

$$= \cos \frac{\pi}{4} + 3 \sin \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + 1$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 =$$

$$\int_1^3 \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}} dx =$$

Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 03

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





Chủ đề 01. NGUYÊN HÀM

▮ Dạng 1.1. Nguyên hàm cơ bản.....	5
▮ Dạng 1.2. Nguyên hàm đổi biến.....	7
1.2.1. Đổi biến loại 1 (Lượng giác hóa).....	7
1.2.2. Đổi biến loại 2.....	9
▮ Dạng 1.3. Nguyên hàm từng phần	11
▮ Dạng 1.4. Nguyên hàm hàm số hữu tỉ.....	13
1.4.1. Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu	13
1.4.1. Bậc tử $<$ Bậc mẫu	14
▮ Dạng 1.5. Nguyên hàm hàm số vô tỉ	23
▮ Dạng 1.6. Nguyên hàm hàm số lượng giác.....	23
▮ Dạng 1.7. Nguyên hàm có điều kiện	26

Chủ đề 02. TÍCH PHÂN

▮ Dạng 2.1. Tích phân áp dụng tính chất & bảng nguyên hàm cơ bản.....	29
▮ Dạng 2.2. Tích phân từng phần.....	31
▮ Dạng 2.3. Tích phân đổi biến loại 1.....	33
▮ Dạng 2.4. Tích phân đổi biến loại 2	35
▮ Dạng 2.5. Tích phân kết hợp đổi biến & từng phần.....	37
▮ Dạng 2.6. Tích phân chứa trị tuyệt đối.....	39
▮ Dạng 2.7. Tích phân dựa vào đồ thị.....	41
▮ Dạng 2.8. Tích phân hàm chẵn lẻ	43
▮ Dạng 2.9. Tích phân hàm cho nhiều công thức.....	45
▮ Dạng 2.10. Tích phân liên quan max - min.....	47
▮ Dạng 2.11. Tích phân hàm “ẩn”	49
2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến.....	49
2.11.2. Dùng phương pháp từng phần	51
▮ Dạng 2.12. Tích phân liên quan phương trình vi phân	53
2.12.1. Biểu thức đạo hàm	53

2.12.2. Biểu thức tổng hiệu	55
2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$	56
▮ Dạng 2.13. Bất đẳng thức tích phân	58
📖 Chủ đề 03. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN	
▮ Dạng 3.1. Câu hỏi lý thuyết	63
▮ Dạng 3.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$	65
▮ Dạng 3.3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$	66
▮ Dạng 3.4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$	67
▮ Dạng 3.5. Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị	68
▮ Dạng 3.6. Thể tích vật thể	70
▮ Dạng 3.7. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox	71
▮ Dạng 3.8. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, $g(x)$, $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox	72
▮ Dạng 3.9. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(y)$, $g(y)$, $y=a$, $y=b$ quay quanh Oy	73
▮ Dạng 3.10. Tính giá trị hàm qua diện tích hình phẳng	74



Chương 03

Chủ đề 01

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

NGUYÊN HÀM

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in K$.

Ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Định lý:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì:

- Với mỗi hằng số C , hàm $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
- Mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

→ Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

3. Tính chất:

$$\circ \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \text{ và } \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

$$\circ \int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \text{ với } k \neq 0.$$

$$\circ \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4. Định lý:

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

5. Bảng nguyên hàm cơ bản:

(1). $\int 0 dx = C$	(2). $\int dx = x + C$
(3). $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	(14). $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$
(4). $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	(15). $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(ax+b)} + C$
(5). $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	(16). $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
(6). $\int e^x dx = e^x + C$	(17). $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
(7). $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(18). $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
(8). $\int \cos x dx = \sin x + C$	(19). $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
(9). $\int \sin x dx = -\cos x + C$	(20). $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
(10). $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	(21). $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
(11). $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	(22). $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
(12). $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	(23). $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
(13). $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	(24). $\int (1 + \cot^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

6. Bảng nguyên hàm mở rộng:

(1). $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	(8). $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$
(2). $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	(9). $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$
(3). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$	(10). $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
(4). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	(11). $\int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
(5). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \left \frac{x}{a} \right + C$	(12). $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$
(6). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right + C$	(13). $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$
(7). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	(14). $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in K$.

Ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Tính chất:

☉ $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

☉ $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ với $k \neq 0$.

☉ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

➤ Ví dụ 1.1.1 - Áp dụng định nghĩa

Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$.

A. $F(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{3}$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{2} + 2$.

D. $F(x) = x^3$

📌 Lời giải

.....
.....

➤ Ví dụ 1.1.2 - Áp dụng định nghĩa

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ là?

A. $-\ln|x| + C$

B. $\ln|x| + C$.

C. $x + C$.

D. $\frac{1}{x^2} + C$

📌 Lời giải

.....
.....

➤ Ví dụ 1.1.3 - Áp dụng định nghĩa

Nếu $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng:

A. $x^2 + e^x$

B. $\frac{x^4}{3} + e^x$.

C. $3x^2 + e^x$.

D. $\frac{x^4}{12} + e^x$

📌 Lời giải

.....
.....

☞ Ví dụ 1.1.4 - Áp dụng bảng nguyên hàm

Tính $I = \int (1 + \tan^2 x) dx$

A. $I = \sin x + C$

B. $I = \cos x + C$

C. $I = \tan x + C$

D. $I = \cot x + C$

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.5 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

A. $\int f(x) dx = 5^x + C$

B. $\int f(x) dx = 5^x \ln 5 + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C$

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.6 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

A. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.7 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 + 2$ là

A. $x^5 + 2x + C$

B. $\frac{1}{5}x^5 + 2x + C$

C. $10x + C$

D. $x^5 + 2$

📖 Lời giải

➤ **Dạng 1.2. Nguyên hàm đổi biến**

1.2.1. Đổi biến loại 1 (Lượng giác hóa)

○ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp “Đổi biến loại 01”:

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{2ax - x^2}$	$x - a = a \sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$a^2 + x^2$	$x = a \tan t$, với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\sin t}$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ và $t \neq 0$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x - a = (b-a) \sin^2 t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Khi đó ta có các bước giải như sau:

- 🔗 **Bước 1:** Đặt $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên K , được chọn hợp lý.
- 🔗 **Bước 2:** Lấy vi phân của x theo biến số t , cụ thể là $dx = \varphi'(t)dt$.
- 🔗 **Bước 3:** Thay cả $x = \varphi(t)$ lẫn $dx = \varphi'(t)dt$ vào $\int f(x)dx$ được bài toán mới theo t .
- 🔗 **Bước 4:** Giải nguyên hàm mới $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ được kết quả $F(t)$ theo t , sau đó thay biểu thức $x = \varphi(t)$ vào $F(t)$ để tìm được nguyên hàm theo biến x .

🔗 **Ví dụ 1.2.1**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x^2}$

A. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$

B. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C$.

C. $\frac{3}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} + C$.

D. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{x-2}}{2} + C$

🔗 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$

A. $2\arctan 2x + C$

B. $\arctan \frac{x\sqrt{3}}{2} + C$

C. $2\arcsin x + C$

D. $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.3

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

A. $-2\arccos \frac{x}{2} + C$

B. $2\arccos \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

C. $-2\arccos \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C$

D. $-2\arccos \frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4+x^2} + C$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2.2. Đổi biến loại 2

○ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp “Đổi biến loại 02”: $\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$

Dấu hiệu	Cách đặt
$\int \frac{\alpha \cdot t'(x)}{t(x)} dx$	Biểu thức cần đặt t là mẫu thức $t(x)$
$\int f(e^{t(x)}) \cdot t'(x) dx$	Biểu thức cần đặt t là phần số mũ của e
$\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$	Biểu thức cần đặt t là biểu thức chứa trong dấu ngoặc
$\int f(\sqrt[n]{t(x)}) \cdot t'(x) dx$	Đặt căn thức có trong dấu tích phân
$\int f(\ln x) \cdot \frac{dx}{x}$	Đặt biểu thức chứa $\ln x$ nếu có $\frac{dx}{x}$ kèm theo

Khi đó ta có các bước giải như sau:

Bước 1: Đặt $t = t(x)$. (hoặc đặt $t = a \cdot t(x) + b$ tùy vào bài cụ thể).

Bước 2: Lấy vi phân của t theo x , cụ thể $dt = t'(x) dx$.

Bước 3: Thay cả $t = t(x)$ lẫn $dt = t'(x) dx$ vào $\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$.

Bước 4: Giải nguyên hàm mới $\int f(t) dt$, được kết quả $F(t)$ theo t , sau đó thay biến vào kết quả để tìm được nguyên hàm theo biến x .

Ví dụ 1.2.4

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $-\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

B. $1 - \frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

C. $-\frac{1}{3} + \ln|3\cos x| + C$

D. $3\ln|1-3\cos x| + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.5

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

A. $x + e^x \ln(1+e^x) + C$

B. $x - \ln(1+e^x) + C$.

C. $e^x - \ln(1+e^x) + C$.

D. $x + \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) + C$

📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.6

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

A. $x + e^x e^{\tan x} + C$

B. $x - e^{\tan x} + C$.

C. $e^{1-\tan x} + C$.

D. $e^{\tan x} + C$

📖 Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.7

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{2018}$.

A. $\frac{(x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(x+1)^{2019}}{2019} + C$

B. $\frac{(x+1)^{2019}}{2018} - \frac{(x+1)^{2019}}{2020} + C$.

C. $\frac{(x-1)^{2020}}{2020} + \frac{(x+1)^{2020}}{2020} + C$.

D. $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(2x+1)^{2019}}{2019} + C$

📖 Lời giải

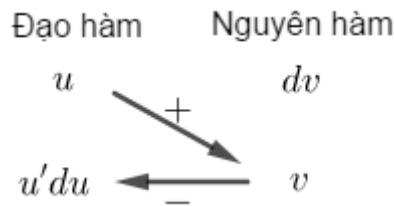
.....

.....

.....

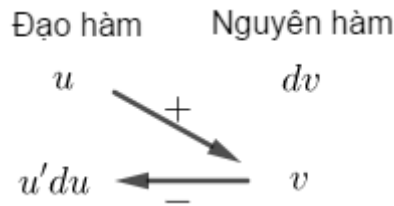
➤ Dạng 1.3. Nguyên hàm từng phần

○ Kẻ bảng có dạng:



Tích phân có dạng $\int u dv$, với u và v là 2 trong 4 loại **log – đa – lượng – mũ**.

Tính $I = \int u dv$ bằng cách kẻ bảng:



Bước 1: Chọn u đặt vào cột “Đạo hàm”.

Bước 2: Chọn dv đặt vào cột “Nguyên hàm”.

Bước 3: Tính theo tính chất từng cột.

Bước 4: Ta có kết quả $I = \int u dv = u.v - \int v du$.

➤ **Quy tắc:**

• Trong đó ta chọn u theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.

• Còn dv là phần còn lại trong dấu $\int$.

• Dấu ở các mũ tên: *mũ tên đầu tiên* luôn luôn là dấu $+$ và *đan xen dấu* cho nhau.

➤ **Ví dụ 1.2.1**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)e^{3x}$

A. $\frac{(2x-1)e^x}{3} + \frac{2e^x}{9} + C$

B. $\frac{(2x-1)e^x}{9} - \frac{2e^x}{9} + C$

C. $\frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$

D. $\frac{2xe^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + C$

Lời giải

➤ **Ví dụ 1.2.2**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$

A. $2x \ln x - 2x + C$

B. $x^2 \ln x - x + C$

C. $\frac{x}{2} \ln x - x + C$

D. $x \ln x - x + C$

Lời giải

☞ Ví dụ 1.2.3

Tính $I = \int (x-1)\sin 2x dx$. Ta thu được kết quả là:

- A. $-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ B. $(x-1)\cos 2x + \sin 2x + C$.
- C. $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{x}{4}\sin 2x + C$ D. $x\cos 2x + x\sin 2x + C$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.2.4

Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

- A. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{x^3}{\ln x} + C$ B. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x} + C$.
- C. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{\ln x} + C$ D. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 1.4. Nguyên hàm hàm số hữu tỉ

Xét $f(x)$ là hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

1.4.1. Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu

→ Chia đa thức được: M là thương, N là dư.

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(M + \frac{N}{Q(x)} \right) dx.$$

➤ Ví dụ 1.4.1

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

A. $x - 3\ln|x| + C$

B. $x - \ln|2x+1| + C$

C. $x - 2\ln|x+1| + C$

D. $2x - \ln|x+1| + C$

🔗 Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 1.4.2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2-5}{x+1}$.

A. $x^2 - 2x - 3\ln|x+1| + C$

B. $x^2 - 3\ln|x+1| + C$

C. $2 - x^2 - \ln(x+1) + C$

D. $2x^2 + \ln(1+x) + C$

🔗 Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 1.4.3

Kết quả của $\int \frac{x^2+1}{x} dx$, ta thu được là:

A. $2x + \frac{1}{x}$

B. $2 + \frac{1}{x+1} + C$

C. $x + 2\ln|x| + C$

D. $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

🔗 Lời giải

.....

.....

.....

1.4.1. Bậc tử < Bậc mẫu

Ta có các trường hợp sau:

Loại 2.1. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax + b \end{cases}$ thì: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\gamma}{ax+b} dx = \frac{\gamma}{a} \ln|ax+b| + C$

☞ Ví dụ 1.4.4

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 1.4.5

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e}{e-2x}$

A. $-\frac{e}{2} \ln|e-2x| + C$

B. $\ln|e-2x| + C.$

C. $e \ln|e-2x| + C.$

D. $2e \ln|e-2x| + C$

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 1.4.6

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C.$

C. $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

D. $\ln|2x-1| + C$

📖 Lời giải

Loại 2.2. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.2.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$

Nhận dạng:

- ① Tử là hằng số.
- ② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

$$\rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\gamma}{a(x_2-x_1)} \int \left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1} \right) dx \text{ với } x_2 > x_1$$

Ví dụ 1.4.7

Tính $\int \frac{1}{(x-2)(x-6)} dx$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 8x + 12| + C$

B. $\frac{1}{4} (\ln|(x-6)(x-2)|) + C.$

C. $\ln|x-6| - \ln|x-2| + C.$

D. $\frac{1}{4} (\ln|x-6| - \ln|x-2|) + C$

Lời giải

Ví dụ 1.4.8

Tìm nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 3x + 2| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(\ln|x-2| - \ln|x-1|) + C.$

C. $\ln|x-2| - \ln|x-1| + C.$

D. $\ln|x^2 - 3x + 2| + C$

Lời giải

Ví dụ 1.4.9

Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{2x^2 + 5x - 3}$. Tìm $F(x)$

A. $\frac{2}{7} (\ln|x - \frac{1}{2}| - \ln|x+3|) + C$

B. $\frac{3}{2} \ln(\ln|x-2| - \ln|x-1|) + C.$

C. $\ln|2x-1| - \ln|x+3| + C.$

D. $2 \ln|x^2 + 5x - 3| + C$

Lời giải

2.2.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x - x_0)^2} dx = -\frac{\gamma}{a(x - x_0)} + C.$

- Nhận dạng:**
- ① Tử là hằng số.
 - ② Mẫu có nghiệm kép.

Ví dụ 1.4.10

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}.$

- A.** $\frac{1}{x+1} + C$ **B.** $\frac{3}{2} - \frac{1}{x+1} + C.$ **C.** $-\frac{1}{(x+1)^2} + C.$ **D.** $-\frac{1}{x+1} + C$

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 1.4.11

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{9x^2 - 12x + 4}$ là:

- A.** $\frac{1}{x+1} + C$ **B.** $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3x-2} \right) + C.$ **C.** $-\frac{1}{(x+1)^2} + C.$ **D.** $-\frac{1}{x+1} + C$

Lời giải

.....

.....

.....

2.2.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\gamma}{a} \int \frac{1}{(x - x_0)^2 + k^2} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Ví dụ 1.4.12

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ là:

- A.** $\arctan(x-1) + C$ **B.** $\arctan(x) + C.$ **C.** $\ln|x^2 - 2| + C.$ **D.** $2 \tan(x-1) + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Loại 2.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = mx + n \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.3.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$.

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{C(x - x_1) + D(x - x_2)}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{C}{x - x_2} + \frac{D}{x - x_1} \right) dx$

Cách 2:

Xét $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx$

Khi đó ta có: $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} (X \cdot \ln|x - x_1| + Y \cdot \ln|x - x_2|) + C.$

Đến đây ta chỉ cần tìm X & Y bằng cách giải hệ: $\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{m} \\ \boxed{-x_2} & \boxed{-x_1} & \boxed{n} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so truooc } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ? \\ Y = ? \end{cases}$

Lưu ý: (1) Cách lấy các "hệ số" bỏ vào hệ ta lấy theo thứ tự từ **PHẢI** qua **TRÁI**.

(2) Với tử là hằng số, ta vẫn có thể áp dụng được cách này.

(Áp dụng được cho 2.2.1)

Ví dụ: $I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ ta xem hệ số $m = 0$ & $n = 1$.

(3) Khuyết vị trí nào thì xem hệ số đó = 0.

Ví dụ: $I = \int \frac{n}{ax^2 + bx + c} dx$ khuyết "mx" nên hệ số $m = 0$.

(4) Chú ý hệ số a , bài đơn giản thường thấy $a = 1$, bài ít thấy $a \neq 1$.

Ví dụ 1.4.13

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6}$ là:

A. $3(\ln|x + 2| + \ln|x + 3|) + C$

B. $\ln|x + 2| + \ln|x + 3| + C.$

C. $3(\ln|x + 2| - \ln|x + 3|) + C.$

D. $\ln|x + 2| - \ln|x + 3| + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.4.14

Tính $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = a \ln \left| \frac{x-b}{x-1} \right| + C$ với $a; b \in \mathbb{N}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$

B. $S = -1$

C. $S = 0$

D. $S = 3$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.4.15

Biết rằng $\int \frac{x-1}{2x^2 + x - 2} dx = a \left(b \cdot \ln |x+2| - c \cdot \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) + C$ với $a; b; c$ là các số hữu tỉ và là phân số tối giản. Khi đó $a + b + c$:

A. $S = \frac{1}{10}$

B. $S = \frac{19}{10}$

C. $S = \frac{3}{2}$

D. $S = -\frac{2}{5}$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3.2. $Q(x)$ có $\Delta=0 \rightarrow \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2} dx \rightarrow$ Đặt $\begin{cases} t = x - x_0 \rightarrow x = t + x_0 \\ dt = dx \end{cases}$.

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

Ví dụ 1.4.16

Tính $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

A. $\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$

B. $\ln|x+2| - x + C$

C. $\ln|x-2| - 2x + C$

D. $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.4.17

Tính $\int \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

A. $4\ln|x-2| - \frac{x}{x-2} + C$

B. $4\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + x + C$

C. $4\ln|x-2| + C$

D. $\ln|x-4| + x + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0$

$$\rightarrow \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)' + \varepsilon}{ax^2+bx+c} dx = \underbrace{\int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} dx}_H + \underbrace{\int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c} dx}_K.$$

Tính $H = \int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ Đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (ax^2 + bx + c)' dx$.

Tính $K = \int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Ví dụ 1.4.18

Tính $J = \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

- A. $\frac{25}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{32}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$
- B. $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + C$
- C. $\ln\left(\frac{x^2+2x+7}{2}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
- D. $\ln(x^2+2x+7) - \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

→ Tổng kết phương pháp tính nguyên hàm hàm số hữu tỉ

Xét $f(x)$ là hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

➤ Trường hợp 1: Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu

→ Chia đa thức được: M là thương, N là dư.

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(M + \frac{N}{Q(x)} \right) dx.$$

➤ Trường hợp 2: Bậc tử $<$ Bậc mẫu

Ta có các loại sau:

Loại 2.1. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax + b \end{cases}$ thì: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\gamma}{ax+b} dx = \frac{\gamma}{a} \ln|ax+b| + C$

Loại 2.2. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.2.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

$$\rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\gamma}{a(x_2-x_1)} \int \left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1} \right) dx \text{ với } x_2 > x_1$$

2.2.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_0)^2} dx = -\frac{\gamma}{a(x-x_0)} + C.$

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu có nghiệm kép.

2.2.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\gamma}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2 + k^2} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu vô nghiệm.

Loại 2.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = mx + n \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.3.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$.

Nhận dạng: ① Bậc tử $<$ Bậc mẫu.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{C(x-x_1)+D(x-x_2)}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{C}{x-x_2} + \frac{D}{x-x_1} \right) dx$

Cách 2: Xét $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx$

Khi đó ta có: $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{1}{a} (X \cdot \ln|x-x_1| + Y \cdot \ln|x-x_2|) + C.$



Đến đây ta chỉ cần tìm X & Y bằng cách giải hệ:
$$\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{m} \\ \boxed{-x_2} & \boxed{-x_1} & \boxed{n} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so truooc } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ? \\ Y = ? \end{cases}$$

Lưu ý: (1) Cách lấy các "hệ số" bỏ vào hệ ta lấy theo thứ tự từ **PHẢI** qua **TRÁI**.

(2) Với tử là hằng số, ta vẫn có thể áp dụng được cách này.

(Áp dụng được cho 2.2.1)

Ví dụ: $I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ ta xem hệ số $m = 0$ & $n = 1$.

(3) Khuyết vị trí nào thì xem hệ số đó $= 0$.

Ví dụ: $I = \int \frac{n}{ax^2 + bx + c} dx$ khuyết " mx " nên hệ số $m = 0$.

(4) Chú ý hệ số a , bài đơn giản thường thấy $a = 1$, bài ít thấy $a \neq 1$.

2.3.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_0)^2} dx \rightarrow$ Đặt $\begin{cases} t = x - x_0 \rightarrow x = t + x_0 \\ dt = dx \end{cases}$.

