow{HM} = \frac{4}{7} \overrightarrow{HS} + \frac{6}{7} \overrightarrow{HO}$$

mà S, L, O thẳng hàng nên $\frac{HK}{HL} = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}$. Vậy

$$\cos \varphi = \frac{HI}{HL} = \frac{10}{7} \cdot \frac{HI}{HK} = \frac{5}{7}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Cho $\widehat{BSC} = 45^\circ$, gọi $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin \alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) bằng 60° .

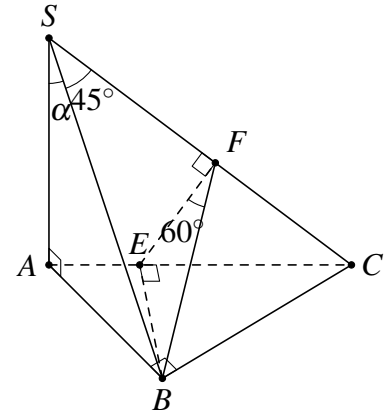
- (A) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{9}$. (B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$. (C) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Kẻ $BE \perp AC$ tại E , kẻ $EF \perp SC$ tại F .

Ta có

- $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$
- $\begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC.$
- $\begin{cases} SC \perp EF \\ SC \perp BE \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BEF) \Rightarrow SC \perp BF.$



Khi đó góc giữa (ASC) và (BSC) là $\widehat{BFE} = 60^\circ$.
Gọi $BC = x$, $(x > 0)$.

Tam giác SBC vuông cân tại B nên $SB = BC = x$, $SC = x\sqrt{2}$, $BF = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

$$BE = BF \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{6}}{4}.$$

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BE^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{8}{3x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{5}{3x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{3}{5}}x.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = a$, I là trung điểm SC ; hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC là trung điểm H của BC ; mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) theo a .

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Từ H vẽ $HN \perp AB$ và $HK \perp SN$.

Ta có $AB \perp NH$ và $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SNH)$.

Suy ra $HK \perp AB$.

Ta lại có $HK \perp SN$ nên $HK \perp (SAB)$.

Vậy $d(H, (SAB)) = HK$.

Mặt khác $(SAB) \cap (ABC) = AB$

và $SN \perp AB$, $NH \perp AB$

nên $((SAB); (ABC)) = \widehat{SNH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \frac{SC}{SI} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I, (SAB)) = \frac{1}{2} \cdot d(C, (SAB))$$

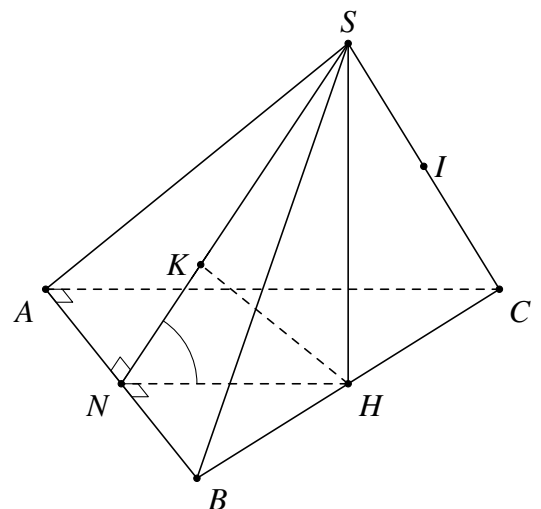
$$\text{và } \frac{CB}{HB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)).$$

$$\text{Ta có } d(I, (SAB)) = \frac{1}{2} \cdot d(C, (SAB)) = \frac{1}{2} \cdot 2d(H, (SAB)) = HK = HN \cdot \sin \widehat{HKN} = \frac{1}{2} AC \sin 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn đáp án (B)

□



Câu 81. Cho hình lập phương, mỗi cặp đỉnh của nó xác định một đường thẳng. Trong các đường thẳng đó, tìm số các cặp đường thẳng (không tính thứ tự) không đồng phẳng và không vuông góc với nhau.

(A) 96.

(B) 132.

(C) 192.

(D) 108.

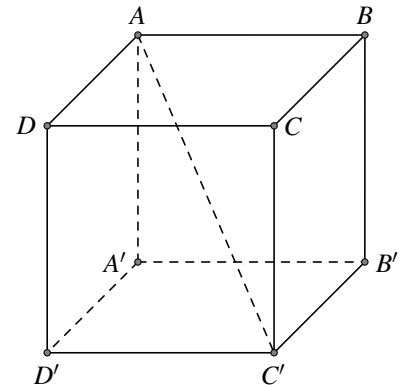
Lời giải.

Ta chia các đường thẳng này thành 3 loại.

Loại 1: Các đường thẳng chứa các cạnh của các mặt (ví dụ AB , AD ,...)

Loại 2: Các đường thẳng chứa các đường chéo của các mặt (ví dụ AC , AB' ,...)

Loại 3: Các đường thẳng không nằm trong các mặt (là 4 đường thẳng AC' , BD' , CA' và DB').



Ta có

- Hai đường thẳng thuộc cùng loại 1 thì hoặc song song với nhau, hoặc vuông góc với nhau nên chúng hoặc đồng phẳng, hoặc vuông góc.
- Hai đường thẳng thuộc loại 2 không đồng phẳng cũng không vuông góc thì chúng thuộc hai mặt kề nhau (ví dụ AC và DC'). Cứ 2 mặt kề nhau ta lại tạo ra được 2 cặp đường thẳng như vậy (ví dụ mặt $ABCD$ và $DCC'D'$ có 2 cặp đường thẳng thỏa mãn là (AC, DC') và (BD, CD')). Mỗi cạnh thuộc loại 1 đều tạo ra 2 mặt kề nhau, do đó có $12 \cdot 2 = 24$ cặp đường thẳng cùng thuộc loại 2 thỏa mãn.
- Hai đường thẳng thuộc loại 3 đều đi qua trung điểm của mỗi đường nên chúng đồng phẳng.
- Mỗi đường thẳng thuộc loại 1 (chẳng hạn AD) có thể tạo với 4 đường thẳng thuộc loại 2 để tạo thành 1 cặp đường thẳng không song song cũng không vuông góc (đó là các đường chéo của các mặt chứa cạnh $B'C'$). Do đó có $12 \cdot 4 = 48$ cặp đường thẳng thuộc dạng này thỏa mãn.
- Mỗi đường thẳng thuộc loại 1 (chẳng hạn AD) có thể tạo với 2 đường thẳng thuộc loại 3 để tạo thành 1 cặp đường thẳng không song song cũng không vuông góc (BD' và CA'). Do đó có $12 \cdot 2 = 24$ cặp đường thẳng thuộc dạng này thỏa mãn.
- Vì AC vuông góc với mặt phẳng $BDD'B'$ nên các cặp đường thẳng có cả loại 2 và 3 hoặc vuông góc với nhau, hoặc đồng phẳng.

Vậy có tất cả $24 + 48 + 24 = 96$ cặp đường thẳng thỏa mãn bài.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 82. Cho tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- (A) Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.
 (B) Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn.
 (C) Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn.
 (D) Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử (AB, CD) và (AC, BD) là hai cặp cạnh vuông góc với nhau. $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0, \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{BC} &= (\vec{CD} - \vec{CA}) (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \vec{CD} \cdot \vec{AC} - \vec{CD} \cdot \vec{AB} - \vec{CA} \cdot \vec{AC} - \vec{CA} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{CD} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{AC} (\vec{CD} + \vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $AD \perp BC$.

Dựng hình hộp như hình vẽ.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB^2 + CD^2 &= AB^2 + C_1D_1^2 = 4(AK^2 + BK^2) = 4AD_1^2 \\ AD^2 + BC^2 &= AD^2 + A_1D_1^2 = 4(AH^2 + HD_1^2) = 4AD_1^2 \\ \Rightarrow AB^2 + CD^2 &= AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - BC^2 = AD^2 + AC^2 - CD^2. \end{aligned}$$

Do đó $\cos \widehat{BAC}, \cos \widehat{DAC}$ cùng dấu (1)

Chứng minh tương tự $\cos \widehat{BAD}, \cos \widehat{CAD}$ cùng dấu. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\cos \widehat{BAC}, \cos \widehat{DAC}, \cos \widehat{BAD}$ cùng dấu.

Do đó $\widehat{BAC}, \widehat{DAC}, \widehat{BAD}$ cùng nhọn hoặc cùng tù hoặc cùng vuông.

Chứng minh tương tự thì các góc tại đỉnh B, C, D cùng nhọn hoặc cùng tù hoặc cùng vuông.

Xét các trường hợp

Trường hợp 1. Nếu các góc tại 4 đỉnh cùng nhọn, suy ra cả 4 mặt đều là tam giác nhọn.

Trường hợp 2. Nếu tồn tại một đỉnh có các góc tù hoặc vuông.

Không mất tính tổng quát giả sử vuông tại A , thì ba đỉnh còn lại phải là góc nhọn.

Thật vậy Nếu $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

$$\text{Tương tự : } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}.$$

$$\text{Do } \widehat{BAC} \geq 90^\circ \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} \leq 0$$

$$CB^2 + CD^2 - BD^2 = (\vec{AB} - \vec{AC})^2 + (\vec{AD} - \vec{AC})^2 - (\vec{AB} - \vec{AD})^2 = 2AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq 0 \Rightarrow \widehat{BCD} < 90^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{CBD} < 90^\circ, \widehat{CDB} < 90^\circ.$$

Vậy tam giác BCD nhọn.

Vậy không tồn tại lớn hơn hoặc bằng 2 đỉnh cùng tù hoặc cùng vuông.

Hay tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Khi đó giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng

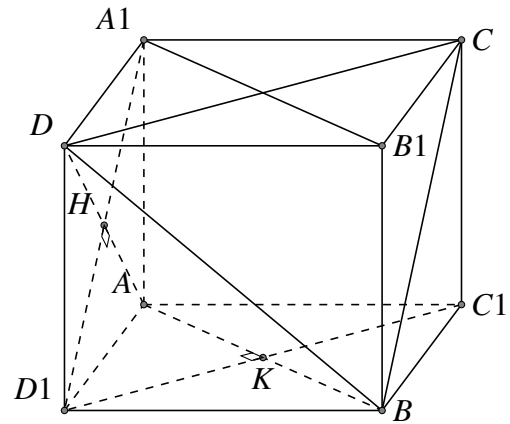
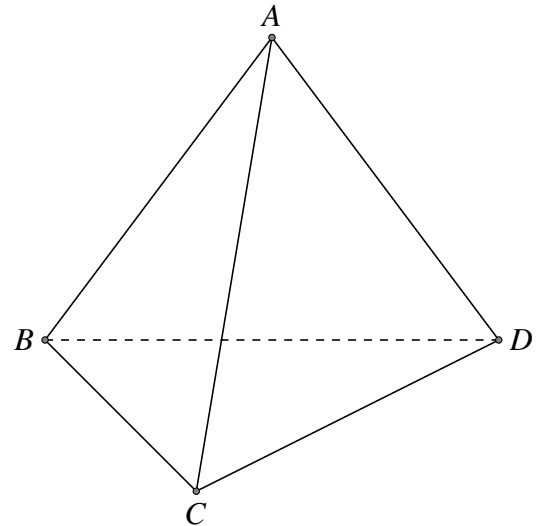
(A) $\frac{\sqrt{14}}{21}$.

(B) $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(C) $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

(D) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

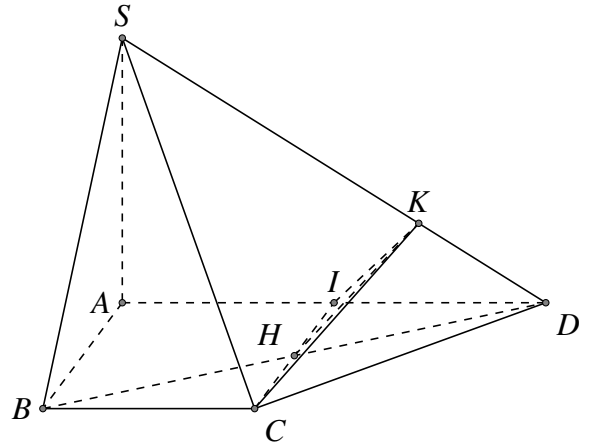
Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $CI \perp AD$ suy ra $CI \perp (SAD)$. Trong (SAD) , kẻ $IK \perp SD$. Khi đó $SD \perp (CIK)$. Gọi $H = BD \cap CI$. Khi đó $HK \perp SD$.

Mà $(SBD) \cap (SCD) = SD$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) là góc giữa CI và HK , chính là góc $\widehat{CKH}$.

Ta có $DC \perp (SAB)$. Trong (SAC) , kẻ $AI \perp SC$. Khi đó $AI \perp (SCD)$.



Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) là góc giữa AI và AK , chính là góc $\widehat{KAI}$.

Ta có theo cách dựng thì $ABCI$ là hình vuông nên $CI = AB = a$.

$$\triangle DKI \sim \triangle DAS \text{ nên } \frac{IK}{SA} = \frac{DI}{SD} \Leftrightarrow \frac{IK}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{6}} \Leftrightarrow IK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } CK = \sqrt{IK^2 + CI^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Trong tam giác } HIK \text{ có } HK = \sqrt{IK^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{Trong tam giác } HKC \text{ có } \cos \widehat{CKH} = \frac{CK^2 + HK^2 - CH^2}{2CK \cdot HK} = \frac{\frac{4a^2}{3} + \frac{7a^2}{12} - \frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{Khi đó } \sin \widehat{CKH} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 84. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD' và tạo với mặt phẳng $BDD'B'$ một góc x nhỏ nhất, cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích S . Giá trị của S bằng

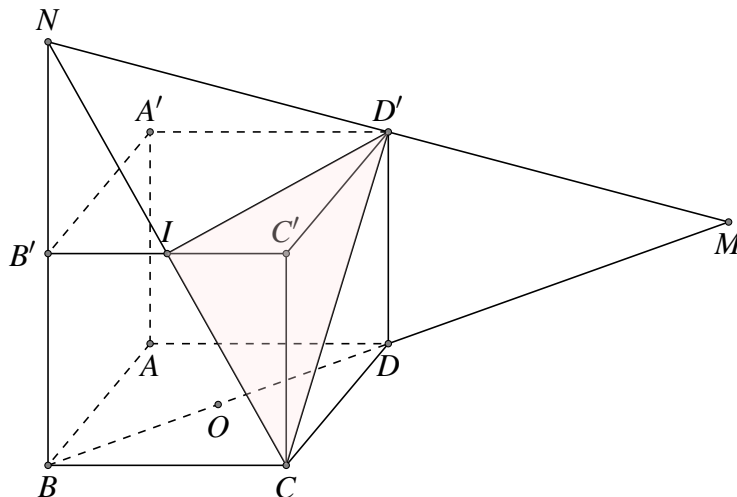
(A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

(C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



- Góc của (P) qua CD' hợp với $(BB'D'D)$ một góc nhỏ nhất bằng với góc giữa đường thẳng CD' và

$(BB'D'D)$.

- Ta có $\begin{cases} OD = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ OD' = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \cos \widehat{DOD'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D$ là trung điểm của BM .
- Kéo dài MD' cắt BB' tại N . Đường thẳng CN cắt $B'C'$ tại I , ta được I là trung điểm $B'C'$.
- Ta được thiết diện cần tìm là $\triangle ICD'$.
- Tính được $S = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (C)



Câu 85. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

- (A) $\frac{2a\sqrt{15}}{3}$. (B) $\frac{2a\sqrt{51}}{5}$. (C) $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. (D) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SCA = \triangle SBA$, suy ra $SB = SC$, tam giác SBC cân tại S .

