

Chuyên đề: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Bài 3: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI-BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

PHẦN 1: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là **nghiệm của tam thức bậc hai**

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau

$f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$	
$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$

- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;
- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÉT DẤU CỦA BIỂU THỨC CHỨA TAM THỨC BẬC HAI.

1. Phương pháp giải.

Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

* Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

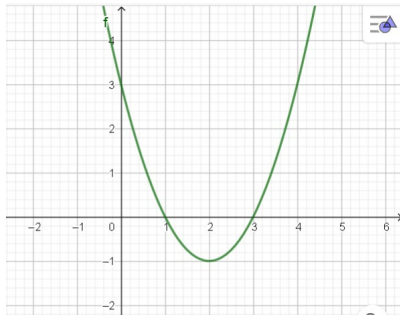
* Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra dấu của nó.

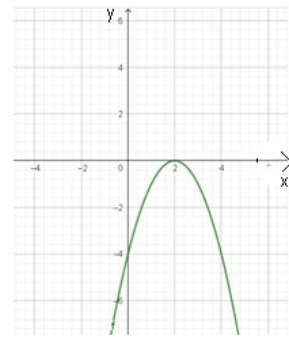
2. Bài tập tự luận

Ví dụ 1: Cho đồ thị của tam thức bậc hai $f(x)$. Hãy tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của $f(x)$

a)



b)

**Lời giải:**

a) Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x=1$; $x=3$ nên $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x=1$; $x=3$.

Từ đồ thị ta suy ra:

$$f(x) > 0 \text{ khi } x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ khi } x \in (1; 3)$$

Do đó ta có bảng xét dấu của $f(x)$

Do đó ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

b) Đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=2$ nên $f(x)$ có một nghiệm $x=2$

Từ đồ thị ta suy ra:

$$f(x) < 0, \forall x \neq 2.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Ví dụ 2: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2 - 4x + 1$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $-x^2 + 3x - 2$

d) $-x^2 + x - 1$

Lời giải:

a) Dễ thấy $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ có $\Delta' = 1 > 0, a = 3 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 1$.

Do đó ta có bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$ có $\Delta = 0$ và $a = 1 > 0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x = -1$ và $g(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$.

c) Dễ thấy $h(x) = -x^2 + 3x - 2$ có $\Delta = 1 > 0, a = -1 < 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$h(x)$	-	0	+	0	-

Suy ra $h(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ và $h(x) > 0$ với mọi $x \in (1; 2)$.

d) $k(x) = -x^2 + x - 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a = -1 < 0$ nên $k(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Xét dấu tam thức:

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$.

Lời giải:

a) $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = 3$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

b) Tam thức có $\Delta' = -9 < 0$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 4: Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

Lời giải:

Ta có $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}; x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0
$f(x)$	+	-	0	+	0	-

Ví dụ 5: Tìm x để biểu thức: $f(x) = (3x - x^2)(x^2 - 6x + 9)$ nhận giá trị dương

Lời giải:

Ta có $3x^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}; x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Lập bảng xét dấu (Hoặc sử dụng phương pháp khoảng) ta có $x \in (0; 3)$.

Ví dụ 6: Xét dấu biểu thức: $P(x) = x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$$

$$\text{Ta có } -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}, -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$				
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$-x^2+3x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Suy ra $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$,

$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$.

Ví dụ 7: Tùy theo giá trị của tham số m , hãy xét dấu của các biểu thức $f(x) = x^2 + 2mx + 3m - 2$

Lời giải:

Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$ và $\Delta' = m^2 - 3m + 2$.

* Nếu $1 < m < 2 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

* Nếu $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -m$

* Nếu $\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm

$x_1 = -m - \sqrt{m^2 - 3m + 2}$ và $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - 3m + 2}$. Khi đó:

+) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

+) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$.

3. Bài tập trắc nghiệm:

Ví dụ 1: Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$

A. $3x^2 - 2x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

B. $3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

C. $3x^2 - 2x + 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

D. $3x^2 - 2x + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $-x^2 + 4x + 5$

A. $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$

B. $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$

C. $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

D. $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1)$

c) $-4x^2 + 12x - 9$

A. $-4x^2 + 12x - 9 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

B. $-4x^2 + 12x - 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

C. $-4x^2 + 12x - 9 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

D. $-4x^2 + 12x - 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

d) $3x^2 - 2x - 8$

A. $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$

B. $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$

C. $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$

D. $3x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$

e) $25x^2 + 10x + 1$

A. $25x^2 + 10x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$

B. $25x^2 + 10x + 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

C. $25x^2 + 10x + 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$

D. $25x^2 + 10x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) $-2x^2 + 6x - 5$

A. $-2x^2 + 6x - 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

B. $-2x^2 + 6x - 5 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C. $-2x^2 + 6x - 5 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D. $-2x^2 + 6x - 5 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải:

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0$, $a = 3 > 0$ suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	$-$

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

c) Ta có $\Delta' = 0$, $a < 0$ suy ra $-4x^2 + 12x - 9 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d) Ta có $3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$3x^2 - 2x - 8$	$+$	0	$-$	$+$

Suy ra $3x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ và $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$

e) Ta có $\Delta' = 0, a > 0$ suy ra $25x^2 + 10x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) Ta có $\Delta' = -1 < 0, a < 0$ suy ra $-2x^2 + 6x - 5 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét:

Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$. Xét nghiệm của tam thức, nếu:

* Vô nghiệm khi đó tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với a với mọi x

* Nghiệm kép khi đó tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$

* Có hai nghiệm $f(x)$ cùng dấu với a khi và chỉ khi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (ngoài hai nghiệm) và $f(x)$ trái dấu với a khi và chỉ khi $x \in (x_1; x_2)$ (trong hai nghiệm) (ta có thể nhớ câu là trong trái ngoài cùng)

Ví dụ 2: Xét dấu của các biểu thức sau

a) $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$

A. $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

B. $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

C. $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

D. $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$

A. $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (2; 4)$,

B. $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (2; 4)$,

C. $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.

D. $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

c) $x^3 - 5x + 2$

A. $x^3 - 5x + 2$ âm khi và chỉ khi $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$

B. $x^3 - 5x + 2$ dương khi và chỉ khi $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$

C. $x^3 - 5x + 2$ âm khi và chỉ khi $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$

D. $x^3 - 5x + 2$ dương khi và chỉ khi $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$

d) $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$

A. $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2; -1) \cup (4; +\infty)$

B. $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (4; +\infty)$

C. $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 4)$

D. $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$

Lời giải:

a) Ta có $-x^2 + x - 1 = 0$ vô nghiệm, $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{3}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-x^2 + x - 1$	-	0	-	-
$6x^2 - 5x + 1$	+		0	+
$(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$	-	0	+	-

Suy ra $(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

$(-x^2 + x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

b) Ta có $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2 + 3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Suy ra $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (2; 4)$, $\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

c) Ta có $x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)$

Ta có $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	-	0	+

$x^2 + 2x - 1$	+	0	-		+	0	+
$x^3 - 5x + 2$	-	0	+	0	-	0	+

Suy ra $x^3 - 5x + 2$ dương khi và chỉ khi $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$, $x^3 - 5x + 2$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; 2)$.

d) Ta có $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$

Ta có $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}, -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$				
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$-x^2+3x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Suy ra $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$, $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$.

4-Bài tập trắc nghiệm luyện tập.

Câu 1: Xét dấu các tam thức sau

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

A. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1);$

B. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).$

C. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).$

D. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}).$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

A. $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

B. $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

C. $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

D. $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = -2x^2 + x - 1.$

A. $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

B. $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

C. $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

D. $g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Lời giải:

a) Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$, có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1$

* $f(x) > 0$ (trái dấu với a) $\Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}; 1)$

* $f(x) < 0$ (cùng dấu với a) $\Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).$

b) Tam thức $g(x)$ có $a = \frac{1}{4} > 0$, có $\Delta = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ (cùng dấu với a) $\forall x \neq \frac{1}{2}$ và $g(\frac{1}{2}) = 0.$

c) Tam thức $g(x)$ có $a = -2 > 0$, có $\Delta = -7 < 0 \Rightarrow g(x) < 0$ (cùng dấu với a) $\forall x \in R$.

Câu 2: Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(2 - 5x + 2x^2)$

A.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$			
x^2-5x+4	+		+	0	-		-	0	+
$2x^2-5x+2$	+	0	-		+	0	+		+
f(x)	+	0	+	0	+	0	-	0	+

B.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$			
x^2-5x+4	+		+	0	-		+	0	+
$2x^2-5x+2$	+	0	+		-	0	+		+
f(x)	+	0	-	0	+	0	+	0	+

C.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$			
x^2-5x+4	+		+	0	+		-	0	+
$2x^2-5x+2$	+	0	-		+	0	+		+
f(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

D.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$			
x^2-5x+4	+		+	0	-		-	0	+
$2x^2-5x+2$	+	0	-		-	0	+		+
f(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

b) $f(x) = x^2 - 3x - 2 - \frac{8}{x^2 - 3x}$.

A.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$					
x^2-3x	+		+	0	+		-		-	0	+		+
x^2-3x-4	+	0	-		+		-		-		-	0	+
x^2-3x+2	+		+		+	0	-	0	+		+		+
f(x)	+		-	0	+		-		+	0	-		+

B.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$					
x^2-3x	+		+	0	-		+		-	0	+		+
x^2-3x-4	+	0	-		-		+		-		-	0	+
x^2-3x+2	+		+		+	0	-	0	+		+		+
f(x)	+		-	0	+		-		+	0	-		+

C.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$					
x^2-3x	+		+	0	-		-		+	0	+		+
x^2-3x-4	+	0	-		-		-		+		-	0	+
x^2-3x+2	+		+		+	0	-	0	+		+		+
f(x)	+		-	0	+		-		+	0	-		+

D.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$					
x^2-3x	+		+	0	-		-		-	0	+		+
x^2-3x-4	+	0	-		-		-		-	0	+		
x^2-3x+2	+		+		+	0	-	0	+		+		+
f(x)	+		-	0	+		-		+	0	-		+

Lời giải:

a) Ta có: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 4$

$$2 - 5x + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = \frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$			
x^2-5x+4	+		+	0	-		-	0	+
$2x^2-5x+2$	+	0	-		-	0	+		+
f(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

b) Ta có: $f(x) = \frac{(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8}{x^2 - 3x} = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4)}{x^2 - 3x}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$					
x^2-3x	+		+	0	-		-		-	0	+		+
x^2-3x-4	+	0	-		-		-		-	0	+		
x^2-3x+2	+		+		+	0	-	0	+		+		+
f(x)	+		-	0	+		-		+	0	-		+

Câu 3: Xét dấu các biểu thức sau

a) $\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

A. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-6; -3) \cup (2; 0)$

B. $f(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty; -6) \cup (-3; 2) \cup (0; +\infty)$

C. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (-\infty; -6) \cup (-3; 2) \cup (0; +\infty)$

D. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-6; -3) \cup (2; 0)$

b) $x^4 - 4x + 1$.

A. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; +\infty \right)$

$$\text{B. } f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right)$$

$$\text{C. } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right)$$

$$\text{D. } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; +\infty \right)$$

$$\text{c) } \frac{3x+7}{x^2-x-2} + 5$$

$$\text{A. } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{3}{5}; 1 \right) \cup (2; +\infty)$$

$$\text{B. } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{3}{5}; 1 \right)$$

$$\text{C. } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{3}{5} \right) \cup (1; 2)$$

$$\text{D. } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{3}{5} \right) \cup (1; 2)$$

$$\text{d) } x^3 - 3x + 2$$

$$\text{A. } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty)$$

$$\text{B. } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$$

$$\text{C. } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$$

$$\text{D. } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } f(x) = \frac{2x - 2(x+9) - x(x+9)}{2x(x+9)} = \frac{-x^2 - 9x - 18}{2x(x+9)}$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6; -3) \cup (2; 0)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty; -6) \cup (-3; 2) \cup (0; +\infty)$$

$$\text{b) Ta có: } f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 1)^2 - [\sqrt{2}(x+1)]^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; +\infty \right)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right)$$

$$\text{c) } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{3}{5}; 1 \right) \cup (2; +\infty)$$

$$\text{Và } \frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{3}{5} \right) \cup (1; 2)$$

$$\text{d) } f(x) = (x-1)^2(x+2) \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$$

Câu 4: Tùy theo giá trị của tham số m $g(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + m-3$, Khẳng định nào sau đây đúng là sai?

A. $m = 1 \Rightarrow g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

B. $T = \left[0; \frac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

C. $m < 1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải:

Nếu $m = 1 \Rightarrow g(x) = -2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nếu $m \neq 1$, khi đó $g(x)$ là tam thức bậc hai có $a = m-1$ và $\Delta' = 2(m-1)$, do đó ta có các trường hợp sau:

* $T = \left[0; \frac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m-1 - \sqrt{2(m-1)}}{m-1} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{m-1 + \sqrt{2(m-1)}}{m-1}.$$

$$\Rightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty); \quad g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2).$$

* $m < 1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

➤ **DẠNG TOÁN 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN TAM THỨC BẬC HAI LUÔN MANG MỘT DẤU.**

Phương pháp: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

1. Bài tập tự luận:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $mx^2 - (3m+2)x + 1 = 0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $(m^2+5)x^2 - (\sqrt{3}m-2)x + 1 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m = 0$ phương trình trở thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ suy ra phương trình có nghiệm

Với $m \neq 0$, ta có $\Delta = (3m+2)^2 - 4m = 9m^2 + 8m + 4$

Vì tam thức $9m^2 + 8m + 4$ có $a_m = 9 > 0$, $\Delta'_m = -20 < 0$ nên $9m^2 + 8m + 4 > 0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

b) Ta có $\Delta = (\sqrt{3}m-2)^2 - 4(m^2+5) = -m^2 - 4\sqrt{3}m - 16$

Vì tam thức $-m^2 - 4\sqrt{3}m - 8$ có $a_m = -1 < 0$, $\Delta'_m = -4 < 0$ nên $-m^2 - 4\sqrt{3}m - 8 < 0$ với mọi m .
Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m .

Ví dụ 2:

- a) Tìm m để $f(x) = -x^2 - 2x + m$ luôn âm với mọi x
b) Tìm m để $f(x) = -3x^2 - x + 4m \leq 0$ với mọi x
c) Tìm m để $f(x) = x^2 - 2x - m + 3$ luôn dương với mọi x
d) Tìm m để $g(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$ không âm với mọi x .

Lời giải

a) $f(x) = -x^2 - 2x + m$ ($a = -1 < 0$)

$$\Delta' = (-1)^2 - (-1).m = 1 + m$$

Để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + m < 0 \Leftrightarrow m < -1$

b) $f(x) = -3x^2 - x + 4m$ ($a = -3 < 0$)

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-3).4m = 1 + 48m$$

Để $f(x) = -3x^2 - x + 4m \leq 0$ với mọi x thì $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + 48m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{48}$

c) $f(x) = x^2 - 2x - m + 3$ ($a = 1 > 0$)

$$\Delta' = (-1)^2 - 1.(-m+3) = m - 2.$$

Để $f(x) = x^2 - 2x - m + 3$ luôn dương với mọi x thì $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$

d) Tìm m để $g(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$ không âm với mọi x .

Xét $m = 0$ thì $g(x) = 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

Xét $m \neq 0$, khi đó $g(x)$ là tam thức bậc hai có

$$\Delta' = (m-1)^2 - m.(m-3) = m + 1.$$

Để $g(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$ không âm với mọi x , tức là $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa yêu cầu bài toán

Ví dụ 3: Cho $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m + 3$ (m tham số)

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai sau dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$

Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(2m+3) = m^2 - 6m - 11$

*) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) \leq 0$ khi $x \in [x_1; x_2]$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Khi đó không thỏa mãn $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

*) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = 0$ khi $x = -\frac{b}{2a}$, khi đó không thỏa mãn $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

*) Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} < m < 3 + 2\sqrt{5}$ thì $1.f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn đề bài)

Vậy $3 - 2\sqrt{5} < m < 3 + 2\sqrt{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m .

a) $y = \frac{mx}{(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2}$

b) $y = \sqrt{\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2}}$

Lời giải:

a) ĐKXD: $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = (2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2$

Ta có $a = 2m^2 + 1 > 0$, $\Delta' = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = (2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

b) ĐKXD: $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1$ và

Ta có $a_f = 2 > 0$, $\Delta_f' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \leq 0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Xét tam thức bậc hai $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2$

Với $m = 0$ ta có $g(x) = 2 > 0$, xét với $m \neq 0$ ta có

$a_g = m^2 > 0$, $\Delta_g' = m^2 - m^2(m^2 + 2) = -m^2(m^2 + 1) < 0$

Suy ra với mọi m ta có $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

đúng với mọi giá trị của x

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $x^2 - 2(m+2)x - (m+3) = 0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $(m^2 + 1)x^2 + (\sqrt{3}m - 2)x + 2 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải:

a) Ta có $\Delta = (m+2)^2 + m + 3 = m^2 + 5m + 7$

Vì tam thức $m^2 + 5m + 7$ có $a_m = 1 > 0$, $\Delta'_m = -2 < 0$ nên $x = -4$, $x = 0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

b) Ta có $\Delta = (\sqrt{3}m - 2)^2 - 8(m^2 + 1) = -5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4$

Vì tam thức $-5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4$ có $a_m = -5 < 0$, $\Delta'_m < 0$ nên $-5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4 < 0$ với mọi m . Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m .

Ví dụ 6: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m .

a) $y = \sqrt{m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5}$

b) $y = \frac{2x + 3m}{\sqrt{x^2 + 2(1-m)x + 2m^2 + 3}}$

Lời giải:

Bài 4.90: a) ĐKXĐ: $m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5 \geq 0$ (*)

Với $m = 0$ thì điều kiện (*) đúng với mọi x

Với $m \neq 0$ xét tam thức bậc hai $f(x) = m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5$

Ta có $a = m^2 > 0$, $\Delta' = 4m^2 - 8(2m^2 + 1) = -12m^2 - 8 < 0$

Suy ra $f(x) = m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

b) ĐKXĐ: $x^2 + 2(1-m)x + 2m^2 + 3 > 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2(1-m)x + 2m^2 + 3$

Ta có $a = 1 > 0$, $\Delta' = (1-m)^2 - (2m^2 + 3) = -m^2 - 2m - 2 < 0$

(Vì tam thức bậc hai $f(m) = -m^2 - 2m - 2$ có $a_m = -1 < 0$, $\Delta'_m = -1 < 0$)

Suy ra với mọi m ta có $x^2 + 2(1-m)x + 2m^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

2-Bài tập trắc nghiệm

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = mx^2 - x - 1$

A. $-\frac{1}{4} < m < 0$

B. $-\frac{1}{4} < m$

C. $m < 0$

D. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases}$

b) $g(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$

A. $m < 4$

B. $m \leq 4$

C. $m > 4$

D. $m \leq 2$

Lời giải:

a) Với $m = 0$ thì $f(x) = -x - 1$ lấy cả giá trị dương (chẳng hạn $f(-2) = 1$) nên $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 0$ thì $f(x) = mx^2 - x - 1$ là tam thức bậc hai đó đó

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 4$ thì $g(x) = -1 < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 4$ thì $g(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$ là tam thức bậc hai đó đó

$$g(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-4 < 0 \\ \Delta' = (m-4)^2 - (m-4)(m-5) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \leq 4$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $h(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$

A. $m < -\frac{5}{8}$

B. $m \leq -\frac{5}{8}$

C. $m > -\frac{5}{8}$

D. $m < -\frac{3}{8}$

b) $k(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$

A. $m > \frac{1}{4}$

B. $m \geq \frac{1}{4}$

C. $m \leq \frac{1}{4}$

D. $m > \frac{3}{4}$

Lời giải:

a) Tam thức $-4x^2 + 5x - 2$ có $a = -4 < 0$, $\Delta = -7 < 0$ suy ra $-4x^2 + 5x - 2 < 0 \forall x$

Do đó $h(x)$ luôn dương khi và chỉ khi $h'(x) = -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2$ luôn âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Vậy với $m < -\frac{5}{8}$ thì biểu thức $h(x)$ luôn dương.

b) Biểu thức $k(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + m} - 1 > 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + m} > 1, \forall x \Leftrightarrow x^2 - x + m > 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Vậy với $m > \frac{1}{4}$ thì biểu thức $k(x)$ luôn dương.

3-Bài tập trắc nghiệm luyện tập:

Câu 1: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = -x^2 - 2x - m$

A. $-\frac{1}{4} < m$

B. $m < 0$

C. $-\frac{1}{4} < m < 0$

D. $\mathbb{R}$

b) $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$

A. $m < 1$

B. $m > -1$

C. $m \leq -1$

D. $m < -1$

Lời giải:

a) $f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 0$ thì $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$ là tam thức bậc hai đó đó

$g(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4m < 0 \\ \Delta' = 4(m-1)^2 - 4m(m-3) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$

Vậy với $m < -1$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Câu 2: Tìm m để

a) $3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0 \quad \forall x \in R$

A. $m < 1$

B. $m > -1$

C. $m \leq -1$

D. Vô nghiệm

b) Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ có nghĩa với mọi x .