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

2.3.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0$

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

$$\rightarrow \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)' + \varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx = \underbrace{\int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} dx}_H + \underbrace{\int \frac{\varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx}_K$$

Tính $H = \int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} dx \rightarrow$ Đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (ax^2 + bx + c)' dx$.

Tính $K = \int \frac{\varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Chú ý: Một vài cách tách phân thức cần nhớ:

① $\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$

② $\frac{1}{(x - m)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - m} + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

③ $\frac{1}{(x - a)^2(x - b)^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \frac{C}{x - b} + \frac{D}{(x - b)^2}$

Dạng 1.5. Nguyên hàm hàm số vô tỉ

Xét $f(x)$ là hàm vô tỉ có dạng $f(x) = P(x) \cdot \sqrt{Q(x)} \rightarrow \int f(x) dx = \int P(x) \cdot \sqrt{Q(x)} dx$.

Thông thường ở dạng hàm vô tỉ ta sẽ dùng *phương pháp đổi biến*.

Và ta nhận được $(Q(x))' = P(x)$. Khi đó:

Bước 1: Đặt $t = \sqrt{Q(x)}$.

Bước 2: Tính vi phân dt :

Nhưng để vi phân thuận tiện, ta bình phương hai vế $t^2 = Q(x)$.

$$\rightarrow 2t \cdot dt = Q'(x) \cdot dx \Rightarrow 2t \cdot dt = P(x) \cdot dx$$

Bước 3: Khi đó $\int f(x) dx = \int t \cdot 2t dt = \int 2t^2 dt = \dots$

Ví dụ 1.5.1

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 \sqrt{1-x^2}$

A. $-\frac{2(1-x^2)^2 \sqrt{1-x^2}}{5} + C$

B. $\frac{2(1-x^2)^2}{5} + C$

C. $\frac{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}{5} + C$

D. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{5} + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.5.2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \sqrt{1+\cos x}$

A. $2 \left(\frac{\sqrt{1+\cos x}}{2} - \frac{2\sqrt{1+\cos x}^5}{5} \right) + C$

B. $2 \left(\frac{\sqrt{1+\cos x}^7}{7} - \frac{2\sqrt{1+\cos x}^5}{5} \right) + C$

C. $2 \left(\sqrt{1+\cos x}^7 - 2\sqrt{1+\cos x}^5 \right) + C$

D. $\sqrt{1-\cos x}^5 + 2\sqrt{1-\cos x}^2 + C$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 1.6. Nguyên hàm hàm số lượng giác

01	Công thức cơ bản	① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi$ ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
02	Công thức cộng	① $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ ② $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
03	Công thức nhân đôi	① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
04	Công thức hạ bậc	① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
05	Công thức tích thành tổng	① $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$ ② $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ ③ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$ ④ $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

➤ Ví dụ 1.6.1

Tìm nguyên hàm $\int \sin 3x \cos 5x dx$

A. $-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $2 \cos 8x - 2 \cos 2x + C$

C. $2 \cos 8x + 2 \cos 2x + C$

D. $-\frac{1}{16} \cos 10x + C$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.6.2

Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx$

A. $\sin^2 x - 2\sin^2 x + C$

B. $\frac{\cot x}{2} + C$

C. $\cos^2 x + 2\cos^2 x + C$

D. $\frac{\tan 2x}{2} + C$

📌 Lời giải

☞ Ví dụ 1.6.3

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x - 2}{1 + \cos x}$.

A. $\sin^2 x - 3\tan x + C$

B. $x^2 - 3\tan x + C$

C. $x - 3\tan \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{x}{2} - \tan \frac{3x}{2} + C$

📌 Lời giải

☞ Ví dụ 1.6.4

Tính nguyên hàm $\int \cot^2 x dx$.

A. $2\cot x + C$

B. $-\cot x - x + C$

C. $x - \cot x + C$

D. $\frac{x}{2} - \cot x + C$

📌 Lời giải

☞ Ví dụ 1.6.5

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x - 3\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Tính $F(x)$.

A. $\pi^2 + 3$

B. $-\pi^2$

C. 2π

D. π^2

📌 Lời giải

Dạng 1.7. Nguyên hàm có điều kiện

Bài toán 01:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(x)$ biết $F(a) = b$.

Bước 1: Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x; C)$.

Bước 2: Xử lý $F(a) = b$ bằng cách thay vào $F(x; C)$. Ta được $F(a; C) = b \Rightarrow C = ?$

Bước 3: Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số C .

Ví dụ 1.7.1

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.7.2

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 1.7.3

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$

B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$

Lời giải

.....

.....

.....

Bài toán 02:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(c)$ biết $F(a) = b$.

Bước 1: Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x; C)$.

Bước 2: Xử lý $F(a) = b$ bằng cách thay vào $F(x; C)$. Ta được $F(a; C) = b \Rightarrow C = ?$

Bước 3: Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số C và tính $F(c)$.

Bên cạnh đó, ta có thể dùng cách "**Tích phân**" để xử lý bài toán:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(c)$ biết $F(a) = b$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx$

Xét $a < c$, khi đó: $\int_a^c f(x) dx = F(x) \Big|_a^c = F(c) - F(a) \Leftrightarrow F(c) = \int_a^c f(x) dx + F(a)$

Ví dụ 1.7.4

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- A. $F(\ln 3) = 2$ B. $F(\ln 3) = 6$ C. $F(\ln 3) = 8$ D. $F(\ln 3) = 4$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.7.5

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}+2}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}-2}{6}$ C. $\frac{-\sqrt{3}+2}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

-----Hết-----

Chương 03

Chủ đề 02

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ $a \rightarrow b$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và **không âm** trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$.

Vậy diện tích hình thang cong: $S = \int_a^b f(x) dx$.

3. Tính chất.

1	$\int_a^a f(x) dx = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
5	Trong đoạn $[a; b]$, tồn tại $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
6	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
7	Nếu $f(x)$ là hàm lẻ ($f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 2.1. Tích phân áp dụng tính chất & bảng nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)dx = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5	Trong đoạn $[a; b]$, tồn tại $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
6	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
7	Nếu $f(x)$ là hàm lẻ ($f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

➤ Ví dụ 2.1.1

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_1^3 2f(x)dx = 2 \int_1^3 f(x)dx$

B. $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$.

C. $\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$.

D. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(u)du$

🎀 Lời giải

➤ Ví dụ 2.1.2

Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 8

B. -4.

C. 4.

D. -8

🎀 Lời giải

➤ Ví dụ 2.1.3

Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)dy$

A. $I = 5$

B. $I = -3$.

C. $I = 3$.

D. $I = -5$

🎀 Lời giải

☞ Ví dụ 2.1.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

A. 1. B. 7.. C. -9.. D. 9.

📖 Lời giải

☞ Ví dụ 2.1.5

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thoả $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

A. 7 B. 6 C. 8 D. 9

📖 Lời giải

➤ Dạng 2.2. Tích phân từng phần

○ Kẻ bảng có dạng:

Đạo hàm	Nguyên hàm
u	dv
$u' du$	v

Tích phân có dạng $\int u dv$, với u và v là 2 trong 4 loại **log – đa – lượng – mũ**.

Tính $I = \int u dv$ bằng cách kẻ bảng:

Đạo hàm	Nguyên hàm
u	dv
$u' du$	v

🔪 **Bước 1:** Chọn u đặt vào cột “Đạo hàm”.

🔪 **Bước 2:** Chọn dv đặt vào cột “Nguyên hàm”.

🔪 **Bước 3:** Tính theo tính chất từng cột.

🔪 **Bước 4:** Ta có kết quả $I = \int u dv = u.v - \int v du$.

➤ **Quy tắc:**

- Trong đó ta chọn u theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.
- Còn dv là phần còn lại trong dấu $\int$.
- Dấu ở các mũ tên: *mũ tên đầu tiên* luôn luôn là dấu $+$ và *đan xen dấu* cho nhau.

➤ **Ví dụ 2.2.1**

Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ D. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$

🔪 *Lời giải*

.....

.....

.....

➤ **Ví dụ 2.2.2**

Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$ ($a; b \in \mathbb{Z}$), tích $a.b$ bằng

A. -15 B. -1. C. 1. D. 20

🔪 *Lời giải*

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.2.3

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 1$ B. $I = -8$ C. $I = -12$ D. $I = 8$

👉 Lời giải

.....

.....

☞ Ví dụ 2.2.4

Biết $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $a+b+c=1$ B. $a-b+c=0$.
C. $2a+b+c=-1$ D. $a+2b+c=1$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.2.5

Tích phân $I = \int_0^\pi (3x+2)\cos^2 x dx = \frac{a}{4}\pi^2 + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính $S = a+b$

A. $S = 1$ B. $S = 4$ C. $S = 5$ D. $S = 10$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2.3. Tích phân đổi biến loại 1

Tính tích phân $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx$

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhẩm được $\varphi'(x) \cdot dx$.

Bước 2: Tính vi phân $dt = \varphi'(x) dx$ và đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) \end{cases}$.

Bước 3: Biểu thị $f(x) dx$ theo t và dt .

Bước 4: Khi đó $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

① Nếu $\sqrt{a^2 - x^2}$ đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$

② Nếu $\sqrt{x^2 - a^2}$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$

③ Nếu $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ thì đặt $x = a \cos 2t$

④ Nếu $\sqrt{(x-a)(b-x)}, (a < b)$ đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$

⑤ Nếu $\sqrt{x^2 + a^2}$ đặt $x = a \tan t$ hoặc $x = a \cot t$

Ví dụ 2.3.1

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.3.2

Tính tích phân $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$

Lời giải

.....

.....

☞ Ví dụ 2.3.3

Khi tính $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, bằng phép đặt $x = 2\sin t$ thì được

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t) dt$ C. $\int_0^2 4\cos^2 t dt$ D. $\int_0^2 2\cos^2 t dt$

🎨 LỜI GIẢI

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.3.4

Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b} \pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

- A. $T = 35$ B. $T = 24$ C. $T = 12$ D. $T = 36$

🎨 LỜI GIẢI

.....

.....

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 2.4. Tích phân đổi biến loại 2

Tính tích phân $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx$

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhẩm được $\varphi'(x) \cdot dx$.

Bước 2: Tính vi phân $dt = \varphi'(x) dx$ và đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) \end{cases}$.

Bước 3: Biểu thị $f(x) dx$ theo t và dt .

Bước 4: Khi đó $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

➤ Ví dụ 2.4.1

Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b + c$.

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

➤ Ví dụ 2.4.2

Tính $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$ C. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$ D. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

Lời giải

➤ Ví dụ 2.4.3

Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 1$ B. $S = \frac{1}{2}$ C. $S = \frac{3}{4}$ D. $S = \frac{2}{3}$

Lời giải

☞ Ví dụ 2.4.4

Xét tích phân $I = \int_1^{\sqrt{2}} x.e^{x^2} dx$. Sử dụng phương pháp đổi biến số với $u = x^2$, tích phân I được biến đổi thành dạng nào sau đây:

- A. $I = 2 \int_1^2 e^u du$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$ C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du$ D. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.4.5

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$, tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 2 B. 6 C. 3 D. 1

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Dạng 2.5. Tích phân kết hợp đổi biến & từng phần**

➤ **Trường hợp 1:** Từng phần – Đổi biến:

Tính $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$, áp dụng “**Từng phần**” ta được $I = h(x) \Big|_a^b + \int_a^b p(x)dx$.

Lúc này ta áp dụng “**Đổi biến**” để tính $\int_a^b p(x)dx$.

➤ **Trường hợp 2:** Đổi biến – Từng phần:

Tính $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$, áp dụng “**Đổi biến**” ta được $I = \int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)dx$.

Lúc này ta áp dụng “**Từng phần**” để tính $\int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)dx$.

➤ **Ví dụ 2.5.1**

Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -3$ B. $a^2 - b = -4$ C. $\frac{a}{b} \in (-1; 0)$ D. $a - b = 6$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Ví dụ 2.5.2**

Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ với a, b, c là các số thực. Tính $T = a + b + c$ là

- A. $T = 11$. B. $T = 9$. C. $T = 10$. D. $T = 8$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.5.3

Biết $I = \int_1^e \cos(\ln x) dx = \frac{e(\cos a + \sin 1) - 1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Tính $a + b$

A. 7 B. 3 C. 5 D. 13

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.5.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính

$H = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. 144 B. 12 C. 56 D. 112

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Dạng 2.6. Tích phân chứa trị tuyệt đối**

➤ **Cách 1:**

→ Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n \in [a; b]$

→ Khi đó $I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$

$$\Leftrightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

➤ **Cách 2:**

→ Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $\in [a; b]$.

→ Xét dấu $f(x)$ trên $[a; b]$.

→ Áp dụng $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A > 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b \dots$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

☞ **Ví dụ 2.6.1**

Tính tích phân $I = \int_0^2 |x-1| dx$ ta được kết quả :

A. 1

B. 2.

C. 3

D. 4

✍ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ **Ví dụ 2.6.2**

Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$ ta được kết quả $I = \frac{a}{b}$, khi đó tổng $a+b$ là:

A. 7

B. 3.

C. 5

D. 9

✍ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.6.3

Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{7}{6}$ B. $I = \frac{17}{6}$ C. $I = \frac{7}{6}$ D. $I = -\frac{17}{6}$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.6.4

Tính tích phân $I = \int_{-2}^0 \frac{x^2 - x - 2}{x-1} dx$ ta được kết quả $I = a + b \ln 2 + c \ln 3$ (với a, b, c là các số nguyên). Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2a^3 + 3b - 4c$ là:

A. $T = -20$ B. $T = 3$ C. $T = 22$ D. $T = 6$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

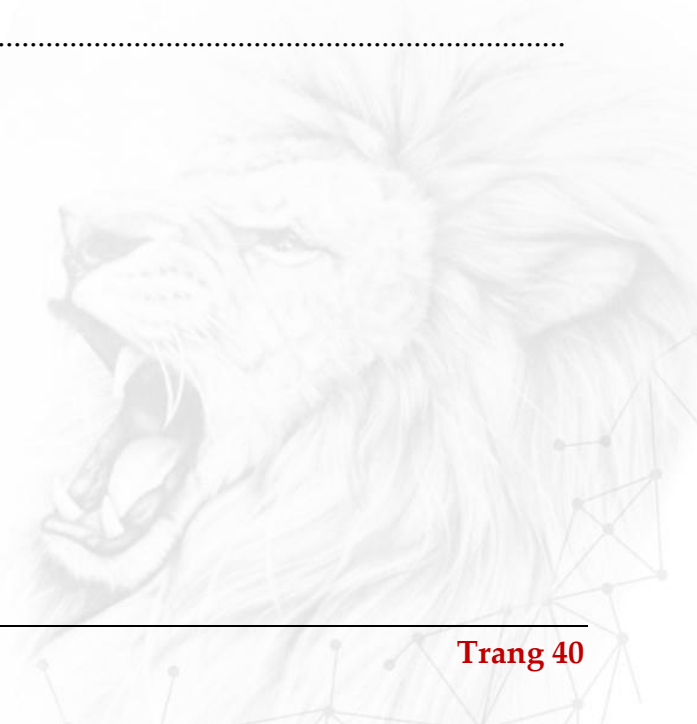
.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2.7. Tích phân dựa vào đồ thị

Áp dụng ý nghĩa hình học:

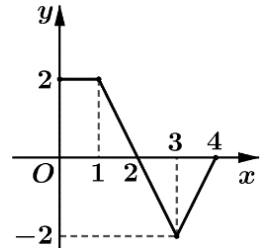
Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$ là diện tích S của hình

thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$.

Ví dụ 2.7.1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng

- A. 1 B. 2.
C. 3 D. 4

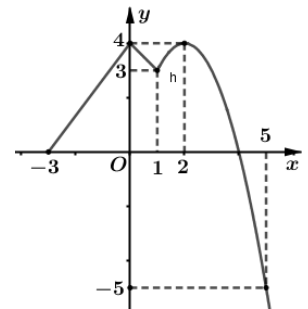


Lời giải

Ví dụ 2.7.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{97}{6}$
C. 1 D. -6

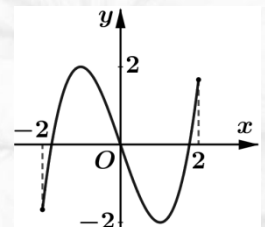


Lời giải

Ví dụ 2.7.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ như hình bên. Biết $\int_{-2}^0 f(x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

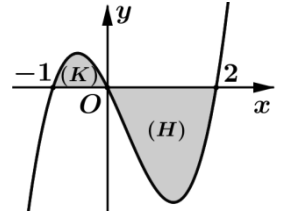
- A. -2. B. 0.
C. 3 D. 4



Lời giải

Ví dụ 2.7.4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng (K) , (H) lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.



- A. $f(2) = -\frac{2}{3}$. B. $f(2) = \frac{2}{3}$.
C. $f(2) = \frac{11}{6}$. D. $f(2) = 3$.

Lời giải

.....

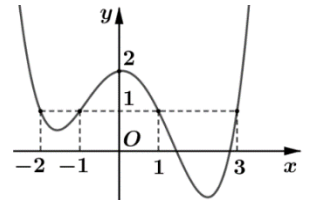
.....

.....

.....

Ví dụ 2.7.5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -\frac{3}{2})$. C. $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$. D. $(-\frac{2}{3}; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 2.8. Tích phân hàm chẵn lẻ

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D .

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số **chẵn** nếu thỏa $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = f(x) \end{cases}$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số **lẻ** nếu thỏa $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Khi đó, trong dấu $\int$:

➤ Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì, $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+c^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x) dx \end{cases}$.

➤ Nếu hàm $f(x)$ LẺ thì, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

➤ Ví dụ 2.8.1

Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$;
 $\int_1^3 f(-2x) dx = 3$. Giá trị của $I = \int_{-1}^6 f(x) dx$ là
A. $I = 5$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = 14$ **D.** $I = 11$

📌 *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 2.8.2

Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = 10$. Tính $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$.
A. $I = 10$ **B.** $I = \frac{10}{3}$ **C.** $I = 20$ **D.** $I = 5$

📌 *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.8.3

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x)dx = 2$ và

$\int_1^2 f(-2x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)dx$.

A. $I = -10$

B. $I = -6$

C. $I = 6$

D. $I = 10$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 2.9. Tích phân hàm cho nhiều công thức

⌘ Bài toán 1:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$.

Xét $b \in [a; c]$.

➔ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$

➔ **Bước 2.** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.

➔ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

⌘ Bài toán 2:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq b \\ h(x; m) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$.

Xét $b \in [a; c]$.

➔ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra:

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$

➔ **Bước 2.** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.

➔ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

➤ Ví dụ 2.9.1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$

A. $\frac{7}{2}$ B. 1 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.9.2

Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_{-1}^1 f(x) dx$

A. $\frac{a}{6} - 1$. B. $\frac{2a}{3} + 1$. C. $\frac{a}{6} + 1$. D. $\frac{2a}{3} - 1$.

📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.9.3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$,
 $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tổng $a + b + 3c$ bằng

A. 15 B. -10 C. -19 D. -17

📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 2.10. Tích phân liên quan max - min

⌘ **Bài toán:** Tính $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$ hoặc $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$.

Ta xét $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$:

➔ **Bước 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in [a; b]$ thì nhận nghiệm đó.

Giả sử ta được $x = m \in [a; b]$.

➔ **Bước 2.** Xét hiệu $f(x) - g(x)$, giả sử:

• Trên $[a; m]$: $f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \min\{f(x); g(x)\} = g(x)$.

• Trên $[m; b]$: $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow \min\{f(x); g(x)\} = f(x)$.

➔ **Bước 3.** Khi đó $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx = \int_a^m g(x) dx + \int_m^b f(x) dx$.

Khi đó $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$ ta áp dụng tương tự.

☞ **Ví dụ 2.10.1**

Tính tích phân $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$

A. $I = \frac{117}{2}$

B. $I = \frac{275}{12}$

C. $I = 19$

D. $I = 27$

📌 *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ **Ví dụ 2.10.2**

Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 \min\{e^x; e^{-x}\} dx$

A. $I = \frac{2}{e} - 2$

B. $I = \frac{2}{e} + 2$

C. $I = 2 - \frac{2}{e}$

D. $I = \frac{2}{e}$

📌 *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.10.3

Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\{\sin x; \cos x\} dx = a - b\sqrt{2}$ ($a; b \in \mathbb{N}$). Tính $S = a + b$

A. 3

B. 5

C. 7

D. 8

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.10.4

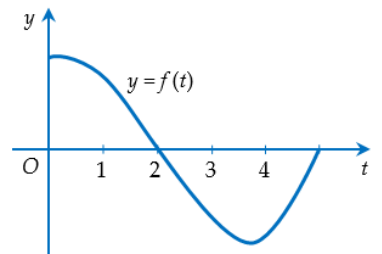
Xét hàm số $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ trong đó hàm số $y = f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?

A. $F(1)$

B. $F(2)$

C. $F(3)$

D. $F(0)$



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 2.11. Tích phân hàm “ẩn”

2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến

Dạng 1: Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$, tính $\int_a^b f(x) dx$ hoặc $\int_a^b f(x) dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$

➔ **Lưu ý:** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$

Dạng 2: Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết $f(x)$ thỏa: $A \cdot f(x) + B \cdot u' \cdot f(u) + C \cdot f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

① Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

② Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

③ Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

③ Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

➤ Ví dụ 2.11.1

Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16 B. 4 C. 32 D. 8

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 2.11.2

Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 6 B. 36 C. 2 D. 7

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.11.3

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

A. 2 B. 4 C. -1 D. 6

✍ LỜI GIẢI

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.11.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -4$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{4}{3}$ D. $I = 2$

✍ LỜI GIẢI

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.11.2. Dùng phương pháp từng phần

Xuất phát từ đạo hàm hàm số tích, ta có: $[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x).v(x)]' dx &= \int_a^b [u'(x).v(x) + v'(x).u(x)] dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) d(v(x)) &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) d(u(x)) \\ \text{Hay } \int_a^b u(x).v'(x) dx &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x) dx \end{aligned}$$

☞ Ví dụ 2.11.5

Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1; 2]$.