Gọi I là trung điểm của SA , suy ra $IA = IB = IC = \frac{SA}{2}$.

Suy ra $IG \perp (ABC)$, với G là trọng tâm của tam giác ABC . Nên $(SA, (ABC)) = \widehat{IAG} = 45^\circ$.

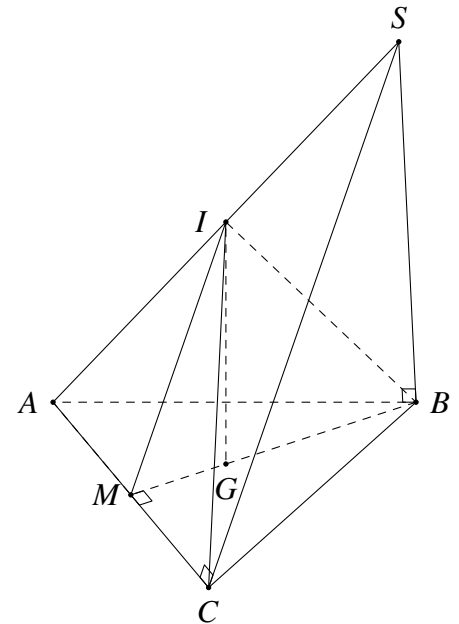
Do đó $d(B, (SAC)) = 3d(G, (SAC)) = 3d(G, (IAC))$. (1)

Gọi M là trung điểm của AC , suy ra $MB \perp AC$ và $AC \perp IG$ nên

$(IBM) \perp (SAC)$. Ta có $GM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $IG = AG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\frac{1}{d_H^2} = \frac{1}{IG^2} + \frac{1}{GM^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4a^2} \Rightarrow d_H = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Từ (1) suy ra $d(B, (SAC)) = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án (C)



Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng đi qua B, M sao cho (P) cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM . Khoảng cách từ điểm S đến (P) bằng

- (A) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{4a\sqrt{2}}{9}$. (C) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{9}$.

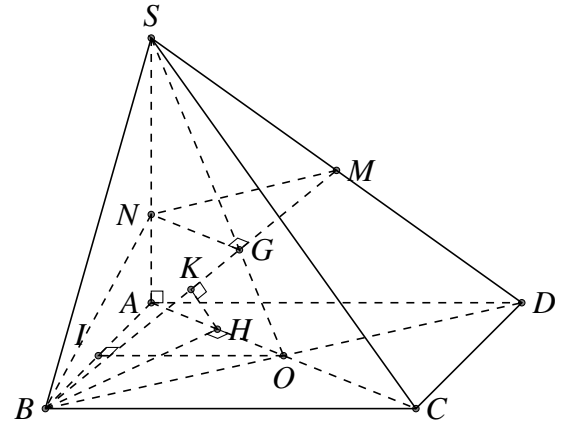
Lời giải.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. G là giao điểm của SO và BM .

Suy ra G là trọng tâm của tam giác SAC và SBD . Gọi N là giao điểm của (P) và SA . H là hình chiếu vuông góc của B lên AC . K là hình chiếu vuông góc của H lên BG .

$$\text{Ta có } OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow OI = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot OA \Rightarrow BH = \frac{OI \cdot AB}{AO} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\triangle ABH \text{ vuông tại } H \text{ có } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC \Rightarrow \frac{OH}{AH} = \frac{OG}{OS} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH \parallel SA$$

$$\text{Ta có } BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp NG$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} NG \perp BM \\ BH \perp NG \end{cases} \Rightarrow NG \perp GH \Rightarrow NG \parallel AC \Rightarrow (P) \parallel AC \text{ và } SN = 2AN.$$

$$d(S, (P)) = 2d(A, (P)) = 2d(H, (P)) = 2HK.$$

$$\triangle OSA \text{ có } GH = \frac{1}{3}SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \triangle AHB \text{ vuông tại } H \text{ có } BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\triangle GHB \text{ vuông tại } H \text{ có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{HG^2 \cdot HB^2}{HG^2 + HB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc 60° .

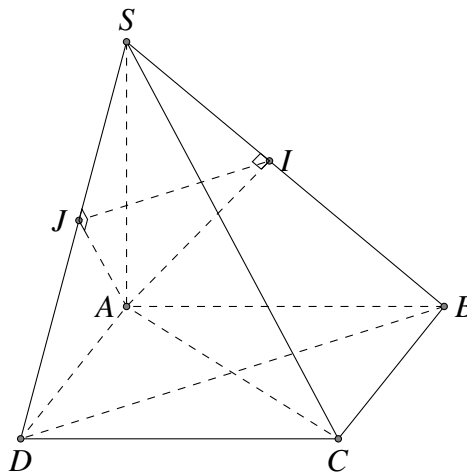
(A) $x = 2a$.

(B) $x = a$.

(C) $x = \frac{a}{2}$.

(D) $x = \frac{3a}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AI \perp SB$, ta được $AI \perp (SBC)$ (1).

Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AJ \perp SD$, ta được $AJ \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc $((SBC), (SCD)) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2}$, $\frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2}$.

Suy ra $AI = AJ$. Do đó nếu góc $\widehat{IAJ} = 60^\circ$ thì $\triangle AIJ$ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AI = \frac{SA \cdot AB}{SB}$ (3).

Và có $SA^2 = SI \cdot SB \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SB}$ (4); $SA^2 = SJ \cdot SD \Rightarrow SJ = \frac{SA^2}{SD}$ (4').

Suy ra $IJ \parallel BD$ (vì $SB = SD$) $\Rightarrow \frac{IJ}{BD} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \frac{SI \cdot BD}{SB} = \frac{SA^2 \cdot BD}{SB^2}$ (5).

Thế (3) và (5) vào $AI = IJ$ suy ra

$$AB = \frac{SA \cdot BD}{SB} \Leftrightarrow AB \cdot SB = SA \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = x \cdot a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 88. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB, SC bằng

(A) 60° .

(B) 0° .

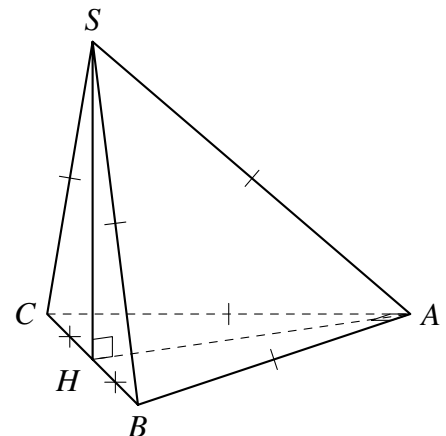
(C) 120° .

(D) 90° .

Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và SC . Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A . Vì $SA = SB = SC$ nên ta có $SH \perp (ABC)$ tại H với H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên suy ra H là trung điểm BC . Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{SC} &= \vec{AB} \cdot \vec{SH} + \vec{AB} \cdot \vec{HC} = \vec{AB} \cdot \vec{HC} = AB \cdot HC \cdot \cos 135^\circ \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$



Mặt khác $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{SC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{SC}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a \cdot a} = \frac{1}{2}$. Vậy $\alpha = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A)



Câu 89. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính $\cos \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng BM và AC .

(A) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

(B) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(C) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(D) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$ và $HC \perp HB$,

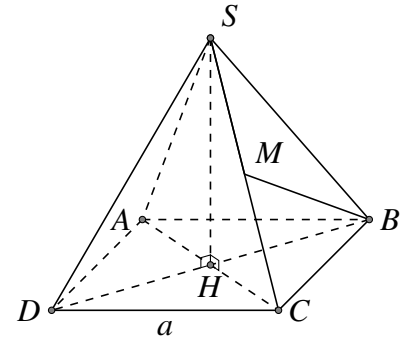
$$HC \perp SH \text{ nên } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = HC^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Vì tam giác SBC đều cạnh a và BM là trung tuyến nên $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Khi đó } \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}}{AC \cdot BM} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0.$$

$$\text{Do vậy, } \cos \varphi = \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn đáp án (B)



□

Câu 90. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) . Tính $\cos \alpha$.

(A) $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

(B) $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(D) $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải.

Gọi tâm của đáy là O , M là trung điểm của CD .

Trong (SOM) , kẻ OH vuông góc với SM tại H .

Khi đó ta có $OH \perp (SCD)$. Mà $OD \perp (SAC)$.

Do đó $((SCD), (SAC)) = (OH, OD) = \widehat{HOD} = \alpha$.

$$\text{Ta có } OD = a, SO = a\sqrt{3}, OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

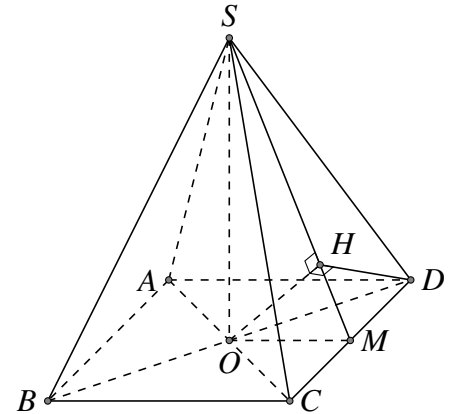
Xét $\triangle OSM$ vuông tại O , có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Xét $\triangle OHD$ vuông tại H , có

$$\cos \widehat{HOD} = \cos \alpha = \frac{OH}{OD} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án (C)



□

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

(A) $\frac{a}{2}$.

(B) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

(C) a .

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

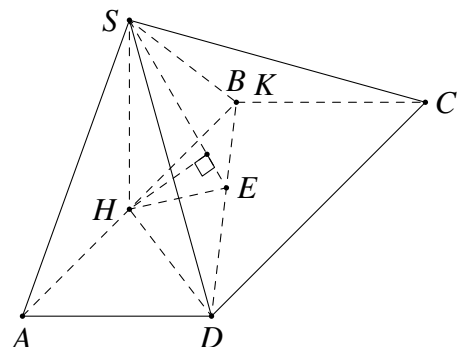
Gọi H là trung điểm cạnh AB , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh BD , gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh SE .

Ta có $BD \perp HE$ và $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHE)$.

Khi đó $(SHE) \perp (SBD) \Rightarrow HK \perp (SBD)$.

Vậy $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HK$.



Tam giác ABD có $\sin B = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{HE}{HB} \Leftrightarrow HE = HB \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông SHE ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $d(A, (SBD)) = 2HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

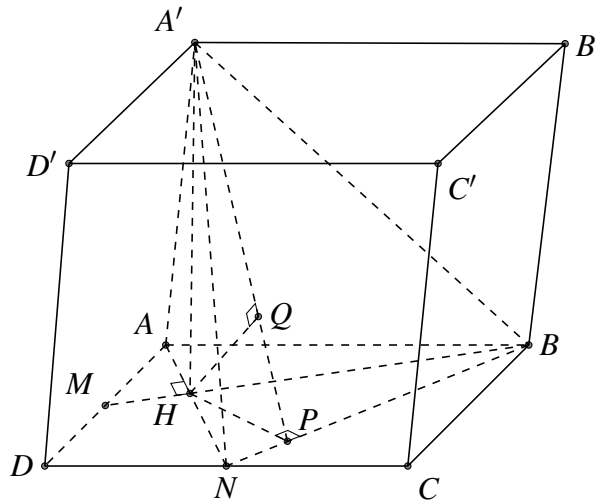
Chọn đáp án (D)

□

Câu 92. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC . Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm H của AN và BM . Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$ bằng

- (A) $\frac{3a\sqrt{170}}{68}$. (B) $\frac{3a\sqrt{175}}{68}$. (C) $\frac{3a\sqrt{172}}{68}$. (D) $\frac{3a\sqrt{173}}{68}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi P là hình chiếu của H trên BN . Trong mặt phẳng $(A'HP)$, gọi Q là hình chiếu của H trên $A'P$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên dễ có $AN \perp BM$.

Xét tam giác ABM vuông tại A có $AH = \frac{AB \cdot AM}{\sqrt{AB^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ta suy ra, độ dài các cạnh

- $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
- $NH = AN - AH = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.
- $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
- $HP = \frac{HN \cdot HB}{\sqrt{HN^2 + HB^2}} = \frac{\frac{3a\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\frac{9a^2}{20} + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{6a\sqrt{5}}{25}$.

$$\bullet HQ = \frac{HP \cdot A'H}{\sqrt{HP^2 + A'H^2}} = \frac{\frac{6a\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\frac{36a^2}{125} + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{3a\sqrt{170}}{85}.$$

$$\text{Ta có } d(M, (A'BN)) = HQ \cdot \frac{BM}{BH} = \frac{3a\sqrt{170}}{85} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} = \frac{3a\sqrt{170}}{85} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3a\sqrt{170}}{68}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 93. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A . $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

(A) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(B) $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(C) $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

(D) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

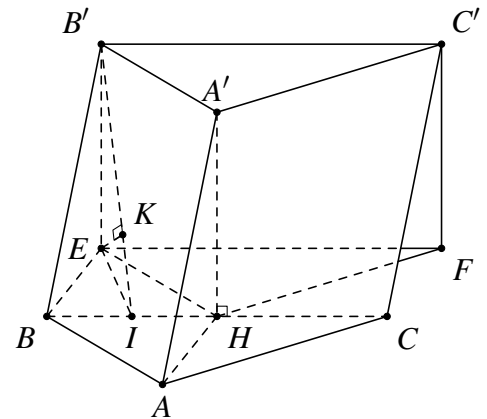
Gọi hình chiếu của A' , B' , C' trên mặt phẳng (ABC) lần lượt là H , E , F .

Theo giả thiết, H là trung điểm của BC .

Gọi I là trung điểm của BH .

Ta có $AA' \parallel (BB'C'C)$ nên

$$d(AA', B'C') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)).$$



Hơn nữa, vì $AHEB$ là hình bình hành nên I cũng là trung điểm của EA , do đó $AI = EI$.

Suy ra $d(A, (BB'C'C)) = d(E, (BB'C'C))$.

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ suy ra $BC = 2a$.

Từ đó suy ra $AB = AH = HB = a$, tức tam giác ABH đều cạnh a . Suy ra đường cao $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $EI = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $EI \perp BC$.

Trong mặt phẳng $(B'EI)$ kẻ $EK \perp B'I$ ($K \in B'I$). Ta có $BC \perp (B'EI)$ suy ra $BC \perp EK$.

Ta có $\begin{cases} EK \perp BC \\ EK \perp B'I \end{cases} \Rightarrow EK \perp (BB'C'C) \Rightarrow d(E, (BB'C'C)) = EK$.

$$\text{Ta có } B'E = A'H = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{EK^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{EI^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\text{Suy ra } EK = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 94. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$, $AC = 8$. Tam giác BCD có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh C bằng 8. Mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Cô-sin góc giữa mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng

(A) $\frac{4}{\sqrt{34}}$.

(B) $\frac{3}{\sqrt{17}}$.

(C) $\frac{3}{\sqrt{34}}$.

(D) $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC$ tại H , $CK \perp BD$ tại K , $HI \perp BD$ tại I .

Theo giả thiết suy ra $CK = 8$.