A. $m < 1$

B. $m \geq 1$

C. $m \leq -1$

D. $m < -1$

c) $\left| \frac{x+m}{x^2+x+1} \right| \leq 1 \quad \forall x \in R$

A. $0 \leq m$

B. $m \leq 1$

C. $0 \leq m \leq 1$

D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Lời giải:

a) $3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) \leq 0 \quad 7m^2 - 7m + 7 \leq 0$ bpt vô nghiệm

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Hàm số có nghĩa với mọi x

$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

* $m = -1$ không thỏa mãn

* $m \neq -1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)(-2m-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$

c) Ta có $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left| \frac{x+m}{x^2+x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+m}{x^2+x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - m \geq 0 & (1) \\ x^2 + 2x + m + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$

(1) đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

(2) đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = -m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Vậy $0 \leq m \leq 1$ là những giá trị cần tìm

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM DẤU TAM THỨC BẬC HAI

Câu 1: Trong các biểu thức sau đây biểu thức nào là tam thức bậc hai đối với ẩn x?

A. $f(x)=ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. B. $f(x)=ax^2 + bx + c$.

C. $f(x)=ax^2 + bx + c \quad (b \neq 0)$. D. $f(x)=ax^2 + bx + c \quad (c \neq 0)$

Lời giải:

Đáp án A

Câu 2: Trong các biểu thức sau đây biểu thức nào là tam thức bậc hai đối với ẩn x?

A. $f(x) = 2018x^2 + 2017$.

B. $f(x) = 2018x + 2017$.

C. $f(x) = \frac{1}{2018x^2 + 2017x + 2017}$.

D. $f(x) = |2018x^2 + 2017|$.

Lời giải:

Đáp án A

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. $\Delta = b^2 - 4ac$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a ,với mọi $x \neq \frac{-b}{2a}$.

B. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a ,với mọi $x \neq \frac{-b}{2a}$.

C. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn âm ,với mọi $x \neq \frac{-b}{2a}$

.D. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn dương ,với mọi $x \neq \frac{-b}{2a}$.

Lời giải:

Đáp án A

Câu 4: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2 + bx + c; (a \neq 0)$. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, $x_1 ; x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. B. $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi

$x_1 < x < x_2$.C. $f(x) < 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

D. $f(x) > 0$ khi $x_1 < x < x_2$.

Lời giải:

Đáp án A

Câu 5: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. $\Delta = b^2 - 4ac$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta < 0$ và $a < 0$ thì $f(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R}$.B. Nếu $\Delta < 0$ và $a < 0$ thì $f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

D. Nếu $\Delta < 0$ thì

$f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. $\Delta = b^2 - 4ac$. Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải:

Đáp án C

Câu 7: Trong các tam thức sau, tam thức nào luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

B. $f(x) = -x^2 - 3x - 4$.

C. $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

D. $f(x) = -x^2 - 4x - 4$.

Lời giải:

Chọn B.

Với tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 3x - 4$ có $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta = -7 < 0 \end{cases}$

nên $f(x) = -x^2 - 3x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 8: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Lời giải:

Chọn C.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Dựa vào BXD có:

$$f(x) < 0 \text{ với } x < 2 \text{ hoặc } x > 3$$

$$f(x) > 0 \text{ với } 2 < x < 3$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$.

B. $m > 1$.

C. $m > 0$.

D. $m < 2$.

Lời giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{8}{11}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{11}{8}$.

D. $\frac{4}{11}$.

Lời giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow f(x) \leq \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$$

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.

D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Lời giải:

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 17: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $\Delta < 0$.

B. $\Delta = 0$.

C. $\Delta > 0$.

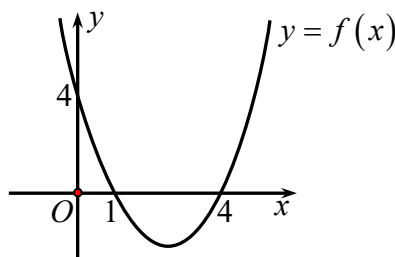
D. $\Delta \geq 0$.

Lời giải:

Chọn A.

* Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta < 0$.

Câu 18 : Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .



A. $a > 0$, $\Delta > 0$.
, $\Delta = 0$.

B. $a < 0$, $\Delta > 0$.

C. $a > 0$, $\Delta = 0$.

D. $a < 0$,

Lời giải:

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a > 0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$, $\forall x \in (0;1)$.

A. $m > 1$. B. $m < \frac{1}{2}$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có $f(x) > 0$, $\forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + 2m-1 > 0$, $\forall x \in (0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m(x-1) > x^2 - 2x + 1$, $\forall x \in (0;1)$ (*).

Vì $x \in (0;1) \Rightarrow x-1 < 0$ nên (*) $\Leftrightarrow -2m < \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = x-1 = g(x)$, $\forall x \in (0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m \leq g(0) = -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 20: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

A.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

B.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Lời giải:

Chọn C

Ta có $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Hệ số $a = -1 < 0$

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có đáp án C là đáp án cần tìm.

Câu 21: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

A.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

B.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

C.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

D.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Lời giải:

Chọn C

Tam thức có 1 nghiệm $x = 3$ và hệ số $a = -1 < 0$

Vậy đáp án cần tìm là C

Câu 22: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = x^2 + 12x + 36$?

A.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

B.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

C.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

D.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Lời giải:

Chọn C

Tam thức có một nghiệm $x = -6, a = 1 > 0$ đáp án cần tìm là C

Câu 23: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2\sqrt{3} \\ b > 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 24: Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.

C. $0 < m < 28$.

D. $m > 0$.

Lời giải:

Chọn B

để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 25: Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vậy $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Câu 26: Khi xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có

- A. $f(x) > 0$ khi $-7 < x < -1$ hoặc $1 < x < 3$.
 B. $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.
 C. $f(x) > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.
 D. $f(x) > 0$ khi $x > -1$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7; x = 3$ và $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 27: Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > \frac{3}{2}$.
 B. $m > \frac{3}{4}$.
 C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$.
 D. $1 < m < 3$.

Lời giải:

Chọn D

$f(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 12 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Câu 28: Cho $f(x) = -2x^2 + (m + 2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

- A. $-14 < m < 2$.
 B. $-14 \leq m \leq 2$.
 C. $-2 < m < 14$.
 D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m + 2)^2 + 8(m - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m - 28 < 0$

$\Leftrightarrow -14 < m < 2$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $f(x) = (m + 1)x^2 + mx + m$ luôn âm với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{4}{3}$.
 B. $m > -1$.
 C. $m < -\frac{4}{3}$.
 D. $m < -1$.

Lời giải:

Chọn C.

- Với $m = -1$ ta có: $x > -1$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m^2 - 4(m+1)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Câu 30 : Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3$ luôn không âm với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m \in [1; +\infty)$.

B. $m \in (2; +\infty)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D.

$m \in (-2; 7)$.

Lời giải:

Chọn A.

$$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

$$\begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -4(m-1) \leq 0 \end{cases}$$

PHẦN 2- BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng

$f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

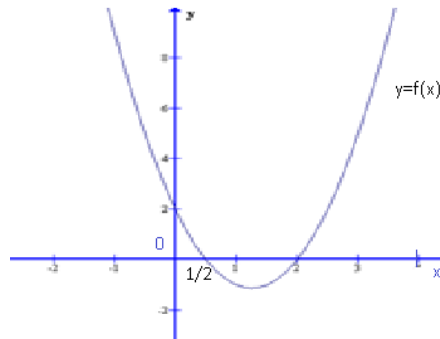
2. Ứng dụng

Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng

DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Bài tập tự luận:

Ví dụ 1: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị hình vẽ. Dựa vào đồ thị hãy viết tập nghiệm của các bất phương trình $f(x) > 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \leq 0$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có:

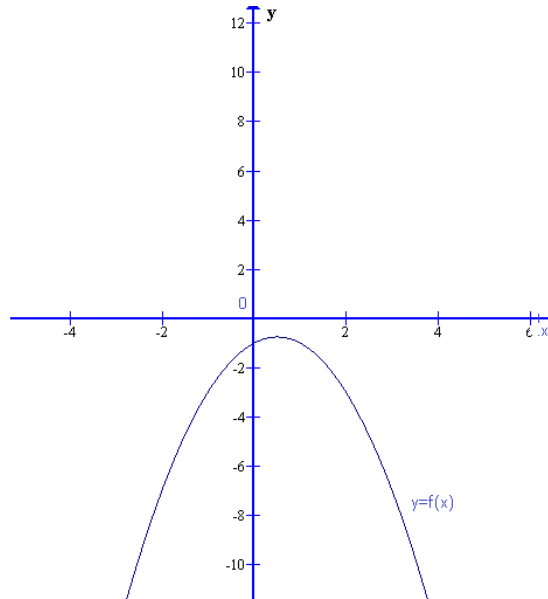
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

Ví dụ 2: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị hình vẽ. Dựa vào đồ thị hãy viết tập nghiệm của các bất phương trình $f(x) > 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \leq 0$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình bậc hai:

a) $x^2 - 1 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 1 < 0$

c) $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$

d) $5x^2 + x + 1 \geq 0$

Lời giải:

a) Dễ thấy $f(x) = x^2 - 1$ có $\Delta' = 1 > 0, a = 1 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Do đó ta có bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nên bất phương trình $x^2 - 1 \geq 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

b) Dễ thấy $g(x) = x^2 - 2x - 1$ có $\Delta' = 2 > 0, a = 1 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Do đó ta có bảng xét dấu $g(x)$:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nên bất phương trình $x^2 - 2x - 1 < 0$ có tập nghiệm là $S = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

c) Dễ thấy $h(x) = -3x^2 + 12x + 1$ có $\Delta' = 39 > 0, a = -3 < 0$ và có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{39}}{3}; \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{39}}{3}.$$

Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{6-\sqrt{39}}{3}$	$\frac{6+\sqrt{39}}{3}$	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Nên bất phương trình $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$ có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \frac{6 - \sqrt{39}}{3}\right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{39}}{3}; +\infty\right)$.

d) $k(x) = 5x^2 + x + 1$ có $\Delta = -19 < 0$ và $a = 5 > 0$ nên $k(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra bất phương trình $5x^2 + x + 1 \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

b) $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

Lời giải:

a) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có $a = -3 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 1$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $\Delta = 0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

Suy ra $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Ví dụ 5: Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2 - 2x + 5 \geq 0$

Xét tam thức vế trái có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0$

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \leq -2 \\ x^2 - x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \leq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{đúng } \forall x.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $T = \mathbb{R}$.

Ví dụ 7: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm: $f(x) = -x^2 - 2x - m$

Lời giải:

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$
 $3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0$

Lời giải:

$$3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) \leq 0 \Leftrightarrow 7m^2 - 7m + 7 \leq 0 \text{ bpt vô nghiệm}$$

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(m-1)x^2 - 2(m-2)x + 2 - m}}$$

Lời giải:

$$(m-1)x^2 - 2(m-2)x + 2 - m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Trường hợp 1: $m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow 2x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Sai).

Trường hợp 2: $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-1)(2-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m^2 - 7m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \frac{3}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 2 \text{ Vậy}$$

$$\frac{3}{2} < m < 2.$$

Ví dụ 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau vô nghiệm.

$$x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 \leq 0$$

Lời giải:

$$\text{BPT có vô nghiệm} \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m-2)^2 - 2m + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 5.$$

Ví dụ 11: Tìm m để mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình.

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải:

Ta có $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow x = m+2$ hoặc $x = \frac{4-m}{3}$

* Với $m+2 > \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m+6 > 4-m \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{4-m}{3} \leq x \leq m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1; 1] \subset \left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq \frac{4-m}{3} \\ 1 \leq m+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$

Kết hợp với điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ ta có $m \geq 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2 < \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m+2 \leq x \leq \frac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2; \frac{4-m}{3} \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1; 1] \subset \left[m+2; \frac{4-m}{3} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq m+2 \\ 1 \leq \frac{4-m}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3$

Kết hợp với điều kiện $m < -\frac{1}{2}$ ta có $m \leq -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m = -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ nên $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập trắc nghiệm

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

A. $S = (-\infty; -\frac{1}{3})$ **B.** $S = (1; +\infty)$ **C.** $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ **D.** $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$

b) $x^2 + x - 12 < 0$

A. $S = (-4; 3)$ **B.** $S = (-\infty; -4)$ **C.** $S = (3; +\infty)$ **D.** $S = \mathbb{R}$

c) $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9 > 0$

A. $S = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **B.** $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **C.** $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **D.** $S = \mathbb{R}$

d) $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

A. $S = \left\{\pm\frac{1}{6}\right\}$ **B.** $S = \left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$ **C.** $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$ **D.** $S = \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$

Lời giải:

a) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có $a = -3 < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 1$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = x^2 + x - 12$ có $a = 1 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -4$; $x_2 = 3$

($f(x)$ trái dấu với hệ số a).

Suy ra $x^2 + x - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; 3)$

c) Tam thức $f(x) = 5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9$ có $a = 5 > 0$ và $\Delta = 0$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $\Delta = 0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

Suy ra $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $x^2 - mx + m + 3 = 0$

A. $m \in (-\infty; -2]$

B. $m \in [6; +\infty)$

C. $m \in [-2; 6]$

D.

$m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$

b) $(1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$

A. $m \leq 0$

B. $-2 \leq m$

C. $-2 \leq m \leq 0$

D. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Lời giải:

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm

b) Với $m = -1$ phương trình trở thành $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$$

Vậy với $-2 \leq m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0 \quad (1)$$

A. $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$

B. $m > -\frac{1}{2}$

C. $m \geq 7$

D.

$m \leq -3$

Lời giải:

Ta có $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow x = m+2$ hoặc $x = \frac{4-m}{3}$

* Với $m+2 > \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m+6 > 4-m \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{4-m}{3} \leq x \leq m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1; 1] \subset \left[\frac{4-m}{3}; m+2 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq \frac{4-m}{3} \\ 1 \leq m+2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$$

Kết hợp với điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ ta có $m \geq 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2 < \frac{4-m}{3} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m+2 \leq x \leq \frac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2; \frac{4-m}{3} \right]$

Suy ra mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1; 1] \subset \left[m+2; \frac{4-m}{3} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq m+2 \\ 1 \leq \frac{4-m}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3$

Kết hợp với điều kiện $m < -\frac{1}{2}$ ta có $m \leq -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m = -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ nên $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho $(m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m+2 < 0$ khẳng định nào sau đây sai?

A. $m = -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$

B. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

C. $\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$

D. $m > -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Lời giải:

Với $m = -1$: bất phương trình trở thành $6x+6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Với $m \neq -1$ ta có $g(x) = (m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m+2$ là tam thức bậc hai có :

$a = m+1$; $\Delta' = 8m^2 - 2m - 1$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1$		-	0	+	+
$8m^2 - 2m - 1$	+	0	+	0	+

* $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

$$* \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow S = (x_1; x_2), \text{ với}$$

$$x_1 = \frac{2m-1-\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}; x_2 = \frac{2m-1+\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}.$$

$$* m < -1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Kết luận

$m = -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$

$-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

$$\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ bất phương trình có tập nghiệm là } S = (x_1; x_2)$$

$m < -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x^2 + 3x - 1 \geq 0$

A. $T = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

B. $T = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

C. $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D. $T = (1; +\infty)$

b) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0$

A. $T = \{3\}$

B. $T = \{4\}$

C. $T = (2; 3)$

D. $T = \{2\}$

c) $-2x^2 + x - 1 \leq 0$.

A. $T = \mathbb{R}$

B. $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

C. $T = (-1; +\infty)$

D. $T = \mathbb{R} \setminus (3; 7)$

d) $7x > 2x^2 - 6$

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

B. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

D. $(2; +\infty)$

e) $x^2 - 22x + 51 < 0$

A. $T = \emptyset$

B. $T = \mathbb{R}$

C. $T = \left(9; \frac{170}{3}\right)$

D. $T = (-\infty; 2)$

f) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$

A. $T = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

B. $T = (-\infty; -3]$

C. $T = [-3; -2]$

D. $T = [-2; +\infty)$

Lời giải:

- a) $T = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ b) $T = \{2\}$ c) $T = \mathbb{R}$
d) $\left(\frac{3}{2}; 2 \right)$ e) $T = \emptyset$ f) $T = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

Bài 2: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

A. $m \in \left(\frac{1-2\sqrt{13}}{2}; \frac{1+2\sqrt{13}}{2} \right)$

B. $m \in \left(\frac{1-3\sqrt{13}}{2}; \frac{1+3\sqrt{13}}{2} \right)$

C. $m \in \left(\frac{1-4\sqrt{13}}{2}; \frac{1+4\sqrt{13}}{2} \right)$

D. $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$

b) $(m-1)x^2 - (2m-2)x + 2m = 0$

A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m < -3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \geq 4 \\ m < -4 \end{cases}$

Lời giải:

a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Vậy với $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$ thì phương trình vô nghiệm

b) Với $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 1$ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2m(m-1) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(-m-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm

Bài 3: Cho $mx^2 - 2mx + m - 1 > 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

B. $m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Lời giải:

Bài 3:: Với $m=0$, bất phương trình trở thành: $-1 > 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0 \Rightarrow f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ là tam thức bậc hai có $a = m$, $\Delta' = m$

* $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình có tập nghiệm: $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$.

$$* m < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{bất phương trình vô nghiệm.}$$

Kết luận

$m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$

$m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m - \sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m + \sqrt{m}}{m}; +\infty)$

Bài 4: Tìm m để mọi $x \in [0; +\infty)$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$(m^2 - 1)x^2 - 8mx + 9 - m^2 \geq 0$$

A. $m \in (-3; -1)$

B. $m \in \{-3; -1\}$

C. $m \in [-3; -1]$

D. $m \in \emptyset$

Lời giải:

$m = 1$ không thỏa mãn ycbt; $m = -1$ thỏa mãn ycbt

Với $m \neq \pm 1$ ta có bpt $\Leftrightarrow [(m+1)x + m - 3][(m-1)x - m - 3] \geq 0$

Đáp số $m \in [-3; -1]$

Bài 5: Cho hàm số $f(x) = x^2 + bx + 1$ với $b \in (3, \frac{7}{2})$. Giải bất phương trình $f(f(x)) > x$.

A. $S = \left(-\infty; \frac{1-b-2\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-b+2\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$

B. $S = \left(-\infty; \frac{1-2b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-2b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$

C. $S = \left(-\infty; \frac{1-3b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-3b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$

D. $S = \left(-\infty; \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$

Lời giải:

Bài 5: Ta có $f(f(x)) - x = [x^2 + (b+1)x + b + 2][x^2 + (b-1)x + 1]$

Suy ra $f(f(x)) - x > 0 \Leftrightarrow [x^2 + (b+1)x + b + 2][x^2 + (b-1)x + 1] > 0$

Đặt $g(x) = x^2 + (b-1)x + 1$, $h(x) = x^2 + (b+1)x + b + 2$

Ta có $\Delta_{g(x)} = b^2 - 2b - 3$, $\Delta_{h(x)} = b^2 - 2b - 7$

Vì $b \in (3, \frac{7}{2})$ nên $\Delta_{g(x)} > 0$ và $\Delta_{h(x)} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là

$$S = \left(-\infty; \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty \right)$$

DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.

1. Phương pháp: + Giải từng bất phương trình
+ Lấy giao các tập hợp nghiệm

2. Bài tập tự luận

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty).$$

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} \geq 0 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét $x^2 - x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2 \end{cases} (1).$$

Nhận xét $x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \quad (2).$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -3 < x \leq -2 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $1 < \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 3} < 3$.

Lời giải

Nhận xét: $x^2 + x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$1 < \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 3} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 5 > x^2 + x + 3 \\ x^2 + x + 5 < 3x^2 + 3x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

A. $S = [-1; 2]$

B. $S = (-1; 2)$

C. $S = (-\infty; -1)$

D. $S = \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$

A. $S = (-\infty; -2]$

B. $S = (3; +\infty)$

C. $S = (-2; 3)$

D.

$S = (-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$

c) $\begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 13 \leq 0 \end{cases}$

A. $S = \left(1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right)$

B. $S = (-\infty; 1)$

C. $S = \left(\frac{-1 + \sqrt{53}}{2}; +\infty\right)$

D.