Biết $F(1)=1, F(2)=4, G(1)=\frac{3}{2}, G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx = \frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$

A. $\frac{11}{12}$

B. $-\frac{145}{12}$

C. $-\frac{11}{12}$

D. $\frac{145}{12}$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.11.6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 5]$ và $f(5)=10, \int_0^5 xf'(x)dx = 30$.

Tính $\int_0^5 f(x)dx$.

A. 20

B. -30

C. -20

D. 70

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

→ Tổng kết phương pháp tính tích phân hàm “ẩn”

2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến

Dạng 1: Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$, tính $\int_a^b f(x) dx$ hoặc $\int_a^b f(x) dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$

→ **Lưu ý:** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$

Dạng 2: Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết $f(x)$ thỏa: $A \cdot f(x) + B \cdot u' \cdot f(u) + C \cdot f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

① Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

② Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

③ Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

③ Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

2.11.2. Dùng phương pháp từng phần

Xuất phát từ đạo hàm hàm số tích, ta có: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x) \cdot v(x)]' dx &= \int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)] dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) d(v(x)) &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) d(u(x)) \\ \text{Hay } \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx \end{aligned}$$

➤ Dạng 2.12. Tích phân liên quan phương trình vi phân

2.12.1. Biểu thức đạo hàm

(1). $u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x)$

(2). $\frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x)$

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức: $(uv)' = u'v + v'u$ và $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

(1). $u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x) \cdot f(x)]' = h(x) \Rightarrow u(x) \cdot f(x) = \int h(x) dx$

(2). $\frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x) \Leftrightarrow \left[\frac{u(x)}{f(x)}\right]' = h(x) \Rightarrow \frac{u(x)}{f(x)} = \int h(x) dx$

➤ Ví dụ 2.12.1

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(2x+3)f'(x) + 2f(x) = 4x - 3x^2$. Tính $f(2)$ bằng

A. 1

B. $\frac{9}{7}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{7}$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 2.12.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) = x \cdot f'(x) + 3x^4 - 4x^2$. Tính giá trị $f(4)$

A. -2

B. -196

C. -48

D. -193

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.12.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Biết rằng

$f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x = 1, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và $f(0) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

A. $I = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

B. $I = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C. $I = \frac{1}{2}$

D. $I = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.12.4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, đồng thời thỏa mãn hệ thức $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{14}{9}$

B. $P = -\frac{4}{9}$

C. $P = \frac{7}{9}$

D. $P = -\frac{2}{9}$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.12.2. Biểu thức tổng hiệu

(1). $f'(x) + f(x) = h(x)$

(2). $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

(1). Biến đổi: $f'(x) + f(x) = h(x) \Rightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$$

(2). Biến đổi: $f'(x) - f(x) = h(x) \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$$

☞ Ví dụ 2.12.5

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $f'(x) + f(x) = x - 1$.

Biết $f(0) = 9$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(2) = 9e^{-2}$

B. $f(2) = 9e^2$

C. $f(2) = 2e^2$

D. $f(2) = -1 + 9e^2$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.12.6

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 3$ và

$f(x) - f'(x) = 2x + 1$. Giá trị của $f(1)$ thuộc đoạn

A. $[0; 2]$

B. $[4; 6]$

C. $[2; 4]$

D. $[6; 8]$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được: $e^{\int p(x)dx} \cdot f'(x) + e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot f(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = \int h(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

☞ Ví dụ 2.12.7

Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[2;4]$, $f(2)=6$; $(x^2-1)f'(x)+f(x)=x^2+x$. Tính $f(4)$

A. $2+\sqrt{5}$ B. $5+\sqrt{5}$ C. $5+\sqrt{15}$ D. $2+\sqrt{15}$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.12.8

Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$, biết $f(0)=\frac{13}{3}$; $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=x^3+4x$. Khi đó:

A. $0 < f(1) < 2$ B. $2 < f(1) < 4$ C. $4 < f(1) < 5$ D. $f(1) > 5$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

→ Tổng kết phương pháp tính tích phân liên quan PTVP

2.12.1. Biểu thức đạo hàm

$$(1). u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \qquad (2). \frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x)$$

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức: $(uv)' = u'v + v'u$ và $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$(1). u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x) \cdot f(x)]' = h(x) \Rightarrow u(x) \cdot f(x) = \int h(x) dx$$

$$(2). \frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x) \Leftrightarrow \left[\frac{u(x)}{f(x)}\right]' = h(x) \Rightarrow \frac{u(x)}{f(x)} = \int h(x) dx$$

2.12.2. Biểu thức tổng hiệu

$$(1). f'(x) + f(x) = h(x) \qquad (2). f'(x) - f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$(1). \text{Biến đổi: } f'(x) + f(x) = h(x) \Rightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$$

$$(2). \text{Biến đổi: } f'(x) - f(x) = h(x) \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$$

2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được: $e^{\int p(x) dx} \cdot f'(x) + e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) \cdot f(x) = e^{\int p(x) dx} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = \int h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

$$\text{Tổng quát: } e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = \int h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

Dạng 2.13. Bất đẳng thức tích phân

⌘ Tính chất 01:

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

- ① Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
- ② Nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Hệ quả $\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- ③ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

⌘ Tính chất 02:

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$, $g(x) \neq 0$. Khi đó:

- ④ Bất đẳng thức Holder (**Cauchy – Schwarz**): $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k \cdot g(x)$ với $k \in \mathbb{R}$

- ⑤ $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

🔗 Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[a; b]$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(1) f(m) = n \quad (2) \int_a^b [f'(x)]^2 dx = A \quad (3) \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = B$$

Với $g(x)$ là hàm số đã biết và liên tục trên $[a; b]$

Tính $I = \int_a^b f(x) dx$.

→ **Lời giải:** Tính tích phân $\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = B$ bằng phương pháp từng phần $\rightarrow \int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx = B'$

😊 Hướng 1:

→ **Bước 1.** Mặt khác

$$\int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b h^2(x) dx}_{\text{casio}} \cdot \underbrace{\int_a^b (f'(x))^2 dx}_{\text{giathiet}}$$

→ **Bước 2.** Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = k \cdot h(x)$.

Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x; k; C) = ?$

→ **Bước 3.** Dùng $f(m) = n \Rightarrow C(k) = ?$

→ **Bước 4.** Dùng $\int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx = B'$ (ở bước 1)
 $\Rightarrow k = ?$

→ Cuối cùng có đủ $x; k; C \Rightarrow f(x)$ hoàn chỉnh

→ YCBT.

😊 Hướng 2:

→ **Bước 1.** Giả sử tính được $\int_a^b h^2(x) dx = C$

→ **Bước 2.** Tìm γ thỏa:

$$\underbrace{\int_a^b [f'(x)]^2 dx}_A - 2 \underbrace{\int_a^b \gamma h(x) \cdot f'(x) dx}_{B'} + \underbrace{\int_a^b \gamma^2 h^2(x) dx}_C = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 2 \gamma B' + \gamma^2 C = 0 \Leftrightarrow \gamma = ?$$

→ **Bước 3.** Lúc này $\int_a^b (f'(x) - \gamma \cdot h(x))^2 dx = 0$

$$\Rightarrow f'(x) - \gamma \cdot h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \gamma \cdot h(x)$$

→ **Bước 4.** Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x; C) = ?$

Dùng $f(m) = n \Rightarrow C = ?$

→ $f(x)$ hoàn chỉnh

☞ Ví dụ 2.13.1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, thỏa các điều kiện $f(2) = 1$ và $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \int_0^2 f(x) dx = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{7}$

📌 Lời giải

Chọn B

Tính: $I = \int_0^1 f(x) dx$; đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 1 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 2 - \int_0^1 x f'(x) dx \longrightarrow \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Tìm } \gamma: \underbrace{\int_0^2 [f'(x)]^2 dx}_{=2/3} - 2 \underbrace{\left[\gamma \right] \int_0^2 x f'(x) dx}_{=4/3} + \underbrace{\left[\gamma^2 \right] \int_0^2 (x)^2 dx}_{=8/3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \gamma + \frac{8}{3} \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lúc này } \int_0^2 \left(f'(x) - \frac{1}{2} x \right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{2} x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Nguyên hàm 2 vế: } \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2} x dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$\text{Lại có } f(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2.$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{4} x^2}{x^2} dx = \frac{1}{4}.$$

☞ Ví dụ 2.13.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 20$ và $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 1$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 4

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.13.3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$3\int_0^1 \left[f'(x) \cdot f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx.$$

Tích phân $\int_0^1 f^3(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{6}$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

-----Hết-----



Chương 03

Chủ đề 03

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong & trục hoành:

☞ Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[a; b]$.

Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

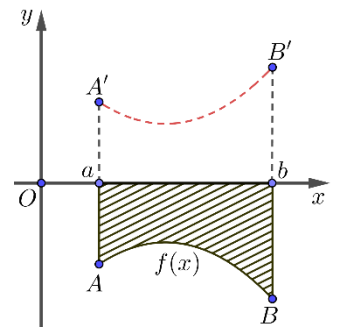
Khi đó diện tích hình thang cong được tính: $S = \int_a^b f(x) dx$.

☞ Trường hợp $f(x) \leq 0$ trên $[a; b]$, ta có $-f(x) \geq 0$.

S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.

($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

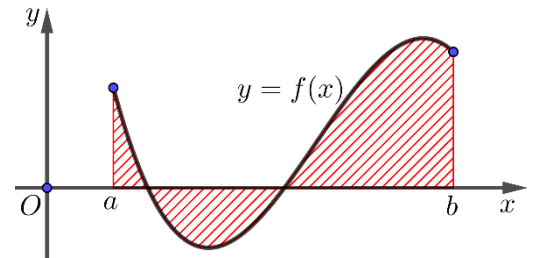
Do đó: $S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x)) dx$



☞ Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong:

☞ Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

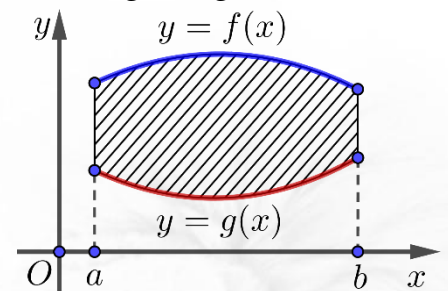
Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Xét trường hợp $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$.

Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hai hình thang cong giới hạn bởi

$$\begin{cases} Ox \\ x = a \text{ và } y = f(x); y = g(x). \\ x = b \end{cases}$$

Khi đó diện tích: $S = S_1 - S_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.



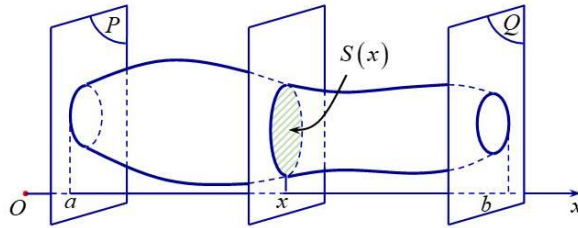
☞ Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3. Thể tích vật thể:

- ↻ Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).



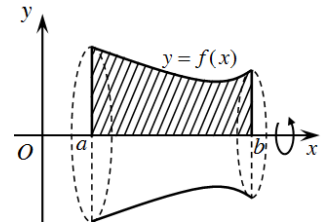
Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

4. Thể tích khối tròn xoay:

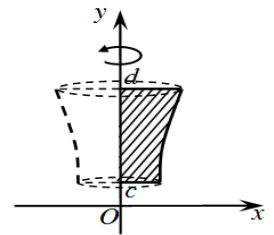
- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



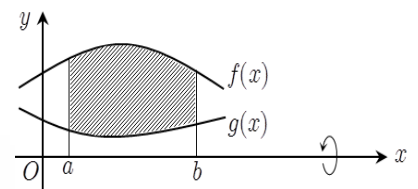
- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$



- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$



➤ Dạng 3.1. Câu hỏi lý thuyết

⌘ Diện tích hình phẳng:

$$(1) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

⌘ Thể tích vật thể:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

⌘ Thể tích khối tròn xoay:

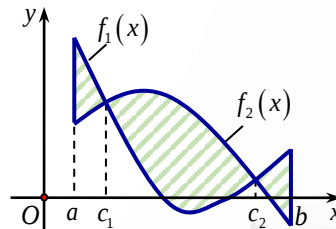
$$(1) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Ox \rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$(2) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Ox \rightarrow V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

$$(3) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} x = g(y) \\ Oy \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Oy \rightarrow V = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

➤ Ví dụ 3.1.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và đường thẳng $x = a$, $x = b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx$

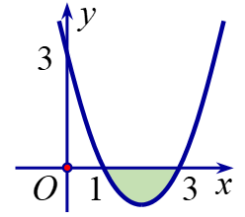
👉 Lời giải

.....

.....

Ví dụ 3.1.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

B. $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

C. $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

Lời giải

Ví dụ 3.1.3

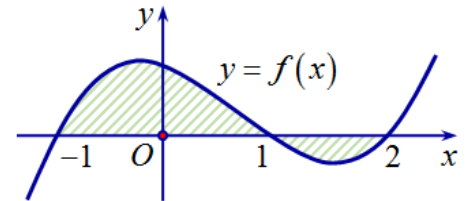
Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là

A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$



Lời giải

Ví dụ 3.1.4

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx$

B. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$

C. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$

D. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$

Lời giải

➤ Dạng 3.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$

✂ Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$
 $= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$

➔ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞ Ví dụ 3.2.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{7}{3}$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.2.2

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

A. $S=15$

B. $S=23$

C. $S=9$

D. $S=38$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 3.3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính
$$S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

➔ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞ Ví dụ 3.3.1

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

📌 Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.3.2

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1-x)$ và $y = x^3 - x$ có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{9}{4}$

📌 Lời giải

.....

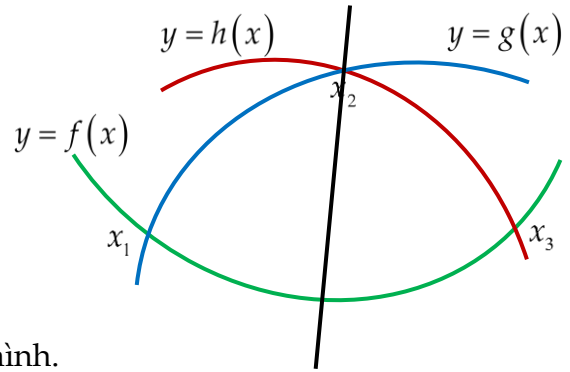
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$



Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ có nghiệm x_1 .

Giải $g(x) = h(x)$ có nghiệm x_2 .

Giải $g(x) = h(x)$ có nghiệm x_3 .

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ được biểu diễn như hình.

Bước 2: Khi đó $S = \int_{x_1}^{x_2} |g(x) - f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |h(x) - f(x)| dx$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (h(x) - f(x)) dx \right|$$

➤ Ví dụ 3.4.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$; $y = x + 1$; $y = -x + 4$ bằng

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 3.4.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$; $y = \frac{x^2}{4}$; $y = \frac{54}{x}$ bằng

A. $\frac{63}{2} - 54 \ln 2$

B. $54 \ln 2$

C. $\frac{63}{4}$

D. $-\frac{63}{2} + 54 \ln 2$

👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3.5. Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị

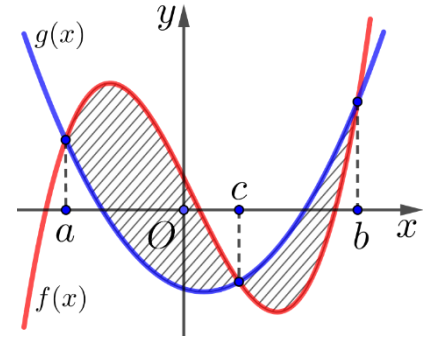
• **Trường hợp 1:** $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Bước 1: Quan sát đồ thị thấy $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Xét hiệu $f(x) - g(x)$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a; c]: f(x) - g(x) > 0 \\ [c; b]: f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
 $= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$



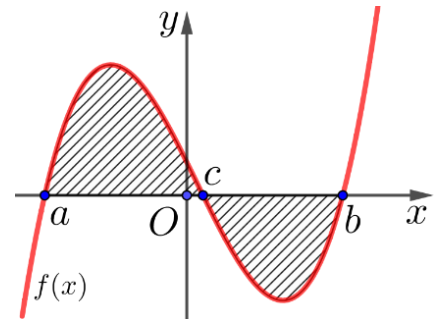
• **Trường hợp 2:** $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - 0| dx$.

Bước 1: Quan sát đồ thị thấy $f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Xét hiệu $f(x) - 0$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a; c]: f(x) - 0 > 0 \\ [c; b]: f(x) - 0 < 0 \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^c (f(x) - 0) dx + \int_c^b (0 - f(x)) dx$.



Ví dụ 3.5.1

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Đặt

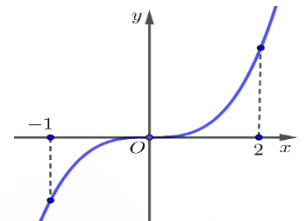
$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$, Khi đó $S =$

A. $b - a$

B. $b + a$

C. $-b + a$

D. $-b - a$



Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.5.2

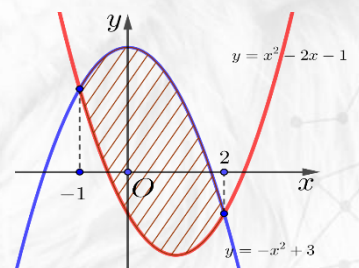
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

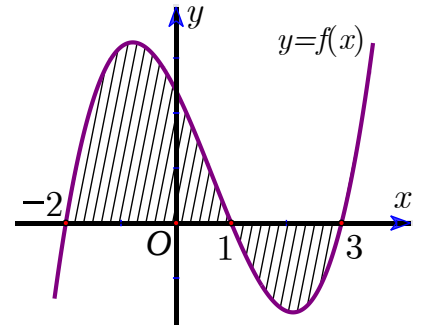
D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$



Lời giải

Ví dụ 3.5.3

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

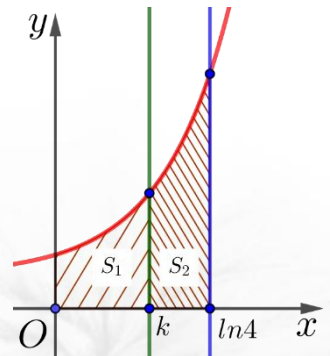
C. $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

Lời giải

Ví dụ 3.5.4

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B. $k = \ln 2$

C. $k = \ln \frac{8}{3}$

D. $k = \ln 3$

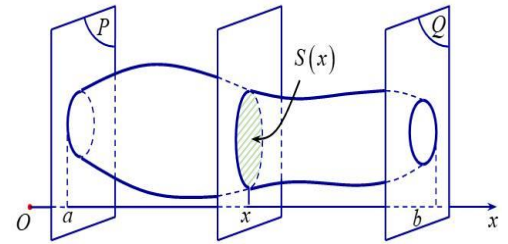
Lời giải

➤ Dạng 3.6. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$)

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.



➤ Ví dụ 3.6.1

Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x .

A. $\frac{2178}{5}$

B. 26π

C. 26

D. $\frac{2178\pi}{5}$

📌 Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 3.6.2

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V=3$

B. $V=3\pi$

C. $V=2\pi\sqrt{3}$

D. $V=2\sqrt{3}$

📌 Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 3.6.3

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=32+2\sqrt{15}$.

B. $V=\frac{124\pi}{3}$.

C. $V=\frac{124}{3}$.

D. $V=(32+\sqrt{5})\pi$.

📌 Lời giải

.....

.....

Dạng 3.7. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Ví dụ 3.7.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$

B. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3|^2 dx$

C. $V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$

Lời giải

Ví dụ 3.7.2

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

B. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$

C. $V = \frac{\pi^2}{4}$

D. $V = \frac{\pi}{4}$

Lời giải

Ví dụ 3.7.3

Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x - 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{32}{5}$

B. $V = \frac{32\pi}{5}$

C. $V = \frac{32}{5\pi}$

D. $V = 32\pi$

Lời giải

Dạng 3.8. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, $g(x)$, $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^c |f^2(x) - g^2(x)| dx + \pi \int_c^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

Ví dụ 3.8.1

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh Ox là

A. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$

D. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.8.2

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ và $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành nhận giá trị nào sau đây:

A. $V = \frac{40\pi}{3}$

B. $V = \frac{38\pi}{3}$

C. $V = \frac{41\pi}{3}$

D. $V = \frac{41\pi}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3.9. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(y)$, $g(y)$, $y=a$, $y=b$ quay quanh Oy

Bước 1: Giải phương trình $f(y) = g(y) \Leftrightarrow y = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^c |f^2(y) - g^2(y)| dy + \pi \int_c^b |f^2(y) - g^2(y)| dy$.

Ví dụ 3.9.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy = 4$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

A. $V = 12\pi$

B. $V = 16\pi$

C. $V = 10\pi$

D. $V = 8\pi$

Lời giải

Ví dụ 3.9.2

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $x = y^2 + 3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Oy . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^2 (y^2 + 3) dy$

B. $V = \int_0^2 (y^2) dy$

C. $V = \int_0^2 (3)^2 dy$

D. $V = \pi \int_0^2 (y^2 + 3)^2 dy$

Lời giải

Ví dụ 3.9.3

Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $x = e^y$, trục tung và các đường thẳng $y = 0$, $y = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục tung có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$

B. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$

C. $V = \frac{\pi e^2}{3}$

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Lời giải

Dạng 3.10. Tính giá trị hàm qua diện tích hình phẳng

Áp dụng định nghĩa tích phân: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b); F(a)$.