Vì $\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ AH \perp BC \end{cases}$ nên $AH \perp (BCD)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp HI \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AHI)$

$\Rightarrow \widehat{AIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{25}{576} \Rightarrow AH = \frac{24}{5}.$$

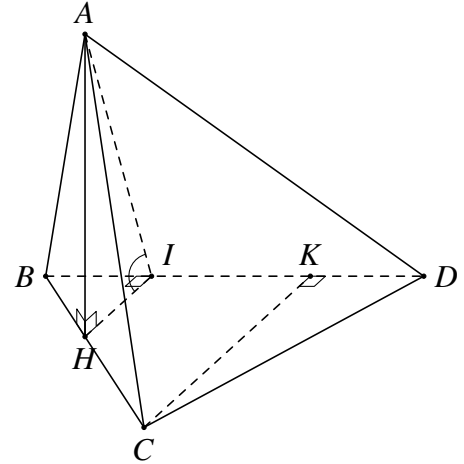
Ta có $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{6^2}{6^2 + 8^2} = \frac{9}{25}$.

Vì $HI \parallel CK \Rightarrow \frac{HI}{CK} = \frac{BH}{BC} = \frac{9}{25} \Rightarrow HI = \frac{9}{25} CK = \frac{9}{25} \cdot 8 = \frac{72}{25}$.

Xét $\triangle AHI$ vuông tại $H \Rightarrow \tan \widehat{AIH} = \frac{AH}{HI} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{72}{25}} = \frac{5}{3}$.

Ta có $\cos^2 \widehat{AIH} = \frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{AIH}} = \frac{1}{1 + \frac{25}{9}} = \frac{9}{34} \Rightarrow \cos \widehat{AIH} = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Chọn đáp án (C)



Câu 95. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = BC = b$, AB là đoạn vuông góc chung của BC và AD và $(AB, CD) = \alpha$, $\left(0 < \alpha < 90^\circ, \tan \alpha < \frac{2b}{a}\right)$. Gọi I là trung điểm AB , điểm M thuộc đoạn AB sao cho $IM = x$ và (P) là mặt phẳng đi qua M vuông góc với AB đồng thời cắt CD tại N . Diện tích hình tròn tâm M bán kính MN bằng

(A) $\pi [4b^2 + (4x^2 - a^2) \tan^2 \alpha]$.

(B) $\frac{\pi}{4} [4b^2 + (4x^2 - a^2) \tan^2 \alpha]$.

(C) $\frac{\pi}{4} [2b^2 + (4x^2 + a^2) \tan^2 \alpha]$.

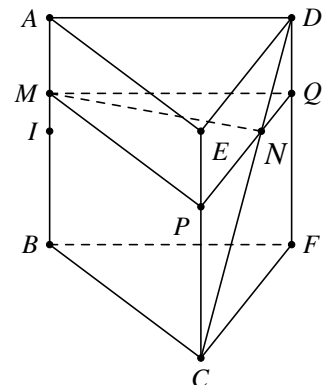
(D) $\frac{\pi}{4} [4b^2 + (4x^2 - a^2) \sin^2 \alpha]$.

Lời giải.

Dựng hình lăng trụ đứng tam giác $ADE.BFC$ như hình vẽ, trong đó AB là cạnh bên. Khi đó mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ nói trên. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (P) với CE và DF . Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc đoạn AI .

Ta có $\widehat{CDF} = (CD, DF) = (CD, AB) = \alpha$, suy ra $PQ = CF = a \tan \alpha$. Do đó

$$\frac{NQ}{CF} = \frac{DQ}{DF} = \frac{AM}{AB} = \frac{a - 2x}{2a} \Rightarrow NQ = \frac{(a - 2x) \tan \alpha}{2}.$$



Áp dụng định lí cô-sin ta có

$$\cos \widehat{MQP} = \frac{MQ^2 + PQ^2 - MP^2}{2MQ \cdot PQ} = \frac{PQ}{2MQ} = \frac{a \tan \alpha}{2b}.$$

Cũng theo định lí cô-sin ta có

$$MN^2 = MQ^2 + NQ^2 - 2MQ \cdot NQ \cos \widehat{MQN} = \frac{4b^2 + \tan^2 \alpha (4x^2 - a^2)}{4}.$$

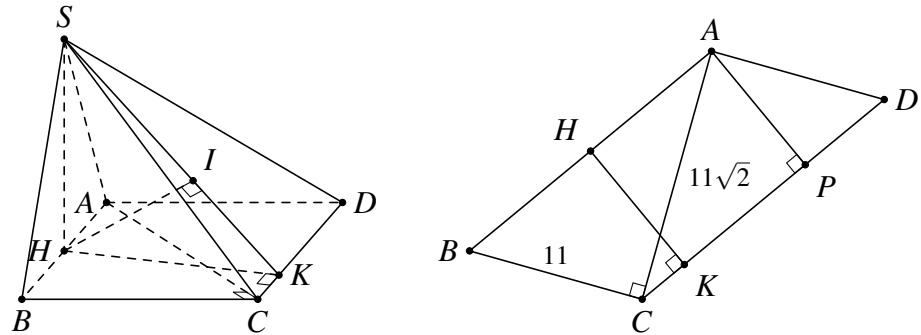
Vậy diện tích hình tròn cần tìm là $\pi MN^2 = \frac{\pi}{4} [4b^2 + (4x^2 - a^2) \tan^2 \alpha]$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .

- (A) $d = 4\sqrt{11}$. (B) $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$. (C) $d = 2\sqrt{22}$. (D) $d = \sqrt{22}$.



Lời giải.

Dựa vào định lý cô-sin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}$, $BC = 11$ và $AC = 11\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra được $\triangle ABC$ vuông tại C .

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB tức là $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $SH = SA \cdot \sin SAB = \frac{11}{2}$.

Kẻ $HK \perp CD$ tại $K \in CD$, $AP \perp CD$ tại $P \in CD$ thì tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật.

Ta có $HK = AP = \frac{AC \cdot AD}{CD} = \frac{11 \cdot 11\sqrt{2}}{11\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông SHK , kẻ $HI \perp SK$ tại $I \in SK$.

Do $AB \parallel CD$ nên $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \sqrt{22}$.

Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB , SA . Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a .

- (A) $\frac{a\sqrt{66}}{44}$. (B) $2a\sqrt{66}$. (C) $\frac{a\sqrt{66}}{22}$. (D) $\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

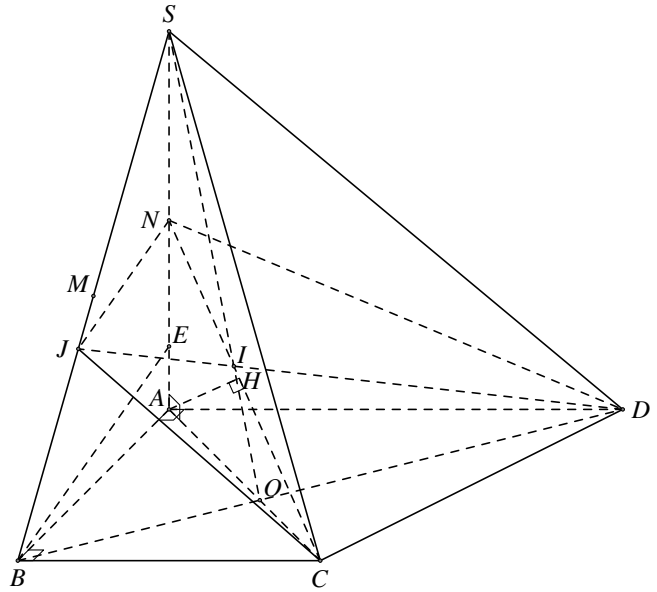
Lời giải.

Ta có hai tam giác OBC và OAD đồng dạng và $BC = \frac{1}{2}AD$ nên $\frac{CO}{CA} = \frac{1}{3}$ và $\frac{DB}{DO} = \frac{3}{2}$.
 Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt cho tam giác SAO , ta có

$$\frac{NS}{NA} \cdot \frac{CA}{CO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{IS} = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt cho tam giác SBO , ta có

$$\frac{IO}{IS} \cdot \frac{JS}{JB} \cdot \frac{DB}{DO} = 1 \Rightarrow \frac{JS}{JB} = 2.$$



Gọi E là điểm thuộc đoạn SA sao cho $BE \parallel JN$ suy ra $AN = 2EN$.

$$\text{Suy ra } d(M, (NCD)) = \frac{1}{2}d(B, (NCD)) = \frac{1}{2}d(E, (NCD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d(A, (NCD)).$$

Gọi H là hình chiếu của A lên NC , ta có $AH \perp (CND)$ (do $AH \perp NC$, $AH \perp CD$).

$$\text{Suy ra } d(A, (NCD)) = AH = \frac{AN \cdot AC}{\sqrt{AN^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

$$\text{Do đó, } d(M, (NCD)) = \frac{a\sqrt{66}}{44}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 98.

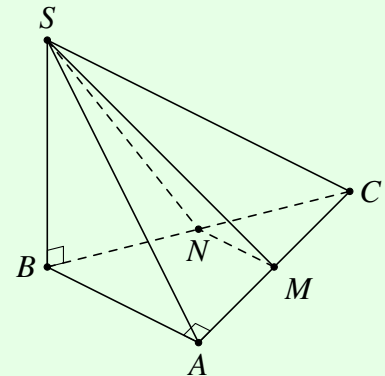
Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SB = \frac{2a}{\sqrt{7}}$. Đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . Biết khoảng cách từ C đến đường thẳng SM bằng $a\sqrt{2}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) . Khi đó

(A) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

(B) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(C) $\cos \alpha = \frac{1}{3}.$

(D) $\cos \alpha = \frac{1}{2}.$

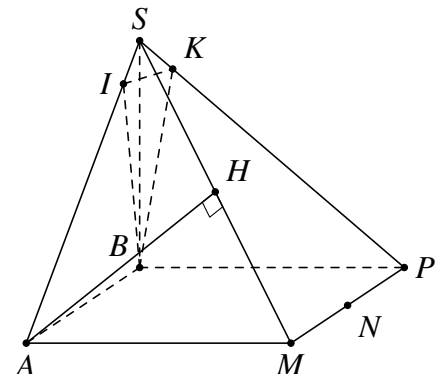


Lời giải.

Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Khi đó $ABPM$ là hình chữ nhật. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A trên SM , của B trên SA và SP . Khi đó $BI \perp (SAM)$ và $BK \perp (SMP)$. Do M là trung điểm AC nên ta có

$$d(A, SM) = d(C, SM) = a\sqrt{2}$$

mà $AM = 2a$ nên tam giác AHM vuông cân tại H . Lại có $AM \perp (SAB)$ nên tam giác SAM vuông cân tại A , suy ra $SA = 2a$. Ta có



$$AB = \sqrt{SA^2 - SB^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}},$$

$$BI = \frac{BS \cdot BA}{SA} = \frac{2a\sqrt{6}}{7},$$

$$\frac{IS}{IA} = \frac{IS \cdot SA}{IA \cdot SA} = \frac{BS^2}{BA^2} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $6\vec{BS} + \vec{BA} = \vec{0}$ hay $\vec{BI} = \frac{6\vec{BS} + \vec{BA}}{7}$. Tương tự ta tính được $BK = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ và $\vec{BK} = \frac{7\vec{BS} + \vec{BP}}{8}$. Suy ra

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{BI} \cdot \vec{BK}|}{BI \cdot BK} = \frac{42BS^2}{56} \cdot \frac{7}{2a\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 99. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

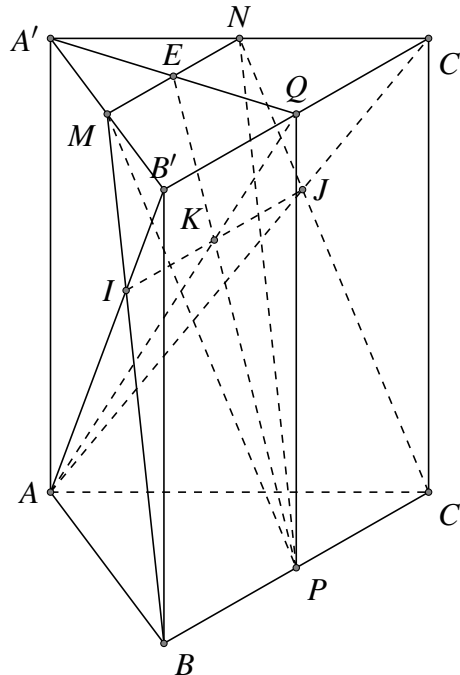
(A) $\frac{6\sqrt{13}}{65}.$

(B) $\frac{17\sqrt{13}}{65}.$

(C) $\frac{18\sqrt{13}}{65}.$

(D) $\frac{\sqrt{13}}{65}.$

Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM \cap AB'$, $J = CN \cap AC'$, $E = MN \cap A'Q$.

Suy ra $(MNP) \cap (AB'C') = (MNCB) \cap (AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ \cap PE \Rightarrow K \in AQ$, với E là trung điểm của MN .

$(AA'QP) \perp IJ \Rightarrow AQ \perp IJ, PE \perp IJ \Rightarrow ((MNP), (AB'C')) = (AQ, PE) = \alpha.$

Ta có $AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \frac{\sqrt{13}}{3}; PE = \frac{5}{2} \Rightarrow PK = \frac{5}{3}.$

$$\cos \alpha = |\cos \widehat{QKP}| = \frac{|KQ^2 + KP^2 - PQ^2|}{2KQ \cdot KP} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , cạnh bên $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, I là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và AB là?

- (A) $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. (B) $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. (C) $\frac{a\sqrt{17}}{7}$. (D) $\frac{a\sqrt{23}}{7}$.

Lời giải.

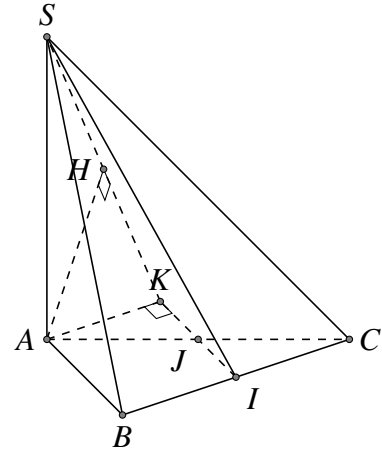
Gọi J là trung điểm của AC , K là hình chiếu của A lên IJ , H là hình chiếu của A lên SK .

Do AB song song với IJ nên $AB \parallel (SIJ)$, do đó $d(AB, SI) = d(AB, (SIJ)) = d(A, (SIJ))$.

Theo cách dựng có $IJ \perp AK$, lại có $IJ \parallel AB \perp SA$ nên $IJ \perp (SAK)$.

Do $(SAK) \perp IJ$ nên $AH \perp IJ$, và $AH \perp SK$ theo cách dựng nên $AH \perp (SIJ)$.

