SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
THAM DỰ KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA
LỚP 12 THPT NĂM 2019 (Vòng 1)

Môn thi: Toán - THPT
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: **24/8/2018**
(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 *(4,0 điểm)*. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Câu 2 *(4,0 điểm)*. Cho dãy số (x_n), $n\in\mathbb{N}^*$ được xác định bởi

$$x_1=2; x_{n+1}=\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2-1}$

Câu 3 *(5,0 điểm)*. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AD}$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của OM,ON. Gọi K là điểm đối xứng với O qua M.

a. Chứng minh rằng tứ giác $BJDK$ nội tiếp đường tròn.

b. Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AB,AC. Chứng minh rằng $AK\perp PQ$.

Câu 4 *(4,0 điểm)*. Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên, bậc 2 và hệ số bậc 2 bằng 1 thỏa mãn tồn tại đa thức $Q(x)$ có hệ số nguyên sao cho $P(x).Q(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số đều là ±1.

a. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm thực x_0 thì $|x_0|<2$.

b. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$.

Câu 5 *(3,0 điểm)*. Trên mặt phẳng cho $2n^2$ $(n\geq 2)$ đường thẳng sao cho không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng ra thành các miền rời nhau. Trong các miền đó, gọi F là tập tất cả các miền đa giác có diện tích hữu hạn. Chứng minh rằng có thể tô n đường thẳng trong số $2n^2$ đường thẳng đã cho bằng màu xanh sao cho không có miền nào trong tập F có tất cả các cạnh màu xanh.

----------- Hết -----------

Họ và tên thí sinh: …………………………………………………… Số báo danh: …………..........

Chữ ký CBCT số 1:……………….............Chữ ký CBCT số 2…............................…………..........

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN

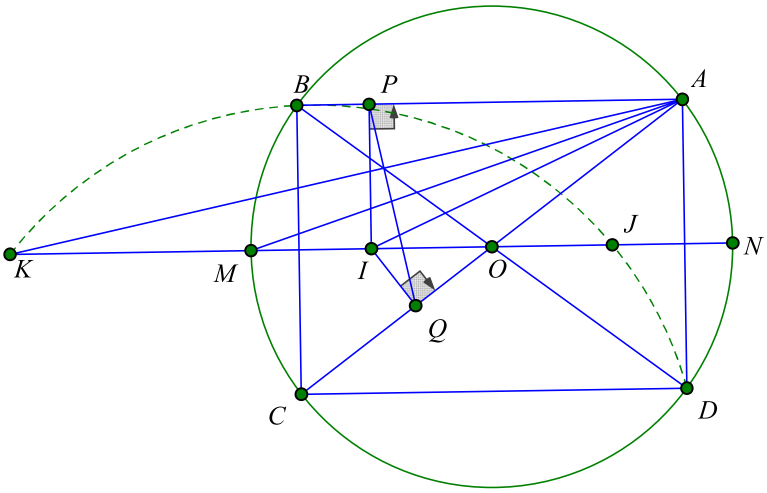
KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
THAM DỰ KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA
LỚP 12 THPT NĂM 2019 (Vòng 1)

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 12

(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

Chú ý: Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

Câu	Nội dung	Điểm
1 **(4đ)**	Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ **Lời giải**. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b} \geq 3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$	1
	Theo AM – GM có $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq 3$ (1)	1
	$\left(\frac{a}{b}\right)^2+1 \geq 2\frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 2\frac{a}{b}-1$ Tương tự $\left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq 2\frac{b}{c}-1$ và $\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 2\frac{c}{a}-1$	1
	$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right) \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ (2) Cộng từng vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.	1
2 **(4đ)**	Cho dãy số (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi $x_1=2; x_{n+1}=\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2-1}$ **Lời giải** Xét $x_{n+1}-1=\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n}-1=\frac{x_n^2-1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}-1}=\frac{x_n}{x_n^2-1}=\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{x_n^2-1}$ $\Rightarrow \frac{1}{x_n^2-1}=\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{x_{n+1}-1}$	1
	$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2-1}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i-1}-\frac{1}{x_{i+1}-1}\right)=\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_{n+1}-1}=1-\frac{1}{x_{n+1}-1}$	1
	Quy nạp được $x_n>1, \forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-1}{x_n}>0, \forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1}>x_n, \forall n \geq 1$ Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và giả sử $\lim x_n=a \Rightarrow a \geq 2$.	1