$S = \left[1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right]$

d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

A. $S = \left(1; \frac{3}{2}\right)$

B. $S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$

C. $S = (-\infty; 1)$

D. $S = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = (-1; 2)$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} 2x^2 + x - 6 \geq 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -2 \\ x > 3 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 13 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{-1 - \sqrt{53}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{53}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = \left[1; \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}\right]$.

$$\text{d) Ta có } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -3 \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx^2 - x - 5 \leq 0 \\ (1-m)x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0 \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$

$$\text{A. } S = \left[\frac{1 - 2\sqrt{21}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{21}}{2} \right]$$

$$\text{B. } S = \left[\frac{1 - 3\sqrt{21}}{2}; \frac{1 + 3\sqrt{21}}{2} \right]$$

$$\text{C. } S = \left[\frac{1 - 4\sqrt{21}}{2}; \frac{1 + 4\sqrt{21}}{2} \right]$$

$$\text{D. } S = \left[\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right]$$

b) Tìm m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\text{A. } \frac{-1 - 2\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{31}{20}$$

$$\text{B. } m \leq -\frac{1}{20}$$

C. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m$

D. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$

Lời giải:

a) Khi $m=1$ hệ bất phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 \leq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right]$

b) Khi $m=0$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} -x-5 \leq 0 \\ x^2+2 \geq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) do đó $m=0$ không thỏa

mãn yêu cầu bài toán

Khi $m=1$ theo câu a ta thấy cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta có hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi các bất phương trình

trong hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 0 \\ \Delta_1 = 1 + 20m \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - (1 - m)(m + 2) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ 2m^2 + m - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$$

Vậy $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ mx^2 - 2(2m+1)x + 5m+3 \geq 0 \end{cases}$$

A. $m > -\frac{1}{2}$

B. $m = -\frac{1}{2}$

C. $m \geq -\frac{1}{2}$

D. $m = \emptyset$

Lời giải:

Ta có bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với bất phương trình:

$$mx^2 - 2(2m+1)x + 5m + 3 \leq 0 \quad (1) \text{ có nghiệm } x \in S = [1; 2].$$

Ta đi giải bài toán phủ định là: tìm m để bất phương trình (1) vô nghiệm trên S

Tức là bất phương trình $f(x) = mx^2 - 2(2m+1)x + 5m + 3 < 0 \quad (2)$ đúng với mọi $x \in S$.

- $m = 0$ ta có $(2) \Leftrightarrow -2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ nên (2) không đúng với $\forall x \in S$

- $m \neq 0$ tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m$, biệt thức $\Delta' = -m^2 + m + 1$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
m	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$-m^2 + m + 1$	$-$	0	$+$	$ $	0

+) $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn

+) $m \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$ nên $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$, suy ra $m \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa

mãn.

+) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}, x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m} \quad (x_1 < x_2)$$

Do đó: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$, suy ra (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 < 1 \end{cases} \quad (*)$

Ta có $x_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{m} < 2$

$$x_2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \Delta' < m^2 + 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ 2m^2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$

+) $0 < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}, x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m} \quad (x_1 > x_2)$$

Suy ra $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_2; x_1)$

$$\text{Do đó (2) đúng với } \forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + m + 1 < 0 \\ \sqrt{\Delta'} + 1 > 0 \end{cases} (**)$$

Vì $m > 0$ nên (**) vô nghiệm.

Từ đó, ta thấy (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Vậy $m \geq -\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.97: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

A. $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}]$

B. $T = [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

C. $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

D. $T = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

b) $\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$

A. $S = \mathbb{R}$

B. $S = \emptyset$

C. $S = \left(\frac{1}{2}; 4\right)$

D. $S = \{1; 2\}$

c) $-4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$

A. $T = [1; +\infty)$

B. $T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right]$

C. $T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

D. $T = \emptyset$

d) $\frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$

A. $T = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

B. $T = \mathbb{R}$

C. $T = \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

D.

$T = (-\infty; -1]$

Lời giải:

Bài 4.97: a) $T = (-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty)$ b) Vô nghiệm

$$c) -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x^2 + 1) \leq x^2 - 2x - 7 \\ x^2 - 2x - 7 \leq x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ 2x \geq -8 \end{cases}$$

Suy ra tập $T = \left[-4; -\frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

d) $T = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{11}{4}; 3\right]$

Bài 4.98: Tìm m để bất phương trình $m^2x + m(x+1) - 2(x-1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 1]$

A. $0 < m < \frac{3}{2}$

B. $0 < m$

C. $m < \frac{3}{2}$

D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.98: Đặt $f(x) = (m^2 + m - 2)x + m + 2$

Bài toán thỏa mãn: $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + m - 2)(-2) + m + 2 > 0 \\ (m^2 + m - 2)(1) + m + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \frac{3}{2} \\ \begin{cases} m < -2 \\ m > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$

Bài 4.99: Cho $\begin{cases} x^2 - (1 + 2m)x + 2m \leq 0 \\ x^2 + (2 + m)x + 2m \leq 0 \end{cases}$ khẳng định nào sai?

A. $m \leq -1: S = [-2; 1]$,

B. $-1 < m < 0: S = [2a; -a]$

C. $m = 0: S = \{0\}$

D. $m > 0: S = \{1\}$

Lời giải:

Bài 4.99: $m \leq -1: S = [-2; 1]$, $-1 < m < 0: S = [2a; -a]$, $m = 0: S = \{0\}$, $m > 0: S = \emptyset$

Bài 4.100: Tìm m để bất phương trình $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi

$x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$

B. $m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$

C. $2 \leq m$

D. $\begin{cases} m < 2 \\ m > \frac{21+2\sqrt{34}}{10} \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.100: Đặt $f(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2$, có $\Delta = -4m^2 + 20m - 15$

• $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5-\sqrt{10}}{2} \\ m \geq \frac{5+\sqrt{10}}{2} \end{cases}$, suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài

toán.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}; \frac{5+\sqrt{10}}{2} \right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{4} \quad (x_1 < x_2)$$

Và $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$.

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq \frac{1}{2} \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \leq 2\sqrt{\Delta} \\ 7-2m \leq \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \leq 4\Delta \\ (7-2m)^2 \leq \Delta \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \leq 0 \\ m^2 - 6m + 8 \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$$

Vậy $2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.101: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

A. $m \in [2; +\infty)$ B. $m \in [3; +\infty)$ C. $m \in [4; +\infty)$ D. $m \in [1; +\infty)$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

A. $m \in (1; 2)$ B. $m \in (-\infty; 1)$ C. $m \in (2; +\infty)$ D. $m \in [1; 2]$

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

A. $1 < m$ B. $m < 2$ C. $1 < m < 2$ D. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

d) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

A. $1 < m$ B. $m < 2$ C. $1 < m < 2$ D. không tồn tại m

Lời giải:

Bài 4.101: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào pt (1) ta được phương trình:

$$t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (2)$$

a) Để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm :

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Kết luận: với $m \in [1; +\infty)$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

b) Để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \leq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m^2-3m+2 \geq 0 \\ m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Kết luận: với $m \in [1; 2]$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Kết luận: với $1 < m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2-3m+2 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận: không tồn tại m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

➤ DẠNG TOÁN 3: Giải bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình

a) $(x-1)(x^2+5x+4) \geq 0$

b) $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$

Lời giải

a) Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$$x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	0 $+$
x^2+5x+4		$+$ 0 $-$	0 $+$ $ $	$+$	
$(x-1)(x^2+5x+4)$		$-$ 0 $+$	0 $-$ 0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; 1] \cup [1; +\infty)$

b) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$x-2$	-	-	-	-	-	-	0	+				
$3x^2+3x-4$	+	0	-	-	0	+	+	+				
x^2-3	+	+	0	-	-	-	0	+				
$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}$	+	0	-		+	0	-		+		-	0

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$ là

$$S = \left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6}; -\sqrt{3} \right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6}; 1 \right) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình : $\frac{x^2+x-1}{x-2} > \frac{1}{x^2-x} + \frac{x^3-2x}{x^2-3x+2}$.

Lời giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{(x^2+x-1)(x^2-x)-(x-2)+x(x^3-2)}{x(x^2-3x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x(x^2-3x+2)} > 0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2.$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $(x^2-4)(x^2+2x) \leq 3(x^2+4x+4)$.

Lời giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-2x) \leq 3(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-2x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \vee -1 \leq x \leq 3.$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

B. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right)$

C. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

D. $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \leq 0$

A. $S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]$

B. $S = \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

$$\text{C. } S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \quad \text{D. } S = \emptyset$$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$		
$1-2x$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
x^2-x-1	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
VT	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

b) Bất phương trình $(x^4 - 4x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 1) \leq 0.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
x^2+x-3	+	0	-		-	0	+		+
x^2-x-1	+		+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right].$$

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x^2 - 1}{(x^2 - 3)(-3x^2 + 2x + 8)} > 0$

A. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (-1; 1)$

B. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (\sqrt{3}; 2)$

C. $S = (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$

D. $S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \right) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$

b) $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$

A. $S = (2\sqrt{2}; 3]$

B. $S = [-3; -2\sqrt{2})$

C. $S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$

D.

$S = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{8}\}$

Lời giải:

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$						
x^2-1		+		+		+	0	-	0	+		+		+
x^2-3		+	0	-		-		-	0	+		+		+
$-3x^2+2x+8$		-		-	0	+	0	+		+		+	0	-
VT		-		+		-	0	+	0	-		+		-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

b) Ta có $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} - (x^2 + 10) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1 - (x^2 - 8)(x^2 + 10)}{x^2 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{81 - x^4}{x^2 - 8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(9 - x^2)(9 + x^2)}{x^2 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - x^2}{x^2 - 8} \geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$9-x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$		
x^2-8	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$		
VT	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình sau

a) $\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0$

A. $S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right);$

B. $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

C. $S = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty);$

D.

$$S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty)$$

b) $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$

A. $S = [-1; 0]$

B. $S = [1; \sqrt{3})$

C. $S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3})$

D. $S = \emptyset$

Lời giải:

a) Vì $|x^2 - x| + 2 > 0$ nên

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)(|x^2 - x| + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	-		-	+
$x^2 - x + 2$	+		+		+	+
$x^2 - x - 1$	+		+		-	+
$\frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)}{x^2 - x - 1}$	+	0	-		-	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cup [2; +\infty)$$

$$\text{b) ĐKXD: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + \sqrt{3}x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1} > 0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1})}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	+	0	+	+
$x^2 + \sqrt{3}x - 6$	+	0	-		-	+
$\frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6}$	+		-	0	+	+

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3})$$

Nhận xét: Ở câu b chúng ta phải đặt điều kiện thì khi đó các phép biến đổi trên mới đảm bảo là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x-m^2-m}\left(3-\frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3}\right) < 0$ (*) có nghiệm.

A. $-2 < m$

B. $m < 1$

C. $-2 < m < 1$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$

Lời giải:

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3} > 0 \\ x > m^2+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0 \\ x > m^2+m \end{cases} (**)$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	0	+
$3x^2+3x-4$	+	0	-	-	0	+	+	+
x^2-3	+	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}$	$+$ + 0 - + 0 - + - 0							

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)} < 0$ là

$$S = \left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6}; 1\right) \cup (\sqrt{3}; 2)$$

Do đó bất phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi hệ bất phương trình (**) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2+m < 2 \Leftrightarrow m^2+m-2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$$

Vậy $-2 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau

a) $(4-3x)(-2x^2+3x-1) \leq 0$

A. $T = (-\infty; \frac{1}{2}]$

B. $T = [1; \frac{4}{3}]$

C. $T = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \frac{4}{3}]$

D. $T = (\frac{1}{2}; 1)$

b) $x^2+x-\frac{3}{x^2+x-2} \leq 0$

A. $T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2\right)$

B. $T = \left[1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

C. $T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

D. $T = (-2; 1)$

c) $x^4 - x^2 - 2x - 1 > 0$

A. $T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

B. $T = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

C. $T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

D. $T = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

d) $\frac{(x^2 - 4)(-3x^2 + 2x + 8)}{x^2 - \sqrt{2}x} < 0$

A. $T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (\sqrt{2}; 2)$

B. $T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (2; +\infty)$

C. $T = (-\infty; -2) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

D.

$T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

e) $\frac{1 - |x^2 - 2x|}{x^2 + x - 2} \geq 0$

A. $T = (-2; 1 - \sqrt{2}]$

B. $T = [1; 1 + \sqrt{2}]$

C. $T = (-2; 1 - \sqrt{2}] \cup [1; 1 + \sqrt{2}]$

D. $T = (1 - \sqrt{2}; 1)$

f) $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{x^2 + x} \leq 0$

A. $T = (-1; 0)$

B. $T = [1; +\infty)$

C. $T = (-1; 0) \cup [1; +\infty)$

D. $T = (0; 1)$

Lời giải:

Bài2: a) BXD :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$4 - 3x$	+		+	+	-
$-2x^2 + 3x - 1$	-	0	+	0	-
VT	-	0	+	0	+

$T = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right]$

b) Bpt $\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 3}{x^2 + x - 2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 3)}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Rightarrow T = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right]$

$$c) T = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

$$d) T = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$e) T = (-2; 1-\sqrt{2}] \cup [1; 1+\sqrt{2}]$$

$$f) T = (-1; 0) \cup [1; +\infty)$$

Bài 3: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4} \geq 1$. Khi đó $S \cap (-2; 2)$ là tập nào sau đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $\emptyset$.

D. $(-2; -1]$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Xét } \frac{x^2+x+3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x^2-4} \geq 0.$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S = [-7; -2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Vậy } S \cap (-2; 2) = \emptyset.$$

Bài 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2$ là

A. $\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $x^2+3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4 > 2(x^2+3) \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ **B.** $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ **C.** $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ **D.**

$$S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Bài 5: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{16-4x}{x^2-x-12} < 4 \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x} \end{cases}$ có nghiệm là:

- A.** $(-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$. **B.** $(-4; -3) \cup (0; 1) \cup (\sqrt{2}; 2)$
C. $(-3; \sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$. **D.** $(-4; -\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

➤ Giải bất phương trình: $\frac{16-4x}{x^2-x-12} < 4 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+64}{x^2-x-12} < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	4	$+\infty$
$\frac{-4x^2+64}{x^2-x-12}$		$-$	$+$	$-$	

$$\Rightarrow S_1 = (-\infty; -4) \cup (-3; 4) \cup (4; +\infty).$$

➤ Giải bất pt: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$\frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow S_2 = (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty).$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

Bài 6: Hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{3x} < 0 \\ x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

- A.** $-2 \leq x < 0$. **B.** $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3} \leq x < 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\Rightarrow \frac{1}{3x} < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$$\Rightarrow S_1 = (-\infty; 0).$$

$$\Rightarrow \text{Xét bất phương trình: } x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{3} - \frac{4}{3x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x - 4}{3x} \geq 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\frac{3x^2 + 4x - 4}{3x}$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

$$\Rightarrow S_2 = [-2; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$\Rightarrow \text{Xét bất pt: } 4x^2 - 5x + 1 < 0.$$

$$\Rightarrow S_3 = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-2; 0).$

Bài 7: Hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0 \end{cases}$$
 có nghiệm là:

A. $-\frac{1}{2} < x < 2.$

B. $2 < x < 3.$

C. $0 < x < 3.$

D.

Vô

nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Xét bất phương trình: $\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2}$	$-$	$\parallel$	$+$	$-$

Tập nghiệm bất phương trình là: $S_1 = \left(-\frac{1}{2}; 2\right).$

Xét bất pt: $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	5	6	$+\infty$
$\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}$		+	0	-	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S_2 = (2; 3) \cup (5; 6)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Bài 8: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x^2-9}{-x^2+3x-12} > 0 \\ \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x < -3$ hoặc $x > 1$.

B. $3 < x < 5$.

C. $1 \leq x < 3$.

D. $1 < x < 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình: $\frac{x^2-9}{-x^2+3x-12} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$\frac{x^2-9}{-x^2+3x-12}$		-	0	+

Vậy nghiệm bất phương trình là: $S_1 = (-3; 3)$.

Xét bất pt: $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+14+(3x+1)(x-5)}{2(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-12x+9}{2(x-5)} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$\frac{3x^2-12x+9}{2(x-5)}$		-	0	+	0

Vậy nghiệm của bất phương trình là:

$S_2 = [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là: $S = S_1 \cap S_2 = [1; 3)$.

4. Dạng 4-Điều kiện về nghiệm của tam thức bậc hai

I-BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $(m+2)x^2-3x+2m-3=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm trái dấu là: $(m+2)(2m-3) < 0$.

$$\Leftrightarrow -2 < m < \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

$$(m-3)x^2 + (m-3)x - (m+1) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-3)^2 - 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-3)(3m+7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3} < m < 3.$$

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m-1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

Lời giải

$$(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m-1 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m+1)(m-1) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 4m+5 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\frac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Viết } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2(m+2)}{m+1} - 2\frac{m-1}{m+1}}{\frac{m-1}{m+1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m > 1 \quad (2).$$

Từ (1); (2) $\Rightarrow m > 1$.

Ví dụ 4: Với giá trị nào của m thì phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

Lời giải

$$\text{PT } (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 1 > 0 \quad \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2(m-2)}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-2)}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} - \frac{m-1}{m-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy $1 < m < 3$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = (m-2)x^2 - 3mx + 2m-3$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $(m-2)x^2 - 3mx + 2m-3 = 0$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho gốc

tọa độ O nằm giữa A và B là $x_A \cdot x_B < 0 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 2$

II-BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm điều kiện của b để $f(x) = x^2 - bx + 3$ có hai nghiệm phân biệt?

- A.** $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. **B.** $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. **D.** $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2\sqrt{3} \\ b > 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 2: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{5}{3} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 3: Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.

C. $0 < m < 28$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 4: Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 2$.

A. $m > 0$.

B. $m < -1$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $m > \frac{-1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ \Delta' = (-1)^2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4 < 0 \\ -m - 2 \cdot 2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $-1 < m < 0$.

Câu 5: Với điều kiện nào của m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m+2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $-2 < m < 7$.

B. $-2 \neq m < -1$.

C. $m < -\frac{7}{8}$ và $m \neq -2$.

D. $-2 \neq m < -1 \vee m > 7$.

Lời giải

Chọn B

PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 - 6m - 7 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1 \vee m > 7 \end{cases} (*).$$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases} (1).$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-8m-7}{(m+2)^2} > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Kết hợp (*) ta có $-2 \neq m < -1$.

Câu 6: Với điều kiện nào của m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m+2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 1$.

- A.** $-2 < m < -1 \vee m > 7$. **B.** $m < -2 \vee m > 7$.
C. $-1 < m < -\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2} < m < 7$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0} &\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 - 6m - 7 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1 \vee m > 7 \end{cases} (1). \end{aligned}$$

$$\text{Theo Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} < 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]}{x_1^3 x_2^3} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)[(m-1)^2 - 3(m+2)]}{(m+2)^3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-12m^2 - 7m - 3}{(m+2)^3} < 0 (*). \end{aligned}$$

$$\text{Do } -12m^2 - 7m - 3 < 0; \forall x \text{ nên } (*) \Leftrightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp (1) ta có $-2 < m < -1 \vee m > 7$.

Câu 7: Định m để phương trình $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$?

- A.** $-2 < m < 4$. **B.** $m < -2 \vee m > 4$.
C. $-1 < m < 3$. **D.** $m < -1 \vee m > 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \Delta = 1 \text{ nên PT luôn có hai phân biệt } \begin{cases} x = m-1 \\ x = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow -3 < m-2 < m-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Câu 8: Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m+3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

A. $m < 6$ và $m \neq 2$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} a = m-2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ S = \frac{2m}{m-2} > 0 \\ P = \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < 6 \\ m > 2 \vee m < 0 \\ m > 2 \vee m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Câu 9: Cho phương trình $(m-5)x^2 + (m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$.

A. $m < \frac{22}{7}$.

B. $\frac{22}{7} < m < 5$.

C. $m \geq 5$.

D. $\frac{22}{7} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn B

$$(1) \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow a.f(2) = (m-5)[4(m-5) + 2(m-1) + m] < 0$$

$$\Leftrightarrow (m-5)(7m-22) < 0 \Leftrightarrow \frac{22}{7} < m < 5.$$

Câu 10: Giá trị nào của m thì phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m < 1$.

B. $m > 2$.

C. $m > 3$.

D. $1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn D

$$(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0 \text{ có 2 nghiệm trái dấu: } \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Câu 11: Định m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m-2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3.$$

A. $m < 2 \vee m > 6$.

B. $-2 < m < -1 \vee -1 < m < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $-2 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

PT có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -2 \end{cases} (*)$.

Khi đó, theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} < 3 \Leftrightarrow \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$

$\Leftrightarrow \frac{6-m}{m-2} < 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 6$.

Kết hợp (*) ta có $-2 < m < -1 \vee -1 < m < 2 \vee m > 6$.

Câu 12: Với điều kiện nào của m thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 2)$?