Từ đó suy ra $d(AB, SI) = AH$.



$$\text{Ta có } AK = d(A, IJ) = d(AB, IJ) = d(I, AB) = \frac{1}{2}d(C, AB) = \frac{1}{2}AC \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAK ta được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SI) = AH = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

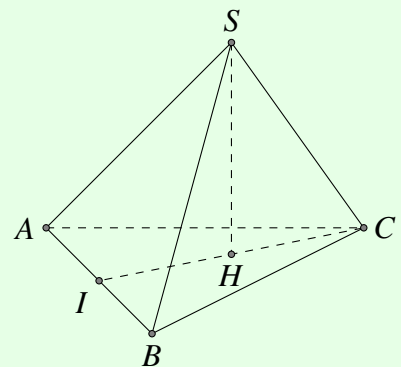
Chọn đáp án (B)

□

Câu 101.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB . Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

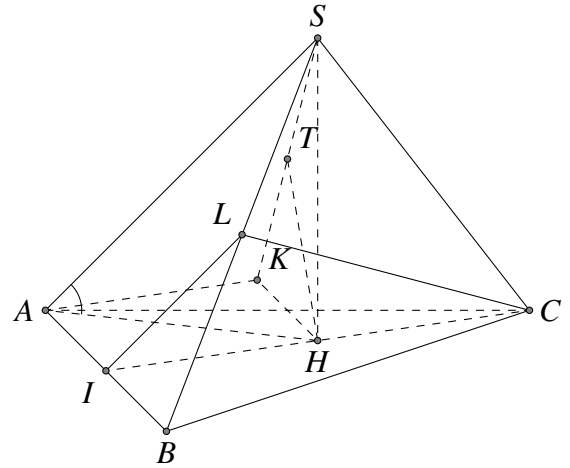
- (A) $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. (B) $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. (C) $\frac{a\sqrt{42}}{8}$. (D) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.



Lời giải.

Vì AH là hình chiếu của SA lên mặt đáy nên góc giữa SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAH}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Gọi L là trung điểm SB , K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $HIAK$. Khi đó $(SAK) \parallel (LIC)$. Suy ra khoảng cách giữa SA và CI bằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAK) . Ta có $AK \perp (SKH)$, do đó nếu trong $\triangle SHK$ ta kẻ $HT \perp SK$ thì $HT \perp (SAK)$. Từ đó, khoảng cách từ H đến (SAK) bằng HT .



$$\text{Ta có } HK = \frac{AB}{2} = a, SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{2},$$

$$HT = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{21}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{21a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa SA và CI bằng $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 102. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại C ; $CA = CB = a$. Gọi M trung điểm của cạnh AA' . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và MC' .

(A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(B) $d = \frac{2a}{3}$.

(C) $d = \frac{a}{3}$.

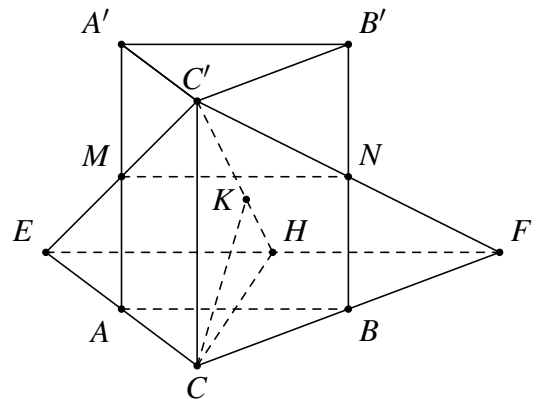
(D) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB' , ta có $MN \parallel AB$, nên $AB \parallel (C'MN)$. Gọi E, F lần lượt đối xứng với C qua A và B .

Ta có

$$\begin{aligned} d(AB, MC') &= d(AB, (C'MN)) = d(A, (C'MN)) \\ &= d(A, (C'EF)) = \frac{1}{2}d(C, (C'EF)). \end{aligned}$$



Gọi H là trung điểm của EF , ta có $EF \perp (C'CH)$.

Kẻ $CK \perp C'H$, ta có $CK \perp (CEF)$ nên $d(C, (C'EF)) = CK$.

$$\text{Tam giác } CEF \text{ vuông cân tại } C \text{ nên } CH = \frac{EF}{2} = \frac{CE\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Tam giác } C'CH \text{ có } \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{C'C^2} + \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow CK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra khoảng cách giữa } AB \text{ và } MC' \text{ là } d = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Ta có $AC \parallel (SED)$ nên $d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)) = 2d(H, (SDE)) = 2HP$.

Mà $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{KH^2} \Rightarrow HP = \frac{3}{7}$. Vậy $d(AC, SD) = \frac{6}{7}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{3}AB$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) , giá trị $\cos \alpha$ bằng

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

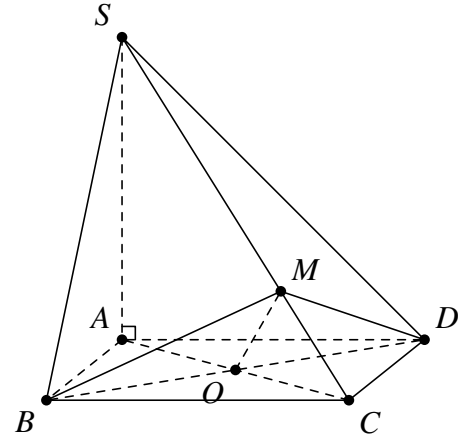
Gọi O là giao điểm của AC và BD . Kẻ $OM \perp SC$, suy ra $DB \perp (SAC) \Rightarrow DB \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM)$.

Góc α bằng hoặc bù với $\widehat{DMB}$ với

$$BM^2 = \frac{SB^2 \cdot BC^2}{SB^2 + BC^2} = \frac{4}{5}.$$

Xét tam giác BMD , có

$$\cos \widehat{DMB} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \cos \alpha = |\cos \widehat{DMB}| = \frac{1}{4}.$$



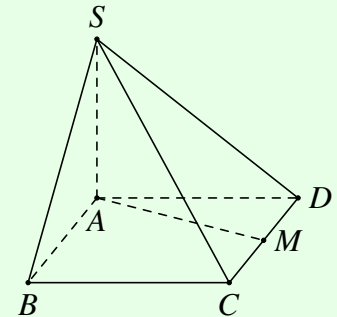
Chọn đáp án (B)



Câu 106.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD . Tính $\cos \alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM .

- (A) $\frac{2}{5}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.



Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB . Ta thấy $NP \parallel SB, PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC .

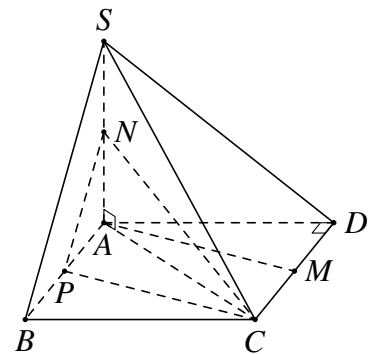
Ta có $NP = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, PC = AM = \sqrt{5}$.

$$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 8} = \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{NPC} = \frac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \frac{\frac{5}{4} + 5 - \frac{33}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

Vậy $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

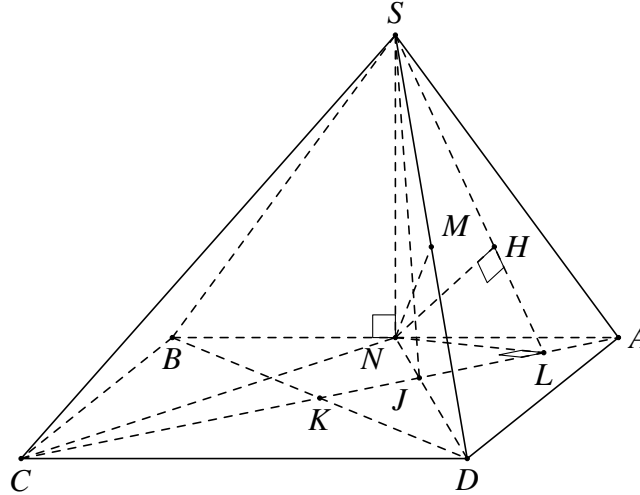
Chọn đáp án (A)



Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$. (B) $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$. (C) $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm AB . Vì tam giác SAB cân tại S nên $SN \perp AB$.

Hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau theo giao tuyến AB nên suy ra $SN \perp (ABCD)$.

CN là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCN} = 45^\circ$.

$\triangle SNC$ vuông cân tại N nên $SN = NC = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

M là trung điểm của $SD \Rightarrow \frac{d(M, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2}$ (1).

Gọi K là tâm của $ABCD$; $J = ND \cap AK$.

Khi đó J là trọng tâm $\triangle ABD$.

Suy ra $\frac{d(N, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{JN}{JD} = \frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $d(M, (SAC)) = d(N, (SAC))$.

Gọi L là hình chiếu vuông góc của N lên AK ; H là hình chiếu vuông góc của N lên SL .

Mà $AK \perp (SNL)$, $(SNL) \supset NH$ (Vì $AK \perp SN$, $AK \perp NL$) và $NH \perp SL$.

Từ đó ta có $NH \perp (SAC) \Rightarrow d(N, (SAC)) = NH$.

$\triangle ALN$ và $\triangle ABC$ là hai tam giác đồng dạng nên

$$\frac{NL}{BC} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow NL = \frac{AN \cdot BC}{AC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\triangle SNL \text{ vuông tại } N \Rightarrow \frac{1}{NH^2} = \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{NL^2} = \frac{4}{17a^2} + \frac{5}{a^2} = \frac{89}{17a^2} \Rightarrow NH = \frac{\sqrt{1513}}{89}a.$$

$$\text{Vậy } d(M, (SAC)) = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

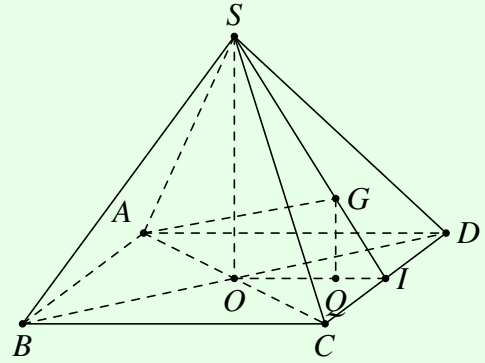
Chọn đáp án (D)

□

Câu 108.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tan góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{17}}{17}$. (D) $\sqrt{17}$.

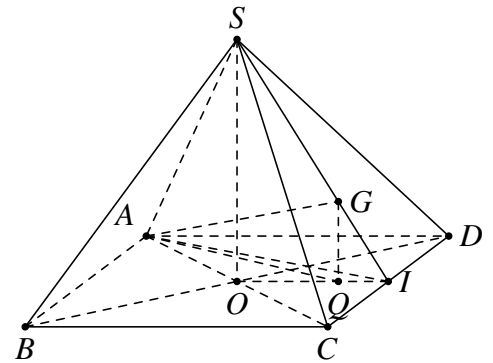


Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó, $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của CD . Ta tính được $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{2}{3}SI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Gọi Q là hình chiếu vuông góc của G trên $(ABCD)$. Ta có $Q \in OI$ và $GQ = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Ta có

$$\begin{aligned} AG^2 &= SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \cos \widehat{ASG} = SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \frac{SA^2 + SI^2 - AI^2}{2 \cdot SA \cdot SI} \\ &= SA^2 + SG^2 - \frac{2(SA^2 + SI^2 - (AD^2 + ID^2))}{3} \\ &= a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2\left(a^2 + \frac{3a^2}{4} - a^2 - \frac{a^2}{4}\right)}{3} = a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó, } AQ = \sqrt{AG^2 - GQ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{34}}{6}.$$

Vì $AG \cap (ABCD) = A$ và $GQ \perp (ABCD)$ nên góc giữa AG và $(ABCD)$ là $\widehat{GAQ}$.

$$\text{Vậy } \tan \widehat{GAQ} = \frac{GQ}{AQ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{\frac{a\sqrt{34}}{6}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 109. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 6$ cm, $BC = BB' = 2$ cm. Điểm E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng $C'E$, hai đỉnh P, Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại F . Khoảng cách DF bằng

- (A) 2 cm. (B) 6 cm. (C) 1 cm. (D) 3 cm.

Lời giải.

Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN \perp PQ$ hay $EC' \perp B'F$.

Đặt k sao cho $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AD}$.

Ta có $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{B'C'}$.

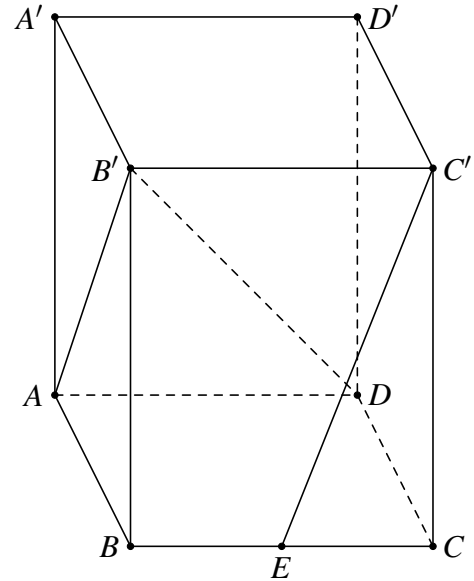
Ta lại có $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}$.

Khi đó $\overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = -B'B^2 + \frac{k}{2}B'C'^2 = -4 + \frac{k}{2} \cdot 4$.

Mà $EC' \perp B'F \Rightarrow \overrightarrow{EC'} \cdot \overrightarrow{B'F} = 0$.

Nên $-4 + \frac{k}{2} \cdot 4 = 0 \Rightarrow k = 2$. Vậy $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.

Vậy F là điểm trên AD sao cho D là trung điểm của AF . Do đó $DF = BC = 2$ cm.



Chọn đáp án (A)



Câu 110. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng

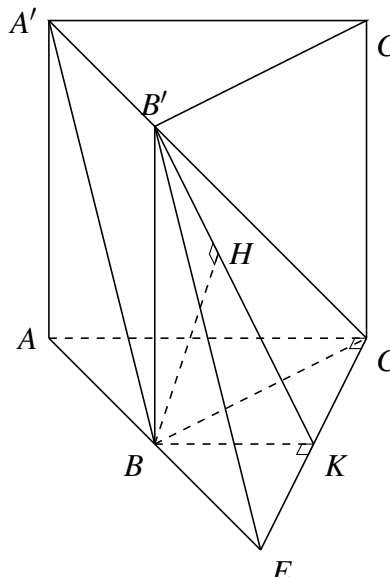
(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

(C) $\frac{a}{2}$.

(D) a .

Lời giải.



Gọi E đối xứng của A qua B . Khi đó $A'B \parallel B'E$.

$\Rightarrow A'B \parallel (B'EC) \Rightarrow d(A'B, B'C) = d(A'B, (B'EC)) = d(B, (B'EC))$.

Gọi K là trung điểm EC . Khi đó $BK \perp EC$.

Dựng $AH \perp B'K$, suy ra $BH \perp (B'CE) \Rightarrow d(B, (B'EC)) = BH$.

$\triangle EAC$ có BK là đường trung bình nên $BK = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

$\triangle BB'K$ vuông tại B có đường cao AH nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 111. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$.

(A) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

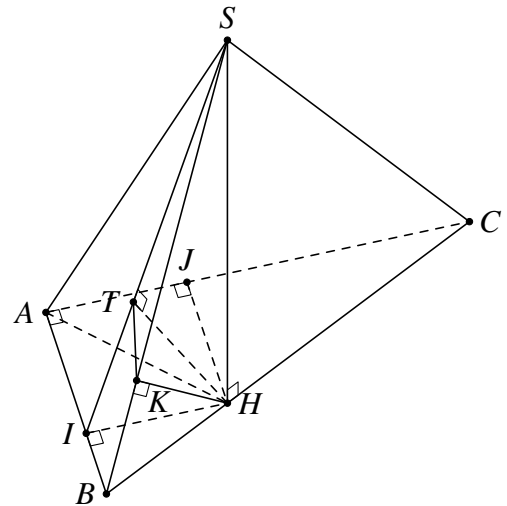
(B) $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

(C) $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

Lời giải.

