

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 4$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ trên đoạn $[2;5]$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + 5 - 6i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của z

b) Giải phương trình $\log_3(x^2 - x + 1) = 2$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;-2), B(3;1;1)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 3z - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB , tìm góc giữa đường thẳng AB với mặt phẳng (P) , và tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $P = (3 - \cos 2\alpha)(1 + 2\cos 2\alpha)$, biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

b) Có hai thùng đựng một loại nước mắm Cự Nham - Xã Quảng Nham - Huyện Quảng Xương nổi tiếng Tỉnh Thanh Hóa. Thùng thứ nhất đựng 10 chai (6 chai nước mắm Cự Nham thật và 4 chai nước mắm Cự Nham rỗng do kẻ gian bỏ vào). Thùng thứ hai đựng 8 chai (5 chai nước mắm Cự Nham thật và 3 chai nước mắm Cự Nham rỗng do kẻ gian bỏ vào). Lấy ngẫu nhiên mỗi thùng một chai. Tính xác suất để hai chai lấy được có ít nhất một chai là nước mắm Cự Nham thật.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=2a$, $BAC = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM theo a .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có AD là phân giác trong của góc A . Các điểm M và N tương ứng thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM=BD$, $CN=CD$. Biết $D(-1; \frac{-1}{2})$, $M(\frac{3}{2}; 2)$, $N(-\frac{5}{2}; 4)$, hãy viết phương trình của các cạnh tam giác ABC .

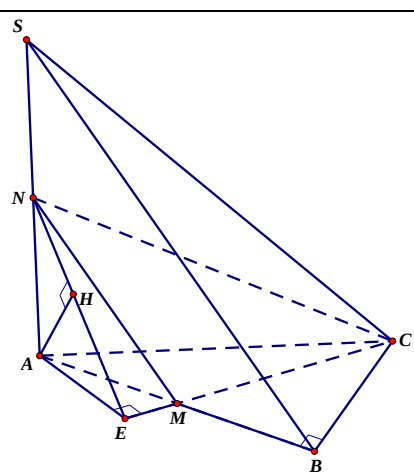
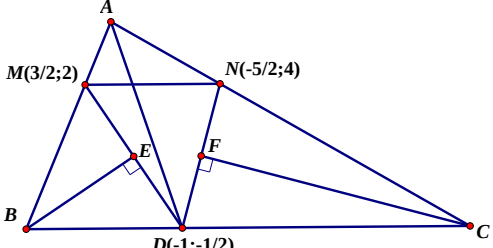
Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình sau trên tập số thực

$$\begin{cases} -y^3 + (x-3)y^2 + (2x-3)y + x - 1 = 0 \\ y^2 + 6y + 6 = (y+1)\sqrt{14y+13} + \sqrt{10x-9} \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x > y$ và $xy + (x+y)z + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$

-----Hết-----

Câu	Đáp án	Điểm																
1	1) Tập xác định : $D=\mathbf{R}$ 2) Sự biến thiên a) Chiều biến thiên Ta có $y'=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+6$ $y'=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(4; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ b) Cực trị Hàm số đạt cực đại tại $(2;1)$, đạt cực tiểu tại $(4;0)$ c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ d) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> 3) Đồ thị	x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	0.25 0.25 0.25 0.25
x	$-\infty$	2	4	$+\infty$														
y'	+	0	-	0	+													
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$														
2	Ta có hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;5]$ Đạo hàm $f'(x)=2-\frac{3}{x^2}=\frac{2x^2-3}{x^2}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \notin [2;5], f(2)=\frac{11}{2}, f(5)=\frac{53}{5}$ Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ lần lượt là $\frac{53}{5}$ và $\frac{11}{2}$	0.25 0.25 0.25 0.25																
3a	Ta có $(2+i)z+5-6i=0$																	