A. $-2 \leq m \leq 1$.

B. $m < -1 \vee m > 1$.

C. $m < \frac{4}{3}$.

D. $0 < m < \frac{4}{3}$.

Lời giải**Chọn A**

Khi $m = 0$, PT $\Leftrightarrow x = 1 \in (-1; 2)$. Ta có $m = 0$ (tmyc).(*)

Khi $m \neq 0$, PT luôn có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{m-2}{m}$. PT có đúng 1 nghiệm thuộc

khoảng $(-1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq -1 \\ \frac{m-2}{m} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-2}{m} \leq 0 \\ \frac{-m-2}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ -2 \leq m < 0 \end{cases}$.

Kết hợp (*) ta có $-2 \leq m \leq 1$.

Câu 13: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2 < m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $-5 < m < -3$.

D. $-2 < m < 1$.

Lời giải**Chọn A**

Đề phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+1 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1)(m^2 + 4m - 5) > 0 \\ m \neq -1 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases}.$$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 + 4m - 5}{m+1} \end{cases}.$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(-m^2 - 5m - 6) > 0 \\ m \neq -1 \\ \frac{2(m-1)}{m+1} - 4 > 0 \\ \frac{m^2 + 4m - 5}{m+1} - 2 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 < m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \\ \begin{cases} -3 < m < -1 \\ m > -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Câu 14: Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

A. $m < -\frac{7}{2}$.

B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m+12 = 0 \end{cases} (*)$.

Giải sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , theo Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = 4m+12 \end{cases}.$$

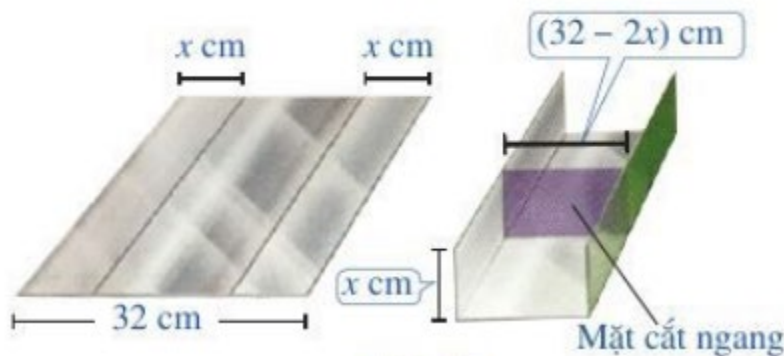
Để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 . thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và đều lớn hơn -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m + 12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (4m+12) > 0 \\ 6m + 19 \neq 0 \\ (x_1+1) + (x_2+1) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3) + 2 > 0 \\ 4m + 12 - 2(m+3) + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

5. DẠNG 5: BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình vẽ).



Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 . Rãnh nước phải có độ cao ít nhất bao nhiêu xăng-ti-mét?

Lời giải

Gọi kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm).

Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $S(x) = x(32 - 2x) (\text{cm}^2)$

Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 khi và chỉ khi $x(32 - 2x) \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [6; 10]$.

Vậy rãnh nước phải có độ cao ít nhất 6 cm

Ví dụ 2: Một công ty bình gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là x nghìn đồng thì doanh thu R (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là

$$R(x) = -560x^2 + 50000x.$$

a) Theo mô hình doanh thu này thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là không có người mua)

b) Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

Lời giải

a) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là

$$R(x) = -560x^2 + 50000x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 89 \end{cases}$$

Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty không có doanh thu. (Đơn giá quá cao dẫn đến không có người mua hàng)

b) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng, tức là

$$\begin{aligned} -560x^2 + 50000x > 1000000 &\Leftrightarrow 56x^2 - 5000x + 100000 < 0 \\ &\Leftrightarrow 30,25 < x < 59,04. \end{aligned}$$

Vậy với đơn giá của bình đựng nước khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu vượt mức 1 tỉ đồng

Ví dụ 3: Một công ty du lịch báo giá tiền cho chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên với giá 300000đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x

b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

Lời giải

a) Cứ thêm 1 người thì giá vé còn $(300000 - 5000.1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Cứ thêm x người thì giá vé còn $(300000 - 5000.x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Vậy doanh thu theo x là $(50 + x).(300000 - 5000x)$ đồng.

b) Công ty không bị lỗ khi và chỉ khi

$$(50 + x).(300000 - 5000x) \geq 15080000$$

$$\Leftrightarrow (50 + x).(60 - x) \geq 3016$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8.$$

Vậy số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là 58 người.

Ví dụ 4: Công ty An Bình báo giá tiền cho chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

10 khách đầu tiên với giá 800000đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ thêm một người, giá vé sẽ giảm 10000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x

b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí

thực sự cho chuyển đi là 700 000 đồng/người.

Lời giải

a) Cứ thêm 1 người thì giá vé còn $(800000 - 10000.1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Cứ thêm x người thì giá vé còn $(800000 - 10000.x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Vậy doanh thu theo x là $(10 + x).(800000 - 10000x)$ đồng.

b) Chi phí thực sự sau khi thêm x khách là $700000(10 + x)$ đồng.

Công ty không bị lỗ khi và chỉ khi

$$(10 + x).(800000 - 10000x) \geq 700000(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow (10 + x).10000(80 - x) \geq 700000(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow (10 + x)(80 - x) \geq 70(10 + x)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 70x + 800 \geq 700 + 70x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 100 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$$

Vậy số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là 20 người thì công ty không bị lỗ.

Ví dụ 5: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận của xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó., biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm là hòa vốn?

c) Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

Lời giải

a) Lợi nhuận của xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm là:

$$1200Q - (Q^2 + 180Q + 140000) = -Q^2 + 1020Q - 140000.$$

b) Để xí nghiệp hòa vốn thì lợi nhuận bằng 0, tức là $-Q^2 + 1020Q - 140000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q \approx 163 \\ Q \approx 857 \end{cases}$

Vậy xí nghiệp sản xuất 163 sản phẩm hoặc 857 sản phẩm thì hòa vốn.

c) Xí nghiệp không bị lỗ khi và chỉ khi

$$-Q^2 + 1020Q - 140000 \geq 0 \Rightarrow 163,45 \leq Q \leq 857,55 \Rightarrow 164 \leq Q \leq 857.$$

Vậy để không bị lỗ thì xí nghiệp cần sản xuất từ 164 đến 857 sản phẩm.

Ví dụ 6: Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu là 500 m/s, hợp với phương ngang một góc 45° . Biết rằng bỏ qua sức cản của không khí, quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên sẽ tuân theo phương trình

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

Trong đó x là khoảng cách (tính bằng mét) vật bay theo phương ngang, vận tốc ban đầu v_0 của vật hợp với phương ngang một góc α và $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

- a) Viết phương trình của chuyển động
b) Để viên đạn bay qua ngọn núi cao 4000 mét thì khẩu pháo phải đặt cách chân núi một khoảng cách bao xa?

Lời giải

a) Phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2.500^2 \cos^2 45^\circ} x^2 + x \tan 45^\circ \Leftrightarrow y = \frac{-9,8}{250000} x^2 + x.$$

b) Để viên đạn bay qua ngọn núi cao 4000 mét thì

$$\begin{aligned} \frac{-9,8}{250000} x^2 + x > 4000 &\Leftrightarrow \frac{-9,8}{250000} x^2 + x - 4000 > 0 \\ \Rightarrow 4967,17 < x < 20543,03. \end{aligned}$$

Vậy khẩu pháo phải đặt cách chân núi trong khoảng từ 4967 m đến 20543 m thì viên đạn bay qua ngọn núi.

Ví dụ 7: Xét hệ tọa độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0;0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5m sau 1 giây và đạt độ cao 6m sau 2 giây.

- a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.
b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

Lời giải

a) Phương trình của parabol là $h = h(t) = at^2 + bt + c (a \neq 0)$, trong đó h là độ cao, t là thời gian, a, b, c là các hằng số cần tìm.

Quỹ đạo của quả bóng là một parabol đi qua điểm $A(0;0,2)$ nên thay $t = 0$ và $h = 0,2$ vào hàm số ta được: $c = 0,2$.

Khi đó: $h = h(t) = at^2 + bt + 0,2$

Lại có quả bóng đạt độ cao 8,5m sau 1 giây và đạt độ cao 6m sau 2 giây.

Do đó quỹ đạo của bóng là parabol đi qua các điểm có tọa độ $(1;8,5)$ và $(2;6)$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 8,5 = a + b + 0,2 \\ 6 = a.4 + b.2 + 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8,3 = a + b \\ 5,8 = 4a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-27}{5} \\ b = \frac{137}{10} \end{cases}$$

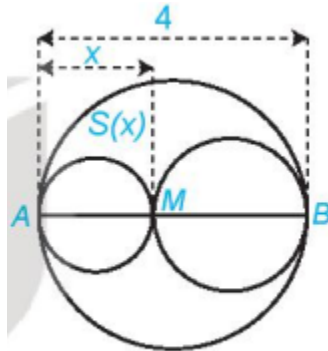
Vậy hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng là:

$$h = h(t) = -\frac{27}{5}t^2 + \frac{137}{10}t + 0,2$$

b) Bóng chưa chạm đất khi và chỉ khi $h > 0 \Leftrightarrow -\frac{27}{5}t^2 + \frac{137}{10}t + 0.2 > 0 \Rightarrow -0,01 < t < 2,55$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 2,55 giây thì bóng vẫn chưa chạm đất.

Ví dụ 8: Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB , đặt $AM = x$ (H.6.19). Xét hai đường tròn đường kính AM và MB . Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Hình 6.19

Lời giải

Ta có $S_{(O;AB)} = \frac{\pi}{4} AB^2$; $S_{(O_1;AM)} = \frac{\pi}{4} x^2$; $S_{(O_2;MB)} = \frac{\pi}{4} (4-x)^2$;

$$S_x = S_{(O;AB)} - S_{(O_1;AM)} - S_{(O_2;MB)}$$

$$= \frac{\pi}{4} (AB^2 - x^2 - (4-x)^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (-2x^2 + 8x)$$

$$S_x \leq \frac{1}{2} (S_{(O_1;AM)} + S_{(O_2;MB)})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (-2x^2 + 8x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} (x^2 + (4-x)^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 8 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \leq x < 4 \end{cases}$$

➤ **DẠNG TOÁN 5: ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$,
 $ax^2 + bx + c < 0$ hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$ rồi đi chứng minh (theo thứ tự) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$,
 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

• Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2 \leq 4BC$ (hoặc $A^2 \leq BC$) ta có thể chứng minh tam thức $f(x) = Bx^2 + Ax + C$ (hoặc $f(x) = Bx^2 + 2Ax + C$) luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta \leq 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y . Chứng minh rằng $3x^2 + 5y^2 - 2x - 2xy + 1 > 0$

Lời giải:

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1 > 0$

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1$ xem y là tham số khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x = 3 > 0$ và

$$\Delta'_x = (y+1)^2 - 3(5y^2 + 1) = -14y^2 + 2y - 2$$

Xét tam thức $g(y) = -14y^2 + 2y - 2$ có hệ số $a_y = -14 < 0$ và $\Delta'_y = -27 < 0$

Suy ra $\Delta'_x < 0$

Do đó $f(x) > 0$ với mọi x, y .

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ mà $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a > 0$, ta có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh. Khi đó $g(a_i) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_{a_i} \leq 0$.

Ví dụ 2: Cho x, y, z là số thực. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0.$$

Lời giải

Bất đẳng thức viết lại $(1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$

Đặt $f(x) = (1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1$, khi đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a = 1 + y^2z^2 > 0$ và $\Delta'_x = 4y^2z^2 - (1 + y^2z^2)(y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1)$

$$\Rightarrow \Delta'_x = -(1 + y^2 - 2yz + z^2 - 2y^2z^2 + y^4z^2 - 2y^3z^3 + y^2z^4 + y^4z^4)$$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ta có

$$y^4z^2 + y^2z^4 \geq 2y^3z^3, \quad y^4z^4 + 1 \geq 2y^2z^2 \quad \text{và} \quad y^2 + z^2 \geq 2yz$$

Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x \leq 0$

Do đó $f(x) \geq 0, \forall x, y, z$. ĐPCM.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và x, y, z thỏa mãn:

$$a^2x + b^2y + c^2z = 0. \text{ Chứng minh rằng: } xy + yz + zx \leq 0.$$

Lời giải:

* Nếu trong ba số x, y, z có một số bằng 0, chẳng hạn $x = 0 \Rightarrow b^2y = -c^2z$.

$$\Rightarrow xy + yz + zx = yz = -\frac{c^2}{b^2}z^2 \leq 0.$$

$$* \quad x, y, z \neq 0. \text{ Do } a^2x + b^2y + c^2z = 0 \Rightarrow x = -\frac{b^2y + c^2z}{a^2}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 0 \Leftrightarrow -(y+z)\frac{b^2y + c^2z}{a^2} + yz \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(y) = b^2y^2 + (b^2 + c^2 - a^2)yz + c^2z^2 \geq 0.$$

$$\text{Tam thức } f(y) \text{ có } \Delta_y = [(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2]z^2.$$

$$\forall i \begin{cases} |b-c| < a \\ b+c > a \end{cases} \Rightarrow -2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$$

$$\Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < 4c^2b^2 \Rightarrow \Delta_y \leq 0, \forall z \Rightarrow f(y) \geq 0 \quad \forall y, z.$$

Ví dụ 4: (BĐT Bunhiacôpski) Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Lời giải:

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Rightarrow$ BĐT hiển nhiên đúng.

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Xét tam thức :

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$= (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \Delta = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

$$\text{Đẳng thức có } \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.104: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xy - 4xz - 12yz - 2z + 1 \geq 0.$$

A. $-\frac{2}{3} \leq y$

B. $y \leq 0$

C. $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$

D. $\begin{cases} y < -\frac{2}{3} \\ y > 0 \end{cases}$

Lời giải:

Bài 4.104: BĐT đã cho đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ tam thức $f(x) \geq 0 \quad \forall x, z$

(Trong đó $f(x) = x^2 + 2(3y - 2z)x + 9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1$)

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (3y - 2z)^2 - (9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1) = -z^2 + 2(3y + 1)z - 1 \leq 0 \quad \forall z$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_z = (3y + 1)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y(3y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq y \leq 0.$$

Vậy $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.105: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $x + y + z \geq xy + yz + zx$.

Lời giải:

Bài 4.105: Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \leq 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{4 - yz}{y + z + yz}$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{4 - yz}{y + z + yz} + y + z \geq (y + z) \frac{4 - yz}{y + z + yz} + yz$$

$$\Leftrightarrow f(y) = (1 + z - z^2)y^2 + (z^2 + z - 4)y + (z - 2)^2 \geq 0.$$

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a = 1 + z - z^2 > 0$ (do $z \leq 1$) và có biệt thức:

$$\Delta = z(z - 1)^2(5z - 8) \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0 \quad \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc $(x; y; z) = (2; 2; 0)$ và các hoán vị.

Bài 4.106: Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$xzy + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z) .$$

Lời giải:

Bài 4.106: Trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y . Khi đó ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1 \Rightarrow xyz \geq xz + yz - z .$$

$$\Rightarrow xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 .$$

Nên ta chứng minh:

$$xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = 2z^2 + (x + y - 6)z + 2(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 8 \geq 0 .$$

Tam thức $f(z)$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta_z = -15x^2 + 2(y+14)x - 15y^2 + 28y - 28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x , có $a = -15 < 0$ và $\Delta_x = -224(y-1)^2 \leq 0 \Rightarrow \Delta_z \leq 0 \Rightarrow f(z) \geq 0$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

A.2

B.3

C.4

D.5

Lời giải:

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

HD: Do $S = x + 3y \Rightarrow x = S - 3y$, thay vào giả thiết $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được

$$50y^2 - 30Sy + 5S^2 - 5S + 8 \leq 0(*)$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta \geq 0$, tức là

$$900S^2 - 4.50.(5S^2 - 5S + 8) \geq 0$$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2 + 1000S - 1600 \leq 0$

$$\text{hay } 100S^2 - 1000S + 1600 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq S \leq 8$$

Khi $S = 2$ thay vào (*) được $50y^2 - 60y + 18 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$ nên $x = S - 3y = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$

Khi $S = 8$ thay vào (*) được $50y^2 - 240y + 288 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x = S - 3y = 8 - \frac{36}{5} = \frac{4}{5}$

$$\max S = 8, \min S = 2$$

Bài 4.108: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4a - 3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + 3b$.

A. $\frac{-9 + 45\sqrt{13}}{18}$

B. $\frac{-9 + 5\sqrt{13}}{18}$

C. $\frac{-9 + 4\sqrt{13}}{18}$

D. $\frac{-9 + 45\sqrt{13}}{8}$

Lời giải:

Bài 4.108: Ta có: $P = 2a + 3b \Rightarrow b = \frac{P - 2a}{3}$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$$a^2 + \left(\frac{P - 2a}{3}\right)^2 = 4a - 3\left(\frac{P - 2a}{3}\right) \Leftrightarrow 13a^2 - 2(27 + 2P)a + 9P + P^2 = 0$$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a. Tức là ta phải có:

$$\Delta' = -9P^2 - 9P + 729 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9 - 45\sqrt{13}}{18} \leq P \leq \frac{-9 + 45\sqrt{13}}{18}$$

Bài 4.109: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất $P = \frac{x + y - 2}{z + 2}$

A.0

B.1

C.2

D.3

Lời giải:

Bài 4.109: Từ điều kiện ta có

$$x^2 + y^2 = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = 5 - z^2 \Rightarrow (x + y)^2 = 10 - 2z^2 - (3 - z)^2$$

$$\text{Do đó } (x + y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$$

$$\text{Để thấy } z \neq -2. \text{ Ta có } P(z + 2) + 2 = x + y$$

$$\text{Do đó } [P(z + 2) + 2]^2 = 1 + 6z - 3z^2$$

$$\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 + 4(z+2)P + 4 = 1 + 6z - 3z^2 \Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi

$$\Delta'_z \geq 0 \Leftrightarrow (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 + 8P + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{23} \leq P \leq 0$$

Ta có $P = 0$ khi $x = 2, y = 0, z = 1$

$$P = -\frac{36}{23} \text{ khi } x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$$

Bài 4.110: Cho a, b, c là số thực. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c-ab-bc-ca+1)^2 + (ab+bc+ca-2)^2 \geq 3$$

Lời giải:

Bài 4.110: Nếu $\begin{cases} ab+bc+ca \leq 2-\sqrt{3} \\ ab+bc+ca \geq 2+\sqrt{3} \end{cases}$ thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2-\sqrt{3} \leq ab+bc+ca \leq 2+\sqrt{3}$. Ta đặt $x = a+b+c, y = ab+bc+ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2(x-y+1)^2 + (y-2)^2 \geq 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3 \geq 0.$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3$. Ta dễ dàng tính được

$$\Delta'_{f(x)} = 4(y-1)^2 - 2(3y^2 - 8y + 3) = -2y^2 + 8y - 2 = -2\left[y - (2-\sqrt{3})\right]\left[y - (2+\sqrt{3})\right] \leq 0.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 4.111: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Chứng minh rằng

$$7a + 5b + 12ab \leq 9.$$

Lời giải:

Bài 4.111: Xét tam thức bậc hai $f(a) = 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3$ với b là tham số

$$\text{Ta có } \Delta_f = (4b+7)^2 - 36(7b^2 - 5b + 3) = -59(2b-1)^2 \leq 0$$

$$\text{Suy ra } f(a) \geq 0 \Leftrightarrow 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab - 9 \leq 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6$$

Theo giả thiết ta có $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$ nên $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

Bài 4.112: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

A. $\max P = \frac{45}{18}$ B. $\max P = \frac{49}{148}$ C. $\max P = \frac{95}{148}$ D. $\max P = \frac{495}{148}$

Lời giải:

Bài 4.112: Để ý rằng, với giả thiết $x + y + z = 1$ thì

$$P = 9xy + 10yz + 11zx = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được: $P = -11x^2 - 10y^2 + 11x + 10y - 12xy$

$$\text{Tương đương với } 11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*)$$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn x , do điều kiện tồn tại của x nên suy ra $(*)$ phải có nghiệm, tức

$$\Delta = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \geq 0$$

$$\text{Hay } -296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0. \text{ Tương đương } P \leq -\frac{74}{11}\left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296}\right)$$

$$\text{Ta có } y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \geq -\frac{5445}{10952} \text{ Suy ra } P \leq \left(-\frac{74}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5445}{10952}\right) = \frac{495}{148}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{495}{148}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 1: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty; 0]$. B. $[8; +\infty)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $[6; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 1 \end{cases}.$$

Câu 2: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{5}{3} \\ m > 1 \end{cases}.$$

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. B. $[2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty).$$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } 2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty).$$

Câu 5: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $(1; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}.$$

Câu 6: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $-1 \leq x < 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$.