Bài toán:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; c]$.

So sánh $F(a); F(c); F(x_i)$ $x_i \in [a; c]$.

Bước 1: So sánh $F(a); F(b)$.

$$\text{Trên } [a; b]: f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{Mà } \int_a^b f(x) dx > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Leftrightarrow F(b) > F(a).$$

Bước 2: Tương tự so sánh $F(b); F(c)$.

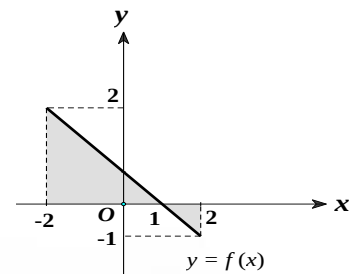
Bước 3: Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = b; x = c \end{cases}$.

$$\int_a^b |f(x)| dx > \int_b^c |f(x)| dx \Rightarrow F(b) - F(a) > -F(c) + F(b) \Leftrightarrow -F(a) > -F(c) \rightarrow F(a) < F(c).$$

Ví dụ 3.10.1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2; 1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi số nào sau đây là số dương?

- A. $F(2) - F(-2)$ B. $F(-2) - F(1)$
C. $F(2) - F(1)$ D. $F(2) - F(0)$



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

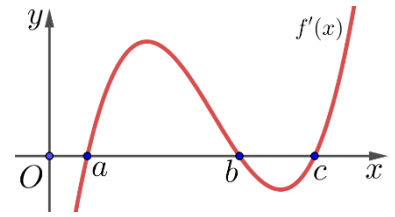
.....

☞ Ví dụ 3.10.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(a) < f(c)$ B. $f(b) < f(c)$
C. $f(a) > f(b)$ D. $f(a) > f(c)$



📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

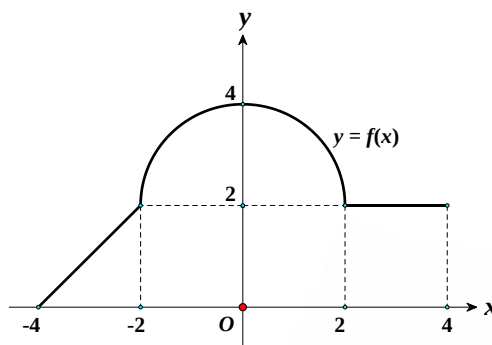
.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.10.3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$.



- A. $S = 6 + 2\pi$ B. $S = 14 + 2\pi$ C. $S = 14$ D. $S = 14 + 4\pi$

📖 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$= \cos \frac{\pi}{4} + 3 \sin \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + 1$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 =$$

$$\int_1^3 \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}} dx =$$

Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 03

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





Chủ đề 01. NGUYÊN HÀM

▮ Dạng 1.1. Nguyên hàm cơ bản	5
▮ Dạng 1.2. Nguyên hàm đổi biến	7
1.2.1. Đổi biến loại 1 (Lượng giác hóa).....	7
1.2.2. Đổi biến loại 2.....	9
▮ Dạng 1.3. Nguyên hàm từng phần	11
▮ Dạng 1.4. Nguyên hàm hàm số hữu tỉ	13
1.4.1. Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu	13
1.4.1. Bậc tử $<$ Bậc mẫu	14
▮ Dạng 1.5. Nguyên hàm hàm số vô tỉ	23
▮ Dạng 1.6. Nguyên hàm hàm số lượng giác	24
▮ Dạng 1.7. Nguyên hàm có điều kiện	26

Chủ đề 02. TÍCH PHÂN

▮ Dạng 2.1. Tích phân áp dụng tính chất & bảng nguyên hàm cơ bản	29
▮ Dạng 2.2. Tích phân từng phần	31
▮ Dạng 2.3. Tích phân đổi biến loại 1	33
▮ Dạng 2.4. Tích phân đổi biến loại 2	35
▮ Dạng 2.5. Tích phân kết hợp đổi biến & từng phần	37
▮ Dạng 2.6. Tích phân chứa trị tuyệt đối	39
▮ Dạng 2.7. Tích phân dựa vào đồ thị	41
▮ Dạng 2.8. Tích phân hàm chẵn lẻ	43
▮ Dạng 2.9. Tích phân hàm cho nhiều công thức	45
▮ Dạng 2.10. Tích phân liên quan max – min	47
▮ Dạng 2.11. Tích phân hàm “ẩn”	49
2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến.....	49
2.11.2. Dùng phương pháp từng phần	51
▮ Dạng 2.12. Tích phân liên quan phương trình vi phân	53
2.12.1. Biểu thức đạo hàm	53
2.12.2. Biểu thức tổng hiệu	55

2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$	56
---	----

➤ Dạng 2.13. Bất đẳng thức tích phân	58
--	----

Chủ đề 03. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

➤ Dạng 3.1. Câu hỏi lý thuyết	63
-------------------------------------	----

➤ Dạng 3.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$	65
--	----

➤ Dạng 3.3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$	66
---	----

➤ Dạng 3.4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$	67
--	----

➤ Dạng 3.5. Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị	68
---	----

➤ Dạng 3.6. Thể tích vật thể	70
------------------------------------	----

➤ Dạng 3.7. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox	71
---	----

➤ Dạng 3.8. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, $g(x)$, $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox	72
--	----

➤ Dạng 3.9. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(y)$, $g(y)$, $y=a$, $y=b$ quay quanh Oy	73
--	----

➤ Dạng 3.10. Tính giá trị hàm qua diện tích hình phẳng	74
--	----



Chương 03

Chủ đề 01

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

NGUYÊN HÀM

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

☞ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in K$.

Ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Định lý:

☞ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì:

- Với mỗi hằng số C , hàm $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
- Mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

→ Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

3. Tính chất:

$$\textcircled{\circ} \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \text{ và } \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

$$\textcircled{\circ} \int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \text{ với } k \neq 0.$$

$$\textcircled{\circ} \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4. Định lý:

☞ Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

5. Bảng nguyên hàm cơ bản:

(1). $\int 0 dx = C$	(2). $\int dx = x + C$
(3). $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	(14). $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$
(4). $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	(15). $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(ax+b)} + C$
(5). $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	(16). $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
(6). $\int e^x dx = e^x + C$	(17). $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
(7). $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(18). $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
(8). $\int \cos x dx = \sin x + C$	(19). $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
(9). $\int \sin x dx = -\cos x + C$	(20). $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
(10). $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	(21). $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
(11). $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	(22). $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
(12). $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	(23). $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
(13). $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	(24). $\int (1 + \cot^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

6. Bảng nguyên hàm mở rộng:

(1). $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	(8). $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$
(2). $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	(9). $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$
(3). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$	(10). $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
(4). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + C$	(11). $\int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
(5). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \left \frac{x}{a} \right + C$	(12). $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$
(6). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right + C$	(13). $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$
(7). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	(14). $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng).

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in K$.

Ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Tính chất:

☉ $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

☉ $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ với $k \neq 0$.

☉ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

➤ Ví dụ 1.1.1 - Áp dụng định nghĩa

Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$.

A. $F(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{3}$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{2} + 2$.

D. $F(x) = x^3$

🔗 *Lời giải*

Chọn A

Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ nên $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

➤ Ví dụ 1.1.2 - Áp dụng định nghĩa

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ là?

A. $-\ln|x| + C$

B. $\ln|x| + C$.

C. $x + C$.

D. $\frac{1}{x^2} + C$

🔗 *Lời giải*

Chọn B

Ta có $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ nên $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

➤ Ví dụ 1.1.3 - Áp dụng định nghĩa

Nếu $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng:

A. $x^2 + e^x$

B. $\frac{x^4}{3} + e^x$.

C. $3x^2 + e^x$.

D. $\frac{x^4}{12} + e^x$

🔗 *Lời giải*

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x + C\right)' = x^2 + e^x$.

☞ Ví dụ 1.1.4 - Áp dụng bảng nguyên hàm

Tính $I = \int (1 + \tan^2 x) dx$

A. $I = \sin x + C$

B. $I = \cos x + C$

C. $I = \tan x + C$

D. $I = \cot x + C$

📖 Lời giải

Chọn C

Vì $I = \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

☞ Ví dụ 1.1.5 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

A. $\int f(x) dx = 5^x + C$

B. $\int f(x) dx = 5^x \ln 5 + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C$

📖 Lời giải

Chọn C

Từ công thức nguyên hàm $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Ta có $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

☞ Ví dụ 1.1.6 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

A. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$

📖 Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

☞ Ví dụ 1.1.7 - Áp dụng tính chất - bảng nguyên hàm

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 + 2$ là

A. $x^5 + 2x + C$

B. $\frac{1}{5}x^5 + 2x + C$

C. $10x + C$

D. $x^5 + 2$

📖 Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x) dx = \int (5x^4 + 2) dx = x^5 + 2x + C$.

➤ Dạng 1.2. Nguyên hàm đổi biến

1.2.1. Đổi biến loại 1 (Lượng giác hóa)

○ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp “Đổi biến loại 01”:

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{2ax - x^2}$	$x - a = a \sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$a^2 + x^2$	$x = a \tan t$, với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\sin t}$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ và $t \neq 0$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x - a = (b-a) \sin^2 t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Khi đó ta có các bước giải như sau:

- 📌 **Bước 1:** Đặt $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên K , được chọn hợp lý.
- 📌 **Bước 2:** Lấy vi phân của x theo biến số t , cụ thể là $dx = \varphi'(t)dt$.
- 📌 **Bước 3:** Thay cả $x = \varphi(t)$ lẫn $dx = \varphi'(t)dt$ vào $\int f(x)dx$ được bài toán mới theo t .
- 📌 **Bước 4:** Giải nguyên hàm mới $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ được kết quả $F(t)$ theo t , sau đó thay biểu thức $x = \varphi(t)$ vào $F(t)$ để tìm được nguyên hàm theo biến x .

👉 Ví dụ 1.2.1

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x^2}$

A. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$

B. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C$

C. $\frac{3}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{x-2}}{2} + C$

📌 **Lời giải**

Chọn A

Xét $\int f(x)dx = \int \sqrt{3-x^2}dx$ (*)

Đặt $x = \sqrt{3} \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ thì $dx = \sqrt{3} \cos t dt$ và $\cos t \geq 0$.

Thay vào (*):

$$I = \int \sqrt{3-3\sin^2 t} \sqrt{3} \cos t dt = \int 3 \cos^2 t dt \Leftrightarrow I = \int \frac{3(1+\cos 2t)}{2} dt = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + C$$

$$x = \sqrt{3} \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{3-x^2}{3}} \Rightarrow \sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{3}$$

Vậy $I = \int f(x)dx = \int \sqrt{3-x^2}dx = \frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$.

☞ Ví dụ 1.2.2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$

A. $2\arctan 2x + C$

B. $\arctan \frac{x\sqrt{3}}{2} + C$

C. $2\arcsin x + C$

D. $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$

📖 Lời giải

Chọn D

Xét $\int f(x)dx = \int \frac{1}{4+x^2}dx$ (*) .

Đặt $x = 2 \tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $dx = 2(1 + \tan^2 t)dt$.

Thay vào (*) ta được $I = \int \frac{1}{4+4\tan^2 t} 2(1 + \tan^2 t)dt = \int \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}t + C$

Ta có $x = \sqrt{3} \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\frac{3-x^2}{3}}$

Vậy $I = \int f(x)dx = \int \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$.

☞ Ví dụ 1.2.3

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$.

A. $-2\arccos \frac{x}{2} + C$

B. $2\arccos \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$.

C. $-2\arccos \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C$.

D. $-2\arccos \frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4+x^2} + C$

📖 Lời giải

Chọn C

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx = \int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Đặt $x = 2 \cos 2t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ thì $dx = -4 \sin 2t dt$ và $\sin t \geq 0; \cos t \geq 0$.

Ngoài ra, $\sin 2t = \sqrt{1 - \cos^2 2t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

Như vậy $I = \int \sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}} \cdot (-4) \sin 2t dt = -4 \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot \sin 2t dt = -8 \int \sin^2 t dt$

$\Rightarrow I = \int (1 - \cos 2t) dt = -4t + 2 \sin 2t + C = -2\arccos \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C$

1.2.2. Đổi biến loại 2

○ Dấu hiệu để ta dùng phương pháp “Đổi biến loại 02”: $\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$

Dấu hiệu	Cách đặt
$\int \frac{\alpha \cdot t'(x)}{t(x)} dx$	Biểu thức cần đặt t là mẫu thức $t(x)$
$\int f(e^{t(x)}) \cdot t'(x) dx$	Biểu thức cần đặt t là phần số mũ của e
$\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$	Biểu thức cần đặt t là biểu thức chứa trong dấu ngoặc
$\int f(\sqrt[n]{t(x)}) \cdot t'(x) dx$	Đặt căn thức có trong dấu tích phân
$\int f(\ln x) \cdot \frac{dx}{x}$	Đặt biểu thức chứa $\ln x$ nếu có $\frac{dx}{x}$ kèm theo

Khi đó ta có các bước giải như sau:

Bước 1: Đặt $t = t(x)$. (hoặc đặt $t = a \cdot t(x) + b$ tùy vào bài cụ thể).

Bước 2: Lấy vi phân của t theo x , cụ thể $dt = t'(x) dx$.

Bước 3: Thay cả $t = t(x)$ lẫn $dt = t'(x) dx$ vào $\int f(t(x)) \cdot t'(x) dx$.

Bước 4: Giải nguyên hàm mới $\int f(t) dt$, được kết quả $F(t)$ theo t , sau đó thay biến vào kết quả để tìm được nguyên hàm theo biến x .

Ví dụ 1.2.4

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $-\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

B. $1 - \frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

C. $-\frac{1}{3} + \ln|3\cos x| + C$

D. $3 \ln|1-3\cos x| + C$

Lời giải

Chọn A

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$.

Đặt $t = 1+3\cos x$ thì $dt = -3\sin x dx \Rightarrow -\frac{1}{3} dt = \sin x dx$.

Như vậy $I = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln|t| + C = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$.

Ta có $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

☞ Ví dụ 1.2.5

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

A. $x + e^x \ln(1+e^x) + C$

B. $x - \ln(1+e^x) + C$.

C. $e^x - \ln(1+e^x) + C$.

D. $x + \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) + C$

📖 Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Xét $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$. Đặt $t = 1+e^x$ thì $dt = e^x dx$.

Từ đó $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+e^x| + C = \ln(1+e^x) + C$.

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ là $\int f(x) dx = x - \ln(1+e^x) + C$

☞ Ví dụ 1.2.6

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

A. $x + e^x e^{\tan x} + C$

B. $x - e^{\tan x} + C$.

C. $e^{1-\tan x} + C$.

D. $e^{\tan x} + C$

📖 Lời giải

Chọn D

Xét họ nguyên hàm $I = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

Đặt $t = \tan x$ ta có $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Từ đó $I = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan x} + C$.

☞ Ví dụ 1.2.7

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{2018}$.

A. $\frac{(x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(x+1)^{2019}}{2019} + C$

B. $\frac{(x+1)^{2019}}{2018} - \frac{(x+1)^{2019}}{2020} + C$.

C. $\frac{(x-1)^{2020}}{2020} + \frac{(x+1)^{2020}}{2020} + C$.

D. $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(2x+1)^{2019}}{2019} + C$

📖 Lời giải

Chọn A

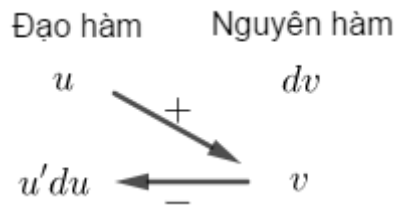
Xét họ nguyên hàm $I = \int x(x+1)^{2018} dx$.

Đặt $t = x+1$ thì $dt = dx$. Khi đó $I = \int (t-1)t^{2018} dt = \int (t^{2019} - t^{2018}) dt = \frac{t^{2020}}{2020} - \frac{t^{2019}}{2019} + C$.

Vậy $\int f(x) dx = \frac{(x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(x+1)^{2019}}{2019} + C$.

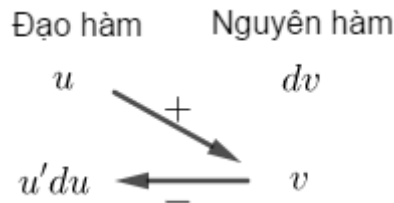
➤ Dạng 1.3. Nguyên hàm từng phần

○ Kẻ bảng có dạng:



Tích phân có dạng $\int u dv$, với u và v là 2 trong 4 loại **log – đa – lượng – mũ**.

Tính $I = \int u dv$ bằng cách kẻ bảng:



Bước 1: Chọn u đặt vào cột “Đạo hàm”.

Bước 2: Chọn dv đặt vào cột “Nguyên hàm”.

Bước 3: Tính theo tính chất từng cột.

Bước 4: Ta có kết quả $I = \int u dv = u.v - \int v du$.

➤ **Quy tắc:**

• Trong đó ta chọn u theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.

• Còn dv là phần còn lại trong dấu $\int$.

• Dấu ở các mũ tên: *mũ tên đầu tiên* luôn luôn là dấu + và *đan xen dấu* cho nhau.

➤ **Ví dụ 1.2.1**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)e^{3x}$

A. $\frac{(2x-1)e^x}{3} + \frac{2e^x}{9} + C$

B. $\frac{(2x-1)e^x}{9} - \frac{2e^x}{9} + C$

C. $\frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$

D. $\frac{2xe^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + C$

➤ **Lời giải**

Chọn C

Đặt: $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{3x} \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$. Do đó: $\int f(x)dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$.

➤ **Ví dụ 1.2.2**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$

A. $2x \ln x - 2x + C$

B. $x^2 \ln x - x + C$

C. $\frac{x}{2} \ln x - x + C$

D. $x \ln x - x + C$

➤ **Lời giải**

Chọn D

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$. Vậy: $\int f(x) dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Ví dụ 1.2.3

Tính $I = \int (x-1) \sin 2x dx$. Ta thu được kết quả là:

- A. $-\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ B. $(x-1) \cos 2x + \sin 2x + C$.
C. $-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x + C$. D. $x \cos 2x + x \sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos x \end{cases}$

$I = \int (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Ví dụ 1.2.4

Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{x^3}{\ln x} + C$ B. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x} + C$.
C. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{\ln x} + C$. D. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết, ta có $\frac{f(x)}{x} = (F(x))' = \left(-\frac{1}{3x^3}\right)' = \frac{1}{x^4}$. Suy ra $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Để tính $\int f'(x) \ln x dx$, dùng tích phân từng phần với $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow \int f'(x) \ln x dx = f(x) \cdot \ln x - \int f(x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{x^3} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x^3} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x^4} dx = \frac{\ln x}{x^3} - \left(-\frac{1}{3x^3}\right) + C = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

➤ **Dạng 1.4. Nguyên hàm hàm số hữu tỉ**

Xét $f(x)$ là hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

1.4.1. Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu

→ Chia đa thức được: M là thương, N là dư.

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(M + \frac{N}{Q(x)} \right) dx.$$

➤ **Ví dụ 1.4.1**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

A. $x - 3\ln|x| + C$

B. $x - \ln|2x+1| + C$

C. $x - 2\ln|x+1| + C$

D. $2x - \ln|x+1| + C$

🔗 *Lời giải*

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

$$\int \frac{x-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int 1 dx - \int \frac{2}{x+1} dx = x - 2\ln|x+1| + C.$$

➤ **Ví dụ 1.4.2**

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2-5}{x+1}$.

A. $x^2 - 2x - 3\ln|x+1| + C$

B. $x^2 - 3\ln|x+1| + C$

C. $2 - x^2 - \ln(x+1) + C$

D. $2x^2 + \ln(1+x) + C$

🔗 *Lời giải*

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x^2-5}{x+1} = 2x - 2 - \frac{3}{x+1}.$$

$$\int \frac{2x^2-5}{x+1} dx = \int \left(2x - 2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = \int 2x dx - \int 2 dx - \int \frac{3}{x+1} dx = x^2 - 2x - 3\ln|x+1| + C.$$

➤ **Ví dụ 1.4.3**

Kết quả của $\int \frac{x^2+1}{x} dx$, ta thu được là:

A. $2x + \frac{1}{x}$

B. $2 + \frac{1}{x+1} + C$

C. $x + 2\ln|x| + C$

D. $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

🔗 *Lời giải*

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int \frac{x^2+1}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

1.4.1. Bậc tử < Bậc mẫu

Ta có các trường hợp sau:

Loại 2.1. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax + b \end{cases}$ thì: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\gamma}{ax+b} dx = \frac{\gamma}{a} \ln|ax+b| + C$

Ví dụ 1.4.4

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \text{ (} a \neq 0 \text{)}$ ta được $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$

Ví dụ 1.4.5

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e}{e-2x}$

A. $-\frac{e}{2} \ln|e-2x| + C$

B. $\ln|e-2x| + C.$

C. $e \ln|e-2x| + C.$

D. $2e \ln|e-2x| + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int \frac{e}{e-2x} dx = e \int \frac{1}{e-2x} dx = -\frac{e}{2} \ln|e-2x| + C.$$

Ví dụ 1.4.6

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

A. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C.$

C. $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

D. $\ln|2x-1| + C$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$$

Ta thấy $2x-1 < 0 \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ nên $|2x-1| = -(2x-1) = 1-2x$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C = -\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$$

Loại 2.2. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.2.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$

Nhận dạng:

① Tử là hằng số.

② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

$$\rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\gamma}{a(x_2-x_1)} \int \left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1} \right) dx \text{ với } x_2 > x_1$$

Ví dụ 1.4.7

Tính $\int \frac{1}{(x-2)(x-6)} dx$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 8x + 12| + C$ B. $\frac{1}{4} (\ln|(x-6)(x-2)|) + C.$

C. $\ln|x-6| - \ln|x-2| + C.$ D. $\frac{1}{4} (\ln|x-6| - \ln|x-2|) + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{1}{(x-2)(x-6)} dx = \frac{1}{6-2} \int \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-6| - \ln|x-2|) + C$

Ví dụ 1.4.8

Tìm nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 3x + 2| + C$ B. $\frac{1}{2} \ln(\ln|x-2| - \ln|x-1|) + C.$

C. $\ln|x-2| - \ln|x-1| + C.$ D. $\ln|x^2 - 3x + 2| + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

Ví dụ 1.4.9

Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{2x^2 + 5x - 3}$. Tìm $F(x)$

A. $\frac{2}{7} (\ln|x - \frac{1}{2}| - \ln|x+3|) + C$ B. $\frac{3}{2} \ln(\ln|x-2| - \ln|x-1|) + C.$

C. $\ln|2x-1| - \ln|x+3| + C.$ D. $2 \ln|x^2 + 5x - 3| + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2}{2x^2 + 5x - 3} dx = 2 \int \frac{1}{2(x - \frac{1}{2})(x+3)} dx$

$$= \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})(x+3)} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} - 3} \int \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{2}{7} \left(\ln|x - \frac{1}{2}| - \ln|x+3| \right) + C$$

2.2.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_0)^2} dx = -\frac{\gamma}{a(x-x_0)} + C.$

- Nhận dạng:**
- ① Tử là hằng số.
 - ② Mẫu có nghiệm kép.

Ví dụ 1.4.10

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}.$

- A. $\frac{1}{x+1} + C$ B. $\frac{3}{2} - \frac{1}{x+1} + C.$ C. $-\frac{1}{(x+1)^2} + C.$ D. $-\frac{1}{x+1} + C$

Lời giải

Chọn D

Thấy rằng $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Nên $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$

Ví dụ 1.4.11

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{9x^2 - 12x + 4}$ là:

- A. $\frac{1}{x+1} + C$ B. $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3x-2} \right) + C.$ C. $-\frac{1}{(x+1)^2} + C.$ D. $-\frac{1}{x+1} + C$

Lời giải

Chọn B

Thấy rằng $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$

Nên $\int f(x) dx = \int \left(-\frac{1}{9x^2 - 12x + 4} \right) dx = -\int \frac{1}{(3x-2)^2} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3x-2} \right) + C$

2.2.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\gamma}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2 + k^2} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Ví dụ 1.4.12

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ là:

- A. $\arctan(x-1) + C$ B. $\arctan(x) + C.$ C. $\ln|x^2 - 2| + C.$ D. $2 \tan(x-1) + C$

Lời giải

Chọn A

Thấy rằng $x^2 - 2x + 2$ có $\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = -4 < 0$

Nên $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx$

Đặt $x-1 = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$

$\rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(\tan t)^2 + 1} (1 + \tan^2 t) dt = \int 1 dt = t + C = \arctan(x-1) + C$

Loại 2.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = mx + n \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.3.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$.

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{C(x - x_1) + D(x - x_2)}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{C}{x - x_2} + \frac{D}{x - x_1} \right) dx$

Cách 2:

Xét $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx$

Khi đó ta có: $I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} (X \cdot \ln|x - x_1| + Y \cdot \ln|x - x_2|) + C.$

Đến đây ta chỉ cần tìm X & Y bằng cách giải hệ: $\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{m} \\ \boxed{-x_2} & \boxed{-x_1} & \boxed{n} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so truooc } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ? \\ Y = ? \end{cases}$

Lưu ý: (1) Cách lấy các "hệ số" bỏ vào hệ ta lấy theo thứ tự từ **PHẢI** qua **TRÁI**.

(2) Với tử là hằng số, ta vẫn có thể áp dụng được cách này.

(Áp dụng được cho 2.2.1)

Ví dụ: $I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ ta xem hệ số $m = 0$ & $n = 1$.

(3) Khuyết vị trí nào thì xem hệ số đó = 0.

Ví dụ: $I = \int \frac{n}{ax^2 + bx + c} dx$ khuyết "mx" nên hệ số $m = 0$.

(4) Chú ý hệ số a , bài đơn giản thường thấy $a = 1$, bài ít thấy $a \neq 1$.

Ví dụ 1.4.13

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6}$ là:

A. $3(\ln|x + 2| + \ln|x + 3|) + C$

B. $\ln|x + 2| + \ln|x + 3| + C$

C. $3(\ln|x + 2| - \ln|x + 3|) + C$

D. $\ln|x + 2| - \ln|x + 3| + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $4x + 11 = A(x + 3) + B(x + 2) = (A + B)x + (3A + 2B) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 4 \\ 3A + 2B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases}$

Do đó $\frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} = \frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x + 3}$.

Vậy $\int \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx = \int \left(\frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} \right) dx = 3(\ln|x + 2| + \ln|x + 3|) + C.$

☞ Ví dụ 1.4.14

Tính $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = a \ln \left| \frac{x-b}{x-1} \right| + C$ với $a; b \in \mathbb{N}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$ B. $S = -1$ C. $S = 0$ D. $S = 3$

📖 Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-1)} dx = X \cdot \ln|x-1| + Y \cdot \ln|x-2| + C$

Khi đó ta tìm X & Y bằng cách giải hệ: $\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{-2} & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so cua } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ Y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = -1 \cdot \ln|x-1| + 1 \cdot \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

☞ Ví dụ 1.4.15

Biết rằng $\int \frac{x-1}{2x^2 + x - 2} dx = a \left(b \cdot \ln|x+2| - c \cdot \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) + C$ với $a; b; c$ là các số hữu tỉ và là phân số tối giản. Khi đó $a + b + c$:

A. $S = \frac{1}{10}$ B. $S = \frac{19}{10}$ C. $S = \frac{3}{2}$ D. $S = -\frac{2}{5}$

📖 Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{x-1}{2x^2 + x - 2} dx = \int \frac{x-1}{2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{\left(x - \frac{1}{2} \right) (x+2)} dx$

Xét $\int \frac{x-1}{\left(x - \frac{1}{2} \right) (x+2)} dx = X \cdot \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + Y \cdot \ln|x+2| + C$

Khi đó ta tìm X & Y bằng cách giải hệ: $\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{-\frac{1}{2}} & \boxed{-1} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so cua } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{5} \\ Y = \frac{6}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{x-1}{\left(x - \frac{1}{2} \right) (x+2)} dx = -\frac{1}{5} \cdot \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{6}{5} \cdot \ln|x+2| + C$

Vậy $\int \frac{x-1}{2x^2 + x - 2} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cdot \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{6}{5} \cdot \ln|x+2| \right) + C \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{6}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow S = \frac{19}{10}$

2.3.2. $Q(x)$ có $\Delta=0 \rightarrow \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2} dx \rightarrow$ Đặt $\begin{cases} t = x - x_0 \rightarrow x = t + x_0 \\ dt = dx \end{cases}$.

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

Ví dụ 1.4.16

Tính $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

A. $\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$

B. $\ln|x+2| - x + C$

C. $\ln|x-2| - 2x + C$

D. $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$

Lời giải

Chọn A

Thấy $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, nên $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-1}{(x-2)^2} dx$, đặt $u = x-2 \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ x = u+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{x-1}{(x-2)^2} dx = \int \frac{(u+2)-1}{(u)^2} du = \int \frac{u+1}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du = \ln|u| - \frac{1}{u} + C$

$\Rightarrow \int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx = \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C.$

Ví dụ 1.4.17

Tính $\int \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

A. $4\ln|x-2| - \frac{x}{x-2} + C$

B. $4\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + x + C$

C. $4\ln|x-2| + C$

D. $\ln|x-4| + x + C$

Lời giải

Chọn B

$\int \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{(x^2-4x+4) + (4x-5)}{x^2-4x+4} dx = \int 1 dx + \int \frac{4x-5}{x^2-4x+4} dx$

Xét $\int 1 dx = x + C$

Xét $\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4} dx$

Thấy $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, nên $\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{4x-5}{(x-2)^2} dx$, đặt $u = x-2 \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ x = u+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{4x-5}{(x-2)^2} dx = \int \frac{4(u+2)-5}{(u)^2} du = \int \frac{4u+3}{u^2} du = \int \left(\frac{4}{u} + \frac{3}{u^2} \right) du = 4\ln|u| - \frac{3}{u} + C.$

$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} dx = I + J = 4\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + x + C$

2.3.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0$

$$\rightarrow \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)' + \varepsilon}{ax^2+bx+c} dx = \underbrace{\int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} dx}_H + \underbrace{\int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c} dx}_K.$$

Tính $H = \int \frac{\lambda(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ Đặt $t = ax^2+bx+c \Rightarrow dt = (ax^2+bx+c)' dx$.

Tính $K = \int \frac{\varepsilon}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Ví dụ 1.4.18

Tính $J = \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx$ ta được kết quả nào dưới đây:

A. $\frac{25}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{32}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + C$

C. $\ln\left(\frac{x^2+2x+7}{2}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

D. $\ln(x^2+2x+7) - \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + C$

Lời giải

Chọn A

Đặt $J = \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx = \int \frac{\frac{25}{2}(2x+2) - 32}{x^2+2x+7} dx = \frac{25}{2} \underbrace{\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+7}}_{I_1} - 32 \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+2x+7}}_{I_2}$

Xét $I_1 = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+7}$, đặt $t = x^2+2x+7 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$

$\rightarrow I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+2x+7| + C = \ln(x^2+2x+7) + C$ (do $x^2+2x+7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

Xét $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+2x+7} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+6}$, đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$\rightarrow I_2 = \int \frac{1}{u^2+6} du = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$

Vậy $J = \int \frac{25x-7}{x^2+2x+7} dx = \frac{25}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{32}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$

→ Tổng kết phương pháp tính nguyên hàm hàm số hữu tỉ

Xét $f(x)$ là hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

➤ Trường hợp 1: Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu

→ Chia đa thức được: M là thương, N là dư.

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(M + \frac{N}{Q(x)} \right) dx.$$

➤ Trường hợp 2: Bậc tử $<$ Bậc mẫu

Ta có các loại sau:

Loại 2.1. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax + b \end{cases}$ thì: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\gamma}{ax+b} dx = \frac{\gamma}{a} \ln|ax+b| + C$

Loại 2.2. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = \gamma \text{ (const)} \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.2.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

$$\rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{\gamma}{a(x_2-x_1)} \int \left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1} \right) dx \text{ với } x_2 > x_1$$

2.2.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\gamma}{a(x-x_0)^2} dx = -\frac{\gamma}{a(x-x_0)} + C.$

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu có nghiệm kép.

2.2.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0 \rightarrow \int \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\gamma}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2 + k^2} dx \rightarrow$ Lượng giác hóa.

Nhận dạng: ① Tử là hằng số.
② Mẫu vô nghiệm.

Loại 2.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $\begin{cases} P(x) = mx + n \\ Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$ có các trường hợp sau:

2.3.1. $Q(x)$ có $\Delta > 0$.

Nhận dạng: ① Bậc tử $<$ Bậc mẫu.
② Mẫu có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{C(x-x_1)+D(x-x_2)}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{C}{x-x_2} + \frac{D}{x-x_1} \right) dx$

Cách 2: Xét $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx$

Khi đó ta có: $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{1}{a} (X \cdot \ln|x-x_1| + Y \cdot \ln|x-x_2|) + C.$

←

Đến đây ta chỉ cần tìm X & Y bằng cách giải hệ:
$$\begin{cases} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{m} \\ \boxed{-x_2} & \boxed{-x_1} & \boxed{n} \end{cases} \begin{matrix} \longleftarrow \text{he so truooc } x \\ \longleftarrow \text{he so tu do} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ? \\ Y = ? \end{cases}$$

✍ **Lưu ý:** (1) Cách lấy các “hệ số” bỏ vào hệ ta lấy theo thứ tự từ **PHẢI** qua **TRÁI**.

(2) Với tử là hằng số, ta vẫn có thể áp dụng được cách này.

(Áp dụng được cho 2.2.1)

Ví dụ: $I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ ta xem hệ số $m = 0$ & $n = 1$.

(3) Khuyết vị trí nào thì xem hệ số đó $= 0$.

Ví dụ: $I = \int \frac{n}{ax^2 + bx + c} dx$ khuyết “ mx ” nên hệ số $m = 0$.

(4) Chú ý hệ số a , bài đơn giản thường thấy $a = 1$, bài ít thấy $a \neq 1$.

2.3.2. $Q(x)$ có $\Delta = 0 \rightarrow \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_0)^2} dx \rightarrow \text{Đặt } \begin{cases} t = x - x_0 \rightarrow x = t + x_0 \\ dt = dx \end{cases}$

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

2.3.3. $Q(x)$ có $\Delta < 0$

Nhận dạng: ① Bậc tử < Bậc mẫu.
② Mẫu có nghiệm kép.

$$\rightarrow \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)' + \varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx = \underbrace{\int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} dx}_H + \underbrace{\int \frac{\varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx}_K$$

$$\text{Tính } H = \int \frac{\lambda(ax^2 + bx + c)'}{ax^2 + bx + c} dx \rightarrow \text{Đặt } t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (ax^2 + bx + c)' dx.$$

$$\text{Tính } K = \int \frac{\varepsilon}{ax^2 + bx + c} dx \rightarrow \text{Lượng giác hóa.}$$

✍ **Chú ý:** Một vài cách tách phân thức cần nhớ:

$$\textcircled{1} \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{(x - m)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - m} + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{(x - a)^2(x - b)^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \frac{C}{x - b} + \frac{D}{(x - b)^2}$$

Dạng 1.5. Nguyên hàm hàm số vô tỉ

Xét $f(x)$ là hàm vô tỉ có dạng $f(x) = P(x) \cdot \sqrt{Q(x)} \rightarrow \int f(x) dx = \int P(x) \cdot \sqrt{Q(x)} dx$.

Thông thường ở dạng hàm vô tỉ ta sẽ dùng *phương pháp đổi biến*.

Và ta nhẩm được $(Q(x))' = P(x)$. Khi đó:

Bước 1: Đặt $t = \sqrt{Q(x)}$.

Bước 2: Tính vi phân dt :

Nhưng để vi phân thuận tiện, ta bình phương hai vế $t^2 = Q(x)$.

$$\rightarrow 2t \cdot dt = Q'(x) \cdot dx \Rightarrow 2t \cdot dt = \underset{P(x)}{P(x)} \cdot dx$$

Bước 3: Khi đó $\int f(x) dx = \int t \cdot 2t dt = \int 2t^2 dt = \dots$

Ví dụ 1.5.1

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 \sqrt{1-x^2}$

A. $-\frac{2(1-x^2)^2 \sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C$

B. $\frac{2(1-x^2)^2}{5} + C$

C. $\frac{(1-x^2) \sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C$

D. $\frac{\sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow t^4 = 1-x^2 \Rightarrow 4t^3 dt = -2x dx \Leftrightarrow 2t^3 dt = -x dx$.

Khi đó $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx = -\int t \cdot 2t^3 dt = -\frac{2t^5}{5} + C = -\frac{2(1-x^2)^2 \sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C$.

Ví dụ 1.5.2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \sqrt{1+\cos x}$

A. $2 \left(\frac{\sqrt{1+\cos x}}{2} - \frac{2\sqrt{1+\cos x}^5}{5} \right) + C$

B. $2 \left(\frac{\sqrt{1+\cos x}^7}{7} - \frac{2\sqrt{1+\cos x}^5}{5} \right) + C$

C. $2 \left(\sqrt{1+\cos x}^7 - 2\sqrt{1+\cos x}^5 \right) + C$

D. $\sqrt{1-\cos x}^5 + 2\sqrt{1-\cos x}^2 + C$

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \sqrt{1+\cos x} \Leftrightarrow u^2 = 1+\cos x \Rightarrow 2u du = -\sin x dx$.

Khi đó $\int \sin^2 x \cdot \sin x \sqrt{1+\cos x} dx = \int (1-\cos^2 x) \cdot \sin x \sqrt{1+\cos x} dx$

$= -\int [1-(u^2-1)^2] u \cdot 2u du$

$= \int (u^4 - 2u^2) 2u^2 du = 2 \int (u^6 - 2u^4) du = 2 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} \right) + C = 2 \left(\frac{\sqrt{1+\cos x}^7}{7} - \frac{2\sqrt{1+\cos x}^5}{5} \right) + C$

➤ Dạng 1.6. Nguyên hàm hàm số lượng giác

01	Công thức cơ bản	① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi$ ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
02	Công thức cộng	① $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ ② $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
03	Công thức nhân đôi	① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
04	Công thức hạ bậc	① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
05	Công thức tích thành tổng	① $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$ ② $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ ③ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$ ④ $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

➤ Ví dụ 1.6.1

Tìm nguyên hàm $\int \sin 3x \cos 5x dx$

A. $-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $2 \cos 8x - 2 \cos 2x + C$

C. $2 \cos 8x + 2 \cos 2x + C$

D. $-\frac{1}{16} \cos 10x + C$

👉 Lời giải

Chọn A

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

☞ Ví dụ 1.6.2

Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx$

A. $\sin^2 x - 2\sin^2 x + C$

B. $\frac{\cot x}{2} + C$

C. $\cos^2 x + 2\cos^2 x + C$

D. $\frac{\tan 2x}{2} + C$

🔗 LỜI GIẢI

Chọn D

$$\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx = \int \frac{1}{(2\cos^2 x - 1)} dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{\tan 2x}{2} + C.$$

☞ Ví dụ 1.6.3

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x - 2}{1 + \cos x}$.

A. $\sin^2 x - 3\tan x + C$

B. $x^2 - 3\tan x + C$

C. $x - 3\tan \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{x}{2} - \tan \frac{3x}{2} + C$

🔗 LỜI GIẢI

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \frac{\cos x - 2}{1 + \cos x} dx = \int \left(1 - \frac{3}{1 + \cos x} \right) dx = \int \left(1 - \frac{3}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = x - 3\tan \frac{x}{2} + C.$$

☞ Ví dụ 1.6.4

Tính nguyên hàm $\int \cot^2 x dx$.

A. $2\cot x + C$

B. $-\cot x - x + C$

C. $x - \cot x + C$

D. $\frac{x}{2} - \cot x + C$

🔗 LỜI GIẢI

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int \cot^2 x dx = \int (\cot^2 x + 1 - 1) dx = \int (\cot^2 x + 1) dx - \int 1 dx = -\cot x - x + C$$

☞ Ví dụ 1.6.5

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x - 3\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Tính $F(x)$.

A. $\pi^2 + 3$

B. $-\pi^2$

C. 2π

D. π^2

🔗 LỜI GIẢI

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int (2x - 3\cos x) dx = x^2 - 3\sin x + C$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} - 3 + C = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 - 3\sin x + 3 \Rightarrow F(\pi) = \pi^2 + 3.$$

Dạng 1.7. Nguyên hàm có điều kiện

Bài toán 01:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(x)$ biết $F(a) = b$.

Bước 1: Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x; C)$.

Bước 2: Xử lý $F(a) = b$ bằng cách thay vào $F(x; C)$. Ta được $F(a; C) = b \Rightarrow C = ?$

Bước 3: Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số C .

Ví dụ 1.7.1

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

Chọn C

Có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Ví dụ 1.7.2

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.7.3

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$

B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Do đó $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C)$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

Bài toán 02:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(c)$ biết $F(a) = b$.

Bước 1: Dùng các phương pháp tính nguyên hàm để tìm được $F(x; C)$.

Bước 2: Xử lý $F(a) = b$ bằng cách thay vào $F(x; C)$. Ta được $F(a; C) = b \Rightarrow C = ?$

Bước 3: Khi đó ta được $F(x)$ có cụ thể hằng số C và tính $F(c)$.

Bên cạnh đó, ta có thể dùng cách "**Tích phân**" để xử lý bài toán:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dots$. Tính $F(c)$ biết $F(a) = b$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx$

$$\text{Xét } a < c, \text{ khi đó: } \int_a^c f(x) dx = F(x) \Big|_a^c = F(c) - F(a) \Leftrightarrow F(c) = \int_a^c f(x) dx + F(a)$$

Ví dụ 1.7.4

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- A. $F(\ln 3) = 2$ B. $F(\ln 3) = 6$. C. $F(\ln 3) = 8$. D. $F(\ln 3) = 4$

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

Ví dụ 1.7.5

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}+2}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}-2}{6}$. C. $\frac{-\sqrt{3}+2}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Lời giải

Chọn C

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{9}\right) \Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}-2}{6} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{-\sqrt{3}-2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{3}+2}{6}.$$

-----Hết-----

Chương 03

Chủ đề 02

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ $a \rightarrow b$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và **không âm** trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$.

Vậy diện tích hình thang cong: $S = \int_a^b f(x) dx$.

3. Tính chất.

1	$\int_a^a f(x) dx = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
5	Trong đoạn $[a; b]$, tồn tại $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
6	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
7	Nếu $f(x)$ là hàm lẻ ($f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 2.1. Tích phân áp dụng tính chất & bảng nguyên hàm cơ bản

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)dx = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5	Trong đoạn $[a; b]$, tồn tại $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
6	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
7	Nếu $f(x)$ là hàm lẻ ($f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

➤ Ví dụ 2.1.1

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_1^3 2f(x)dx = 2 \int_1^3 f(x)dx$

B. $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$.

C. $\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$.

D. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(u)du$

🔗 Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^2 f(x)dx = -\int_2^1 f(x)dx$ nên $\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$ sai.