- Kẻ $HI \perp AB$ ($I \in AB$), $HJ \perp AC$ ($J \in AC$). Dễ thấy $HI \parallel AC$ và $HJ \parallel AB$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) nên $AIHJ$ là hình bình hành.
- Có $HI \perp AB$ và $SH \perp AB$ (vì $SH \perp (ABC)$) nên $AB \perp (SHI)$
 $\Rightarrow$ góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SIH} = 60^\circ$.
 Tương tự thì $\widehat{SJH} = 60^\circ$.
 Kẻ $HK \perp SB$ ($K \in SB$) và $HT \perp SI$ ($I \in SI$).
 Ta có $HT \perp AB$ và $HT \perp SI \Rightarrow HT \perp (SAB) \Rightarrow HT \perp SB$
 và $HK \perp SB \Rightarrow$ góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{HKT}$.



- Ta có $HI = SH \cot \widehat{SIH} = SH \cot 60^\circ$ và $HJ = SH \cot \widehat{SJH} = SH \cot 60^\circ$
 $\Rightarrow HI = HJ \Rightarrow AIHJ$ là hình thoi $\Rightarrow AH$ là phân giác $\widehat{BAC}$.
 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5}a$, $\frac{BH}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{5}}{3}a$, $CH = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$.
 $\frac{BH}{BC} = \frac{HI}{AC} \Rightarrow HI = HJ = \frac{2}{3}a$, $SH = HI \tan \widehat{SIH} = HI \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$,
 $HT = HI \sin \widehat{SIH} = HI \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{6}a$.
 Tam giác SHB vuông tại H ($SH \perp (ABC)$) có đường cao HK
 $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{10}{\sqrt{255}}a$.
 Vì $HT \perp (SAB)$ nên $HT \perp TK$ từ đó $TK = \sqrt{HK^2 - HT^2} = \frac{1}{\sqrt{17}}a$
 $\Rightarrow \tan \widehat{HKT} = \frac{HT}{TK} = \frac{\sqrt{51}}{3}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 112. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

(B) $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

(C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

(D) $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

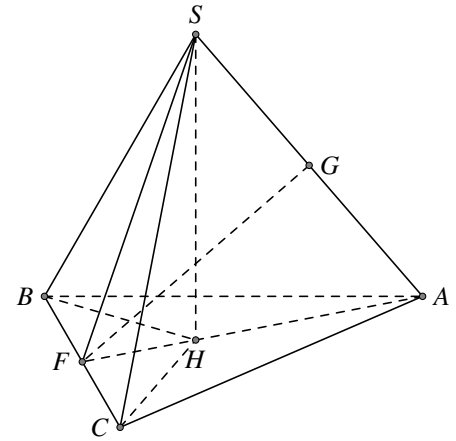
Lời giải.

Gọi F là trung điểm của BC , G là hình chiếu vuông góc của F trên SA .

Khi đó $BC \perp (SAF) \Rightarrow BC \perp FG$ hay FG là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là độ dài đoạn $FG = \frac{3a}{2}$.

Mà FA là đường cao của tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{6}$ nên $FA = \frac{a\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.



$$\text{Từ đó suy ra } AG = \sqrt{FA^2 - FG^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}.$$

Như vậy tam giác AGF vuông cân tại G .

Suy ra tam giác SHA vuông cân tại H .

$$\text{Do đó } SH = AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{(a\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 113. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB' . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'BK)$ bằng

(A) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

(B) $a\sqrt{15}$.

(C) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

(D) $\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

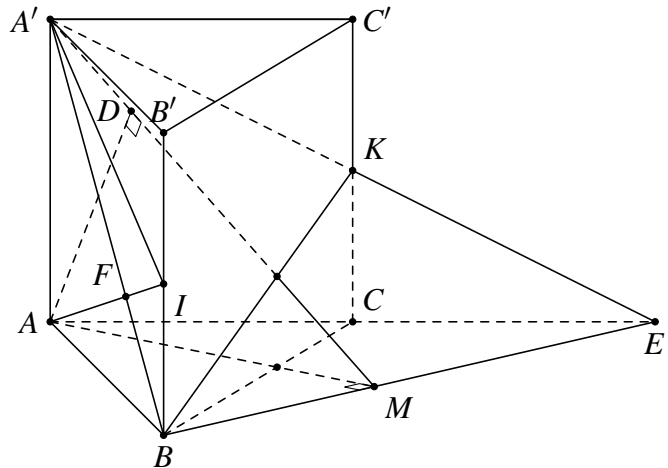
Lời giải.

Kéo dài $A'K$ và AC cắt nhau tại E , AI cắt $A'B$ tại F .

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên BE , D là hình chiếu vuông góc của A lên $A'M$.

Ta có $\begin{cases} BE \perp A'A \\ BE \perp AM \end{cases} \Rightarrow BE \perp AD$. Cùng với

đó, ta có $AD \perp A'M \Rightarrow AD \perp (A'BE) \Rightarrow d(A, (A'BK)) = AD$.



Ta có

$$\frac{IF}{FA} = \frac{IB}{A'A} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I, (A'BK)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BK)).$$

Do CK là đường trung bình của $\triangle EAA'$ nên ta có

$$AE = 2AC \Rightarrow S_{\triangle BAE} = 2S_{\triangle BAC} = AB \cdot AC \cdot \sin A = a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = a^2 \sqrt{3}.$$

Xét tam giác $\triangle ABE$, ta có

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos A} = a\sqrt{21} \Rightarrow AM = \frac{2S_{\triangle ABE}}{BE} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a.$$

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{20a^2} + \frac{7}{4a^2} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Từ đây suy ra khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(A'BK)$ là

$$d(I, (A'BK)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BK)) = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) .

- (A)** $\frac{\sqrt{3}}{7}$. **(B)** $\frac{1}{3}$. **(C)** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp SA \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow DB \perp AH$, mà

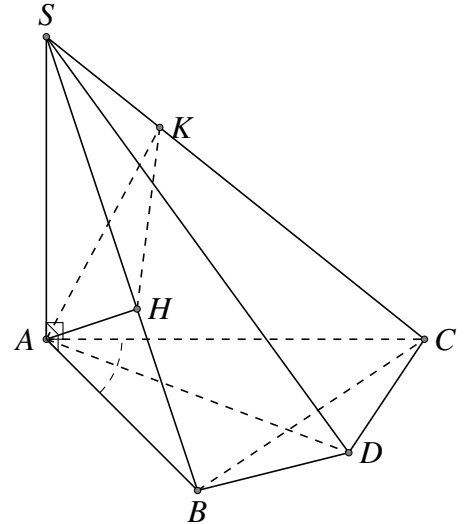
$AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AK$, mà

$AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AHK)$ (1).

Mà $SA \perp (ABC)$ (2).



Từ (1) và (2), suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) bằng $(\widehat{SD; SA}) = \widehat{ASD} = \alpha$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có $\frac{BC}{\sin A} = AD \Rightarrow AD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle SAD$, ta có $\tan \alpha = \frac{AD}{AS} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 1, biết $SO = \sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

- (A)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **(B)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **(C)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **(D)** $\sqrt{2}$.

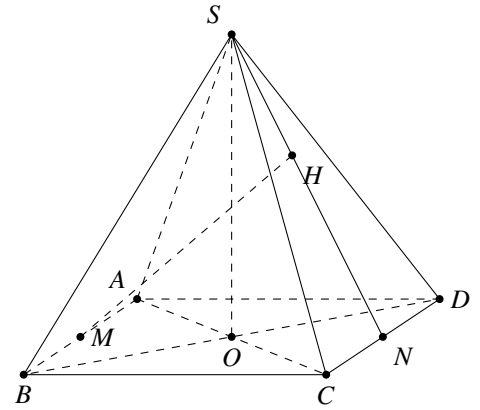
Lời giải.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$, trong đó M là trung điểm của AB .

Gọi N là trung điểm của CD và H là hình chiếu vuông góc của M trên (SCD) thì $H \in SN$. Tính được $SN = \sqrt{SO^2 + \frac{BC^2}{4}} = \frac{3}{2}$ và

$$S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} SO \cdot MN = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } d(AB, SC) = d(M, (SCD)) = MH = \frac{2S_{\triangle SMN}}{SN} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



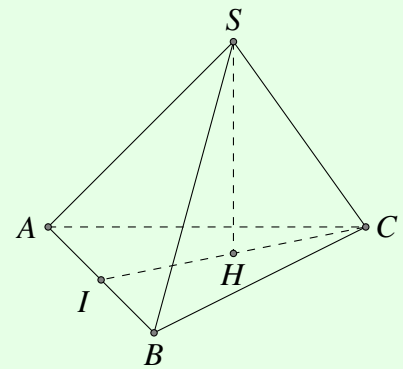
Chọn đáp án (B)

□

Câu 116.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a ; gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{14}}{8}$. (B) $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. (C) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. (D) $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

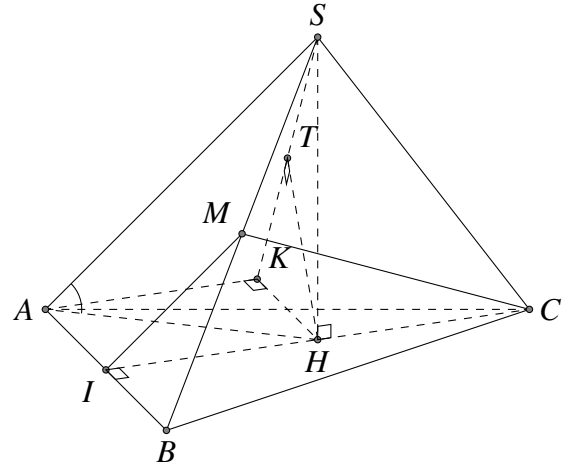


Lời giải.

Vì AH là hình chiếu của SA lên mặt đáy nên góc giữa SA và mặt đáy bằng góc $\widehat{SAH}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Gọi M là trung điểm SB , K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $HIAK$. Khi đó $(SAK) \parallel (MIC)$. Suy ra khoảng cách giữa SA và CI bằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAK) .

Ta có $AK \perp (SKH)$, do đó nếu trong $\triangle SHK$ ta kẻ $HT \perp SK$ thì $HT \perp (SAK)$. Từ đó, khoảng cách từ H đến (SAK) bằng HT .



$$\text{Ta có } HK = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, AK = HI = \frac{1}{2}CI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } HS = AH \cdot \tan 45^\circ = AH = \sqrt{AK^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4},$$

$$HT = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{7a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{77}}{22}. \text{ Vậy khoảng cách giữa } SA \text{ và } CI \text{ bằng } \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

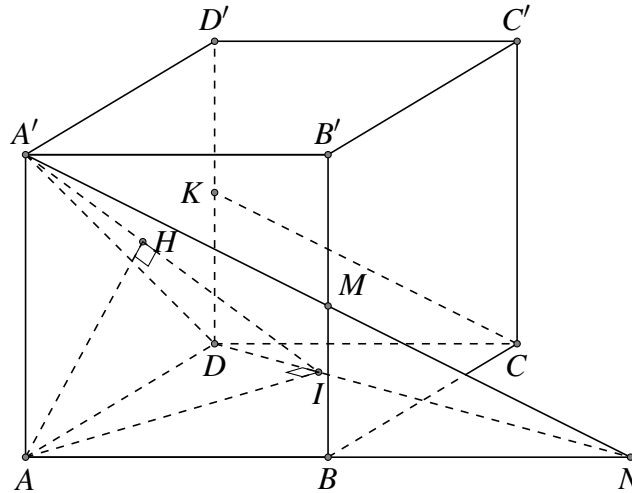
Chọn đáp án (B)

□

Câu 117. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

- Ⓐ $\frac{a}{3}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BB' và N là giao điểm của AB và $A'M$.

Ta có $CK \parallel A'N \Rightarrow CK \parallel (A'DN)$ nên

$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'DN)) = d(C, (A'DN)).$$

$$\text{Do } B'C \parallel (A'DN) \text{ nên } d(C, (A'DN)) = d(B', (A'DN)) = d(B, (A'DN)) = \frac{1}{2}d(A, (A'DN)).$$

$$\text{Kẻ } AI \perp DN, AH \perp A'I \Rightarrow d(A, (A'DN)) = AH.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(CK, A'D) = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{3}.$$

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\frac{2a}{3}$. Ⓒ $\frac{3a}{2}$. Ⓓ $\frac{4a}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. I là trung điểm của SA .

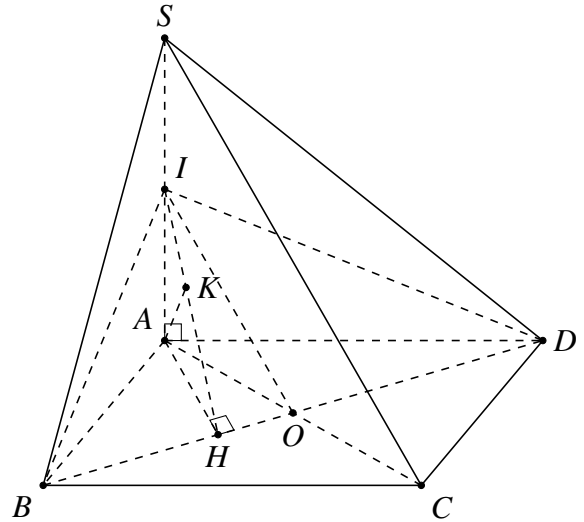
OI là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OI \parallel SC$, suy ra $SC \parallel (IBD)$.

Do đó

$$d(SC, BD) = d(SC, (IBD)) = d(C, (IBD)).$$

Kết hợp với $OA = OC$, ta suy ra

$$d(C, (IBD)) = d(A, (IBD)).$$



Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD$ ($H \in BD$). Mà $BD \perp AI$ nên $BD \perp (AHI)$.

Trong (AHI) kẻ $AK \perp HI$ ($K \in HI$) thì $d(A, (IBD)) = AK$.

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A , AH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Xét $\triangle AHI$ vuông tại A , AK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{3}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 119. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $BA = BC = a$, góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° . Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và BC .

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

(C) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

(D) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Và góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$ nên I là trung điểm cạnh SC .

Gọi E là trung điểm cạnh SB thì $BC \parallel (AEI)$

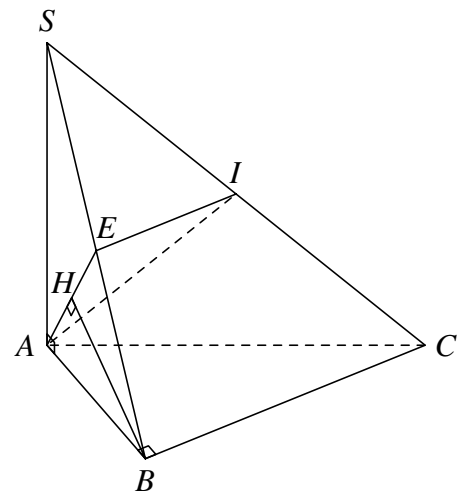
$\Rightarrow d(AI, BC) = d(BC, (AEI)) = d(B, (AEI))$.

Gọi H là trung điểm đoạn AE .

Do $\triangle ABE$ đều nên $BH \perp AE$.

Ngoài ra $BH \perp EI$ (do $BC \perp BH$) nên $BH \perp (AEI)$.