B. $-2 \leq x < 1$.

C. $-4 \leq x < -3$ hoặc $-1 \leq x < 3$.

D. $-1 \leq x \leq 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 7: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi hệ sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (do $2x^2 - 3x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} -1(2x^2 - 3x + 2) \leq x^2 + 5x + m \\ x^2 + 5x + m < 7(2x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 \quad (1) \\ 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \quad (2) \end{cases} \text{ có tập nghiệm là } \mathbb{R}$$

Ta có (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -13 + 13m < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (3)

(2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$ (4)

Từ (2) và (4), ta có $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Câu 8: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m < -\frac{4}{3}$. D. $m > \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $m = -1$ không thỏa mãn.

$$\text{Với } m \neq -1, (m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ -3m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Câu 9: Với giá trị nào của a thì bất phương trình $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Để bất phương trình } ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 10: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $x^2 - x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$

- Câu 11:** Tìm giá trị nguyên của k để bất phương trình $x^2 - 2(4k - 1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là
- A. $k = 2$. B. $k = 3$. C. $k = 4$. D. $k = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (4k - 1)^2 - 15k^2 + 2k + 7 < 0 \Leftrightarrow 2 < k < 4$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

- Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để mọi $x > 0$ đều thỏa bất phương trình $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2$?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + m)^2 - (x^2 - 3x - m)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4x(2x + m)(x - 1) \geq 0$$

Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu

TH1: $-\frac{m}{2} \geq 1$

x	$-\infty$	0	1	$-\frac{m}{2}$	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
$2x + m$	-		-		0
$f(x)$	-	0	+	0	-

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

TH 2: $-\frac{m}{2} < 1$

x	$-\infty$	0	$-\frac{m}{2}$	1	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+

$2x+m$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy có 1 giá trị

Câu 13: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

A.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

B.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Hệ số $a = -1 < 0$

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có đáp án C là đáp án cần tìm.

Câu 14: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

A.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

B.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

C.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

D.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam thức có 1 nghiệm $x = 3$ và hệ số $a = -1 < 0$

Vậy đáp án cần tìm là C

Câu 15: Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = x^2 + 12x + 36$?

A.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

B.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

C.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

D.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam thức có một nghiệm $x = -6, a = 1 > 0$ đáp án cần tìm là C

Câu 16: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = x^2 - bx + 3$ có nghiệm khi $b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2\sqrt{3} \\ b > 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 17: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -\frac{3}{5} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 18: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left[-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Câu 19: Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$. C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Câu 21: Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Câu 22: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $(1; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}.$

Câu 23: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $-1 \leq x < 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}.$

B. $-2 \leq x < 1.$

C. $-4 \leq x < -3$ hoặc $-1 \leq x < 3.$

D. $-1 \leq x \leq 1$ hoặc $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ -2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}.$

Câu 24: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7.$

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1.$

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}.$

C. $m \leq -\frac{5}{3}.$

D. $m < 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi hệ sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (do $2x^2 - 3x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

$\begin{cases} -1(2x^2 - 3x + 2) \leq x^2 + 5x + m \\ x^2 + 5x + m < 7(2x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 \quad (1) \\ 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

Ta có (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -13 + 13m < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (3)

(2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$ (4)

Từ (2) và (4), ta có $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Câu 25: Khi xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có

A. $f(x) > 0$ khi $-7 < x < -1$ hoặc $1 < x < 3$.

B. $f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

C. $f(x) > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.

D. $f(x) > 0$ khi $x > -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7; x = 3$ và $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f(x) > 0$ khi $x < -7$ hoặc $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 26: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m < -1$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m > \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $m = -1$ không thỏa mãn.

Với $m \neq -1$, $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ -3m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 27: Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m-3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m > \frac{3}{2}$.

B. $m > \frac{3}{4}$.

C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$.

D. $1 < m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m-3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 12 < 0 \\ \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Câu 28: Với giá trị nào của a thì bất phương trình $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Để bất phương trình } ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$$x^2 - x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Câu 30: Cho $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

- A. $-14 < m < 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$.
C. $-2 < m < 14$. D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+2)^2 + 8(m-4) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m - 28 < 0 \\ \Leftrightarrow -14 < m < 2.$$

Câu 31: Bất phương trình $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$ có nghiệm là

- A. $\left(-2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (0, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$. B. $x \notin \{-2, 0, 2\}$.
C. $-2 < x < 0$. D. $0 < x < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x-2)(x+2) - 2x(x-2)}{(x-2)x(x+2)} \leq 0$.

$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 6x + 4}{(x-2)x(x+2)} \leq 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	2	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\left(-2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (0, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$.

Câu 32: Tập nghiệm của bất phương trình $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| < 1$ là

A. $S = (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty)$.

B. $S = (-\infty, -4)$.

C. $S = (-1, 1)$.

D. $S = (4, +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq \pm 2$

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3x}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{x^2-4} > -1 \\ \frac{3x}{x^2-4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{x^2-4} + 1 > 0 \\ \frac{3x}{x^2-4} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4} > 0 \\ \frac{-x^2+3x+4}{x^2-4} < 0 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu ta được nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x < -4 \\ -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: $S = (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty)$.

Câu 33: Tìm giá trị nguyên của k để bất phương trình $x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $k = 2$.

B. $k = 3$.

C. $k = 4$.

D. $k = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (4k-1)^2 - 15k^2 + 2k + 7 < 0 \Leftrightarrow 2 < k < 4$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để mọi $x > 0$ đều thỏa bất phương trình $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + m)^2 - (x^2 - 3x - m)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4x(2x + m)(x - 1) \geq 0$$

Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu

TH1: $-\frac{m}{2} \geq 1$

x	$-\infty$	0		1		$-\frac{m}{2}$	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$2x+m$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

TH 2: $-\frac{m}{2} < 1$

x	$-\infty$	0		$-\frac{m}{2}$		1	$+\infty$
$4x$	-	0	+		+		+
$2x+m$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Từ Bảng xét dấu ta thấy để BPT nghiệm đúng với $x > 0$ thì $-\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy có 1 giá trị

Câu 35: Bất phương trình $(|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} -7 < x < -2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ 4 < x < 5 \end{cases}$.

D.

$\begin{cases} -3 < x \leq -2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối giải BPT trong từng khoảng ta được nghiệm là A.

Cách khác:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} |x-1|-3 > 0 \\ |x+2|-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 3 \\ x-1 < -3 \\ -5 < x+2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -2 \\ -7 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < -2$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} |x-1|-3 < 0 \\ |x+2|-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x-1 < 3 \\ x+2 > 5 \\ x+2 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 4 \\ x > 3 \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4$$

Câu 36: Bất phương trình: $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$ có nghiệm là:

- A. $3 < x \leq 5$. B. $2 < x \leq 3$. C. $-5 < x \leq -3$. D. $-3 < x \leq -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+6x-5 \geq 0 \\ 8-2x < 0 \\ 8-2x \geq 0 \\ -x^2+6x-5 > (8-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \\ x \leq 4 \\ -5x^2+38x-69 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \\ x \leq 4 \\ 3 < x < \frac{25}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < x \leq 5.$$

Câu 38: Bất phương trình: $\sqrt{2x+1} < 3-x$ có nghiệm là:

- A. $\left[-\frac{1}{2}; 4-2\sqrt{2}\right)$. B. $(3; 4+2\sqrt{2})$. C. $(4-2\sqrt{2}; 3)$. D. $(4+2\sqrt{2}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{2x+1} < 3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ 2x+1 < (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \\ -x^2+8x-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \\ \begin{cases} x > 4+2\sqrt{2} \\ x < 4-2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 4-2\sqrt{2}.$$

Câu 39: Nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$ là:

- A.** $-2 \leq x \leq 3$. **B.** $-1 \leq x \leq 3$. **C.** $1 \leq x \leq 2$ hoặc $x = -1$. **D.** $1 \leq x \leq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 2, \quad (I).$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}. \quad (II)$$

Từ (I) và (II) suy ra nghiệm của hệ là $S = [1; 2] \cup \{-1\}$.

Câu 40: Bất phương trình: $|x^4 - 2x^2 - 3| \leq x^2 - 5$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0.** **B. 1.**
- C. 2.** **D. Nhiều hơn 2 nhưng hữu hạn.**

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 \geq 0$

Ta có $|t^2 - 2t - 3| \leq t - 5$.

Nếu $t^2 - 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 3 \end{cases}$ thì ta có $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$ loại

Nếu $t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 3$ thì ta có $-t^2 + t + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \\ t \geq \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$ loại.

Câu 41: Cho bất phương trình: $x^2 - 2x \leq |x - 2| + ax - 6$. Giá trị dương nhỏ nhất của a để bất phương trình có nghiệm gần nhất với số nào sau đây:

- A.** 0,5. **B.** 1,6. **C.** 2,2. **D.** 2,6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trường hợp 1: $x \in [2; +\infty)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - (a+3)x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow a \geq x + \frac{8}{x} - 3 \geq 4\sqrt{2} - 3 \approx 2,65 \quad \forall x \in [2; +\infty), \text{ dấu "=" xảy ra}$$

khi $x = 2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $x \in (-\infty; 2)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - (a+1)x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x + \frac{4}{x} - 1 \text{ khi } x \in (0; 2) & (1) \\ a \leq x + \frac{4}{x} - 1 \text{ khi } x \in (-\infty; 0) & (2) \end{cases}. \text{ Giải (1) ta được } a > 3$$

(theo bất đẳng thức cauchy).

$$\text{Giải (2): } a \leq x + \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow a \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 1 = -5.$$

Vậy giá trị dương nhỏ nhất của a gần với số 2,6.

- Câu 42:** Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} = 2 - \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}$ là:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x \geq -7$.

Đặt $t = \sqrt{x+7}$, điều kiện $t \geq 0$.

$$\text{Ta có } \sqrt{t^2+1-2t} = 2 - \sqrt{t^2-6-t} \Leftrightarrow |t-1| = 2 - \sqrt{t^2-t-6}$$

$$\text{Nếu } t \geq 1 \text{ thì ta có } 3-t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 9-6t+t^2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Nếu } t < 1 \text{ thì ta có } 1+t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 1+2t+t^2 \\ t \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{7}{3} \text{ (l)}.$$

- Câu 43:** Nghiệm của bất phương trình: $(x^2 + x - 2)\sqrt{2x^2 - 1} < 0$ là:

$$\text{A. } \left(1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{B. } \left\{-4; -5; -\frac{9}{2}\right\}.$$

$$\text{C. } \left(-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right).$$

$$\text{D. } (-\infty; -5] \cup \left[5; \frac{17}{5}\right] \cup \{3\}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$(x^2 + x - 2)\sqrt{2x^2 - 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right).$$

Câu 44: Bất phương trình $\frac{2x^2 - x - 1}{|x+1| - 2x} \leq -2x^2 + x + 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Nhiều hơn 3 nhưng hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn B

- Nếu $x \geq -1$ thì $\frac{2x^2 - x - 1}{|x+1| - 2x} \leq -2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{1 - x} \leq -2x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1 - (1 - x)(-2x^2 + x + 1)}{1 - x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1 - (-2x^2 + x + 1 + 2x^3 - x^2 - x)}{1 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3 + 5x^2 - x}{1 - x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(-2x^2 + 5x - 1)}{1 - x} \leq 0$$

Cho $x = 0$; $-2x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$; $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Lập bảng xét dấu ta có: $0 \leq x \leq \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \vee 1 < x \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$.

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là 0; 2

- Nếu $x < -1$ thì $\frac{2x^2 - x - 1}{|x+1| - 2x} \leq -2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{-1 - 3x} \leq -2x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1 - (-1 - 3x)(-2x^2 + x + 1)}{-1 - 3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1 - (2x^2 - x - 1 + 6x^3 - 3x^2 - 3x)}{-1 - 3x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^3 + x^2 + 3x}{-1 - 3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(-6x^2 + x + 3)}{-1 - 3x} \leq 0$$

$$\text{Cho } x = 0 ; -6x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{73}}{12} \\ x = \frac{1-\sqrt{73}}{12} \end{cases} ; -3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Lập bảng xét dấu ta có: } \frac{1-\sqrt{73}}{12} \leq x < -\frac{1}{3} \vee 0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{73}}{12}.$$

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là 0 (loại)

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Câu 45: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > m \end{cases}.$$

Do đó hệ có nghiệm khi $m < 1$.

Câu 46: Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

A. $m < -\frac{7}{2}$.

B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m+12 = 0 (*) \end{cases}.$$

Giải sử phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , theo Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = 4m+12 \end{cases}.$$

Để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 , thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và đều lớn hơn -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1+2(m+3)+4m+12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (4m+12) > 0 \\ 6m+19 \neq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3)+2 > 0 \\ 4m+12-2(m+3)+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

Câu 47: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A. $-2 < m < -1$. B. $m > 1$. C. $-5 < m < -3$. D. $-2 < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+1 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1)(m^2+4m-5) > 0 \\ m \neq -1 \\ (x_1-2)+(x_2-2) > 0 \\ (x_1-2)(x_2-2) > 0 \end{cases} \quad \text{Theo Vi-et ta có}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2+4m-5}{m+1} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(-m^2-5m-6) > 0 \\ m \neq -1 \\ \frac{2(m-1)}{m+1} - 4 > 0 \\ \frac{m^2+4m-5}{m+1} - 2 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 1 \\ m < -3 \\ m \neq -1 \\ -3 < m < -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Câu 48: Nghiệm dương nhỏ nhất của bất phương trình $\left| x^2 - 4x - 5 \right| + 2x + 9 \leq \left| x^2 - x + 5 \right|$ gần nhất với số nào sau đây

A. 2,8.

B. 3.

C. 3,5.

D. 4,5.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối giải BPT trên ta được tập nghiệm là

$$\begin{cases} x = -1 \\ x \geq \frac{9}{2} \end{cases} \text{ vậy nghiệm dương nhỏ nhất là } x = 4,5, \text{ đáp án D}$$

Câu 49: Tìm m để $\left|4x - 2m - \frac{1}{2}\right| > -x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m$ với mọi x ?

A. $m > 3$.

B. $m < \frac{3}{2}$.

C. $m > \frac{3}{2}$.

D. $-2 < m < 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy để $\left|4x - 2m - \frac{1}{2}\right| > -x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m$ đúng với mọi x thì $-x^2 + 2x + \frac{1}{2} - m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Hay } -x^2 + 2x + \frac{1}{2} < m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} - m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Câu 50: Cho bất phương trình: $|x^2 + x + a| + |x^2 - x + a| \leq 2x$ (1). Khi đó khẳng định nào sau đây đúng nhất?

A. (1) có nghiệm khi $a \leq \frac{1}{4}$.

B. Mọi nghiệm của (1) đều không âm.

C. (1) có nghiệm lớn hơn 1 khi $a < 0$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |x^2 + x + a| + |x^2 - x + a| \leq 2x \Leftrightarrow \left| \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{4}\right) \right| + \left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{4}\right) \right| \leq 2x$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên để BPT có nghiệm thì $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ nên B đúng.

Với $a > \frac{1}{4}$ BPT $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2a \leq 0$ vô nghiệm hay BPT có nghiệm khi $a \leq \frac{1}{4}$ nên A đúng.

Khi $a < 0$ ta có $x^2 + x + a = 0, x^2 - x + a = 0$ có 4 nghiệm xếp thứ tự $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Với $x > x_4$ hoặc $x < x_1$ ta có BPT: $2x^2 - 2x + 2a \leq 0$

Có nghiệm $x_1 < x < x_2$ và $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 < 0$

Nên tồn tại nghiệm lớn hơn 1 vậy C đúng

Câu 51: Cho bất phương trình: $x^2 + 2|x + m| + 2mx + 3m^2 - 3m + 1 < 0$. Để bất phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của tham số m là:.

- A. $-1 < m < -\frac{1}{2}$. B. $-1 < m < \frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2} < m < 1$. D. $\frac{1}{2} < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $x^2 + 2|x + m| + 2mx + 3m^2 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow (x + m)^2 + 2|x + m| + 2m^2 - 3m + 1 < 0$
 $\Leftrightarrow (|x + m| + 1)^2 < -2m^2 + 3m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2m^2 + 3m > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$

Câu 53: Tìm a để bất phương trình $x^2 + 4x \leq a(|x + 2| + 1)$ có nghiệm?

- A. Với mọi a . B. Không có a . C. $a \geq -4$. D. $a \leq -4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $a + 1$

$x^2 + 4x \leq a(|x + 2| + 1) \Leftrightarrow (x + 2)^2 - a|x + 2| - a - 4 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 - a|x + 2| + \frac{a^2}{4} \leq \frac{a^2}{4} + a + 4 \Leftrightarrow \left(x + 2 - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4} + a + 4$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{a^2}{4} + a + 4 \geq 0$ luôn đúng với $\forall a$.

Câu 54: Để bất phương trình $\sqrt{(x + 5)(3 - x)} \leq x^2 + 2x + a$ nghiệm đúng $\forall x \in [-5; 3]$, tham số a phải thỏa điều kiện:

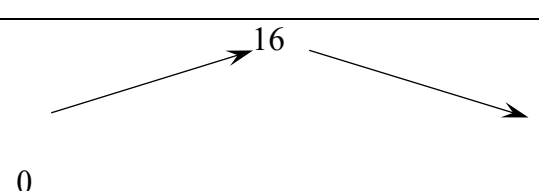
- A. $a \geq 3$. B. $a \geq 4$. C. $a \geq 5$. D. $a \geq 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\sqrt{(x + 5)(3 - x)} \leq x^2 + 2x + a \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 2x + 15} - x^2 - 2x \leq a$

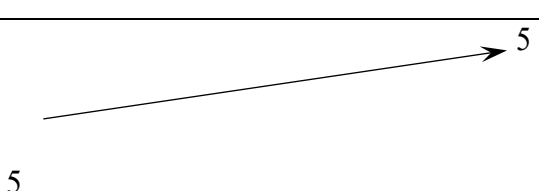
Đặt $t = \sqrt{-x^2 - 2x + 15}$, ta có bảng biến thiên

x	-5	-1	3
$-x^2 - 2x + 15$			
	0		0

Suy ra $t \in [0; 4]$. Bất phương trình đã cho thành $t^2 + t - 15 \leq a$.

Xét hàm $f(t) = t^2 + t - 15$ với $t \in [0; 4]$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	4
$f(t)$		
	-15	

Bất phương trình $t^2 + t - 15 \leq a$ nghiệm đúng $\forall t \in [0; 4]$ khi và chỉ khi $a \geq 5$.

Câu 55: Với giá trị nào của m thì phương trình $\sqrt{x^2 - 2m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ vô nghiệm?

- A. $m \leq \frac{2}{3}$. B. $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$. C. $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 2m \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2m \geq 0 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{x^2 - 2m} = x - 2\sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2m = -3x^2 + 4 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = m \quad (1) \quad \text{với}$$

$$x \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right] \cup \left[1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]. \text{ Phương trình đã cho vô nghiệm khi phương trình (1) vô}$$

nghiệm khi $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Câu 56: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3|x|x - m^2 + 6m \geq 0 \end{cases}$

Để hệ có nghiệm, các giá trị thích hợp của tham số m là:

A. $2 \leq m \leq 8$.

B. $-8 \leq m \leq 2$.

C. $-2 \leq m \leq 8$.

D.

$-8 \leq m \leq -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Trường hợp 1: $x \in [0; 4]$, bất phương trình hai trở thành $x^3 - 3x^2 - m^2 + 6m \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq x^3 - 3x^2$, mà $x^3 - 3x^2 \leq 16 \forall x \in [0; 4]$ suy ra $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq 16$
 $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 8$.

Trường hợp 2: $x \in [-1; 0)$, bất phương trình hai trở thành $x^3 + 3x^2 - m^2 + 6m \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq x^3 + 3x^2$, mà $x^3 + 3x^2 \leq 2 \forall x \in [-1; 0)$ suy ra $\Leftrightarrow m^2 - 6m \leq 2$
 $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{11} \leq m \leq 3 + \sqrt{11}$.

Vậy $-2 \leq m \leq 8$ thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 57: Hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m^2 + 3)x + 2(m^2 + 1) \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm biểu diễn trên trục số có độ dài bằng 1, với giá trị của m là:

A. $m = 0$.

B. $m = \sqrt{2}$.

C. $m = -\sqrt{2}$.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thay $m = 0$ vào ta có $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. A đúng

Thay $m = \sqrt{2}$ vào ta có $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$. B đúng

Tương tự C đúng.