➤ Ví dụ 2.1.2

Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 8

B. -4.

C. 4.

D. -8

🔗 Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 2 - 6 = -4$.

➤ Ví dụ 2.1.3

Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)dy$

A. $I = 5$

B. $I = -3$.

C. $I = 3$.

D. $I = -5$

🔗 Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_{-2}^4 f(t)dt = \int_{-2}^4 f(x)dx, \int_2^4 f(y)dy = \int_2^4 f(x)dx.$

Khi đó: $\int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_{-2}^4 f(x)dx.$

$\Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = \int_{-2}^4 f(x)dx - \int_{-2}^2 f(x)dx = -4 - 1 = -5.$ Vậy $\int_2^4 f(y)dy = -5.$

Ví dụ 2.1.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x)dx$ bằng

A. 1. B. 7.. C. -9.. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^2 f'(x)dx = f(x)|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9.$

Ví dụ 2.1.5

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10,$
 $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6.$ Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx.$

A. 7 B. 6 C. 8 D. 9

Lời giải

Chọn B

$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + 3\int_1^3 g(x)dx = 10 \quad (1).$

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 6 \quad (2).$

Đặt $X = \int_1^3 f(x)dx, Y = \int_1^3 g(x)dx.$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} X + 3Y = 10 \\ 2X - Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}.$

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x)dx = 4$ và $\int_1^3 g(x)dx = 2.$ Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = 4 + 2 = 6.$

➤ Dạng 2.2. Tích phân từng phần

○ Kẻ bảng có dạng:

Đạo hàm	Nguyên hàm
u	dv
$u' du$	v

Tích phân có dạng $\int u dv$, với u và v là 2 trong 4 loại **log – đa – lượng – mũ**.

Tính $I = \int u dv$ bằng cách kẻ bảng:

Đạo hàm	Nguyên hàm
u	dv
$u' du$	v

📌 **Bước 1:** Chọn u đặt vào cột “Đạo hàm”.

📌 **Bước 2:** Chọn dv đặt vào cột “Nguyên hàm”.

📌 **Bước 3:** Tính theo tính chất từng cột.

📌 **Bước 4:** Ta có kết quả $I = \int u dv = u.v - \int v du$.

➤ **Quy tắc:**

• Trong đó ta chọn u theo qui tắc: **Nhất – log; Nhì – đa; Tam – mũ; Tứ – lượng**.

• Còn dv là phần còn lại trong dấu $\int$.

• Dấu ở các mũ tên: *mũ tên đầu tiên* luôn luôn là dấu $+$ và *đan xen dấu* cho nhau.

☞ **Ví dụ 2.2.1**

Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ D. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$

📌 **Lời giải**

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e - \int_0^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$

☞ **Ví dụ 2.2.2**

Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$ ($a; b \in \mathbb{Z}$), tích $a.b$ bằng

A. -15 B. -1. C. 1. D. 20

📌 **Lời giải**

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 = 1 + e \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$

Vậy tích $a.b = 1$.

☞ Ví dụ 2.2.3

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 1$ B. $I = -8$ C. $I = -12$ D. $I = 8$

🔗 Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$.

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -10 + 2 = -8$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = -8$.

☞ Ví dụ 2.2.4

Biết $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $a+b+c=1$ B. $a-b+c=0$.
C. $2a+b+c=-1$ D. $a+2b+c=1$

🔗 Lời giải

Chọn B

Đặt $I = \int_0^1 x \cos 2x dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2 \sin 2 + \cos 2 - 1) \Rightarrow a - b + c = 0$.

☞ Ví dụ 2.2.5

Tích phân $I = \int_0^\pi (3x+2) \cos^2 x dx = \frac{a}{4} \pi^2 + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính $S = a+b$

A. $S = 1$ B. $S = 4$ C. $S = 5$ D. $S = 10$

🔗 Lời giải

Chọn B

$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi (3x+2)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi (3x+2) dx + \int_0^\pi (3x+2) \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$.

$I_1 = \int_0^\pi (3x+2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi$.

$I_2 = \int_0^\pi (3x+2) \cos 2x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 3x+2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$.

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2} (3x+2) \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx = 0 + \frac{3}{4} (\cos 2x) \Big|_0^\pi = 0$.

Vậy $I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi \right) = \frac{3}{4} \pi^2 + \pi$.

Dạng 2.3. Tích phân đổi biến loại 1

Tính tích phân $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx$

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhằm được $\varphi'(x) \cdot dx$.

Bước 2: Tính vi phân $dt = \varphi'(x) dx$ và đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) \end{cases}$.

Bước 3: Biểu thị $f(x) dx$ theo t và dt .

Bước 4: Khi đó $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

① Nếu $\sqrt{a^2 - x^2}$ đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$

② Nếu $\sqrt{x^2 - a^2}$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$

③ Nếu $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ thì đặt $x = a \cos 2t$

④ Nếu $\sqrt{(x-a)(b-x)}, (a < b)$ đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$

⑤ Nếu $\sqrt{x^2 + a^2}$ đặt $x = a \tan t$ hoặc $x = a \cot t$

Ví dụ 2.3.1

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 2 \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{8 \sin^2 t \cos t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1 - \cos 2t) dt = (2t - \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 2.3.2

Tính tích phân $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng cách đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{8} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right).$$

Ví dụ 2.3.3

Khi tính $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, bằng phép đặt $x = 2 \sin t$ thì được

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$ **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t) dt$ **C.** $\int_0^2 4 \cos^2 t dt$ **D.** $\int_0^2 2 \cos^2 t dt$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt$.

Ví dụ 2.3.4

Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{a}{b} \pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

A. $T = 35$ **B.** $T = 24$ **C.** $T = 12$ **D.** $T = 36$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = 3 \sin t \Leftrightarrow dx = 3 \cos t dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - (3 \sin t)^2} \cdot 3 \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4} \pi$$

Vậy $T = 9 \cdot 4 = 36$.

➤ Dạng 2.4. Tích phân đổi biến loại 2

Tính tích phân $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx$

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta nhằm được $\varphi'(x) \cdot dx$.

Bước 2: Tính vi phân $dt = \varphi'(x) dx$ và đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) \end{cases}$.

Bước 3: Biểu thị $f(x) dx$ theo t và dt .

Bước 4: Khi đó $J = \int_a^b \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}_{f(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

➤ Ví dụ 2.4.1

Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b + c$.

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow 2t dt = dx$. Với $\begin{cases} x = 5 \Rightarrow t = 3 \\ x = 21 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$;

Ta có $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = 2 \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{2} (\ln|t-2| - \ln|t+2|) \Big|_3^5 = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7$.

Khi đó $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}; c = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = a + b + c = -\frac{1}{2}$

➤ Ví dụ 2.4.2

Tính $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$ C. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$ D. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0; x = 2 \Rightarrow u = 3$. Nên $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

➤ Ví dụ 2.4.3

Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 1$ B. $S = \frac{1}{2}$ C. $S = \frac{3}{4}$ D. $S = \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)}{t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3} \Rightarrow S = a + b = \frac{2}{3}$

☞ Ví dụ 2.4.4

Xét tích phân $I = \int_1^{\sqrt{2}} x.e^{x^2} dx$. Sử dụng phương pháp đổi biến số với $u = x^2$, tích phân I được biến đổi thành dạng nào sau đây:

A. $I = 2 \int_1^2 e^u du$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$ C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du$ D. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$

📖 Lời giải

Chọn C

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$. Với $x=1 \Rightarrow u=1$ và $x=\sqrt{2} \Rightarrow u=2$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du$.

☞ Ví dụ 2.4.5

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 2$, tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. 2 B. 6 C. 3 D. 1

📖 Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x} (1+\tan^2 x) dx$.

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = (1+\tan^2 x) dx$. Khi $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \rightarrow u=1 \end{cases}$.

Nên $I = \int_0^1 \frac{f(u)}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx = 4$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{[(x^2+1)-1]f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$.

Do đó $2 = \int_0^1 f(x) dx - 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6$.

➤ Dạng 2.5. Tích phân kết hợp đổi biến & từng phần

➤ Trường hợp 1: Từng phần – Đổi biến:

$$\text{Tính } I = \int_a^b f(x)g(x)dx, \text{ áp dụng "Từng phần" ta được } I = h(x) \Big|_a^b + \int_a^b p(x)dx.$$

Lúc này ta áp dụng "**Đổi biến**" để tính $\int_a^b p(x)dx$.

➤ Trường hợp 2: Đổi biến – Từng phần:

$$\text{Tính } I = \int_a^b f(x)g(x)dx, \text{ áp dụng "Đổi biến" ta được } I = \int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)dx.$$

Lúc này ta áp dụng "**Từng phần**" để tính $\int_{t=u(a)}^{t=u(b)} k(x)p(x)dx$.

➤ Ví dụ 2.5.1

Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -3$ B. $a^2 - b = -4$ C. $\frac{a}{b} \in (-1; 0)$ D. $a - b = 6$

📌 *Lời giải*

Chọn C

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \pi^2 \rightarrow t = \pi \end{cases}$

$$\longrightarrow I = \int_0^{\pi} 2t^2 \sin t dt, \text{ đặt } \begin{cases} u = 2t^2 \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4t dt \\ v = -\cos t \end{cases}.$$

$$\longrightarrow I = -2t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 4t \cos t dt, \text{ đặt } \begin{cases} u_1 = 4t \\ dv_1 = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 4 dt \\ v_1 = \sin t \end{cases}.$$

$$\longrightarrow I = -2t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + 4t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4 \sin t dt = -2(-\pi^2) + 4 \cos t \Big|_0^{\pi} = 2\pi^2 - 8 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}.$$

Do đó $a = 2; b = -8 \Rightarrow \frac{a}{b} \in (-1; 0)$.

➤ Ví dụ 2.5.2

Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ với a, b, c là các số thực. Tính $T = a + b + c$ là

- A. $T = 11$. B. $T = 9$. C. $T = 10$. D. $T = 8$.

📌 *Lời giải*

Chọn D

Đặt $x^2 + 9 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 9 \\ x = 4 \rightarrow t = 25 \end{cases}$

$$\longrightarrow I = \frac{1}{2} \int_9^{25} \ln t \cdot dt, \text{ đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

$$\longrightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \int_9^{25} \ln t \cdot dt = \frac{1}{2} (t \cdot \ln t - t) \Big|_9^{25} = \frac{1}{2} [(25 \ln 25 - 25) - (9 \ln 9 - 9)] = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \\ c = -8 \end{cases} \rightarrow T = a + b + c = 25 - 9 - 8 = 8.$$

☞ Ví dụ 2.5.3

Biết $I = \int_1^e \cos(\ln x) dx = \frac{e(\cos a + \sin 1) - 1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Tính $a + b$

A. 7 B. 3 C. 5 D. 13

🔗 Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = e^t dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\longrightarrow I = \int_0^1 e^t \cos t dt, \text{ đặt } \begin{cases} u = e^t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^t dt \\ v = \sin t \end{cases}.$$

$$\longrightarrow I = e^t \sin t \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^t \sin t dt}_J, \text{ đặt } \begin{cases} u = e^t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^t dt \\ v = -\cos t \end{cases}.$$

$$\longrightarrow J = -e^t \cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 e^t \cos t dt = (-e \cdot \cos 1 + 1 \cdot \cos 0) + \int_0^1 e^t \cos t dt = (1 - e \cdot \cos 1) + \int_0^1 e^t \cos t dt$$

$$\longrightarrow I = e^t \sin t \Big|_0^1 - \left(1 - e \cdot \cos 1 + \int_0^1 e^t \cos t dt \right) \Rightarrow I = \frac{e(\cos 1 + \sin 1) - 1}{2} \rightarrow a + b = 3$$

☞ Ví dụ 2.5.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính

$H = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. 144 B. 12 C. 56 D. 112

🔗 Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'\left(\frac{x}{2}\right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow$

$$H = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = x f\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^4 - \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4 \cdot f(2) - I_1.$$

$$\longrightarrow I_1 = \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx. \text{ Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$$

$$\longrightarrow I_1 = 2 \int_0^2 f(t) dt = 2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \cdot 4 = 8.$$

Vậy $H = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4 \cdot 16 - 8 = 56.$

➤ **Dạng 2.6. Tích phân chứa trị tuyệt đối**

➤ **Cách 1:**

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in [a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n \in [a;b]$

→ Khi đó $I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$

$$\Leftrightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

➤ **Cách 2:**

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in [a;b]$.

→ Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.

→ Áp dụng $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A > 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b \dots$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

➤ **Ví dụ 2.6.1**

Tính tích phân $I = \int_0^2 |x-1| dx$ ta được kết quả :

A. 1

B. 2.

C. 3

D. 4

👉 *Lời giải*

Chọn A

Cách 1:

Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

x	0	1	2
$x-1$	-	0	+

$$\text{Khi đó : } I = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1$$

Cách 2:

Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx$$

$$= \left| \int_0^1 (x-1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x-1) dx \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| + \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = 1$$

➤ **Ví dụ 2.6.2**

Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$ ta được kết quả $I = \frac{a}{b}$, khi đó tổng $a+b$ là:

A. 7

B. 3.

C. 5

D. 9

👉 *Lời giải*

Chọn A

$$\text{Do } x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2 \leq 0, \forall x \in [-1;1]$$

Khi đó $I = -\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) dx = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow a+b=7$

Ví dụ 2.6.3

Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{7}{6}$ B. $I = \frac{17}{6}$ C. $I = \frac{7}{6}$ D. $I = -\frac{17}{6}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x^3 - 3x + 2}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$		0	0	
	$-$	$+$	$+$	

$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x - 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} = \frac{7}{6}$.

Ví dụ 2.6.4

Tính tích phân $I = \int_{-2}^0 \frac{x^2 - x - 2}{x-1} dx$ ta được kết quả $I = a + b \ln 2 + c \ln 3$ (với a, b, c là các số nguyên). Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2a^3 + 3b - 4c$ là:

A. $T = -20$ B. $T = 3$ C. $T = 22$ D. $T = 6$

Lời giải

Chọn C

Cho $\frac{x^2 - x - 2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, do $x \in [-2; 0]$ nên $x = -1$

x	-2	-1	0
$\frac{x^2 - x - 2}{x-1}$		0	
	$-$	$+$	

Khi đó $I = -\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x-1}\right) dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2 - x - 2}{x-1}\right) dx$

$= -\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{2}{x-1}\right) dx + \int_{-1}^0 \left(x - \frac{2}{x-1}\right) dx$

$= -\left(\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x-1|\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x-1|\right)\Big|_{-1}^0 = 1 + 4 \ln 2 - 2 \ln 3 \Rightarrow a=1, b=4, c=-2$

$\Rightarrow T = 2a^3 + 3b - 4c = 22$

Dạng 2.7. Tích phân dựa vào đồ thị

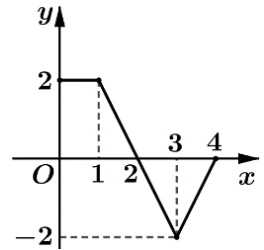
Áp dụng ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$.

Ví dụ 2.7.1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và có đồ thị như hình bên. Tích phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng

- A. 1 B. 2.
C. 3 D. 4



Lời giải

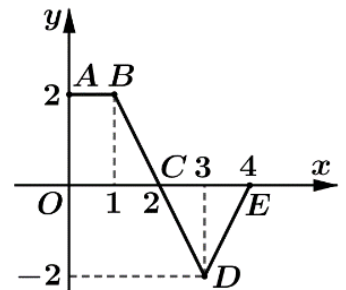
Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = S_{ABCO} - S_{CDE}.$$

$$\text{Diện tích hình tam giác } CDE \text{ là: } S_{CDE} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\text{Diện tích hình thang } ABCO \text{ là: } S_{ABCO} = \frac{2 \cdot (1+2)}{2} = 3.$$

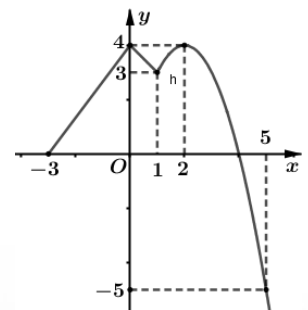
$$\text{Vậy } \int_0^4 f(x) dx = 3 - 2 = 1$$



Ví dụ 2.7.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{97}{6}$
C. 1 D. -6



Lời giải

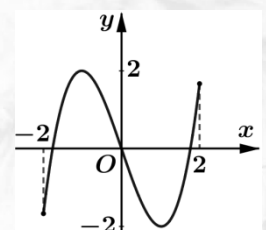
Chọn D

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số: } \int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{4}{3}x + 4 \right) dx + \int_0^1 (4 - x) dx + \int_1^3 (4x - x^2) dx = \frac{97}{6}.$$

Ví dụ 2.7.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ như hình bên. Biết $\int_{-2}^0 f(x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. 0.
C. 3 D. 4



Lời giải

Chọn A

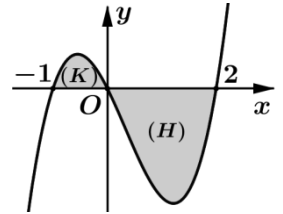
Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ nên hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

Áp dụng tính chất hàm lẻ, ta có $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$.

Mà $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = 0$. Suy ra $\int_0^2 f(x) dx = -2$.

Ví dụ 2.7.4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng (K), (H) lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.



- A. $f(2) = -\frac{2}{3}$. B. $f(2) = \frac{2}{3}$.
C. $f(2) = \frac{11}{6}$. D. $f(2) = 3$.

Lời giải

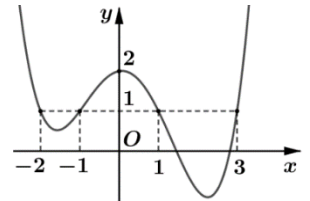
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\int_{-1}^2 f'(x) dx = \int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_0^2 f'(x) dx = \frac{5}{12} - \frac{8}{3} = -\frac{9}{4}$.

Mặt khác: $\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = f(2) - \frac{19}{12} \longrightarrow f(2) = -\frac{9}{4} + \frac{19}{12} = -\frac{2}{3}$.

Ví dụ 2.7.5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -\frac{3}{2})$. C. $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$. D. $(-\frac{2}{3}; 0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f(x) \cdot f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f^2(x)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{x f^2(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Từ đồ thị, ta thấy:

- $f(x) > 2 - x, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > \int_0^1 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{7}{6} \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx < -\frac{2}{3}$.
- $f(x) < 2, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx < \int_0^1 2 dx = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > -\frac{3}{2}$.

➤ Dạng 2.8. Tích phân hàm chẵn lẻ

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D .

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số **chẵn** nếu thỏa $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = f(x) \end{cases}$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số **lẻ** nếu thỏa $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D : f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Khi đó, trong dấu $\int$:

$$\Rightarrow \text{Nếu hàm } f(x) \text{ CHẼN thì, } \begin{cases} \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+c^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x) dx \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \text{Nếu hàm } f(x) \text{ LẺ thì, } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

➤ Ví dụ 2.8.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } [-6; 6]. \text{ Biết rằng } \int_{-1}^2 f(x) dx = 8; \\ \int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Giá trị của } I = \int_{-1}^6 f(x) dx \text{ là} \end{array} \right.$$

A. $I = 5$ B. $I = 2$ C. $I = 14$ D. $I = 11$

🔗 *Lời giải*

Chọn C

Ta có $y = f(x)$ là hàm số chẵn, suy ra $f(-2x) = f(2x) \Rightarrow \int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3$

Xét $I_1 = \int_1^3 f(2x) dx$, đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} dt = dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=3 \Rightarrow t=6 \end{cases}$;

$$\longrightarrow I_1 = \int_2^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_2^6 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$$

➤ Ví dụ 2.8.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hàm số } f(x) \text{ là hàm số chẵn liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } \int_0^2 f(x) dx = 10. \text{ Tính } I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx. \end{array} \right.$$

A. $I = 10$ B. $I = \frac{10}{3}$ C. $I = 20$ D. $I = 5$

🔗 *Lời giải*

Chọn A

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=-2 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=-2 \end{cases}.$$

$$I = \int_{-2}^2 \frac{f(t)}{2^{-t}+1} dt = \int_{-2}^2 \frac{2^t}{2^t+1} f(t) dt = \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x+1} f(x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x+1} dx + \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x+1} f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + 10$$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x)$.

Xét $J = \int_{-2}^0 f(x) dx$, đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$\Rightarrow J = \int_0^2 f(-t) dt = \int_0^2 f(-x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 10 \Rightarrow 2I = 20 \Rightarrow I = 10.$$

☞ Ví dụ 2.8.3

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$

B. $I = -6$

C. $I = 6$

D. $I = 10$

👉 *Lời giải*

Chọn B

Xét $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$; đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$; đổi cận: $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = 2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\longrightarrow \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

$$\longrightarrow \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

Xét $\int_1^2 f(2x) dx$; đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$; đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$

$$\longrightarrow \int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4 \Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\longrightarrow I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

➤ **Dạng 2.9. Tích phân hàm cho nhiều công thức**

⌘ **Bài toán 1:**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$.

Xét $b \in [a; c]$.

➔ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$

➔ **Bước 2.** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.

➔ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

⌘ **Bài toán 2:**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq b \\ h(x; m) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x) dx$.

Xét $b \in [a; c]$.

➔ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra:

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$

➔ **Bước 2.** Tách cận: $J = \int_a^c f(x) dx = \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x) dx}_{I_2}$.