Như vậy $d(BC, AI) = d(B, (AEI)) = BH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

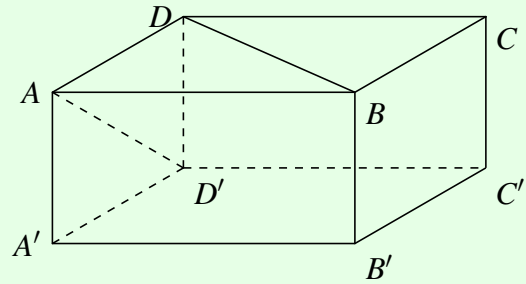


Chọn đáp án (A)

□

Câu 120.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $AB = 2a, AD = AA' = a$. Tham khảo hình bên.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AD' bằng



- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a}{2}$. (C) $\frac{2a}{3}$. (D) a .

Lời giải.

- Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$. Ta có $D'(0;a;a)$.
- Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-2a;a;0), \overrightarrow{AD'} = (0;a;a), \overrightarrow{AB} = (2a;0;0)$.
- Ta có $\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD} = (-a^2; -2a^2; 2a^2), (\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB} = -2a^3$.
- $d(AD', BD) = \frac{|(\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD'} \wedge \overrightarrow{BD}|} = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (C)



Câu 121. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC)$. Cho $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

- (A) $\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$. (B) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SC . Do $SA = AC = 2a$ nên

$$AM \perp SC. \quad (1)$$

Trong (SBC) , gọi điểm N thuộc cạnh SB sao cho

$$MN \perp SC. \quad (2)$$

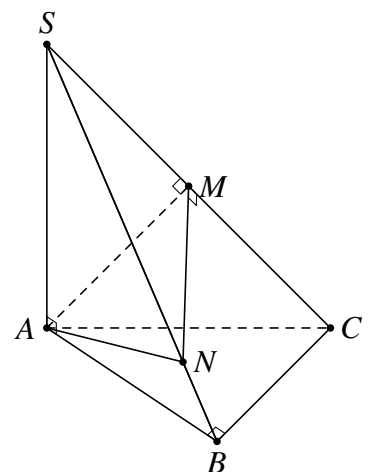
Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AMN)$. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác AMN .

$$\text{Ta có } AM = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}.$$

Vì $\triangle SMN \sim \triangle SBC$ nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow MN = \frac{SM \cdot BC}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}. \quad (4)$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow SN = \frac{SC \cdot MN}{BC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$



Cách 1.

$$\text{Xét } \triangle SAB, \cos S = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Xét $\triangle SAB$,

$$\begin{aligned} AN^2 &= SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos S = 4a^2 + \frac{16a^2}{5} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2}{5}. \\ \Leftrightarrow AN &= \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) đặt $p = \frac{AM + MN + AN}{2}$. Ta tính được

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-MN)(p-AN)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} &= \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow \frac{SM \cdot S_{AMN}}{SA \cdot S_{ACB}} &= \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow S_{AMN} &= \frac{S_{ACB} \cdot SA \cdot SN}{SC \cdot SB} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều, tam giác SBC vuông cân tại S , mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(B) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

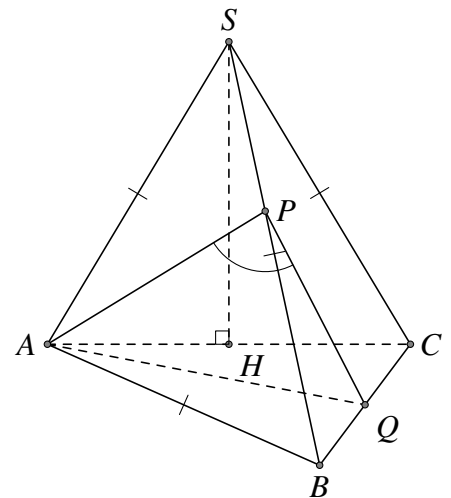
(C) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

(D) $\frac{2\sqrt{6}}{15}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC$, giả sử $SA = SB = SC = 1$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ SH vuông góc với AC suy ra H là trung điểm AC , do đó $HA = HC$.

Có $HB = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{SC^2 - SH^2} = HC$. Suy ra $HA = HB = HC$, tam giác ABC vuông tại B , từ đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.



Lấy P là trung điểm SB , suy ra $AP \perp SB$. (1)

Lấy Q là trung điểm CB , suy ra $PQ \parallel SC$, suy ra $PQ \perp SB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $SB \perp (APQ)$, mà $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng hoặc bù với góc $\widehat{APQ}$.

Tam giác APQ có $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PQ = \frac{1}{2}$, $AQ = \frac{\sqrt{6}}{2}$, theo định lý Cô-sin ta có $\cos \widehat{APQ} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

Vậy cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. (B) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

- Gọi I là trung điểm của BC , G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\Rightarrow AI = 3GI$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(G, (SBC)).$$

- Gọi E là trung điểm của AB

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB = a.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ là hình vuông

$$\Rightarrow CE = a = \frac{1}{2}AB.$$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$\Rightarrow BC \perp AC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$$

$$\text{Do } \begin{cases} AC \perp BC \\ SC \perp BC \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$$

Nên góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

$$\text{Tam giác vuông } SCA \text{ có } \tan 60^\circ = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC\sqrt{3} = a\sqrt{6}.$$

Kẻ $AH \perp SC$ trong tam giác vuông SCA .

Ta có: $AH \perp BC$ vì $BC \perp (SAC)$.

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH.$$

$$\text{Mà } AH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

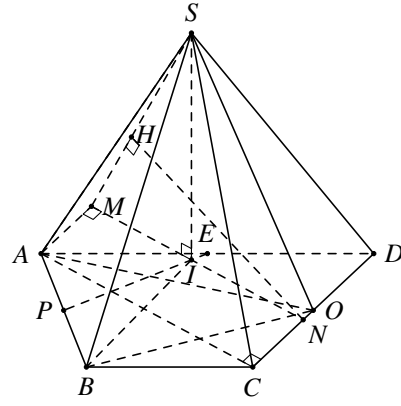
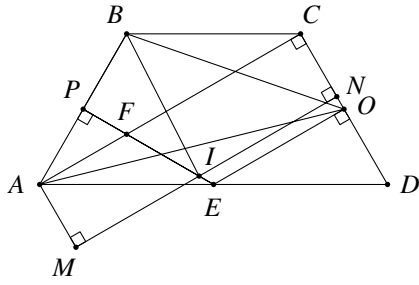
Chọn đáp án (A)

□

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều đường chéo AD , điểm O là trung điểm cạnh CD , $AD = 4a$, $SA = SB = SO = 2a$. Tính khoảng cách giữa SA và CD .

- (A) $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. (B) $\frac{a}{\sqrt{7}}$. (C) $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. (D) $\frac{4a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Theo bài ra ta có $SA = SB = SO = 2a$ nên các tam giác SIA , SIB , SIO bằng nhau. Do đó ta có $IA = IB = IO$ hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO .

Gọi E , P lần lượt là trung điểm của AD , AB . Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AB = BC = CD = 2a$, $AD = 4a$ nên $ABCE$, $BCDE$ là các hình thoi cạnh a .

Do $EA = EB = EC = ED = 2a$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C và EP là đường trung trực của AB . Tam giác ABE đều cạnh $2a$, suy ra $PE = a\sqrt{3}$ và $I \in PE$.

Ta có $\triangle ABC$ cân tại B có $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 12a^2 \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}.$$

Tam giác ACO vuông tại C nên $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = a\sqrt{13}$.

Tam giác BCO có $\widehat{BCO} = 120^\circ$ nên $BO^2 = BC^2 + CO^2 - 2BC \cdot CO \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow BO = a\sqrt{7}$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\triangle ABO} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO là

$$R = \frac{AB \cdot BO \cdot AO}{4S_{\triangle ABO}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{13} \cdot a\sqrt{7}}{6\sqrt{3}a^2} = \frac{a\sqrt{273}}{9}.$$

Tam giác SIB vuông tại I nên $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{273a^2}{81}} = \frac{a\sqrt{51}}{9}$.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của I trên CD , M là hình chiếu vuông góc của A trên IN . Khi đó $ACNM$ là hình chữ nhật, $MN = AC = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác BPI vuông tại P nên $IP = \sqrt{IB^2 - BP^2} = \sqrt{\frac{273a^2}{81} - a^2} = \frac{8a\sqrt{3}}{9}$, suy ra

$$EI = |EP - IP| = |a\sqrt{3} - \frac{8a\sqrt{3}}{9}| = \frac{a\sqrt{3}}{9}.$$

Gọi F là giao điểm của AC và EP , ta có F là trọng tâm tam giác ABE , suy ra

$$EF = \frac{2}{3}EP = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \quad FC = \frac{2}{3}AC = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

Do EO , IN , FC cùng vuông góc với CD nên chúng đôi một song song, suy ra

$$\frac{FC - EO}{IN - EO} = \frac{EF}{EI} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{9}} = 6 \Rightarrow IN = \frac{FC - EO}{6} + EO = \frac{19a\sqrt{3}}{18} \Rightarrow IM = \frac{17a\sqrt{3}}{18}.$$

Tam giác SIM vuông tại I nên có $SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \sqrt{\frac{51a^2}{81} + \left(\frac{17a\sqrt{3}}{18}\right)^2} = \frac{a\sqrt{119}}{6}$.

Vì $CD \perp MN$, $CD \perp SI$ nên $CD \perp (SMN)$.

Mặt khác $AM \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAM)$ nên $d(CD; SA) = d(CD; (SAM))$.

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ N đến SM , ta có $NH \perp CD \Rightarrow NH \perp AM$ và $NH \perp SM$ suy ra $NH \perp (SMA)$ hay $NH = d(CD; (SAM))$.

Trong tam giác SMN có $NH \cdot SM = SI \cdot MN \Rightarrow NH = \frac{SI \cdot MN}{SM} = \frac{4a}{\sqrt{7}}$.

Vậy $d(CD; SA) = \frac{4a}{\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM) .

(A) $\frac{5}{7}$.

(B) $\frac{1}{7}$.

(C) $\frac{3}{7}$.

(D) $\frac{6}{7}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên DM , ta có $DM \perp (SAH)$.

Gọi α là góc giữa (SDM) và $(ABCD)$ ta có $\alpha = \widehat{SHA}$.

Ta có $S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{3}{2}a^2$, $DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a^2\right)} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$.

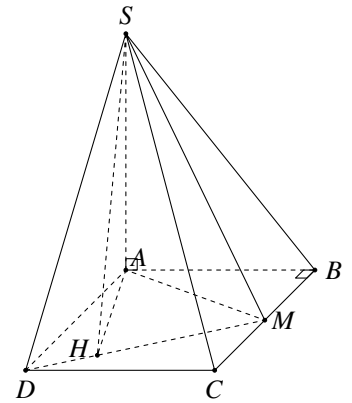
Ta có $AH = \frac{2S_{\triangle ADM}}{DM} = \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}a} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{SA}{AH} = \frac{1}{\frac{6\sqrt{13}}{13}} = \frac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{6}{7}$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{6}{7}$.

Chọn đáp án (D)

□



Câu 126. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng $AB'C'$ theo a .

(A) $\frac{a\sqrt{35}}{21}$.

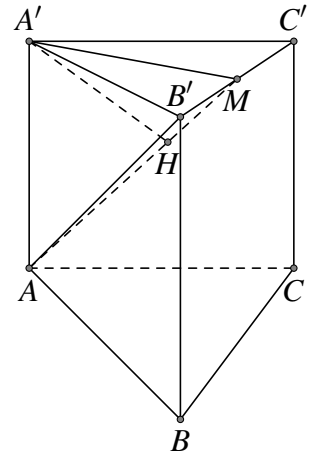
(B) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

(C) $\frac{a\sqrt{5}}{14}$.

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

- Vì $BC \parallel B'C'$ và $B'C' \subset (AB'C') \Rightarrow BC \parallel (AB'C') \Rightarrow d(BC; (AB'C')) = d(B; (AB'C'))$.
- Vì trung điểm $A'B$ nằm trong $mp(AB'C')$ nên $d(B; (AB'C')) = d(A'; (AB'C'))$.
- Do $(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow$ góc giữa $(A'B'C')$ và $(AB'C')$ bằng góc giữa (ABC) và $(AB'C')$ và bằng 60° .



- Gọi M là trung điểm của $B'C'$, do $A'B'C'$ là tam giác cân nên $A'M \perp B'C'$.
Kẻ $A'H \perp AM$ ($H \in AM$). Ta có
 - $AA' \perp B'C'$ ($AA' \perp (A'B'C')$) và $A'M \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow B'C' \perp A'H$.
 - Mà $A'H \perp AM \Rightarrow A'H \perp (AB'C') \Rightarrow d(A'; (AB'C')) = A'H$.
 - Vì $A'M \perp B'C'$ và $AM \perp B'C' \Rightarrow$ góc giữa $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AMA'} = 60^\circ$.
- Có $\widehat{C'A'M} = \frac{\widehat{B'A'C'}}{2} = 60^\circ$; $A'M = A'C' \cdot \cos \widehat{C'A'M} = \frac{a}{2}$.
- $A'H = A'M \cdot \sin \widehat{A'MA} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 127. Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Trên mặt phẳng (α) lấy tam giác ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}, BC = 2a$. Qua A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với (β) và cắt (β) tại A', B', C' tương ứng. Biết rằng $A'B' = A'C' = a\sqrt{3}$, hai đường thẳng $A'B'$ và $B'C'$ tạo với nhau góc $\arccos \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$. Tính góc giữa (α) và (β) .

(A) $\frac{\pi}{6}$.

(B) $\frac{\pi}{3}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải.

Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = BC^2$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A .

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = a^2$.

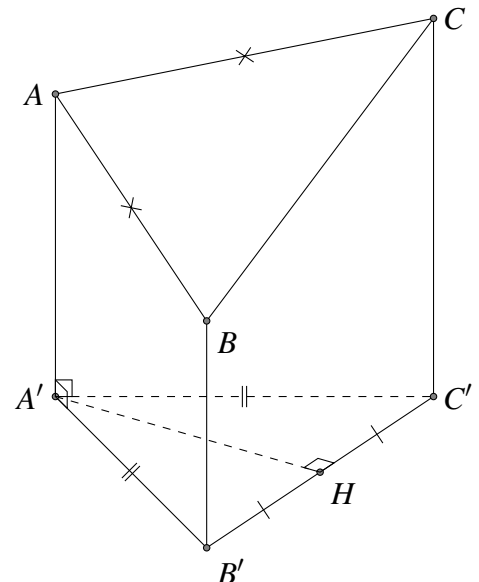
Gọi H là trung điểm của $B'C'$. Do $\triangle A'B'C'$ cân tại A' nên $A'H \perp B'C'$ và $B'H = A'B' \cdot \cos \widehat{A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$;

$$= a\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}};$$

$$B'C' = 2B'H = 2a\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}.$$

$$\text{Suy ra } A'H = \sqrt{A'B'^2 - B'H^2} = \sqrt{3a^2 - a^2 \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}}$$

$$= a\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}}.$$



$$\text{Suy ra } S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H = \frac{1}{2} \cdot 2a \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}} \cdot a \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) . Khi đó ta có $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 128. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ C đến (SAB) là

- (A) $\frac{a\sqrt{39}}{52}$. (B) $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. (C) $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. (D) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AB và E là hình chiếu vuông góc của H lên SK .