Câu 58: Đề phương trình: $|x + 3|(x - 2) + m - 1 = 0$ có đúng một nghiệm, các giá trị của tham số m là:

A. $m < 1$ hoặc $m > \frac{29}{4}$.

B. $m < -\frac{21}{4}$ hoặc $m > 1$.

C. $m < -1$ hoặc $m > \frac{21}{4}$.

D. $m < -\frac{29}{4}$ hoặc $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $|x+3|(x-2)+m-1=0 \Leftrightarrow m=1-|x+3|(x-2)$

Xét hàm số $y=1-|x+3|(x-2)$

Ta có $y=\begin{cases} -x^2-x+7 & \text{khi } x \geq -3 \\ x^2+x-5 & \text{khi } x < -3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của $y=1-|x+3|(x-2)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$		$\frac{29}{4}$	$-\infty$

$\nearrow$ (from $+\infty$ to 1)
 $\nwarrow$ (from 1 to $\frac{29}{4}$)
 $\searrow$ (from $\frac{29}{4}$ to $-\infty$)

Dựa vào bảng trên phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{29}{4} \end{cases}$

Câu 59: Phương trình $|x-2|(x+1)+m=0$ có ba nghiệm phân biệt, giá trị thích hợp của tham số m là:

- A. $0 < m < \frac{9}{4}$. B. $1 < m < 2$. C. $-\frac{9}{4} < m < 0$. D. $-2 < m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét $|x-2|(x+1)+m=0 \quad (1)$

Với $x \geq 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x+1)+m=0 \Leftrightarrow m=-x^2+x+2$

Với $x < 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow -(x-2)(x+1)+m=0 \Leftrightarrow m=x^2-x-2$

Đặt $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2-x-2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{9}{4}$	0
				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-\frac{9}{4} < m < 0$.

Câu 60: Đề phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $|10x - 2x^2 - 8| = x^2 - 5x + a$. Giá trị của tham số a là:

- A. $a = 1$. B. $a \in (1; 10)$. C. $a \in \left[4; \frac{45}{4}\right]$. D. $4 < a < \frac{43}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình: $|10x - 2x^2 - 8| = x^2 - 5x + a$ (1)

$$\Leftrightarrow a = |10x - 2x^2 - 8| - x^2 + 5x$$

Xét $f(x) = |10x - 2x^2 - 8| - x^2 + 5x$

$$= \begin{cases} (10x - 2x^2 - 8) - x^2 + 5x & \text{khi } 10x - 2x^2 - 8 \geq 0 \\ -(10x - 2x^2 - 8) - x^2 + 5x & \text{khi } 10x - 2x^2 - 8 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x^2 + 15x - 8 & \text{khi } 1 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 5x + 8 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{43}{4}$		$+\infty$

Bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow 5x^2 - x + m > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 20m < 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Câu 63: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 64: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m > \frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn C.

- Với $m = -1$ ta có: $x > -1$ không thỏa mãn.

- Với $m \neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m^2 - 4(m+1)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 65: Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m < -\frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m > -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn A.

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ (do } (m+1)^2 + m^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m(-3m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1^2 - 3x_1 + m}{x_2} + \frac{x_2^2 - 3x_2 + m}{x_1} \leq 2$.

A. $1 < m < 2$.

B. $m \geq -2$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ (1).

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$.

Mặt khác x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ nên $x_1^2 - 2x_1 + m = 0$ và $x_2^2 - 2x_2 + m = 0$.

$$\text{Khi đó } \frac{x_1^2 - 3x_1 + m}{x_2} + \frac{x_2^2 - 3x_2 + m}{x_1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x_1}{x_2} + \frac{-x_2}{x_1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4 - 2m}{m} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $0 < m \leq 1$.

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.

A. Không có giá trị của m .

B. $m \geq 2$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \quad (1).$

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}.$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 \leq 16 &\Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m+2) \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m^2 - 12m - 16 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (m-2)(8m^2 + 10m + 8) \leq 0 \Leftrightarrow m-2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2. \end{aligned}$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Câu 68: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 USD.

B. 160 USD.

C. 40 USD.

D. 240

USD.

Lời giải

Chọn A.

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y = (120-x)(x-40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x-80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 80.$$

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.

TỔNG HỢP LẦN 1.

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 4x + 4 > 0$ là:

A. $(2; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6x + 9 > 0$ là:

A. $(3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 6x + 9 > 0$ là:
A. $(3; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 2x + 1 > 0$ là:
A. $(1; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x + 1 > 0$ là:
A. $(1; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Câu 6.** Tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi
A. $x < -3$ hoặc $x > -1$. **B.** $x < -1$ hoặc $x > 3$. **C.** $x < -2$ hoặc $x > 6$. **D.** $-1 < x < 3$.
- Câu 7.** Tam thức $y = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi
A. $x < -13$ hoặc $x > 1$. **B.** $x < -1$ hoặc $x > 13$. **C.** $-13 < x < 1$. **D.** $-1 < x < 13$.
- Câu 8.** Tam thức $y = -x^2 - 3x - 4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi
A. $x < -4$ hoặc $x > -1$. **B.** $x < 1$ hoặc $x > 4$. **C.** $-4 < x < -1$. **D.** $x \in \mathbb{R}$.
- Câu 9.** Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x < 2$?
A. $y = x^2 - 5x + 6$. **B.** $y = 16 - x^2$.
C. $y = x^2 - 2x + 3$. **D.** $y = -x^2 + 5x - 6$.
- Câu 10.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 1 > 0$ là:
A. $(1; +\infty)$. **B.** $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. **D.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x - 1 > 0$ là:
A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** $(-\infty; -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}; +\infty)$.
- Câu 12.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4x + 4 > 0$ là:
A. $(2; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Câu 13.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 < 0$ là:
A. $(-\infty; 2\sqrt{2})$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}$. **C.** $\emptyset$. **D.** $\mathbb{R}$.
- Câu 14.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - x - 6 < 0$ là:

A. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

B. $(-3; 2)$.

C. $(-2; 3)$.

D. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 < 9$ là:

A. $(-3; 3)$.

B. $(-\infty; -3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 \geq 0$ là:

A. $(3\sqrt{2}; +\infty)$.

B. $[3\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $\emptyset$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} \leq 0$ là:

A. $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

B. $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.

C. $(-\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

D.

$[-\sqrt{3}; -\sqrt{2}]$.

Câu 18. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$.

B. Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$.

C. Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

D. Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 2x - 8}{|x + 1|} < 0$ là:

A. $(-4; -1) \cup (-1; 2)$.

B. $(-4; -1)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-2; -1) \cup (-1; 1)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2 - 3x + 1}{|4x - 3|} < 0$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cap \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{8 - x^2}$ là

A. $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

B. $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

C. $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5-4x-x^2}$ là

- A. $[-5;1]$.
B. $\left[-\frac{1}{5};1\right]$.
C. $(-\infty;-5] \cup [1;+\infty)$.
D. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right] \cup [1;+\infty)$.

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5x^2-4x-1}$ là

- A. $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right] \cup [1;+\infty)$.
B. $\left[-\frac{1}{5};1\right]$.
C. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right] \cup [1;+\infty)$.
D. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right] \cup [1;+\infty)$.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{2}{x^2+5x-6}}$ là:

- A. $(-\infty;-6] \cup [1;+\infty)$.
B. $(-6;1)$.
C. $(-\infty;-6) \cup (1;+\infty)$.
D. $(-\infty;-1) \cup (6;+\infty)$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2+x+12| > x^2+x+12$ là

- A. $\emptyset$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $(-4;-3)$.
D. $(-\infty;-4) \cup (-3;+\infty)$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2-x-12| > x+12-x^2$ là

- A. $(-\infty;-3) \cup (4;+\infty)$.
B. $(-\infty;-4) \cup (3;+\infty)$.
C. $(-6;-2) \cup (-3;4)$.
D. $(-4;3)$.

Câu 27. Biểu thức $(m^2+2)x^2-2(m-2)x+2$ luôn nhận giá trị dương khi và chỉ khi:

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$.
B. $m < -4$ hoặc $m > 0$.
C. $-4 < m < 0$.
D. $m < 0$ hoặc $m > 4$.

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2+x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là

- A. $(3;+\infty)$.
B. $[3;+\infty)$.
C. $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.
D. $(1;2) \cup (3;+\infty)$.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ là

A. $(-3; +\infty)$.

B. $(-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

C. $(-3; 1] \cup (2; +\infty)$.

D. $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x} - 2x < 0$ là

A. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left[0; \frac{1}{4}\right)$.

D. $\{0\} \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x} < 2$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{m} > -1$ là

A. $(-2; 0)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + x - 1}{1 - x} > -x$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x} - 3x \leq 0$ là

A. $\left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

B. $\left[0; \frac{1}{9}\right]$.

C. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

D. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{4}$ là

A. $(0; 16]$.

B. $[0; 16]$.

C. $(0; 4]$.

D. $[16; +\infty)$.

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \geq 3$ là

A. $[1; +\infty)$.

B. $[0; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 1]$.

Câu 37. Phương trình $(m + 2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$.

B. $-2 < m < \frac{3}{2}$.

C. $m > \frac{3}{2}$.

D. $m < -2$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$ là

A. $\{2; 3\}$.

B. $(2; 3)$.

C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Câu 39. Tập nghiệm của phương trình $|x^2 - 7x + 12| = 7x - x^2 - 12$ là

A. $\{3; 4\}$.

B. $(3; 4)$.

C. $[3; 4]$.

D.

$(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x^2 - 7x + 10|}{\sqrt{x-3}} = \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $[5; +\infty)$.

B. $(3; 5]$.

C. $[2; 5]$.

D. $(5; +\infty)$.

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(2; 6)$.

B. $(2; 5)$.

C. $(-6; -2)$.

D. $(5; 6)$.

Câu 42. Nếu $2 < m < 8$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Chưa xác

định được.

Câu 43. Phương trình $(m+1)x^2 - x - 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

B. $m < -1$ hoặc $m > \frac{3}{4}$.

C. $m > \frac{4}{3}$.

D. $-1 < m < \frac{4}{3}$.

Câu 44. Phương trình $x^2 - mx - 2m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 8$.

C. $-8 \leq m \leq 0$.

D. $m \leq -8$ hoặc $m \geq 0$.

Câu 45. Phương trình $x^2 - mx + m^2 + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

B. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 0$.

C. $-\frac{1}{3} \leq m \leq 0$.

D. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 46. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

A. 0.

B. -4.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 47. Phương trình $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 0$ hoặc $m \geq 1$.

B. $m < 0$ hoặc $m \geq 4$.

C. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

D. $0 < m \leq 1$.

Câu 48. Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$.

B. $-3 < m < 2$.

C. $m > -2$.

D.

$-2 < m < 3$.

Câu 49. Phương trình $x^2 - 4mx + m + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 1$.

B. $-\frac{3}{4} < m < 1$.

C. $m \leq \frac{-3}{4}$ hoặc $m \geq 1$.

D.

$-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Câu 50. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

D. $-3 \leq m \leq 1$.

Câu 51. Phương trình $x^2 - mx - m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $-1 < m < 0$.

B. $-4 \leq m \leq 0$.

C. $-4 < m < 0$.

D. $m < -4$ hoặc $m > 0$.

Câu 52. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m \leq 0 & (1) \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 & (2) \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < -5$.

B. $m > -5$.

C. $m > 5$.

D. $m < 5$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x+4}$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

D. $(-4; +\infty)$.

Câu 54. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x-3} + \sqrt{x^2+5x-6}$ là

A. $[1; +\infty)$.

B. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

D. $\left[-\frac{6}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

Câu 55. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{2x-3}$ là

A. $[1; +\infty)$.

B. $[-2; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 56. Phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m = 2$.

B. $-3 < m < 2$.

C. $m < -2$ hoặc $m > 3$.

D. $-2 < m < 3$.

Câu 57. Hai phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ và $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 1$.

B. $\frac{-3}{4} < m < 1$.

C. $m < \frac{-3}{4}$ hoặc $m > 1$.

D. $\frac{-5}{4} < m < 1$.

Câu 58. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x+3}$ là

A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 59. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

C. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 60. Các giá trị của m để phương trình $3x^2 + (3m-1)x + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $m < 4$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $m < 2$.

D. $m < -2$ hoặc $m > 2$.

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty; -1]$.

B. $[-1; \infty) \setminus \{1\}$.

C. $(-\infty; -1] \cup (1; \infty)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2} > 1$ là:

A. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 63. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{-7}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{-5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 64. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. C. $(1; +\infty)$. D. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 65. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+3}{1-|x|}}$ là

A. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$. D. $[-1; 1]$.

Câu 66. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m^2(x-1) = -2x - 5m + 6$ có nghiệm dương là

A. $(-\infty; -1) \cup (-6; \infty)$. B. $(-1; 6)$. C. $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$. D. $(2; 3)$.

Câu 67. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5-2m}{\sqrt{1-x^2}}$ có nghiệm là

A. $(2; 3)$. B. $\mathbb{R}$. C. $[2; 3]$. D. $(-1; 1)$.

Câu 68. Cho biểu thức $M = x^2 + 3x + 2$, trong đó x là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$. Khi đó

A. $M < 0$. B. $6 < M < 12$.
C. $M > 12$. D. M nhận giá trị bất kì.

Câu 69. Số dương x thỏa mãn bất phương trình $\sqrt{x} < 3x$ khi và chỉ khi

A. $x > 9$. B. $x > \frac{1}{3}$. C. $x < \frac{1}{9}$. D. $x > \frac{1}{9}$.

Câu 70. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình bậc hai $x^2 + 2(m+1)x + 3m = 0$ có nghiệm là

A. $\{0\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $\mathbb{R}$. D. $\emptyset$.

Câu 71. Phương trình $mx^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 8$. B. $m < 0$ hoặc $m \geq 8$.
C. $0 < m \leq 8$. D. $0 \leq m \leq 8$.

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+1} < 2x - 1$ là.

A. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ B. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ D. $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$

Câu 73. Nếu $1 < m < 3$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$ là bao nhiêu.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Chưa xác định được

Câu 74. Nếu $1 < m < 2$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$ là bao nhiêu.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Chưa xác định được

Câu 75. Bất phương trình: $mx^2 - mx + 3 > 0$ với mọi x khi và chỉ khi.

- A. $m \leq 0$ hoặc $m > 12$ B. $m < 0$ hoặc $m > 12$
C. $0 \leq m < 12$ D. $0 < m < 12$

Câu 76. Tam thức $f(x) = 2mx^2 - 2mx - 1$ nhận giá trị âm với mọi x khi và chỉ khi.

- A. $m \leq 2$ hoặc $m > 0$ B. $m < -2$ hoặc $m \geq 0$
C. $-2 < m < 0$ D. $-2 < m \leq 0$

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$ có tập nghiệm là.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

TỔNG HỢP LẦN 2.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

- A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 2. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

- A. $m > \frac{1}{3}$. B. $m < \frac{1}{3}$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Câu 3. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

- A. $m < 1$. B. $m > 2$. C. $m > 3$. D. $1 < m < 3$.

Câu 4. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{-3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(\frac{-3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(\frac{-3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Câu 5. Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m < \frac{-4}{3}$. D. $m > \frac{4}{3}$.

Câu 6. Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m > \frac{3}{4}$. C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$. D. $1 < m < 3$.

Câu 7. Với giá trị nào của a thì bất phương trình ?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

Câu 8. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. B. $[2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 10. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

- A. $1 < m < 2$. B. $1 < m < 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Câu 11. Gọi x_1, x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khẳng định nào sau đúng?

- A. $x_1 + x_2 = -5$. B. $x_1^2 + x_2^2 = 37$. C. $x_1x_2 = 6$. D.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{13}{6} = 0.$$

Câu 12. Các giá trị m làm cho biểu thức $x^2 + 4x + m - 5$ luôn luôn dương là:

- A. $m < 9$. B. $m \geq 9$. C. $m > 9$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 13. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$. C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Câu 15. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau

- A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.
C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Câu 16. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

- A. $m < 6$ và $m \neq 2$.
B. $m < 0$ hoặc $2 < m < 6$.
C. $2 < m < 6$.
D. $m > 6$.

Câu 17. Cho $f(x) = mx^2 - 2x - 1$. Xác định m để $f(x) < 0$ với $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m < -1$.
B. $m < 0$.
C. $-1 < m < 0$.
D. $m < 1$ và $m \neq 0$.

Câu 18. Xác định m để phương trình $(m-3)x^3 + (4m-5)x^2 + (5m+4)x + 2m+4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

- A. $-\frac{25}{8} < m < 0$ hoặc $m > 3$ và $m \neq 12$.
B. $-\frac{25}{8} < m < 0$ hoặc $m > 3$ và $m \neq 4$.
C. $m \in \emptyset$.
D. $0 < m < \frac{5}{4}$.

Câu 19. Cho phương trình $(m-5)x^2 + (m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$.

- A. $m < \frac{22}{7}$.
B. $\frac{22}{7} < m < 5$.
C. $m \geq 5$.
D. $\frac{22}{7} \leq m \leq 5$.

Câu 20. Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < 2$.

- A. $m > 0$.
B. $m < -1$.
C. $-1 < m < 0$.
D. $m > -\frac{1}{4}$.

Câu 21. Cho $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$. Tìm m để $f(x)$ không dương với mọi x .

- A. $m \in \emptyset$.
B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$.
C. $m \in \mathbb{R}$.
D. $m = 6$.

Câu 22. Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

A. $m < -\frac{7}{2}$.

B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

D. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Câu 23. Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2 < m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $-5 < m < -3$.

D.

$-2 < m < 1$.

Câu 24. Cho bất phương trình $(2m+1)x^2 + 3(m+1)x + m+1 > 0$ (1). Với giá trị nào của m thì bất phương trình trên vô nghiệm.

A. $m \neq -\frac{1}{2}$.

B. $-5 < m < -1$.

C. $-5 \leq m \leq -1$.

D. $m \in \emptyset$.

Câu 25. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m+5 = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

A. $-5 < m < -1$.

B. $-1 < m < 5$.

C. $m < -5$ hoặc $m > 1$.

D. $m > -1$ và $m \neq 0$.

Câu 26. Cho $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

A. $-14 < m < 2$.

B. $-14 \leq m \leq 2$.

C. $-2 < m < 14$.

D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Câu 27. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m+2 = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m = 0$.

B. $m < -1$ hoặc $m > -\frac{2}{3}$.

C. $m > -\frac{2}{3}$.

D. $-1 < m < -\frac{2}{3}$.

Câu 28. Cho $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m+4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{11}{4}$.

B. $-1 < m < \frac{11}{4}$.

C. $-\frac{11}{4} < m < 1$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{11}{4}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	A	C	D	C	D	C	B	C	C	B	B	C	C	A	A	B	C

[illegible]

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI-BÁT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Vấn đề 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Câu 1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 3. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Câu 4. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 5. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x)$ không đổi dấu. D. Tồn tại x để $f(x) = 0$.

Câu 6. Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (0; +\infty)$. B. $x \in (-2; +\infty)$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \in (-\infty; 2)$.

Câu 7. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\infty; 2)$. B. $x \in (3; +\infty)$. C. $x \in (2; +\infty)$. D. $x \in (2; 3)$.

Câu 8. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\sqrt{5}; 1)$. B. $x \in (-\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 1)$.

Câu 9. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $x \in [1; 2]$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **D.** $x \in (1; 2)$.

Câu 10. Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$:

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$. **D.** Âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

Câu 12. Tam thức bậc hai $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$.

C. Dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$. **D.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Cho $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ **B.** $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 3]$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ **D.** $f(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$

Câu 14. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau:

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Câu 15. Cho các tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x + 4; g(x) = -x^2 + 3x - 4; h(x) = 4 - 3x^2$. Số tam thức đổi dấu trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ là:

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$. B. $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$.

C. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$ là:

A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. B. $[-1; 7]$.

C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. D. $[-7; 1]$.

Câu 18. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.

A. $S = \emptyset$. B. $S = \{0\}$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là:

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$.

C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 < 0$ là

A. $[1; 4]$. B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 < 0$ là:

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. B. $\emptyset$.

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2 + x - 1 \leq 0$ là

A. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 23. Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2 - x - 12 \leq 0$ là ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 24. Bất phương trình nào sau đây có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. $-3x^2 + x - 1 \geq 0$.

B. $-3x^2 + x - 1 > 0$.

C. $-3x^2 + x - 1 < 0$.

D. $3x^2 + x - 1 \leq 0$.

Câu 25. Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[8; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $[6; +\infty)$.

Vấn đề 2. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 26. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Câu 27. Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 28. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x - 2) \leq 0$.

B. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$.

C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) < 0$.

D. $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x - 2) \geq 0$.

Câu 29. Biểu thức $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$ âm khi

A. $x \in (1; 2)$.

B. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.

C. $x \geq 4$.

D. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$ là

A. $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

B. $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in [-1; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Vấn đề 3. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI
ĐỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Câu 31. Biểu thức $f(x) = \frac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\frac{3}{11}; +\infty\right)$.

B. $x \in \left(-\frac{3}{11}; 5\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.

D. $x \in \left(-5; -\frac{3}{11}\right)$.

Câu 32. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7)$.

B. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.

C. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

D. $S = \left(\frac{3}{4}; 7\right) \cup (7; +\infty)$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 34. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4-x^2}{x^2+5x+6} \leq 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Vấn đề 4. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI
ĐỀ TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 36. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $D = [2; +\infty)$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $D = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 37. Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ xác định là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 38. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (-\infty; 1)$.

C. $D = [-5; 1]$.

D. $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Câu 39. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 - x}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$.

B. $D = [-4; 1]$.

C. $D = (-4; 1)$.

D. $D = (-\infty; 4) \cup (1; +\infty)$.

Câu 40. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.

B. $D = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Câu 41. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 6} + \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$.

A. $D = [-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

B. $D = (-4; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

D. $D = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Câu 42. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$.

A. $D = \left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$. B. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2} \right]$. C. $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty \right)$. D. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2} \right)$.

Câu 43. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.

A. $D = [4; +\infty)$. B. $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

C. $D = (-\infty; -5)$. D. $D = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Câu 44. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$.

A. $D = [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$. B. $D = (-\infty; -4] \cup \left(-1; -\frac{1}{2} \right)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$. D. $D = \left[-4; -\frac{1}{2} \right)$.

Câu 45. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+x-12} - 2\sqrt{2}}$.

A. $D = (-5; 4]$. B. $D = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. D. $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Vấn đề 5. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÔ NGHIỆM – CÓ NGHIỆM – CÓ HAI NGHIỆM PHÂN BIỆT

Câu 46. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$. B. $-3 < m < 1$.

C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $m = -\frac{1}{2}$

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $m = 2$ D. $m > -\frac{3}{5}$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \text{ vô nghiệm ?}$$

- A. $m < 0$. B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Câu 49. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Câu 50. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Câu 51. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm ?

- A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 52. Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. B. $-5 \leq m \leq -1$. C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Câu 53. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm ?}$$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 54. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Câu 55. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 56. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.

C. $0 < m < 28$.

D. $m > 0$.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm ?

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > 1$.

C. $-\frac{3}{4} < m < 1$.

D. $m > -\frac{3}{4}$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt ?}$$

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $2 < m < 6$.

C. $-1 < m < 6$.

D. $-1 < m < 2$.

Câu 59. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Câu 60. Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Vấn đề 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 61. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m > 6$.

B. $m < 6$.

C. $6 > m > 0$.

D. $m > 0$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 < m < 6$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$.

D. $-3 < m < 6$.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $m < 6$.

B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.

C. $m > 1$.

D. $1 < m < 6$.

Câu 64. Phương trình $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

B. $m \in \left[\frac{5 + \sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5 + \sqrt{41}}{4}\right]$.

D. $m \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{41}}{4}\right]$.

Câu 65. Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$.

B. $-1 < m < \frac{5}{2}$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 66. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

D. $m \in \emptyset$.

Câu 67. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 68. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 2$. B. $1 < m < 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

A. $m < 2 \vee m > 6$.

B. $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $-2 < m < 6$.

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$.
 B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.
 C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$.
 D. $m \in (7; +\infty)$.

**Vấn đề 7. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH
VÔ NGHIỆM – CÓ NGHIỆM – NGHIỆM ĐÚNG**

Câu 71. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$ dương với mọi x khi:

- A. $-1 < m < \frac{11}{4}$. B. $-\frac{11}{4} < m < 1$. C. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{11}{4} \end{cases}$.

Câu 72. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$ không dương với mọi x khi:

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 6$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 73. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$ âm với mọi x khi:

- A. $m < -14$ hoặc $m > 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$.
 C. $-2 < m < 14$. D. $-14 < m < 2$.

Câu 74. Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi x khi:

- A. $m > 28$. B. $0 \leq m \leq 28$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 28$.

Câu 75. Bất phương trình $x^2 - mx - m \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $-4 < m < 0$.
 C. $m < -4$ hoặc $m > 0$. D. $-4 \leq m \leq 0$.

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m-1)x + m < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$.
 C. $m \in \mathbb{R}$. D. Không tồn tại m .

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 2]$. **D.** $m \in (-2; 2)$.

Câu 78. Tam thức $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$ dương với mọi x khi:

A. $m < \frac{1}{2}$. **B.** $m \leq \frac{1}{2}$. **C.** $m > \frac{1}{2}$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 79. Tam thức $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$ không dương với mọi x khi:

A. $m \leq 4$. **B.** $m \geq 4$. **C.** $m < 4$. **D.** $m > 4$

Câu 80. Tam thức $f(x) = mx^2 - mx + m + 3$ âm với mọi x khi:

A. $m \in (-\infty; -4]$. **B.** $m \in (-\infty; -4)$.

C. $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$.

Câu 81. Tam thức $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$ không âm với mọi x khi:

A. $m \geq -2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $m > -2$. **D.** $m < -2$.

Câu 82. Bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m > -\frac{1}{3}$. **B.** $m \geq -\frac{1}{3}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > 15$.

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{3} \leq m < 2$. **B.** $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$. **C.** $m \geq \frac{1}{3}$. **D.** $m \leq 2$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m-2)x + 1 < 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup [2; +\infty)$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **D.** $m \in [2; +\infty)$.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \leq 0$. B. $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$. C. $m \geq -\frac{20}{9}$. D. $m > 0$.

Câu 86. Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ khi

- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $-1 < m < 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $m > -1$.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} \text{ luôn dương.}$$

- A. $m \geq -\frac{5}{8}$. B. $m < -\frac{5}{8}$. C. $m < \frac{5}{8}$. D. $m \geq \frac{5}{8}$.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

- C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \geq 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

- C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vấn đề 8. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 91. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ là:

A. $S = [1; 2)$. **B.** $S = [1; 3)$. **C.** $S = (1; 2]$. **D.** $S = [2; 3)$.

Câu 92. Tìm x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$.

A. $x > 3$. **B.** $3 < x \leq 7$. **C.** $4 \leq x \leq 7$. **D.** $3 < x \leq 4$.

Câu 93. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **D.** $S = (1; 4)$.

Câu 94. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ là:

A. $S = 1$. **B.** $S = \{1\}$. **C.** $S = [1; 2]$. **D.** $S = [-1; 1]$.

Câu 95. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$.

A. $x \geq 1$. **B.** $x \leq \frac{1}{3}$. **C.** $x \in \emptyset$. **D.** $x \leq \frac{2}{3}$.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 97. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1 \leq x < 2$. **B.** $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $-1 \leq x \leq 1$.

C. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x \leq 3$. **D.** $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Câu 98. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x - 1| < 3 \end{cases}$ là:

A. $(1; 2)$. **B.** $[1; 2]$. **C.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **D.** $\emptyset$.

Câu 99. Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$

Câu 100. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 101. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -\frac{8}{3}$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \geq -\frac{8}{3}$.

Câu 102. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ x - m > 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Câu 103. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 & (1) \\ x < m-1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 5$.

D. $m > 5$.

Câu 104. Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $-3 < m < 6$.

B. $-3 \leq m \leq 6$.

C. $m < -3$.

D. $m > 6$.

Câu 105. Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Câu 106. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Câu 107. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 108. Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $m \geq -1$.

Câu 109. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0 & (1) \\ mx \geq 3m + 1 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$. **B.** $m > \frac{1}{4}$. **C.** $m > -\frac{1}{11}$. **D.** $m > \frac{1}{32}$.

Câu 110. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0 & (2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 & (1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

A. $0 \leq a \leq 2$. **B.** $0 \leq a \leq 4$. **C.** $2 \leq a \leq 4$. **D.** $0 \leq a \leq 8$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Vấn đề 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Câu 1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 3. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Câu 4. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Câu 5. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x)$ không đổi dấu. D. Tồn tại x để $f(x) = 0$.

Câu 6. Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (0; +\infty)$. B. $x \in (-2; +\infty)$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \in (-\infty; 2)$.

Câu 7. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\infty; 2)$. B. $x \in (3; +\infty)$. C. $x \in (2; +\infty)$. D. $x \in (2; 3)$.

Câu 8. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\sqrt{5}; 1)$. B. $x \in (-\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 1)$.

Câu 9. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $x \in [1; 2]$.
C. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. D. $x \in (1; 2)$.

Câu 10. Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 11. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$:

- A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. Âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$. D. Âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

Câu 12. Tam thức bậc hai $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$.

C. Dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$. **D.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Cho $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ **B.** $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 3]$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ **D.** $f(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$

Câu 14. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau:

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Câu 15. Cho các tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x + 4; g(x) = -x^2 + 3x - 4; h(x) = 4 - 3x^2$. Số tam thức đổi dấu trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ là:

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

B. $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$.

C. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$ là:

A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.

B. $[-1; 7]$.

C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

D. $[-7; 1]$.

Câu 18. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.

A. $S = 0$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là:

- A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$.
C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 < 0$ là

- A. $[1; 4]$. B. $(1; 4)$.
C. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 < 0$ là:

- A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. B. $\emptyset$.
C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2 + x - 1 \leq 0$ là

- A. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 23. Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2 - x - 12 \leq 0$ là ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 24. Bất phương trình nào sau đây có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

- A. $-3x^2 + x - 1 \geq 0$. B. $-3x^2 + x - 1 > 0$.
C. $-3x^2 + x - 1 < 0$. D. $3x^2 + x - 1 \leq 0$.

Câu 25. Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[8; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[6; +\infty)$.

Vấn đề 2. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

ĐỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 26. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

- A.** $x \leq 1$. **B.** $1 \leq x \leq 4$. **C.** $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **D.** $x \geq 4$.

Câu 27. Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

- A.** $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. **B.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.
C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$. **D.** $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 28. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

- A.** $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x - 2) \leq 0$. **B.** $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$.
C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) < 0$. **D.** $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x - 2) \geq 0$.

Câu 29. Biểu thức $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$ âm khi

- A.** $x \in (1; 2)$. **B.** $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.
C. $x \geq 4$. **D.** $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$ là

- A.** $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$. **B.** $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in [-1; +\infty)$. **D.** $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Vấn đề 3. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

ĐỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Câu 31. Biểu thức $f(x) = \frac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A.** $x \in \left(-\frac{3}{11}; +\infty\right)$. **B.** $x \in \left(-\frac{3}{11}; 5\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.

D. $x \in \left(-5; -\frac{3}{11}\right)$.

Câu 32. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7)$.

B. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.

C. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

D. $S = \left(\frac{3}{4}; 7\right) \cup (7; +\infty)$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 34. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4-x^2}{x^2+5x+6} \leq 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Vấn đề 4. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI ĐỂ TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 36. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$.

A. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $D = [2; +\infty)$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $D = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 37. Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5-4x-x^2}$ xác định là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 38. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$.

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = (-\infty; 1)$. C. $D = [-5; 1]$. D. $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Câu 39. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 - x}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$. B. $D = [-4; 1]$.
C. $D = (-4; 1)$. D. $D = (-\infty; 4) \cup (1; +\infty)$.

Câu 40. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$. B. $D = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. D. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Câu 41. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 6} + \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$.

- A. $D = [-4; -3] \cup [2; +\infty)$. B. $D = (-4; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$. D. $D = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Câu 42. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$.

- A. $D = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$. C. $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. D. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 43. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{3 - 3x}{-x^2 - 2x + 15}} - 1$.

- A. $D = [4; +\infty)$. B. $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.
C. $D = (-\infty; -5)$. D. $D = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Câu 44. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

A. $D = [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **B.** $D = (-\infty; -4] \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $D = \left[-4; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 45. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2}}$.

A. $D = (-5; 4]$. **B.** $D = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. **D.** $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Vấn đề 5. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÔ NGHIỆM – CÓ NGHIỆM – CÓ HAI NGHIỆM PHÂN BIỆT

Câu 46. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$.

C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **D.** $-3 \leq m \leq 1$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $m = -\frac{1}{2}$

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > 3$. **C.** $m = 2$ **D.** $m > -\frac{3}{5}$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \text{ vô nghiệm ?}$$

A. $m < 0$. **B.** $m > 2$. **C.** $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Câu 49. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 4$. **B.** $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. **C.** $0 \leq m \leq 4$. **D.** $0 \leq m < 4$.

Câu 50. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Câu 51. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm ?

- A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 52. Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. B. $-5 \leq m \leq -1$. C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Câu 53. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm ?}$$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 54. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Câu 55. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 56. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.
C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm ?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m > -\frac{3}{4}$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt ?}$$

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $2 < m < 6$. C. $-1 < m < 6$. D. $-1 < m < 2$.

Câu 59. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Câu 60. Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Vấn đề 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 61. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $m > 6$. B. $m < 6$. C. $6 > m > 0$. D. $m > 0$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $2 < m < 6$. B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.
C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. D. $-3 < m < 6$.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$. B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.
C. $m > 1$. D. $1 < m < 6$.

Câu 64. Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Câu 65. Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. **B.** $-1 < m < \frac{5}{2}$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. **D.** $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 66. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m \in (1; 2)$. **B.** $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. **D.** $m \in \emptyset$.

Câu 67. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 68. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 2$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

A. $m < 2 \vee m > 6$. **B.** $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$. **D.** $-2 < m < 6$.

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$. **D.** $m \in (7; +\infty)$.

Vấn đề 7. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 71. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$ dương với mọi x khi:

- A. $-1 < m < \frac{11}{4}$. B. $-\frac{11}{4} < m < 1$. C. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{11}{4} \end{cases}$.

Câu 72. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$ không dương với mọi x khi:

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 6$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 73. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$ âm với mọi x khi:

- A. $m < -14$ hoặc $m > 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$.
C. $-2 < m < 14$. D. $-14 < m < 2$.

Câu 74. Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi x khi:

- A. $m > 28$. B. $0 \leq m \leq 28$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 28$.

Câu 75. Bất phương trình $x^2 - mx - m \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $-4 < m < 0$.
C. $m < -4$ hoặc $m > 0$. D. $-4 \leq m \leq 0$.

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m-1)x + m < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$.
C. $m \in \mathbb{R}$. D. Không tồn tại m .

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in [-2; 2]$. D. $m \in (-2; 2)$.

Câu 78. Tam thức $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$ dương với mọi x khi:

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > \frac{1}{2}$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 79. Tam thức $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5$ không dương với mọi x khi:

- A. $m \leq 4$. B. $m \geq 4$. C. $m < 4$. D. $m > 4$

Câu 80. Tam thức $f(x) = mx^2 - mx + m + 3$ âm với mọi x khi:

- A. $m \in (-\infty; -4]$. B. $m \in (-\infty; -4)$.
C. $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$.

Câu 81. Tam thức $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3$ không âm với mọi x khi:

- A. $m \geq -2$. B. $m \leq -2$. C. $m > -2$. D. $m < -2$.

Câu 82. Bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4 \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

- A. $m > -\frac{1}{3}$. B. $m \geq -\frac{1}{3}$. C. $m > 0$. D. $m > 15$.

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $\frac{1}{3} \leq m < 2$. B. $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \leq 2$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m-2)x + 1 < 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in [2; +\infty)$.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1} \text{ xác định với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

- A. $m \leq 0$. B. $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$. C. $m \geq -\frac{20}{9}$. D. $m > 0$.

Câu 86. Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ khi

- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $-1 < m < 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $m > -1$.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} \text{ luôn dương.}$$

A. $m \geq -\frac{5}{8}$. **B.** $m < -\frac{5}{8}$. **C.** $m < \frac{5}{8}$. **D.** $m \geq \frac{5}{8}$.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **D.** $m \in [0; 2]$.

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \geq 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **D.** $m \in [0; 2]$.

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vấn đề 8. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 91. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-4x+3 < 0 \end{cases}$ là:

A. $S = [1; 2)$. **B.** $S = [1; 3)$. **C.** $S = (1; 2]$. **D.** $S = [2; 3)$.

Câu 92. Tìm x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ x^2-11x+28 \geq 0 \end{cases}$.

A. $x > 3$. **B.** $3 < x \leq 7$. **C.** $4 \leq x \leq 7$. **D.** $3 < x \leq 4$.

Câu 93. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x^2-6x+8 > 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **D.** $S = (1; 4)$.

Câu 94. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ là:

- A. $S = 1$. B. $S = \{1\}$. C. $S = [1; 2]$. D. $S = [-1; 1]$.

Câu 95. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$.

- A. $x \geq 1$. B. $x \leq \frac{1}{3}$. C. $x \in \emptyset$. D. $x \leq \frac{2}{3}$.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 97. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

- A. $-1 \leq x < 2$. B. $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $-1 \leq x \leq 1$.
C. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x \leq 3$. D. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Câu 98. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x - 1| < 3 \end{cases}$ là:

- A. $(1; 2)$. B. $[1; 2]$. C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Câu 99. Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$.

Câu 100. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 101. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > -\frac{8}{3}$. B. $m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq -\frac{8}{3}$.

Câu 102. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ x - m > 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 103. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 & (1) \\ x < m-1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m < 5$. B. $m > -2$. C. $m = 5$. D. $m > 5$.

Câu 104. Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $-3 < m < 6$. B. $-3 \leq m \leq 6$. C. $m < -3$. D. $m > 6$.

Câu 105. Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

- A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$. B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$. C. $m \leq -\frac{5}{3}$. D. $m < 1$.

Câu 106. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 107. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

- A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. B. $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

- C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. D. $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 108. Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

- A.** $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $m \geq -1$.

Câu 109. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0(1) \\ mx \geq 3m + 1(2) \end{cases}$ vô nghiệm.

- A.** $m > -\frac{1}{5}$. **B.** $m > \frac{1}{4}$. **C.** $m > -\frac{1}{11}$. **D.** $m > \frac{1}{32}$.

Câu 110. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

- A.** $0 \leq a \leq 2$. **B.** $0 \leq a \leq 4$. **C.** $2 \leq a \leq 4$. **D.** $0 \leq a \leq 8$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$. **Chọn C.**

Câu 2. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$. **Chọn A.**

Câu 3. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$. **Chọn D.**

Câu 4. $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$. **Chọn A.**

Câu 5. Vì $\Delta < 0$ và $a \neq 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. **Chọn C.**

Câu 6. Ta có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 1 - 2.5 = -9 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **Chọn C.**

Câu 7. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3)$. **Chọn D.**

Câu 8. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 9. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. **Chọn B.**

Câu 10. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{9}{2}$. Mà x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn A.

Câu 11. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	$1 + 2\sqrt{3}$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0
				$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} < x < 1 + 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 12. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < \sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 13. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$. **Chọn B.**

Câu 14. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta được

$f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$. **Chọn C.**

Câu 15. Vì $f(x) = 0$ vô nghiệm, $g(x) = 0$ vô nghiệm, $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên chỉ có $h(x)$ đổi dấu trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 16. Ta có $2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		5	$+\infty$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 17. Ta có $-x^2 + 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-x^2 + 6x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7$. **Chọn B.**

Câu 18. Ta có $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$			$-$		

Dựa vào bảng xét dấu $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. **Chọn C.**

Câu 19. Ta có $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$. **Chọn C.**

Câu 20. Ta có $f(x) = -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 21. Ta có $f(x) = \sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$. **Chọn A.**

Câu 22. Ta có $f(x) = 6x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 23. Ta có $f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$. Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2 - x - 12 \leq 0$ là 4. **Chọn D.**

Câu 24. Xét $f(x) = -3x^2 + x - 1$ có $a = -3 < 0$, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -11 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x$ tức là tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$. **Chọn C.**

Câu 25. Ta có $f(x) = x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Vì $\frac{13}{2} \in [6; +\infty)$ và $\frac{13}{2} \notin S$ nên $[6; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Câu 26. Bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2+5x \leq 2x^2+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 27. Đặt $f(x) = (3x^2-10x+3)(4x-5)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$ và $4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		+	0	-		-	0	+	
$4x-5$		-		-	0	+		+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{5}{4}; 3\right)$. **Chọn B.**

Câu 28. Đặt $f(x) = x^2(x-2)$.

Phương trình $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy rằng bất phương trình $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) \geq 0$.

Chọn D.

Câu 29. Đặt $f(x) = (4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Ta có $x^2+5x+9 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow x^2+5x+9 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$4-x^2$		-		-	0	+	0	+	0	-	
x^2+2x-3		+	0	-		-	0	+		+	
x^2+5x+9		+		+		+		+		+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -2 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 30. Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+4) \geq 0$.

Phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$ và $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$			
$x^2 + 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$x - 2$		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$(x - 2)(x^2 + 5x + 4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x - 2)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

Chọn A.

Câu 31. Ta có $-x^2 + 5x - 7 = -(x^2 - 5x + 7) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, bất phương trình $f(x) > 0 \Leftrightarrow 11x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{11} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.

Chọn C.

Câu 32. Điều kiện: $4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(4x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases}$

Phương trình $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ và $4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	4	7	$+\infty$			
$x-7$		-		-		-	0	+
$4x^2-19x+12$		+		-		+		+
$f(x)$		-		+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $\frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$. **Chọn B.**

Câu 33. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$
$2x+9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x=1$) thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Câu 34. Điều kiện: $x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10} \leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-x^2+4x-3$	$-$	$-$	0	$+$	$-$	$-$
$x^2-3x-10$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Chọn C.