➔ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

➤ **Ví dụ 2.9.1**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$

A. $\frac{7}{2}$ B. 1 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

📖 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4-x) = 3 \end{cases}$, và $f(1) = 3$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

Khi đó $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \left(8 - 2 - 4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{2}$

☞ Ví dụ 2.9.2

Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_{-1}^1 f(x) dx$

A. $\frac{a}{6} - 1$. B. $\frac{2a}{3} + 1$. C. $\frac{a}{6} + 1$. D. $\frac{2a}{3} - 1$.

📖 Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a(x-x^2)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \end{cases}$, và $f(0) = 0$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x-x^2) dx = (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1. \end{aligned}$$

☞ Ví dụ 2.9.3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$,
 $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15 B. -10 C. -19 D. -17

📖 Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0 \end{cases}$, và $f(0) = m + 1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3} \longrightarrow a = 1, b = 2, c = -\frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Vậy tổng $a+b+3c = -19$.

Dạng 2.10. Tích phân liên quan max - min

Bài toán: Tính $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$ hoặc $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$.

Ta xét $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$:

→ **Bước 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in [a; b]$ thì nhận nghiệm đó.

Giả sử ta được $x = m \in [a; b]$.

→ **Bước 2.** Xét hiệu $f(x) - g(x)$, giả sử:

• Trên $[a; m]$: $f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \min\{f(x); g(x)\} = g(x)$.

• Trên $[m; b]$: $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow \min\{f(x); g(x)\} = f(x)$.

→ **Bước 3.** Khi đó $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx = \int_a^m g(x) dx + \int_m^b f(x) dx$.

Khi đó $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$ ta áp dụng tương tự.

Ví dụ 2.10.1

Tính tích phân $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$

A. $I = \frac{117}{2}$ B. $I = \frac{275}{12}$ C. $I = 19$ D. $I = 27$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^3 = 4x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1; x = 3 \end{cases}$

Trên $[0; 1] \rightarrow x^3 - (4x^2 - 3x) > 0 \Rightarrow \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} = x^3$

Trên $[1; 3] \rightarrow x^3 - (4x^2 - 3x) < 0 \Rightarrow \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} = 4x^2 - 3x$

Vậy $I = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 (4x^2 - 3x) dx = \frac{275}{12}$.

Ví dụ 2.10.2

Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 \min\{e^x; e^{-x}\} dx$

A. $I = \frac{2}{e} - 2$ B. $I = \frac{2}{e} + 2$ C. $I = 2 - \frac{2}{e}$ D. $I = \frac{2}{e}$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Trên $[-1; 0] \rightarrow e^x - e^{-x} < 0 \Rightarrow \min\{e^x; e^{-x}\} = e^x$

Trên $[0; 3] \rightarrow e^x - e^{-x} > 0 \Rightarrow \min\{e^x; e^{-x}\} = e^{-x}$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^3 e^{-x} dx = 2 - \frac{2}{e}.$$

☞ Ví dụ 2.10.3

Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\{\sin x; \cos x\} dx = a - b\sqrt{2}$ ($a; b \in \mathbb{N}$). Tính $S = a + b$

A. 3

B. 5

C. 7

D. 8

🔗 Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \sin x - \cos x < 0 \Rightarrow \min\{\sin x; \cos x\} = \sin x$

Trên $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \sin x - \cos x > 0 \Rightarrow \min\{\sin x; \cos x\} = \cos x$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 - \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow S = 3.$$

☞ Ví dụ 2.10.4

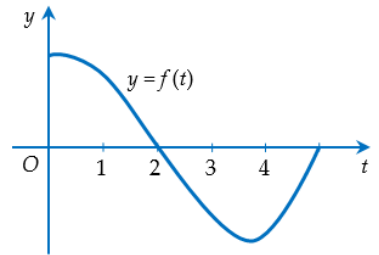
Xét hàm số $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ trong đó hàm số $y = f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?

A. $F(1)$

B. $F(2)$

C. $F(3)$

D. $F(0)$



🔗 Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F'(x) = \left(\int_2^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Xét trên đoạn $[0; 3]$, ta thấy $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[0; 2]$ hàm số $F(x)$ đồng biến nên $F(0) < F(2)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[2; 3]$ hàm số $F(x)$ nghịch biến nên $F(3) < F(2)$.

Vậy $F(2)$ là giá trị lớn nhất.

➤ Dạng 2.11. Tích phân hàm “ẩn”

2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến

Dạng 1: Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$, tính $\int_a^b f(x) dx$ hoặc $\int_a^b f(x) dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$

➔ **Lưu ý:** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$

Dạng 2: Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết $f(x)$ thỏa: $A \cdot f(x) + B \cdot u' \cdot f(u) + C \cdot f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

① Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

② Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

③ Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

③ Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

➤ Ví dụ 2.11.1

Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16 B. 4 C. 32 D. 8

🔗 *Lời giải*

Chọn D

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

➤ Ví dụ 2.11.2

Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 6 B. 36 C. 2 D. 7

🔗 *Lời giải*

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 7$.

☞ Ví dụ 2.11.3

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

A. 2 B. 4 C. -1 D. 6

📖 Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

Biến đổi $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1, B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \frac{-6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4$.

Cách 2: (Biến đổi)

Từ $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

Đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$; Với $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$ thay vào (*),

Ta được: $\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4$.

☞ Ví dụ 2.11.4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -4$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{4}{3}$ D. $I = 2$

📖 Lời giải

Chọn D

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x) + f(2-x) = 2x$ ta có $A=1; B=1 \Rightarrow I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$

Cách 2: (Biến đổi)

Từ $f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2x dx = 4$ (*)

Đặt $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$; Với $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=2 \\ x=2 \Rightarrow u=0 \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x) dx = \int_2^0 f(u) du = \int_0^2 f(x) dx$.

Thay vào (*), ta được $2 \int_0^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$.

2.11.2. Dùng phương pháp từng phần

Xuất phát từ đạo hàm hàm số tích, ta có: $[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x).v(x)]' dx &= \int_a^b [u'(x).v(x) + v'(x).u(x)] dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) d(v(x)) &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) d(u(x)) \\ \text{Hay } \int_a^b u(x).v'(x) dx &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x) dx \end{aligned}$$

☞ Ví dụ 2.11.5

Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1; 2]$.
 Biết $F(1)=1, F(2)=4, G(1)=\frac{3}{2}, G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx = \frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$

A. $\frac{11}{12}$ B. $-\frac{145}{12}$ C. $-\frac{11}{12}$ D. $\frac{145}{12}$

📖 Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f(x)dx \\ v = G(x) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 F(x)g(x)dx &= F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x)dx \\ &= (F(x)G(x)) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x)dx = 4.2 - 1. \frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

☞ Ví dụ 2.11.6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 5]$ và $f(5)=10, \int_0^5 xf'(x)dx = 30$.
 Tính $\int_0^5 f(x)dx$.

A. 20 B. -30 C. -20 D. 70

📖 Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^5 x.f'(x)dx &= (x.f(x)) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)dx \\ \Leftrightarrow 30 &= 5f(5) - \int_0^5 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^5 f(x)dx = 5f(5) - 30 = 20. \end{aligned}$$

→ Tổng kết phương pháp tính tích phân hàm “ẩn”

2.11.1. Dùng phương pháp đổi biến

Dạng 1: Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$, tính $\int_a^b f(x) dx$ hoặc $\int_a^b f(x) dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$

→ **Lưu ý:** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$

Dạng 2: Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết $f(x)$ thỏa: $A \cdot f(x) + B \cdot u' \cdot f(u) + C \cdot f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

① Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

② Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

③ Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

③ Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

2.11.2. Dùng phương pháp từng phần

Xuất phát từ đạo hàm hàm số tích, ta có: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x) \cdot v(x)]' dx &= \int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)] dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) d(v(x)) &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) d(u(x)) \\ \text{Hay } \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx \end{aligned}$$

➤ Dạng 2.12. Tích phân liên quan phương trình vi phân

2.12.1. Biểu thức đạo hàm

(1). $u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x)$

(2). $\frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x)$

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức: $(uv)' = u'v + v'u$ và $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

(1). $u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x) \cdot f(x)]' = h(x) \Rightarrow u(x) \cdot f(x) = \int h(x) dx$

(2). $\frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x) \Leftrightarrow \left[\frac{u(x)}{f(x)}\right]' = h(x) \Rightarrow \frac{u(x)}{f(x)} = \int h(x) dx$

➤ Ví dụ 2.12.1

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(2x+3)f'(x) + 2f(x) = 4x - 3x^2$. Tính $f(2)$ bằng

A. 1 B. $\frac{9}{7}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{7}$

🔗 Lời giải

Chọn B

Ta có: $(2x+3)f'(x) + 2f(x) = 4x - 3x^2 \Leftrightarrow [(2x+3)f(x)]' = 4x - 3x^2$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $(2x+3)f(x) = \int (4x - 3x^2) dx = 2x^2 - x^3 + C$

Do $f(0) = 3 \Rightarrow 3f(0) = C \Rightarrow C = 9$

Thay $x = 2 \Rightarrow 7f(2) = 8 - 8 + 9 \Rightarrow f(2) = \frac{9}{7}$.

➤ Ví dụ 2.12.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) = x \cdot f'(x) + 3x^4 - 4x^2$. Tính giá trị $f(4)$

A. -2 B. -196 C. -48 D. -193

🔗 Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = x \cdot f'(x) + 3x^4 - 4x^2 \Rightarrow \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = -3x^2 + 4 (*)$.

Mặt khác $\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \left[\frac{f(x)}{x}\right]'$

Lấy nguyên hàm 2 vế của (*) ta có: $\frac{f(x)}{x} = -x^3 + 4x + C$

Do $f(1) = 2 \Rightarrow \frac{f(1)}{1} = -1 + 4 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 4x^2 - x$. Khi đó $f(4) = -196$.

☞ Ví dụ 2.12.3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Biết rằng

$$f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x = 1, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \text{ và } f(0) = 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

A. $I = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

B. $I = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C. $I = \frac{1}{2}$

D. $I = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}$

🔗 Lời giải

Chọn A

$$f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\cos x} \right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f(x)}{\cos x} = \tan x + C$. Theo giả thiết $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + 1) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

☞ Ví dụ 2.12.4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, đồng thời thỏa mãn

hệ thức $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$ trong đó

$a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{14}{9}$

B. $P = -\frac{4}{9}$

C. $P = \frac{7}{9}$

D. $P = -\frac{2}{9}$

🔗 Lời giải

Chọn A

$$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}$$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow \sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot f(x) = x \tan x + \ln |\cos x|$$

$$\text{Do đó } \frac{\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{\pi}{3} \sqrt{3} + \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{18} - \ln \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{-4}{9}.$$

2.12.2. Biểu thức tổng hiệu

(1). $f'(x) + f(x) = h(x)$

(2). $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

(1). Biến đổi: $f'(x) + f(x) = h(x) \Rightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$$

(2). Biến đổi: $f'(x) - f(x) = h(x) \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$$

☞ Ví dụ 2.12.5

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $f'(x) + f(x) = x - 1$.
Biết $f(0) = 9$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(2) = 9e^{-2}$

B. $f(2) = 9e^2$

C. $f(2) = 2e^2$

D. $f(2) = -1 + 9e^2$

🔗 Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) + f(x) = x - 1 \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x (x - 1)$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x (x - 1) \Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int e^x (x - 1) dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x (x - 1) dx = (x - 1)e^x - \int e^x dx = (x - 2)e^x + C$

Do đó $e^x \cdot f(x) = (x - 2)e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 2)e^x + C}{e^x}$

Lại có $f(0) = -2 + C = 9 \Rightarrow C = 11 \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 2)e^x + 11}{e^x} \Rightarrow f(2) = \frac{9}{e^2}$.

☞ Ví dụ 2.12.6

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 3$ và
 $f(x) - f'(x) = 2x + 1$. Giá trị của $f(1)$ thuộc đoạn

A. $[0; 2]$

B. $[4; 6]$

C. $[2; 4]$

D. $[6; 8]$

🔗 Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) - f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} f(x) - e^{-x} \cdot f'(x) = e^{-x} (2x + 1)$

Mặt khác $[e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} f(x)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $-e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} (2x + 1) dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \int e^{-x} (2x + 1) dx = -e^{-x} (2x + 1) + \int 2e^{-x} dx$

$\Rightarrow -e^{-x} \cdot f(x) = -e^{-x} (2x + 3) + C \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} (2x + 3) + C$

Do $f(0) = 4$ nên $4 = 3 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{e^{-x}} \Rightarrow f(x) = 2x + 3 + e^x$

$\Rightarrow f(1) = 5 + e \in [6; 8]$.

2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được: $e^{\int p(x)dx} \cdot f'(x) + e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot f(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = \int h(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

☞ Ví dụ 2.12.7

Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[2; 4]$, $f(2) = 6$; $(x^2 - 1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Tính $f(4)$

A. $2 + \sqrt{5}$ B. $5 + \sqrt{5}$ C. $5 + \sqrt{15}$ D. $2 + \sqrt{15}$

🔗 *Lời giải*

Chọn D

Ta có: $(x^2 - 1)f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow f'(x) + \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ với $x \in [2; 4]$

Áp dụng công thức nhanh 2.11.2 ta có $f(x) \cdot e^{\int \frac{dx}{x^2 - 1}} = \int \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} e^{\int \frac{dx}{x^2 - 1}} dx$ (*)

Lại có $e^{\int \frac{dx}{x^2 - 1}} = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(x) \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \int \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1} + C$

$\rightarrow f(x) = C \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x + 1 \Rightarrow f(2) = C\sqrt{3} + 3 = 6 \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{3x+3}{x-1}} + x + 1 \rightarrow f(4) = 5 + \sqrt{5}$

☞ Ví dụ 2.12.8

Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0; 1]$, biết $f(0) = \frac{13}{3}$; $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = x^3 + 4x$. Khi đó:

A. $0 < f(1) < 2$ B. $2 < f(1) < 4$ C. $4 < f(1) < 5$ D. $f(1) > 5$

🔗 *Lời giải*

Chọn C

Ta có: $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = x^3 + 4x \Leftrightarrow f'(x) + \frac{x}{x^2 + 1} f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1}$

Áp dụng công thức nhanh 2.11.2 ta có $f(x) \cdot e^{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx} = \int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} e^{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx} dx$ (*)

Ta tính: $e^{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} = \sqrt{x^2 + 1}$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = \int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 4)}{x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1} dx$

$= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{x^2 + 1} + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) d(x^2 + 1) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + 3\sqrt{x^2 + 1} + C \rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 10}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Mặt khác $f(0) = \frac{10}{3} + C = \frac{13}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{11}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 < f(1) < 5$.

→ Tổng kết phương pháp tính tích phân liên quan PTVP

2.12.1. Biểu thức đạo hàm

$$(1). u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \qquad (2). \frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x)$$

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức: $(uv)' = u'v + v'u$ và $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$(1). u(x) \cdot f'(x) + u'(x) \cdot f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x) \cdot f(x)]' = h(x) \Rightarrow u(x) \cdot f(x) = \int h(x) dx$$

$$(2). \frac{u'(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = h(x) \Leftrightarrow \left[\frac{u(x)}{f(x)}\right]' = h(x) \Rightarrow \frac{u(x)}{f(x)} = \int h(x) dx$$

2.12.2. Biểu thức tổng hiệu

$$(1). f'(x) + f(x) = h(x) \qquad (2). f'(x) - f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$(1). \text{Biến đổi: } f'(x) + f(x) = h(x) \Rightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$$

$$(2). \text{Biến đổi: } f'(x) - f(x) = h(x) \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$$

2.12.2. Bài toán tổng quát $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được: $e^{\int p(x) dx} \cdot f'(x) + e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) \cdot f(x) = e^{\int p(x) dx} \cdot h(x)$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = \int h(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

$$\text{Tổng quát: } e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = \int h(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

Dạng 2.13. Bất đẳng thức tích phân

⌘ Tính chất 01:

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

- ① Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
- ② Nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Hệ quả $\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- ③ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

⌘ Tính chất 02:

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$, $g(x) \neq 0$. Khi đó:

- ④ Bất đẳng thức Holder (**Cauchy – Schwarz**): $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k \cdot g(x)$ với $k \in \mathbb{R}$

- ⑤ $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

🔗 Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[a; b]$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(1) f(m) = n \quad (2) \int_a^b [f'(x)]^2 dx = A \quad (3) \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = B$$

Với $g(x)$ là hàm số đã biết và liên tục trên $[a; b]$

Tính $I = \int_a^b f(x) dx$.

→ **Lời giải:** Tính tích phân $\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = B$ bằng phương pháp từng phần $\rightarrow \int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx = B'$

😊 Hướng 1:

→ **Bước 1.** Mặt khác

$$\int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b h^2(x) dx}_{\text{casio}} \cdot \underbrace{\int_a^b (f'(x))^2 dx}_{\text{giả thiết}}$$

→ **Bước 2.** Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = k \cdot h(x)$.

Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x; k; C) = ?$

→ **Bước 3.** Dùng $f(m) = n \Rightarrow C(k) = ?$

→ **Bước 4.** Dùng $\int_a^b h(x) \cdot f'(x) dx = B'$ (ở bước 1)
 $\Rightarrow k = ?$

→ Cuối cùng có đủ $x; k; C \Rightarrow f(x)$ hoàn chỉnh

→ YCBT.

😊 Hướng 2:

→ **Bước 1.** Giả sử tính được $\int_a^b h^2(x) dx = C$

→ **Bước 2.** Tìm γ thỏa:

$$\underbrace{\int_a^b [f'(x)]^2 dx}_A - 2 \underbrace{\int_a^b \gamma h(x) \cdot f'(x) dx}_{B'} + \underbrace{\int_a^b \gamma^2 h^2(x) dx}_C = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 2 \gamma B' + \gamma^2 C = 0 \Leftrightarrow \gamma = ?$$

→ **Bước 3.** Lúc này $\int_a^b (f'(x) - \gamma \cdot h(x))^2 dx = 0$

$$\Rightarrow f'(x) - \gamma \cdot h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \gamma \cdot h(x)$$

→ **Bước 4.** Nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow f(x; C) = ?$

$$\text{Dùng } f(m) = n \Rightarrow C = ?$$

→ $f(x)$ hoàn chỉnh

☞ Ví dụ 2.13.1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, thỏa các điều kiện $f(2) = 1$ và $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \int_0^2 f(x) dx = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{7}$

🔗 Lời giải

Chọn B

Tính: $I = \int_0^1 f(x) dx$; đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 1 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 2 - \int_0^2 x f'(x) dx \longrightarrow \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Tìm } \gamma: \underbrace{\int_0^2 [f'(x)]^2 dx}_{=2/3} - 2 \underbrace{\left[\gamma \int_0^2 x f'(x) dx \right]}_{=4/3} + \underbrace{\left[\gamma^2 \int_0^2 (x)^2 dx \right]}_{=8/3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \gamma + \frac{8}{3} \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lúc này } \int_0^2 \left(f'(x) - \frac{1}{2} x \right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{2} x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Nguyên hàm 2 vế: } \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2} x dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$\text{Lại có } f(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2.$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{4} x^2}{x^2} dx = \frac{1}{4}.$$

☞ Ví dụ 2.13.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 20$ và $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 1$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 4

🔗 Lời giải

Chọn C

Tính: $I = \int_0^1 x \cdot f(x) dx$; đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx \Leftrightarrow 1 = 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx \longrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 2 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \leq \underbrace{\int_0^1 (x^2)^2 dx}_{=1/5} \cdot \underbrace{\int_0^1 (f'(x))^2 dx}_{=20} = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = k \cdot x^2$.

Nguyên hàm 2 vế: $\int f'(x) dx = k \int x^2 dx \Rightarrow f(x) = \frac{k}{3} x^3 + C$.

Theo giả thiết: $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{k}{3} \cdot 1^3 + C \Rightarrow C = 4 - \frac{k}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{k}{3} x^3 + 4 - \frac{k}{3}$.

Từ (*): $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot k \cdot x^2 dx = 2 \Leftrightarrow k \int_0^1 x^4 dx = 2 \Rightarrow k = 10$.

Khi đó: $f(x) = \frac{10}{3} x^3 + 4 - \frac{10}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{10}{3} x^3 + \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{10}{3} x^3 + \frac{2}{3} \right) dx \xrightarrow{\text{casio}} \frac{3}{2}$

Ví dụ 2.13.3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$$3 \int_0^1 \left[f'(x) \cdot f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx.$$

Tích phân $\int_0^1 f^3(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{6}$

Lời giải

Chọn D

Theo bất đẳng thức Holder: $\int_0^1 f'(x) \cdot f^2(x) dx \cdot \int_0^1 1 dx \geq \left(\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] \cdot 1 dx \right)^2$.

Do đó: $2 \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx \geq 3 \int_0^1 \left[f'(x) \cdot f^2(x) \right] dx + \frac{1}{3}$ (*)

$$\geq 3 \left(\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx \right)^2 + \frac{1}{3}$$

Hay $3 \left(\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx \right)^2 - \frac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx = \frac{1}{4}$.

Dấu "=" ở (*) xảy ra, tức là ta có: $\begin{cases} \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) \right] dx = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{1}{3} \\ \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) = k \end{cases}$

Từ đó $\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{3}} \Rightarrow \int_0^1 \left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{3}} \right)^3 dx = \frac{7}{6}$.

Hết

Chương 03

Chủ đề 03

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong & trục hoành:

➤ Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[a; b]$.

Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

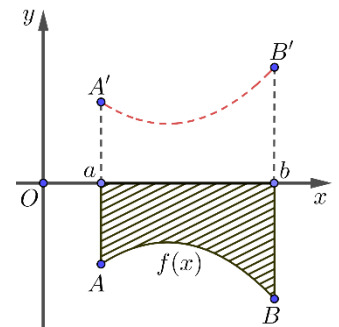
Khi đó diện tích hình thang cong được tính: $S = \int_a^b f(x) dx$.