	Suy ra xác suất của biến cố A là : $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$	0.25
7	Tam giác ABC có $BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot a \Rightarrow S_{ABC} = 2\sqrt{3} \cdot a^2$ Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$ $= \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{3}$ $= 2a^3$ Gọi N là trung điểm cạnh SA do $SB // (CMN)$ nên $d(SB, CM) = d(SB, (CMN))$ $= d(B, (CMN)) = d(A, (CMN))$ Kẻ AE vuông góc với MC và AH vuông với NE ta được $AH \perp (CMN) \Rightarrow d(A, (CMN)) = AH$ Ta có $S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AC \cdot \sin CAM = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4a \cdot \sqrt{3}$ Và $MC = a\sqrt{13}$ nên $AE = \frac{2S_{AMC}}{MC} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}$ và $AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{29}}$ Vậy $d(SB, CM) = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{87}a}{29}$	 0.25 0.25 0.25 0.25
8	Từ tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow MN // BC$ Đường thẳng BC đi qua D và nhận $\overrightarrow{MN} = (-4; 2)$ làm vector chỉ phương có phương trình là $x + 2y + 2 = 0$ Gọi F, E lần lượt là trung điểm của DN và DM, do $CD = CN$ nên đường thẳng trung trực của đoạn thẳng DN là CF. Phương trình CF đi qua $F(-\frac{7}{4}; \frac{7}{4})$ và nhận $\overrightarrow{DN} = (\frac{-3}{2}; \frac{7}{2})$ làm vector pháp tuyến có phương trình là $x - 3y + 7 = 0$. Tọa độ điểm C là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C(-4; 1)$ Đường thẳng AC (đi qua C và N) phương trình là $2x - y + 9 = 0$ Tương tự BE là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng DM có phương trình là $x + y - 1 = 0$, tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow B(4; -3)$. Đường thẳng AB (đi qua B và M) phương trình là $2x + y - 5 = 0$ Vậy phương trình các cạnh của tam giác là: AB: $2x + y - 5 = 0$; BC: $x + 2y + 2 = 0$; CA: $2x - y + 9 = 0$	 0.25 0.25 0.25 0.25
9	Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 2x - 2 = y^2 + 3y & (1) \\ y^2 + 6y + 6 = (y+1)\sqrt{14y+13} + \sqrt{10x-9} & (2) \end{cases}$	

$$\text{ĐK } \begin{cases} x \geq \frac{9}{10} \\ y \geq \frac{-13}{14} \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (1) của hệ tương đương với

$$(y+1)^2(x-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=y+1 \end{cases}$$

+Với $y=-1$ loại do đk $y \geq \frac{-13}{14}$

+Với $x=y+1$ phương trình (2) của hệ trở thành $y^2+6y+6=(y+1)\sqrt{14y+13}+\sqrt{10y+1}$

$$\Leftrightarrow y^2+6y+6-(y+1)\sqrt{14y+13}-\sqrt{10y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left[(y+4)-\sqrt{14y+13}\right]+\left[(y+2)-\sqrt{10y+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\frac{(y+4)^2-(14y+13)}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{(y+2)^2-(10y+1)}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\frac{y^2-6y+3}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{y^2-6y+3}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-6y+3)\left(\frac{y+1}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{1}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-6y+3=0 \text{ (Vì với } y \geq \frac{-1}{10} \text{ thì } \frac{y+1}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{1}{(y+2)+\sqrt{10y+1}} > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-\sqrt{6} \\ y=3+\sqrt{6} \end{cases} \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm là } (x;y)=\{(4-\sqrt{6};3-\sqrt{6}), (4+\sqrt{6};3+\sqrt{6})\}$$

0.25

0.25

0.25

0.25

10

Đặt $x+z=a$. Từ giả thiết bài toán ta có $(x+z)(y+z)=1$, hay $y+z=\frac{1}{a}$

Do $x>y$ nên $x+z>y+z$. Suy ra $a>1$

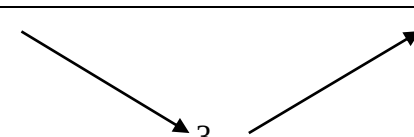
$$\text{Ta có } x-y=x+z-(y+z)=a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}$$

$$\text{Ta được } P=\frac{a^2}{4(a^2-1)^2}+\frac{1}{a^2}+a^2=\frac{a^2}{4(a^2-1)^2}+\frac{3a^2}{4}+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a^2}\right)\geq\frac{a^2}{4(a^2-1)^2}+\frac{3a^2}{4}+1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } a^2=t>1. \text{ Xét hàm số } f(t)=\frac{t}{4(t-1)^2}+\frac{3t}{4}+1$$

$$\text{Ta có } f'(t)=\frac{-t-1}{4(t-1)^3}+\frac{3}{4}, f'(t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2-3t+2)=0 \Leftrightarrow t=2$$

Bảng biến thiên

t	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\geq 3$ với mọi $t>1$ (2)

0.25

0.25

0.25

	Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 3$, dấu bằng đạt được tại $\begin{cases} x + z = \sqrt{2} \\ y + z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3.	0.25
--	---	------