Ta có $AB \perp HK$ và $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp HE$.

Khi đó, $HE \perp SK$ và $HE \perp AB$ nên $HE \perp (SAB)$, suy ra

$$d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HE.$$

Tam giác vuông ABC có $AC = BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow HK = \frac{AC}{2} = \frac{a}{4}.$$

Tam giác vuông SHK có

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

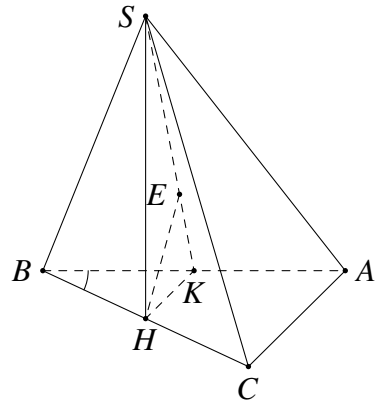
$$\text{Vậy } d(C, (SAB)) = 2 \cdot \frac{a\sqrt{39}}{26} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a\sqrt{6}$. Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- (A) $\frac{2}{\sqrt{13}}$. (B) 1. (C) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (D) $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC) từ C kẻ $CI \perp SA$, trong mặt phẳng (SAB) từ I kẻ $IH \perp SA$, cắt SB tại H , với cách vẽ này $SA \perp (CIH)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) là $\widehat{CIH}$.

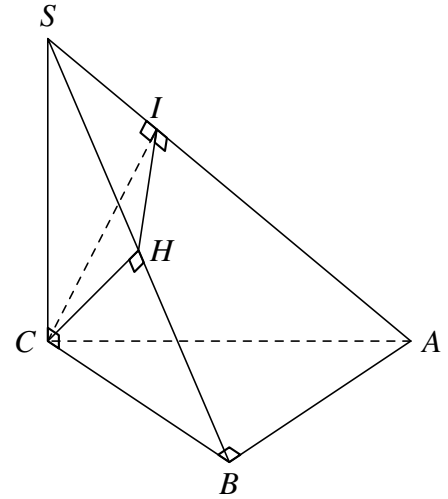
Với cách dựng trên ta cũng suy ra $CH \perp SA$.

Ta có $AB \perp SC$, $AB \perp BC$, do đó $AB \perp (SBC)$,

suy ra $AB \perp CH$. Lại có $CH \perp SA$ nên $CH \perp (SAB)$,

suy ra $CH \perp SB$ và $CH \perp HI$ hay tam giác $\triangle CHI$ vuông tại H .

Xét tam giác vuông SAC ta có



$$CI = \frac{SC \cdot CA}{\sqrt{SC^2 + CA^2}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét tam giác vuông SBC ta có

$$CH = \frac{SC \cdot CB}{\sqrt{SC^2 + CB^2}} = \frac{SC \cdot \sqrt{CA^2 - AB^2}}{\sqrt{SC^2 + CA^2 - AB^2}} = \frac{2a\sqrt{78}}{13}.$$

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) là $\widehat{CIH}$ nên $\sin \widehat{CIH} = \frac{CH}{CI} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = AB = BC = a$, $AD = 2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm SB , CD . Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(C) $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

(D) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải.

Gọi E , F lần lượt là trung điểm của SC , AB .

Vì ME , NF cùng song song với BC nên $ME \parallel NF$.

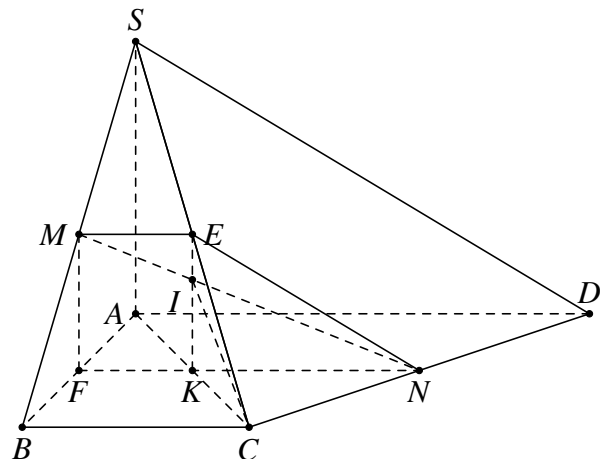
Do đó tứ giác $MENF$ là hình thang.

Do $SA \perp (ABCD)$ và $MF \parallel SA$ nên $MF \perp (ABCD)$. Khi

đó tứ giác $MENF$ là hình thang vuông tại M , F .

Trong $(ABCD)$, gọi $K = AC \cap FN$; trong $(MENF)$, gọi $I = MN \cap EK$.

Khi đó $MN \cap (SAC) = I$.



Ta có $\begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC)$ hay C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC) .

Từ đó suy ra $(MN, (SAC)) = (MN, CI) = \widehat{NIC} = \alpha$.

Xét tam giác vuông NIC ta có $\sin \alpha = \frac{NC}{IN}$.

Ta có $NC = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\triangle NIK \sim \triangle MIE$ nên

$$\frac{IN}{IM} = \frac{KN}{ME} = 2 \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy $\sin \alpha = \frac{CN}{IN} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 131. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$. Biết rằng khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác $AB'D'$ đến $(AA'D')$ bằng $\frac{a}{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(ADC'B')$ bằng

(A) $\frac{3a}{4}.$

(B) $\frac{3a}{2}.$

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{4}.$

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm $B'C', A'D'$.

Tam giác AMN cân tại A .

Ta có $\begin{cases} A'D' \perp MN \\ A'D' \perp AO \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp (AMN).$

$\Rightarrow B'C' \perp (AMN)$

Kẻ $GH \perp AN$ tại H , kẻ $GK \perp AM$ tại K .

Suy ra $d(G, (ADC'B')) = GK = GH$

$= d(G, (AA'D')) = \frac{a}{2}.$

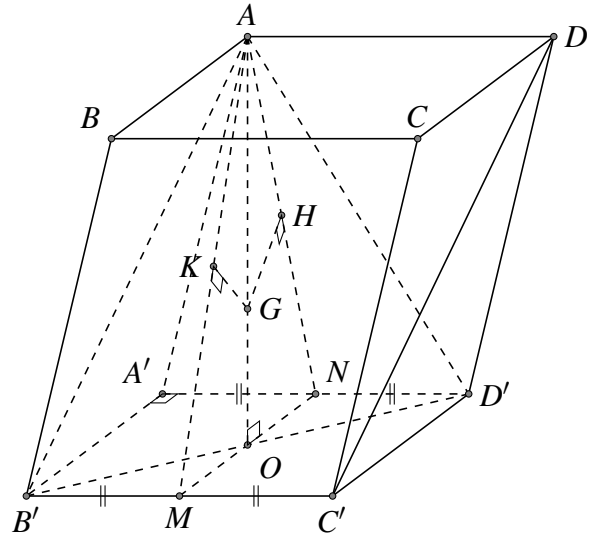
Ta lại có $\frac{d(O, (ADC'B'))}{d(G, (ADC'B'))} = \frac{OA}{GA} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow d(O, (ADC'B')) = \frac{3}{2} \cdot d(G, (ADC'B'))$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}.$

Chọn đáp án **(A)**

□



Câu 132. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

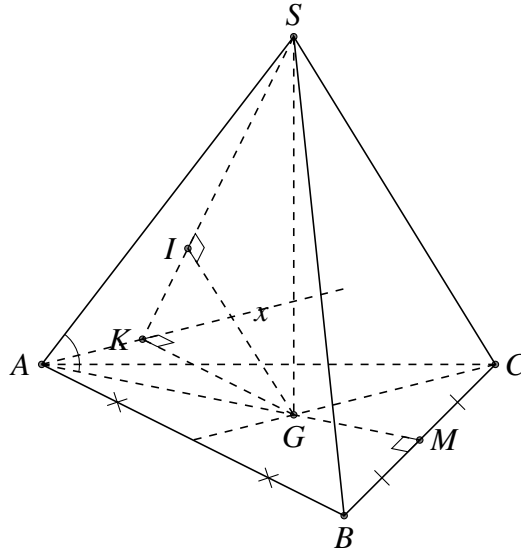
(A) $\frac{a\sqrt{2}}{5}.$

(B) $\frac{a}{5}.$

(C) $\frac{a\sqrt{5}}{10}.$

(D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải.



Ta có: $SG = AG \cdot \tan 60^\circ = AG\sqrt{3}$. Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $Ax \parallel CG$.

Kẻ $GK \perp Ax \Rightarrow CG \parallel (SAK) \Rightarrow d(CG, SA) = d(CG, (SAK)) = d(G, (SAK))$.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp GK \\ AK \perp SG \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SGK) \Rightarrow AK \perp GI$.

(*)

Kẻ $GI \perp SK \Rightarrow GI \perp (SAK) \Rightarrow d(G, (SAK)) = GI$.

Ta có: $GK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. Xét tam giác SGK vuông tại G :

$$\frac{1}{GI^2} = \frac{1}{GK^2} + \frac{1}{SK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 2:

Gọi P là trung điểm của SB , ta có: $MP \parallel SA$.

$SA \parallel (MPC)$, $GC \subset (MPC)$.

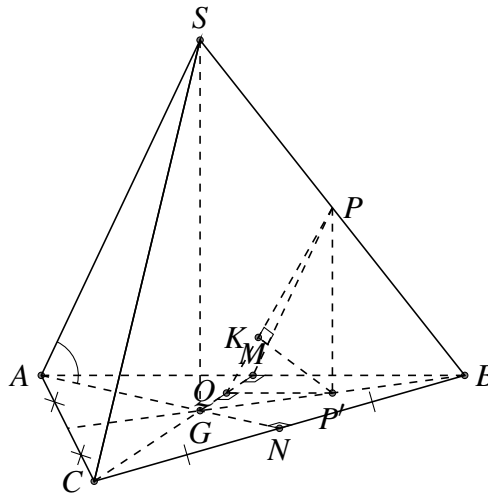
$\Rightarrow (SA, GC) = d(SA, (MPC)) = d(A, (MPC)) = d(B, (MPC))$.

Trong tam giác SGB (vuông tại G), gọi P' là trung điểm của $GB \Rightarrow PP' \parallel SG \Rightarrow PP' \perp GB$.

Ta có $d(B, (MPC)) = 2d(P', (MPC))$.

Với Q là trung điểm GM ta có $P'Q \parallel AB$ nên $P'Q \perp GM$.

Do $\begin{cases} P'Q \perp GM \\ P'P \perp GM \end{cases} \Rightarrow GM \perp (PP'Q)$. Suy ra $(MCP) \perp (PP'Q)$.



Vì $(MCP) \cap (PP'Q) = PQ$ nên $d(P', (MCP)) = P'K$, với $P'K$ là đường cao trong tam giác vuông $PP'Q$

(vuông tại P').

$$P'Q = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{4}AB = \frac{a}{4}; PP' = \frac{1}{2}SG = \frac{1}{2}a.$$

$$AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}; \tan 60^\circ = \frac{SG}{AG}; \Rightarrow SG = AG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\frac{1}{P'K^2} = \frac{1}{P'Q^2} + \frac{1}{P'P^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{16}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow P'K = \frac{a\sqrt{5}}{10} \Rightarrow d = 2P'K = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

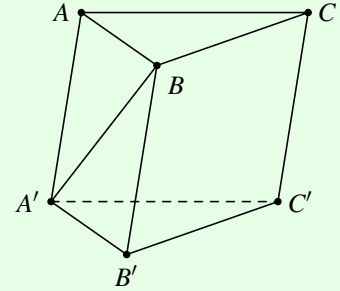
Chọn đáp án (D)

□

Câu 133.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, $AB' = a$. Biết mặt bên $(ABB'A')$ vuông góc với mặt đáy. Gọi N là một điểm di động trên đoạn thẳng BA' , khoảng cách lớn nhất từ N đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\frac{a\sqrt{15}}{10}$. (C) $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. (D) $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$.



Lời giải.

Gọi O là trung điểm của BA' . Khi đó

$$\begin{aligned} d(N, (AB'C')) &= \frac{NO}{A'O} d(A', (AB'C')) \\ &\leq d(A', (AB'C')) = d(B, (AB'C')). \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $N \equiv A'$ hoặc $N \equiv B$. Do đó ta chỉ cần tìm $d(A', (AB'C'))$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'B'$. Do $(ABB'A') \perp (A'B'C')$ nên $AH \perp (A'B'C')$. Dễ dàng kiểm tra được $AA'^2 + AB'^2 = A'B'^2$ hay tam giác $AA'B'$ vuông tại A . Suy ra

$$AH = \frac{AA' \cdot AB'}{A'B'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu của H xuống $B'C'$ và AK . Khi đó $HI \perp (AB'C')$. Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{B'H}{B'A'} &= \frac{B'H \cdot B'A'}{B'A'^2} = \frac{B'A'^2}{B'A'^2} = \frac{1}{4}, \\ \frac{HK}{AM} &= \frac{B'H}{B'A'} = \frac{1}{4} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

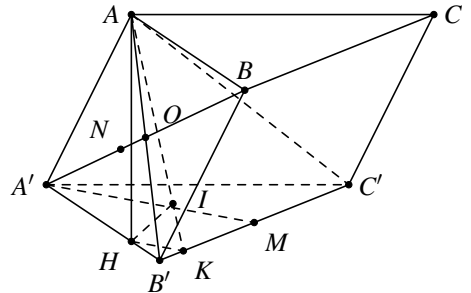
Suy ra

$$d(H, (AB'C')) = HI = \frac{AH \cdot HK}{\sqrt{AH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

$$\text{Vậy } d(A', (AB'C')) = \frac{A'B'}{HB'} d(H, (AB'C')) = \frac{2a\sqrt{15}}{10}.$$

Chọn đáp án (C)

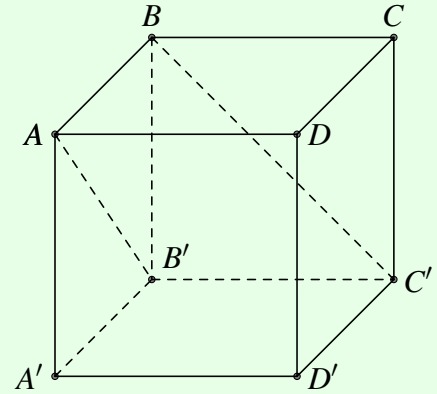
□



Câu 134.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- (A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.



Lời giải.

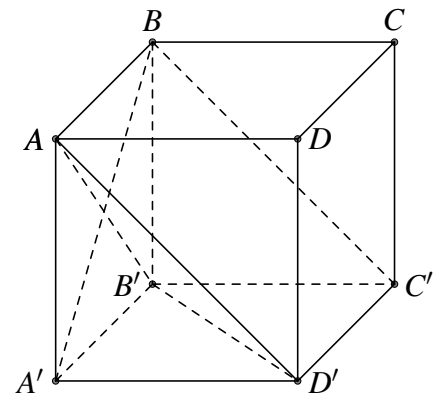
Tứ giác $ABC'D'$ là hình bình hành nên $BC' \parallel AD'$ và $AD' \subset (AB'D')$ do đó $BC' \parallel (AB'D')$.

Suy ra $d(BC', AB') = d(B, (AB'D')) = d(A', (AB'D'))$.