➤ Trường hợp $f(x) \leq 0$ trên $[a; b]$, ta có $-f(x) \geq 0$.

S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.

($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

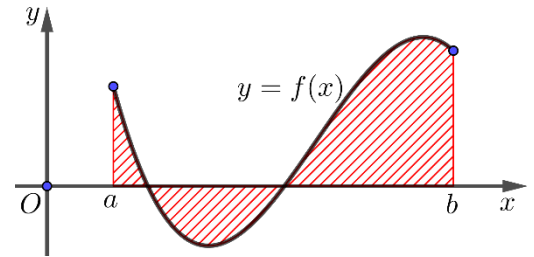
Do đó: $S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x)) dx$



✂ Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong:

➤ Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

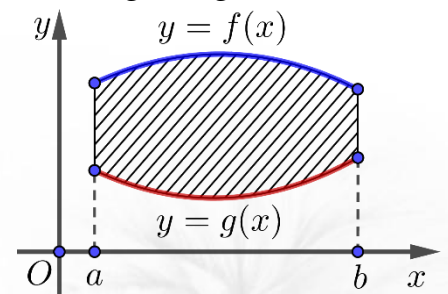
Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Xét trường hợp $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$.

Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hai hình thang cong giới hạn bởi

$$\begin{cases} Ox \\ x = a \text{ và } y = f(x); y = g(x). \\ x = b \end{cases}$$

Khi đó diện tích: $S = S_1 - S_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.



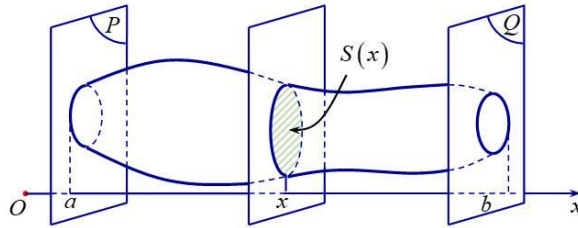
✂ Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3. Thể tích vật thể:

- ↻ Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).



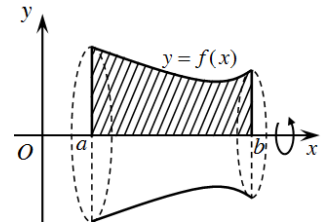
Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

4. Thể tích khối tròn xoay:

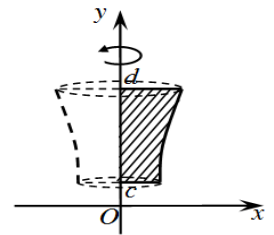
- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



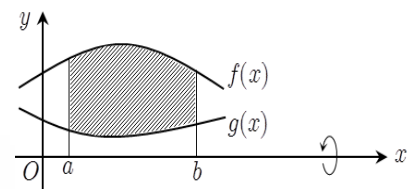
- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$



- ↻ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$



➤ Dạng 3.1. Câu hỏi lý thuyết

⌘ Diện tích hình phẳng:

$$(1) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

⌘ Thể tích vật thể:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

⌘ Thể tích khối tròn xoay:

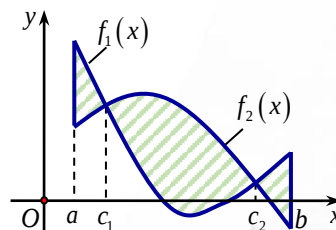
$$(1) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Ox \rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$(2) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Ox \rightarrow V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

$$(3) \text{ Giới hạn: } \begin{cases} x = g(y) \\ Oy \\ x = a \\ x = b \end{cases} \text{ và quay quanh trục } Oy \rightarrow V = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

➤ Ví dụ 3.1.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và đường thẳng $x = a$, $x = b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx$

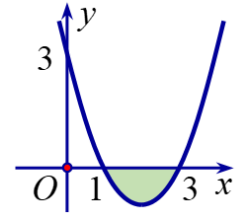
👉 Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

Ví dụ 3.1.2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

B. $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

C. $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox : $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

Ví dụ 3.1.3

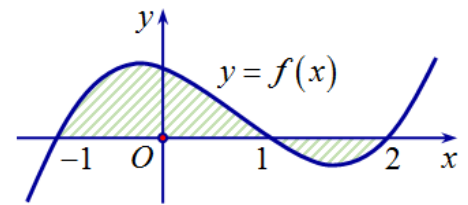
Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là

A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

B. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$



Lời giải

Chọn B

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 [f(x) - 0] dx + \int_1^2 [0 - f(x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

Ví dụ 3.1.4

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx$

B. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$

C. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$

D. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục Ox , $x=1$ và $x=4$ được tính bởi công thức $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx$.

➤ Dạng 3.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$

✂ Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$
 $= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$

➔ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞ Ví dụ 3.2.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

📌 Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}.$

Ta có: $S = \int_1^2 |(x-2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}.$

☞ Ví dụ 3.2.2

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

A. $S=15$ B. $S=23$ C. $S=9$ D. $S=38$

📌 Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}.$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
VT		+	-	+

Diện tích cần tìm:

$S = \int_{-4}^1 |x^2 - 2x| dx = \int_{-4}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-4}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = 38.$

➤ Dạng 3.3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$).

Bước 2: Tính
$$S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

➔ Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞ Ví dụ 3.3.1

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

📌 Lời giải

Chọn D

Ta có $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $2 - x^2 \geq -x, \forall x \in [-1; 2]$

Nên $S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$

☞ Ví dụ 3.3.2

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1 - x)$ và $y = x^3 - x$ có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{9}{4}$

📌 Lời giải

Chọn A

$x(1 - x) = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

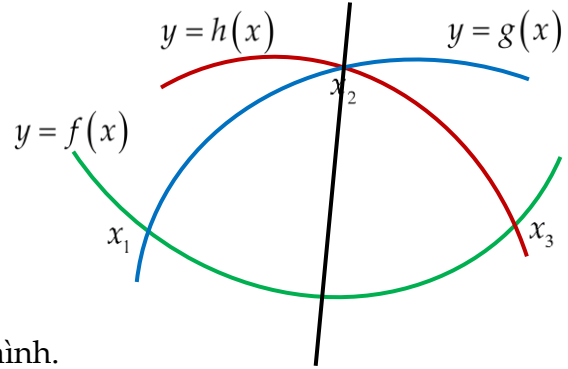
Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1 - x)$ và $y = x^3 - x$.

Khi đó $S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$

$$= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ (đvdt)}.$$

➤ Dạng 3.4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$



Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ có nghiệm x_1 .

Giải $g(x) = h(x)$ có nghiệm x_2 .

Giải $g(x) = h(x)$ có nghiệm x_3 .

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ được biểu diễn như hình.

Bước 2: Khi đó
$$S = \int_{x_1}^{x_2} |g(x) - f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |h(x) - f(x)| dx$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (h(x) - f(x)) dx \right|$$

➤ Ví dụ 3.4.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$; $y = x + 1$; $y = -x + 4$ bằng

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

📖 Lời giải

Chọn A

$$-x^2 + 3x = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$-x^2 + 3x = -x + 4 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$x + 1 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$S = \int_1^{\frac{3}{2}} |-x^2 + 3x - x - 1| dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 |-x^2 + 3x + x - 4| dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

➤ Ví dụ 3.4.1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$; $y = \frac{x^2}{4}$; $y = \frac{54}{x}$ bằng

A. $\frac{63}{2} - 54\ln 2$ B. $54\ln 2$ C. $\frac{63}{4}$ D. $-\frac{63}{2} + 54\ln 2$

📖 Lời giải

Chọn B

$$2x^2 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2x^2 = \frac{54}{x} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{54}{x} \Leftrightarrow x = 6.$$

$$S = \int_0^3 \left| 2x^2 - \frac{x^2}{4} \right| dx + \int_3^6 \left| \frac{54}{x} - \frac{x^2}{4} \right| dx = \int_0^3 \left(2x^2 - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_3^6 \left(\frac{54}{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 54\ln 2.$$

Dạng 3.5. Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị

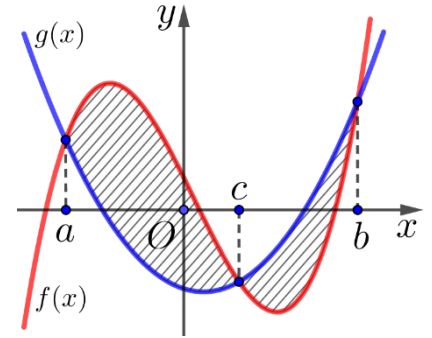
• **Trường hợp 1:** $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Bước 1: Quan sát đồ thị thấy $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Xét hiệu $f(x) - g(x)$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a; c]: f(x) - g(x) > 0 \\ [c; b]: f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
 $= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$



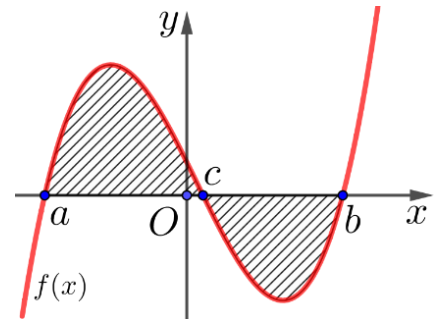
• **Trường hợp 2:** $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow$ diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_a^b |f(x) - 0| dx$.

Bước 1: Quan sát đồ thị thấy $f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Xét hiệu $f(x) - 0$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

Giả sử trên $\begin{cases} [a; c]: f(x) - 0 > 0 \\ [c; b]: f(x) - 0 < 0 \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $S = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^c (f(x) - 0) dx + \int_c^b (0 - f(x)) dx$.



Ví dụ 3.5.1

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Đặt

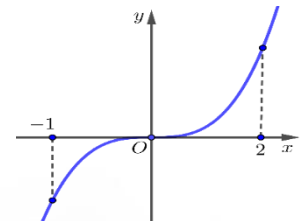
$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$, Khi đó $S =$

A. $b - a$

B. $b + a$

C. $-b + a$

D. $-b - a$



Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx$.

Ta thấy $f(x) \geq 0 \forall x \in [0; 2]; f(x) \leq 0 \forall x \in [-1; 0] \rightarrow S = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b$

Ví dụ 3.5.2

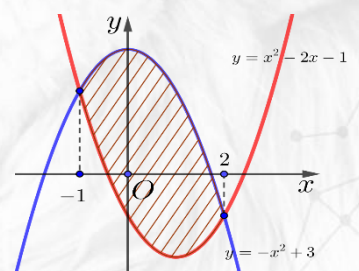
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$



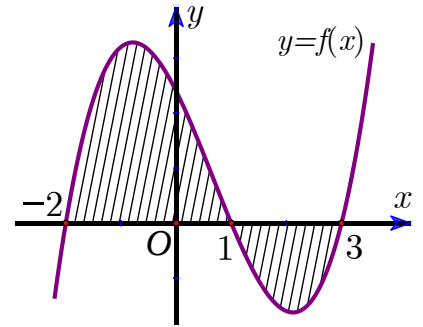
Lời giải

Chọn D

$$S = \int_{-1}^2 \left| (-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right| dx = \int_{-1}^2 \left| -2x^2 + 2x + 4 \right| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Ví dụ 3.5.3

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Lời giải

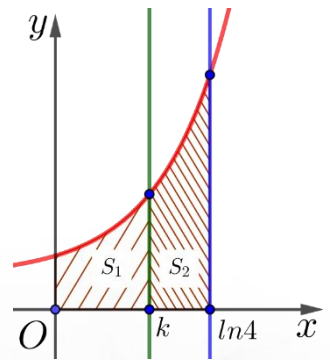
Chọn B

Ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

Ví dụ 3.5.4

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B. $k = \ln 2$

C. $k = \ln \frac{8}{3}$

D. $k = \ln 3$

Lời giải

Chọn D

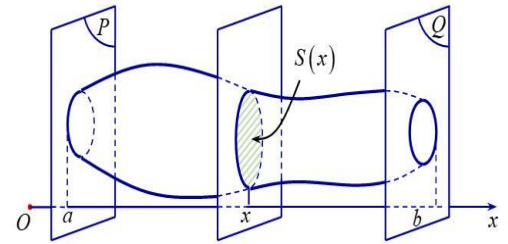
Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$

Ta có $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3.$

➤ Dạng 3.6. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$)

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$



Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.

➤ Ví dụ 3.6.1

Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x .

A. $\frac{2178}{5}$

B. 26π

C. 26

D. $\frac{2178\pi}{5}$

📌 Lời giải

Chọn C

$$V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x^2 dx = 26.$$

➤ Ví dụ 3.6.2

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V=3$

B. $V=3\pi$

C. $V=2\pi\sqrt{3}$

D. $V=2\sqrt{3}$

📌 Lời giải

Chọn D

$$V = \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi \left(2\sqrt{\sin x}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} dx = 2\sqrt{3}.$$

➤ Ví dụ 3.6.3

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=32+2\sqrt{15}$.

B. $V=\frac{124\pi}{3}$.

C. $V=\frac{124}{3}$.

D. $V=(32+\sqrt{5})\pi$.

📌 Lời giải

Chọn C

Ta có $V = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2} dx$; đặt $t = \sqrt{3x^2-2} \Rightarrow t^2 = 3x^2-2 \Rightarrow 2t dt = 6x dx \Rightarrow t dt = 3x dx$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=1$, $x=3 \Rightarrow t=5$.

Khi đó $V = \int_1^5 t \cdot t \cdot dt = \left(\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^5 = \frac{124}{3}$.

Dạng 3.7. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, Ox , $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Ví dụ 3.7.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$

B. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3|^2 dx$

C. $V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$

Lời giải

Chọn C

Thể tích cần tìm là: $V = \pi \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)^2 dx = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx$.

Ví dụ 3.7.2

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

B. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$

C. $V = \frac{\pi^2}{4}$

D. $V = \frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Ví dụ 3.7.3

Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{32}{5}$

B. $V = \frac{32\pi}{5}$

C. $V = \frac{32}{5\pi}$

D. $V = 32\pi$

Lời giải

Chọn B

$$V = \pi \int_0^2 (x-2)^4 dx = \pi \cdot \frac{(x-2)^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Dạng 3.8. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, $g(x)$, $x=a$, $x=b$ quay quanh Ox

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^c |f^2(x) - g^2(x)| dx + \pi \int_c^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

Ví dụ 3.8.1

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh Ox là

A. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$

D. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vì trên $(0; 2)$ ta có $2x > x^2$

Nên công thức tính thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Ví dụ 3.8.2

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ và $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành nhận giá trị nào sau đây:

A. $V = \frac{40\pi}{3}$

B. $V = \frac{38\pi}{3}$

C. $V = \frac{41\pi}{3}$

D. $V = \frac{41\pi}{2}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V_{Ox} = \pi \int_0^4 |x^2 - x| dx$.

Xét phương trình $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Do đó $V_{Ox} = \pi \int_0^1 |x^2 - x| dx + \pi \int_1^4 |x^2 - x| dx = \pi \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \pi \int_1^4 (x^2 - x) dx$.

$$= \pi \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{41\pi}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Dạng 3.9. Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $f(y)$, $g(y)$, $y=a$, $y=b$ quay quanh Oy

Bước 1: Giải phương trình $f(y) = g(y) \Leftrightarrow y = c; c \in [a; b]$.

Bước 2: Khi đó $V = \pi \int_a^c |f^2(y) - g^2(y)| dy + \pi \int_c^b |f^2(y) - g^2(y)| dy$.

Ví dụ 3.9.1

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy = 4$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

- A. $V = 12\pi$ B. $V = 16\pi$ C. $V = 10\pi$ D. $V = 8\pi$

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích V của khối tròn xoay là $V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{16}{y^2} dy = \pi \left(-\frac{16}{y}\right) \Big|_1^4 = 12\pi$.

Ví dụ 3.9.2

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $x = y^2 + 3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Oy . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \int_0^2 (y^2 + 3) dy$ B. $V = \int_0^2 (y^2) dy$ C. $V = \int_0^2 (3)^2 dy$ D. $V = \pi \int_0^2 (y^2 + 3)^2 dy$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $y^2 + 3 = 0$ vô nghiệm do $y^2 + 3 > 0 \forall y \in \mathbb{R}$

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^2 (y^2 + 3)^2 dy$.

Ví dụ 3.9.3

Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $x = e^y$, trục tung và các đường thẳng $y = 0$, $y = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục tung có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$ B. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$ C. $V = \frac{\pi e^2}{3}$ D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $e^y = 0$ vô nghiệm do $e^y > 0 \forall y \in \mathbb{R}$

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Dạng 3.10. Tính giá trị hàm qua diện tích hình phẳng

Áp dụng định nghĩa tích phân: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b); F(a)$.

Bài toán:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; c]$.

So sánh $F(a); F(c); F(x_i)$ $x_i \in [a; c]$.

Bước 1: So sánh $F(a); F(b)$.

$$\text{Trên } [a; b]: f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{Mà } \int_a^b f(x) dx > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Leftrightarrow F(b) > F(a).$$

Bước 2: Tương tự so sánh $F(b); F(c)$.

Bước 3: Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = b; x = c \end{cases}$.

$$\int_a^b |f(x)| dx > \int_b^c |f(x)| dx \Rightarrow F(b) - F(a) > -F(c) + F(b) \Leftrightarrow -F(a) > -F(c) \rightarrow F(a) < F(c).$$

Ví dụ 3.10.1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2; 1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi số nào sau đây là số dương?

- A. $F(2) - F(-2)$ B. $F(-2) - F(1)$
C. $F(2) - F(1)$ D. $F(2) - F(0)$

Lời giải

Chọn A

$$S_{\Delta CIB} = \int_{-2}^1 f(x) dx = F(1) - F(-2) > 0 \text{ nên loại B}$$

$$S_{\Delta IDA} = \int_1^2 -f(x) dx = F(1) - F(2) > 0 \text{ nên loại C}$$

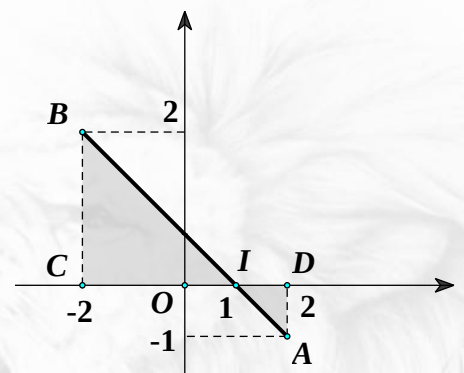
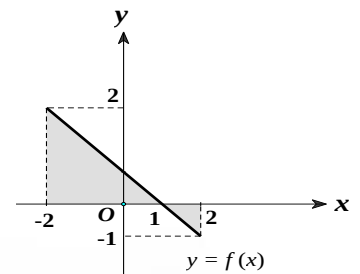
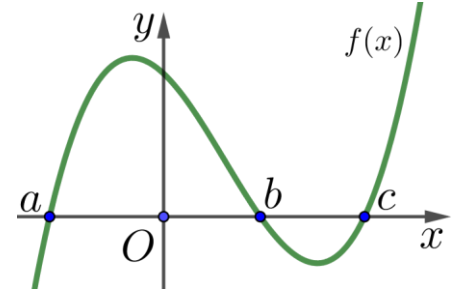
$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 -f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow F(1) - F(0) = F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(0) = F(2) \text{ nên loại D}$$

$$\text{Mặt khác ta có } S_{\Delta CIB} > S_{\Delta DIA} \Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx > \int_1^2 -f(x) dx$$

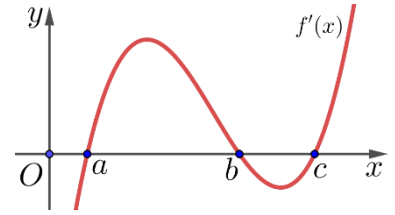
$$\Leftrightarrow F(1) - F(-2) > F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(-2) < F(2) \Leftrightarrow F(2) - F(-2) > 0$$

Vậy $F(2) - F(-2)$ là số dương.



Ví dụ 3.10.2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(a) < f(c)$ B. $f(b) < f(c)$
C. $f(a) > f(b)$ D. $f(a) > f(c)$

Lời giải

Chọn A

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow \blacktriangle f(a)$		$\nearrow \blacktriangle f(b)$		$\searrow \blacktriangle f(c)$		$\nearrow \blacktriangle +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(b) > f(c)$, $f(a) < f(b)$ nên loại phương án B, C

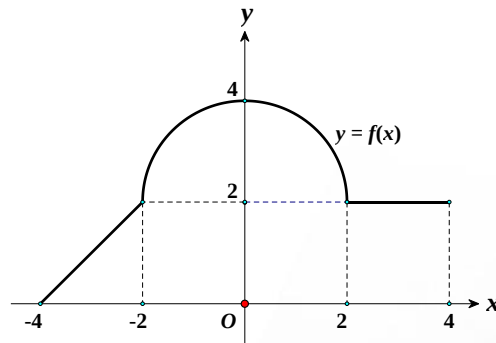
$$\text{Mặt khác } \int_a^b |f'(x)| dx > \int_b^c |f'(x)| dx$$

$$\Rightarrow f(x) \Big|_a^b > -f(x) \Big|_b^c \Leftrightarrow f(b) - f(a) > -f(c) + f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

Vậy $f(a) < f(c)$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 3.10.3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$.



- A. $S = 6 + 2\pi$ B. $S = 14 + 2\pi$ C. $S = 14$ D. $S = 14 + 4\pi$

Lời giải

Chọn B

$$S = F(4) - F(-4) = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2; \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 8 + 2\pi; \int_2^4 f(x) dx = 2 \cdot 2 = 4$$

Vậy $S = 14 + 2\pi$.

$$\frac{\pi}{4} + 3 \sec \frac{\pi}{4} +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 7$$

$$\frac{\sqrt{x^3 + 3}}{x} \quad d/dx =$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