	Từ $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+x_n-1}{x_n}$ chuyển qua giới hạn ta được $a=\dfrac{a^2+a-1}{a}\Leftrightarrow a=1$ vô lí Do đó dãy số (x_n) không bị chặn trên suy ra $\lim x_n=+\infty$, kết hợp với (1) ta được $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2-1}=1$	1
3 **(5đ)**	Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AD}$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của OM,ON. Gọi K là điểm đối xứng với O qua M.  a. Chứng minh rằng tứ giác $BJDK$ nội tiếp đường tròn. Dễ thấy rằng $OJ=\dfrac{1}{2}ON;OK=2OM$. Do đó ta được $OB.OD=OJ.OK$.	1
	Theo tính chất phương tích thì ta có $KBJD$ nội tiếp.	1
	b. Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AB,AC. Chứng minh rằng $AK\perp PQ$. Ta có $OI.OK=\dfrac{1}{2}OA.2OA=OA^2$ nên OA là tiếp tuyến của (AIK).	1
	Do đó ta có $\widehat{OAI}=\widehat{AKO}$, do đó $\widehat{KAM}=\widehat{AMO}-\widehat{AKO}=\widehat{MAO}-\widehat{OAI}=\widehat{MAI}$. Do đó, AI,AK liên hợp đẳng giác với góc $\widehat{BAC}$.	1
	Tứ giác $APIQ$ nội tiếp và nhận AI là đường kính. Do AK,AI liên hợp góc nên AK là đường cao tam giác APQ tức là $AK\perp PQ$	1
4 **(4đ)**	Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên, bậc 2 và hệ số bậc 2 bằng 1 thỏa mãn tồn tại đa thức $Q(x)$ có hệ số nguyên sao cho $P(x).Q(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số đều là ±1. a. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm thực x_0 thì $\|x_0\|<2$. Đồng nhất hệ số tự do trong đa thức $P(x).Q(x)$ suy ra $P(x)=x^2+ax\pm1$ với $a\in\mathbb{Z}$. Với $a=0$ hay $a=\pm1$, nghiệm nếu có thỏa mãn. Nếu $\|a\|\ge2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm x_1,x_2, cũng là nghiệm của $H(x)=P(x).Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\ a_i=\pm1$ Hay $H(x_i)=x_i^n+a_{n-1}x_i^{n-1}+\cdots+a_0=0, i\in\{1;2\}$	1

	Vì $x_i \neq 0$, suy ra $1=\left\|\frac{a_{n-1}}{x_i}+\frac{a_{n-2}}{x_i^2}+\cdots+\frac{a_0}{x_i^n}\right\| \le \left\|\frac{a_{n-1}}{x_i}\right\|+\left\|\frac{a_{n-2}}{x_i^2}\right\|+\cdots+\left\|\frac{a_0}{x_i^n}\right\| \le \frac{1}{\|x_i\|}+\frac{1}{\|x_i\|^2}+\cdots+\frac{1}{\|x_i\|^n}$ $=\frac{\frac{1}{\|x_i\|}\left(1-\frac{1}{\|x_i\|^n}\right)}{1-\frac{1}{\|x_i\|}}=\frac{1-\frac{1}{\|x_i\|^n}}{\|x_i\|-1}<\frac{1}{\|x_i\|-1}$ Suy ra $\|x_i\|<2$ với $i\in\{1;2\}$ (*).	1
	b. $P(x)=x^2+ax\pm1$ với $a\in\mathbb{Z}$. Với $a=0$ hay $a=\pm1$, ta có thể chọn $Q(x)=1$. Vậy $a=0, a=\pm1$ thỏa mãn. Nếu $\|a\|\ge 2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2, với $\|x_i\|<2$ với $i\in\{1;2\}$ Khi đó $\|a\|=\|x_1+x_2\|\le\|x_1\|+\|x_2\|<4$	1
	Với $a=\pm2$ suy ra $P(x)=x^2\pm2x\pm1$ $P(x)=x^2\pm2x-1$ có nghiệm $x_{1,2}=\pm1\pm\sqrt{2}$ không thỏa mãn (*) Với $P(x)=x^2\pm2x+1=(x\pm1)^2$ ta chọn $Q(x)=x\mp1$ tương ứng thỏa mãn. Với $a=\pm3$ thử nghiệm, không thỏa mãn (*). Vậy các đa thức $P(x)$ thỏa mãn là $P(x)=x^2+1; P(x)=x^2\pm x\pm1, P(x)=x^2\pm2x+1$	1
5 **(3đ)**	Gọi L là tập các đường thẳng đã cho. Chọn một tập lớn nhất $B\subseteq L$ sao cho khi tô các đường trong B bằng màu xanh thì không có miền nào trong F có tất cả các cạnh màu xanh. Đặt $\|B\|=k$, ta sẽ chỉ ra $k\ge n$ là bài toán được giải quyết. Ta làm như sau: Tô các đường trong tập $L\setminus B$ bằng màu đỏ. Một điểm được gọi là xanh nếu nó là giao của hai đường thẳng màu xanh. Thế thì có C_k^2 điểm màu xanh.	1
	Ta xét một đường màu đỏ l bất kì. Bởi tính lớn nhất của B nên phải có ít nhất một miền $A\in F$ có duy nhất một cạnh màu đỏ và nằm trên l (vì nếu ngược lại miền nào cũng có hai cạnh đỏ và có một cạnh nằm trên l thì ta tô l màu xanh vẫn thỏa mãn, điều này vi phạm tính lớn nhất của B). Vì A có ít nhất ba cạnh, nên ít nhất hai cạnh nào đó màu xanh cắt nhau, nên A có ít nhất một đỉnh xanh, gọi đây là đỉnh xanh liên kết với đường đỏ l.	1
	Vì mỗi điểm xanh thuộc bốn miền (giao của hai đường xanh), nó sẽ liên kết với nhiều nhất 4 đường đỏ. Vì thế số đường thẳng đỏ nhiều nhất chỉ có thể là $4C_k^2$. Mặt khác , số đường thẳng màu đỏ là $2n^2-k$, vì thế ta được $2n^2-k\le 2k(k-1)$, suy ra $2n^2\le 2k^2-k\le 2k^2 \Rightarrow k\ge n$.	1

----------- Hết -----------