Gọi $d = d(A', (AB'D'))$. Ta có

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Vậy $d(BC', AB') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (C)



Câu 135. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^2b}{3}$ với $AB = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD , trên các cạnh AB, SD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho EF song song BG . Khoảng cách giữa hai đường thẳng DG và EF bằng

- (A) $\frac{2ab}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$. (B) $\frac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$. (C) $\frac{ab}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$. (D) $\frac{a^2b}{3\sqrt{2b^2+a^2}}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và SC .

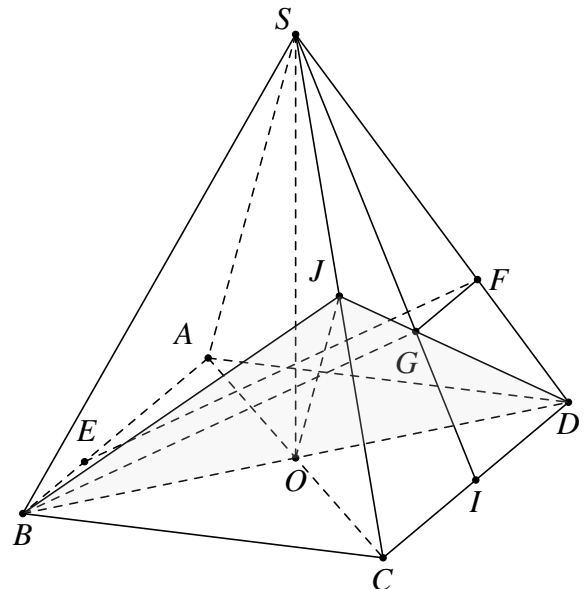
Ta có $\begin{cases} V_{S.ABCD} = \frac{a^2b}{3} \\ AB = a \end{cases} \Rightarrow SO = b$.

Ta được $OJ = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OC^2} = \frac{\sqrt{2b^2+a^2}}{2\sqrt{2}}$.

Ta thấy $S_{\triangle BJD} = \frac{OJ \cdot BD}{2} = \frac{a\sqrt{2b^2+a^2}}{4}$.

Ta có $V_{B.SJD} = V_{S.BJD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Ta được $d(S, (BJD)) = \frac{3V_{S.BJD}}{S_{\triangle BJD}} = \frac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$.



Mặt khác, $EF \parallel BG \Rightarrow EF \parallel (BJD)$ nên $d(EF, DG) = d(EF, (BJD)) = d(F, (BJD))$.

Hơn nữa, $AB \parallel CD \subset (SDC) \Rightarrow GF \parallel CD \Rightarrow \frac{DF}{DS} = \frac{d(F, (BJD))}{d(S, (BJD))} = \frac{1}{3}$.

Vậy $d(EF, DG) = \frac{ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 136. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O' và song song với hai đường thẳng $A'D$ và $D'O$. Dựng thiết diện của hình hộp chữ nhật trên khi cắt bởi mặt phẳng (α) . Tìm điều kiện của a, b, c để thiết diện nói trên là hình thoi có một góc bằng 60° .

- (A) $a = b = c$. (B) $a = b = \frac{c}{3}$. (C) $b = c = \frac{a}{3}$. (D) $a = c = \frac{b}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của DB' và $O'B$.

Qua I kẻ $MN \parallel A'D$ ($M \in CD, N \in A'B'$).

Gọi Q là giao điểm của NO' và $C'D'$.

Thiết diện chính là hình bình hành $BMQN$.

Ta có $\frac{B'I}{DM} = \frac{B'I}{DI} = \frac{B'O'}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'I = \frac{DM}{2}$.

Mà $CM = B'I$ nên $CM = \frac{DM}{2} \Rightarrow CM = \frac{CD}{3}$.

Do đó, $B'I = CM = \frac{a}{3}$.

Ta có $BN^2 = BB'^2 + B'I^2 = c^2 + \frac{a^2}{9}$,

$BM^2 = BC^2 + CM^2 = b^2 + \frac{a^2}{9}$,

$MN^2 = A'D^2 = b^2 + c^2$.

Do $MN^2 < BM^2 + BN^2$ nên $\widehat{MBN} < 90^\circ$.

Để $BMQN$ là hình thoi có một góc bằng 60° thì tam giác BMN đều, khi đó

$$b^2 + \frac{a^2}{9} = c^2 + \frac{a^2}{9} = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{3}.$$

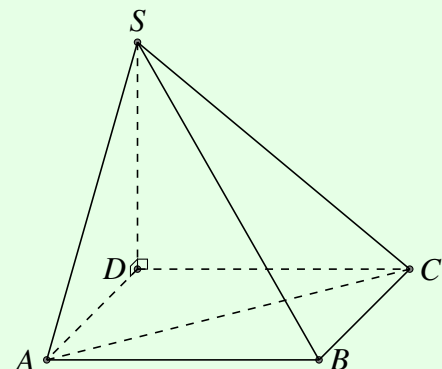
Chọn đáp án (C)

□

Câu 137.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) .

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$. (D) $\frac{1}{4}$.



Lời giải.

$$\text{Ta có: } BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \frac{1}{2}} = a\sqrt{3}.$$

$$SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{d^2(D, (SAC))} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{d^2(D, AC)} = \frac{1}{3a^2} + \frac{AC^2}{4S_{DAC}^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{7a^2}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{8}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(D, (SAC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4} = d(B, (SAC)).$$

$$\text{Do đó } \sin(B, (SAC)) = \frac{d(B, (SAC))}{SB} = \frac{d(D, (SAC))}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (D)

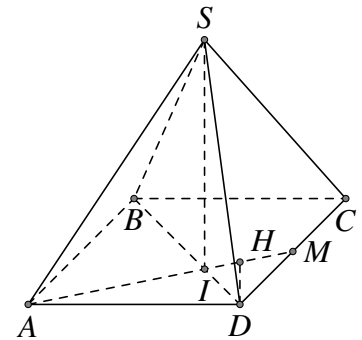
□

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} < 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của CD . Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

- (A) $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. (B) $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. (C) $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$. (D) $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

- Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy và $(SBD) \cap (SAM) = SI$ (với $I = AM \cap BD$) $\Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
- Có $\frac{BI}{ID} = \frac{AB}{DM} = 2 \Rightarrow d(B; (SAM)) = 2d(D; (SAM))$.
- Kẻ $DH \perp AM$ mà $DH \perp SI \Rightarrow DH \perp (SAM)$
 $\Rightarrow d(D; (SAM)) = DH$.



- Ta có $S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin \widehat{ADC} = 2\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \sin \widehat{ADC} = 2a^2 \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow \widehat{ADC} = 45^\circ$ (vì $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} < 90^\circ$).
- Khi đó $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2AD \cdot DM \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{10}}{2}a$
 $\Rightarrow DH = \frac{2S_{ADM}}{AM} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{10}}{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5}a \Rightarrow d(B; (SAM)) = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 139. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng 10. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{SA_1}{SA} = \frac{2}{3}$; $\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2}$; $\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng đi qua A_1, B_1, C_1 cắt SD tại D_1 . Tính khoảng cách từ điểm D_1 đến mặt phẳng đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- (A) 5. (B) $\frac{11}{2}$. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm $ABCD$, trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của SO và A_1C_1 .

Do giả thiết suy ra $SO \perp (ABCD)$. Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $D_1H \parallel SO$ suy ra $D_1H \perp (ABCD)$.

Do đó $d(D_1, (ABCD)) = D_1H$.

$$\text{Mặt khác ta có } \frac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SC_1}{SC} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \frac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SI}{SO} \quad (2).$$

$$\text{và } \frac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}} = \frac{SC_1}{SC} \cdot \frac{SI}{SO} \quad (3).$$

Mà

$$\frac{S_{\triangle SA_1C_1}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{\triangle SA_1I}}{S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SC_1I}}{S_{\triangle SCO}} \right)$$

Từ (1), (2) và (3) và giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SC_1}{SC} &= \frac{1}{2} \left(\frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SC_1}{SC} \cdot \frac{SI}{SO} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{1}{3} \cdot \frac{SI}{SO} \right) \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SD_1}{SD} &= \frac{1}{2} \left(\frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SD_1}{SD} \cdot \frac{SI}{SO} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{SD_1}{SD} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{SD_1}{SD} \right) \Leftrightarrow \frac{SD_1}{SD} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Xét tam giác SOD vì $D_1H \parallel SO$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{DD_1}{DS} = \frac{DH}{DO} = \frac{HD_1}{SO}$$

Theo chứng minh trên ta có $\frac{DD_1}{DS} = \frac{3}{5}$ suy ra $\frac{HD_1}{SO} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow HD_1 = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC) bằng

(A) $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

(B) $\frac{\sqrt{30}a}{10}$.

(C) $\frac{\sqrt{30}a}{8}$.

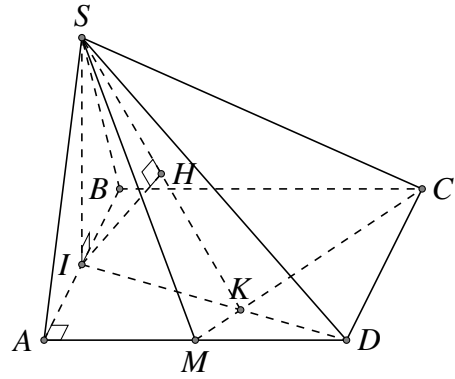
(D) $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$.

Lời giải.

Gọi K là giao điểm của ID với MC , và H là hình chiếu của I lên SK .

Ta chứng minh $IK \perp MC$. Thật vậy, do hai tam giác ADI và DCM bằng nhau nên $\widehat{ADI} = \widehat{DCM}$. Do đó $\widehat{KMD} + \widehat{MDK} = \widehat{CMD} + \widehat{DCM} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MKD} = 90^\circ$ hay $IK \perp MC$.

Ta chứng minh $IH \perp (SMC)$.



Thật vậy, do tam giác SAB đều nên $SI \perp AB$, vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$, nên $SI \perp MC$, kết hợp với $MC \perp IK$ suy ra $MC \perp IH$. Theo cách dựng ta có $IH \perp SK$, do đó $IH \perp (SMC)$.

Lúc này khoảng cách từ I đến (SMC) chính là độ dài đoạn IH .

Ta có $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}$, suy ra $DK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lại có $ID^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, suy ra $DI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó suy ra $IK = DI - DK = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Ta có $SI = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{20}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{32}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{2}}{8}.$$

Vậy khoảng cách từ I đến (SMC) là $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB) ; (ABC) góc bằng nhau. Tỉ số $\frac{MS}{MC}$ có giá trị bằng

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(B) 1.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC , suy ra $SH \perp (ABC)$.

Gọi N là trung điểm của AB , suy ra $AB \perp (SHN)$.

Lấy K là giao điểm của AM , SH . Do đó $\begin{cases} ((ABM), (ABC)) = \widehat{HNK} \\ ((ABM), (SAB)) = \widehat{KNS}. \end{cases}$

Theo giả thiết, NK là phân giác của $\widehat{SNH}$.

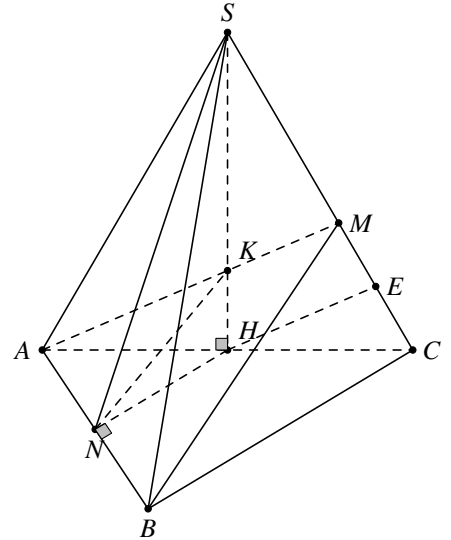
Giả sử $AB = 1 \Rightarrow BC = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}$.

Mặt khác $HN = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SN = \sqrt{HN^2 + SH^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \frac{KH}{KS} = \frac{HN}{SN} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (tính chất phân giác).

Gọi E là trung điểm của CM , theo định lí Ta-lét thì

$$\frac{ME}{MS} = \frac{KH}{KS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MC}{MS} = \frac{2ME}{MS} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MS}{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



Chọn đáp án (A)



Câu 142. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 45° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

(A) $\frac{2\sqrt{51}}{15}a$.

(B) $\frac{2\sqrt{15}}{5}a$.

(C) $\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

(D) $\frac{2\sqrt{15}}{3}a$.

Lời giải.

Ta có $d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAC}}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) .

Ta có $\begin{cases} AB \perp BS \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$.

Tương tự ta chứng minh được $AC \perp CH$.

Do đó ta chứng minh được $\triangle ABH = \triangle ACH$.

Suy ra AH là đường phân giác trong góc A của tam giác đều ABC và

$$AH = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

Vì góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 45° nên ta có

$$\widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} SH = AH = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \\ AC = \frac{4a\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

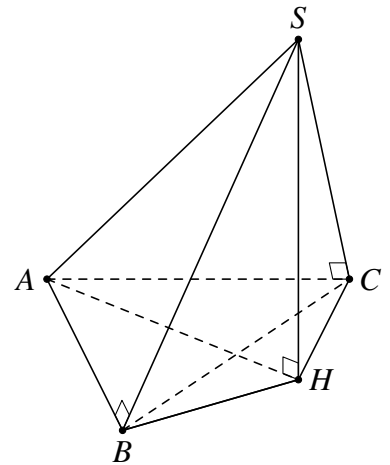
Tam giác SAC vuông tại C nên $SC = \sqrt{SA^2 - AC^2} = \frac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Diện tích tam giác SAC là $S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2}AC \cdot SC = \frac{2a^2\sqrt{15}}{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3}a^3$.

Vậy $d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}a$.

Chọn đáp án (B)



Câu 143. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Gọi α là số đo góc giữa hai đường thẳng AA' , $B'C'$, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha = \frac{3}{10}$. (B) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. (C) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. (D) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

- Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có
 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = a \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$
 $\cos(AA', B'C') = \cos(BB', BC) = \cos \alpha$.

- Ta có
 $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow \Delta A'HB'$
 vuông tại A' .

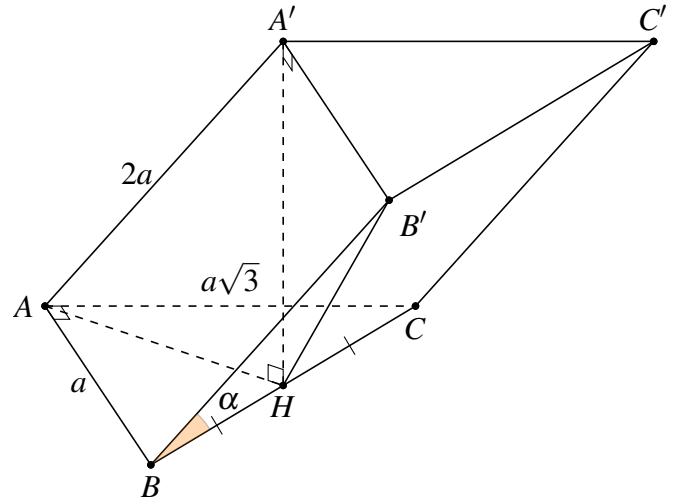
- Ta suy ra $B'H^2 = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2a$.

- Trong tam giác $B'BH$ có

$$\cos \widehat{B'BH} = \frac{B'B^2 + BH^2 - B'H^2}{2B'B \cdot BH} = \frac{1}{4}.$$

- Vậy $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C)



□