Câu 35. Bất phương trình $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \quad (*)$.

Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases}.$$

Phương trình $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ và $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+		+		+
$x^2 + 5x + 6$		+		-		+
$f(x)$		+		-		+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup [-1; 1]$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x = \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn D.**

Câu 36. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$.

Phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$2x^2-5x+2$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 37. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5 - 4x - x^2 \geq 0$.

Phương trình $5 - 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$5-4x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $5 - 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x = 1$. **Chọn A.**

Câu 38. Hàm số xác định khi và chỉ khi $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0$.

Phương trình

$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	$\sqrt{5}$	$+\infty$	
$(2-\sqrt{5})x^2+(15-7\sqrt{5})x+25-10\sqrt{5}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; \sqrt{5}]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-5; \sqrt{5}]$. **Chọn D.**

Câu 39. Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - 3x - x^2 > 0$.

Phương trình $4 - 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$		
$4-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $4 - 3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; 1)$. **Chọn C.**

Câu 40. Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2 - 4x + 1 > 0$.

Phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$		
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 41. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$ và $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	2	$+\infty$			
x^2+x-6		$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+4$		$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$. **Chọn A.**

Câu 42. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ và $5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$	+		+
$5 - 2x$	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. **Chọn A.**

Câu 43. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{-x^2 - 2x + 15} \geq 0$.

Phương trình $x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$ và $-x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
x^2-x-12		+		+	0	-		-	0	+	
$-x^2-2x+15$		-		+		+		-		-	
$f(x)$		-		+	0	-		+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$. **Chọn B.**

Câu 44. Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0$.

Phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$ và $2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
x^2+5x+4		+	0	-	0	+		
$2x^2+3x+1$		+		+		-		+
$f(x)$		+	0	-		-		+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **Chọn C.**

Câu 45. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2} \geq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 8 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \geq 0.$$

Phương trình $x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$		
x^2+x-20		$+$	0	$-$	$..$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 + x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$. **Chọn B.**

Câu 46. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1. \text{ Chọn B.}$$

Câu 47. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 48. Xét phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \quad (*)$.

TH1. Với $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Suy ra với $m = 2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Do đó $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 49. Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0 \quad (*)$.

TH1. Với $m = 0$, khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4 = 0$ (vô lý).

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 50. Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0 \quad (*)$.

$$\text{TH1. Với } m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

• Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

• Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}.$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 51. Để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow (-b)^2 - 4.3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - (2\sqrt{3})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 2\sqrt{3})(b + 2\sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2\sqrt{3} \\ b \leq -2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 52. Xét phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 + 2m + 1$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm. Chọn D.}$$

Câu 53. Xét $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 54. Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0 \quad (*)$.

TH1. Với $m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra với $m = 1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m - 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} 5 \neq m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 55. Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 56. Tam thức $f(x)$ đổi dấu hai lần $\Leftrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 32m - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow m(m-28) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Vậy $m < 0$ hoặc $m > 28$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 57. Xét $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$, có $\Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}$.

Ta có $\begin{cases} a=1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases}$ suy ra $m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 58. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có $\begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases}$ suy ra $17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó, hệ bất phương trình $(*) \Leftrightarrow m \neq 1$. **Chọn B.**

Câu 59. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m - 1)(m + 1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. **Chọn C.**

Câu 60. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m + 3)^2 + 4(m - 3)(m + 1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m - 1)(5m + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Chọn A.

Câu 61. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m + 3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 62. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ m^2 - (m - 2)(m + 3) > 0 \\ \frac{2m}{m - 2} > 0 \\ \frac{m + 3}{m - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$

Chọn B.

Câu 63. Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 - (9m - 5) > 0 \\ -2(m + 1) < 0 \\ 9m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ \frac{5}{9} < m < 1 \end{cases}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 64. Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) > 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Chọn B.

Câu 65. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 66. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2) \cdot (-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 67. Phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Với } m \in (0; 2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{ theo bài ra, ta có } |x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m) > 0 \Leftrightarrow 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 68. Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0 \quad (*)$, có $a+b+c=0$.

$$\text{Suy ra phương trình } (*) \Leftrightarrow (x-1)[(m-1)x - m + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (m-1)x = m-3 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{m-3}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } (*) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1} \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra, ta có } x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \frac{3m-7}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Kết hợp với (I), ta được $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 69. Xét phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m-2 = 0 \quad (*)$, có $\Delta' = m+2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1; 2\} \\ m > -2 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$.

Kết hợp với (I), ta được $\begin{cases} m > 6 \\ m \in (-2; -1) \cup (-1; 2) \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 70. Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\frac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 71. Tam thức $f(x)$ có $a = 3 > 0$. Do đó $f(x) > 0, \forall x$ khi

$$\Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+4) = 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{11}{4}. \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 72. Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) \leq 0, \forall x$ (không dương) khi

$$\Delta = (m-2)^2 + 8(-m+4) = m^2 - 12m + 36 \leq 0 \Leftrightarrow m = 6. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 73. Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) < 0, \forall x$ khi

$$\Delta = (m+2)^2 + 8(m-4) = m^2 + 12m - 28 \leq 0 \Leftrightarrow -14 < m < 2. \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 74. Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x$ (không âm) khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m^2 - 28m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 28. \text{ Chọn B.}$$

Câu 75. Tam thức $f(x) = x^2 - mx - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên bất phương trình $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta = m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Chọn D.

Câu 76. Tam thức $f(x) = -x^2 + (2m-1)x + m$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta = (2m-1)^2 + 4m = 4m^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$. **Chọn D.**

Câu 77. Bất phương trình $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ khi và chỉ khi $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x khi $\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2) = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. **Chọn D.**

Câu 78. Tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 2 > 0, \forall x$ nên $f(x)$ dương với mọi x khi $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 79.

- Với $m = 4$, ta có $f(x) = -1 < 0$: đúng với mọi x .
- Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 80.

- Với $m = 0$ thay vào ta được $f(x) = 3 < 0$ (vô lý) suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4. \text{ Chọn B.}$$

Câu 81.

- Với $m = -2$, tam thức bậc hai trở thành $1 > 0$: đúng với mọi x .
- Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 82.

Xét bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$. (*)

TH1. Với $3m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) trở thành $4-\frac{1}{3} \geq 0$ (luôn đúng).

TH2. Với $3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m^2 + 46m + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 83.

Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$

- Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành $-5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$: không nghiệm đúng với mọi x .
- Khi $m = 2$ thì bất phương trình trở thành $-1 \leq 0$: nghiệm đúng với mọi x .
- Khi $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < 2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 84.

- Xét $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = -2$, bất phương trình trở thành $-4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m = 2$, bất phương trình trở thành $1 < 0$: vô nghiệm. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.

- Xét $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x^2 + (m-2)x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -3m^2 - 4m + 20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m > 2 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 2$. **Chọn A.**

Câu 85.

$f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $m = -4$ thì $f(x) = 8x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{8} \rightarrow m = -4$ không thỏa.

TH2: $m \neq -4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{20}{9} \leq m \leq 0$. **Chọn B.**

Câu 86.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

- $m = -1$ thì $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: thỏa mãn.
- $m \neq -1$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 3$. **Chọn A.**

Câu 87.

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 88. Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m-2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' = 0 \rightarrow f(x) = 0$ tại $x = \frac{m-2}{2}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' > 0 \rightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Vậy cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm. **Chọn A.**

Câu 89. Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m-2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không có m thỏa mãn.

- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \longrightarrow f(x)=0 \text{ khi } x=-\frac{b}{2a}=-1 \\ m=2 \longrightarrow f(x)=0 \text{ khi } x=-\frac{b}{2a}=0 \end{cases}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình vô

ng nghiệm.

Do đó trường hợp này có $m=0$ hoặc $m=2$ thỏa mãn.

- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [x_1; x_2]$.

Do đó trường hợp này có $m < 0$ hoặc $m > 2$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 90. Đặt $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m-2$ và $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m+1$.

- $m=0 \longrightarrow$ bất phương trình trở thành $2x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Do đó $m=0$ thỏa mãn.
- $m > 0$, ta biện luận các trường hợp như câu. Do đó $m > 0$ thỏa mãn.
- $m < 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4} \longrightarrow f(x) = 0$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$.

Do đó $-\frac{1}{4} < m < 0$ thỏa mãn. Hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 91. Tập nghiệm của $2-x \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 < 0$ là $S_2 = (1; 3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2]$. **Chọn C.**

Câu 92. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 11x + 28 \geq 0$ là $S_2 = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 93. Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 6x + 8 > 0$ là $S_2 = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. **Chọn B.**

Câu 94. Tập nghiệm của $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ là $S_1 = [1; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 1 \leq 0$ là $S_2 = [-1; 1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \{1\}$. **Chọn B.**

Câu 95. Tập nghiệm của $3x^2 - 4x + 1 > 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ là $S_2 = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$. **Chọn C.**

Câu 96. Tập nghiệm của $-2x^2 - 5x + 4 < 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2 - 3x + 10 > 0$ là $S_2 = (-5; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left(-5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4; 1\}$. **Chọn C.**

Câu 97. Tập nghiệm của $x^2 - 9 < 0$ là $S_1 = (-3; 3)$.

Tập nghiệm của $(x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0$ là $S_2 = \left[\frac{-4}{3}; -1\right] \cup [1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left[\frac{-4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$. **Chọn D.**

Câu 98. Tập nghiệm của $x^2 - 7x + 6 < 0$ là $S_1 = (1; 6)$.

Tập nghiệm của $|2x - 1| < 3$ là $S_2 = (-1; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2)$. **Chọn A.**

Câu 99. Đáp án **A.** Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 < 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án **B.** Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 > 0$ là $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Đáp án **C**. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 + x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án **D**. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-1; 3)$. **Chọn B.**

Câu 100. Tập nghiệm của $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x - 10 \leq 0$ là $S_2 = \left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2 - 5x + 3 > 0$ là $S_3 = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1; 1) \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 2\}$. **Chọn B.**

Câu 101. Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1; \frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn C.

Câu 102. Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra $S_1 = [-1; 1]$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > m$. Suy ra $S_2 = (m; +\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn C.

Câu 103. Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Suy ra $S_1 = (-3; 4)$.

Bất phương trình có $S_2 = (-\infty; m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m-1 > -3 \Leftrightarrow m > -2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 104. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$-9(x^2 - x + 1) < 3x^2 + mx - 6 < 6(x^2 - x + 1) \text{ (do } x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 - (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow (1)$ và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 144 < 0 \\ (m+6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Câu 105. Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 2 + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq 0 \\ \frac{13x^2 - 26x + 14 - m}{2x^2 - 3x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2 + m \geq 0 & (1) \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 & (2) \end{cases}.$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow (1)$ và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4 \cdot 3(2+m) \leq 0 \\ 26^2 - 4 \cdot 13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-5}{3} \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 106. Bất phương trình $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình } x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 \leq m^2 - 1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 - 1} \leq x - m \leq \sqrt{m^2 - 1} \text{ (điều kiện: } m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases})}$$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 1} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Suy ra } S_2 = [m - \sqrt{m^2 - 1}; m + \sqrt{m^2 - 1}].$$

$$\text{Để hệ có nghiệm } \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 - 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 1} > 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ m^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Đổi chiều điều kiện, ta được $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 107. Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$.

Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = [1 - \sqrt{m}; 1 + \sqrt{m}]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m + 1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 + \sqrt{m} \\ 1 - \sqrt{m} \leq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 108. Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Suy ra $S_1 = [-1; 4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm .

Với $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{2}{m - 1}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m - 1}; +\infty \right)$. Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m - 1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Với $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{2}{m - 1}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m - 1} \right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m - 1} \geq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Câu 109. Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -8 \leq x \leq -2$. Suy ra $S_1 = [-8; -2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m = 0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm .

Với $m > 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{3m + 1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m + 1}{m}; +\infty \right)$.

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

I- Một số dạng phương trình chứa căn thức:

$$1) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$3) \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}$$

II. Bài tập tự luận

1-Dạng 1: giải phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Cách 1: Biến đổi tương đương $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Cách 2: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ sau đó thử lại nghiệm.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \quad 2) \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{3x^2 - x - 2}$$

Lời giải

1) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{3x^2 - x - 2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 4 > 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 3x^2 - x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2x^2 + 3x + 6 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2x^2 + 3x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \\ x = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$1) \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$$

$$2) \sqrt{3x^2 + 6x + 3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$3) \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$4) \sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Lời giải

$$1) \text{Ta có } \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=1$.

$$2) \text{Ta có : } \sqrt{3x^2 + 6x + 3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 - 5x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 + 11x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -11 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{0; -11\}$

3) Ta có:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{1; 4\}$

4) Ta có

$$\sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 3 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{0; 3\}$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt{2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$$

$$3) \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$$

Lời giải

1) Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2 - 4x - 2 = x^2 - x - 2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2 - 3x = 0$

Từ đó tìm được $x = 0$ hoặc $x = 3$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

2) $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2 - 6x + 1 = -2x^2 - 9x + 1$.

Sau khi thu gọn ta được $5x^2 + 3x = 0$.

Từ đó tìm được $x = 0$ hoặc $x = -\frac{3}{5}$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 0$ và $x = -\frac{3}{5}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{0; -\frac{3}{5}\right\}$

3) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2 - 3x - 5 = x^2 - 7$.

Sau khi thu gọn ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$

d) $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$

Lời giải

a) $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 2\}$.

b) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -2x^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

$$c) \sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 3 = -x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị này không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

$$d) \sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = -2x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 2$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

2-Dạng 2: giải phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\text{Cách 1: Biến đổi tương đương } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Cách 1: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g^2(x)$, thử lại nghiệm

Ví dụ 1: Giải phương trình :

1) $\sqrt{x-1} = x-3$

2) $\sqrt{6-4x+x^2} = x+4$ (1)

3) $\sqrt{-x^2+9x-5} = x$

4) $\sqrt{3x^2+6x+3} = 2x+1$

5) $\sqrt{2x^2-3x+1} = x-1$

6) $\sqrt{3-3x-x^2} = x$

7) $\sqrt{3x^2-4x+4} = 3x+2$

Lời giải

1) Ta có :

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

$$2) \text{ Ta có : } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-4x+x^2 = (x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{5}{6}$

$$3) \text{ Ta có } \sqrt{-x^2+9x-5} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2+9x-5 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-9x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4}.$$

Vậy phương trình trên có 2 nghiệm.

$$3) \text{ Ta có : } \sqrt{3x^2+6x+3} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x^2+6x+3 = 4x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2-2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = 1 - \sqrt{3} \text{ (l)} \\ x = 1 + \sqrt{3} \text{ (n)} \end{cases}$$

$$4) \sqrt{2x^2-3x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$5) \text{ Ta có } \sqrt{3-3x-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-3x-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+3x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{33}}{4}$$

Vậy phương trình trên chỉ có 1 nghiệm.

$$6) \text{ Ta có: } \sqrt{3x^2-4x+4} = 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 3x^2-4x+4 = (3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ 6x^2+16x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x = 0, x = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{6x^2+13x+13} = 2x+4$

b) $\sqrt{2x^2+5x+3} = -3-x$

c) $\sqrt{3x^2-17x+23} = x-3$

d) $\sqrt{-x^2+2x+4} = x-2$

Lời giải

a) $\sqrt{6x^2+13x+13} = 2x+4$

$$\Rightarrow 6x^2 + 13x + 13 = 4x^2 + 16x + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \right\}$

$$\text{b) } \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 9 + 6x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị này không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$

$$\text{c) } \sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 17x + 23 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = \frac{7}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

$$\text{d) } \sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{3\}$.

3-Dạng 3: Giải phương trình chứa căn thức quy về dạng 1 hoặc dạng 2

Ví dụ 1: Giải phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 3} = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x \geq 3 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ x \geq 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$1) x - \sqrt{2x+7} = -4$$

$$2) \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$$

$$3) \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3} \quad (2)$$

$$4) 2\sqrt{x+5} + 1 = x + \sqrt{x+5}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \quad \text{Phương trình} \quad x - \sqrt{2x+7} = -4 \Leftrightarrow x + 4 = \sqrt{2x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ (x + 4)^2 = 2x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

$$2) \text{ĐK } \begin{cases} 3x+7 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{3} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$$

$$\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = \sqrt{x+1} + 2.$$

$$\Leftrightarrow 3x+7 = x+1+4+4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 2x+2 \Leftrightarrow (x+1) - 2\sqrt{x+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Tổng các nghiệm của phương trình $3 + (-1) = 2$.

$$3) \text{Ta có (2)} \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \\ 2x+1+x+3+2\sqrt{(2x+1)(x+3)} = 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \sqrt{(2x+1)(x+3)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy nghiệm của phương trình là: } x = -\frac{1}{2}$$

$$4) \text{ Phương trình } 2\sqrt{x+5}+1=x+\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+5=x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x=-1 \Leftrightarrow x=4. \\ x=4 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4 \in (-2;10)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\text{a) } (x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12 \quad (3) \qquad \text{b) } (x-3)\sqrt{x^2+4} = x^2 - 9.$$

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện } 10-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \quad (*)$$

$$\text{Khi đó } (3) \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{10-x^2} = x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 10-x^2 = (x-4)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x^2 - 8x + 6 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=-3$

Chú ý:

+**Ta có** $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$ nhưng không được rút gọn hai vế của phương trình (1) cho $x+3$ làm như vậy có khi sẽ mất nghiệm $x=-3$

+*Trong bài toán trên ta có sử dụng kiến thức: Nếu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$*

$$\text{b) Điều kiện } x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Với điều kiện trên, ta có:

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} = x^2-9 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+4} = (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x^2+4} - (x+3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x^2+4} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+4 = (x+3)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=3$ và $x=-\frac{5}{6}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$ (4)

Lời giải

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$

$$\text{Khi đó (4)} \Leftrightarrow x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x-2+\sqrt{3x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{3x-2} = 2-x \end{cases} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 3x-2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x=1 \vee x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Ví dụ 5: Giải phương trình sau: $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 3\sqrt{x}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

- Nhận xét: $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- Xét $x > 0$, phương trình đã cho tương đương

$$x^2+x+1 = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x} = 3 \cdot \sqrt{x-1+\frac{1}{x}} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1+\frac{1}{x}} \Rightarrow t \geq \sqrt{2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 1} = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t^2 + 1.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 + 2 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \text{ Với } t = 1: \sqrt{x-1+\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$+ \text{ Với } t = 2: \sqrt{x-1+\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình } S = \left\{ \frac{5-\sqrt{21}}{2}; 1; \frac{5+\sqrt{21}}{2} \right\}.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $\sqrt{\frac{x+56}{16}} + \sqrt{x-8} = \frac{x}{8}.$

Lời giải

$$+ \text{ ĐK: } x \geq 8.$$

$$+ \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{x+56}{16}} + \sqrt{x-8} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow \sqrt{x+56+16\sqrt{x-8}} = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-8+2.8\sqrt{x-8}+64} = \frac{x-8+8}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-8}+8 = \frac{\sqrt{x-8}^2+8}{2} (*)$$

$$+ \text{ Đặt } t = \sqrt{x-8}, t \geq 0, \text{ khi đó } (*) \text{ trở thành } t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 (t < 0) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 4 \text{ ta có } \sqrt{x-8} = 4 \Leftrightarrow x = 24.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 24$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$ (5)

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq -1.$$

$$\text{Khi đó (5)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+\sqrt{x+1})^2} - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\sqrt{x+1}) - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x=3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (6)

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1.$$

$$\text{Khi đó (6)} \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 (*)$$

$$\text{Nếu } x \geq 10 \text{ thì } \sqrt{x-1}-3 \geq 0, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2 + \sqrt{x-1}-3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \quad \Leftrightarrow x=10$$

$$\text{Nếu } 5 < x < 10 \text{ thì } 2 < \sqrt{x-1} < 3, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow 1=1$$

$$\Rightarrow 5 < x < 10 \text{ là nghiệm của (6)}$$

Nếu $1 \leq x \leq 5$ thì $\sqrt{x-1} - 2 \leq 0$, khi đó (*) $\Leftrightarrow 2 - \sqrt{x-1} + 3 - \sqrt{x-1} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=5$$

Vậy nghiệm của phương trình là $5 \leq x \leq 10$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$ (7)

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 2$

$$\text{Khi đó (7)} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 9(x-2) - (x+6) = 2(x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})$$

$$\Leftrightarrow 4(x-3) = (x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} - 4 = 0(*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4 \Leftrightarrow 9(x-2) + x+6 + 6\sqrt{(x-2)(x+6)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)(x+6)} = 14-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 14-5x \geq 0 \\ 9(x-2)(x+6) = (14-5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x^2 - 11x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11+3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=3 \vee x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$

Chú ý: trong bài toán trên có sử dụng nhân lượng liên hợp của $3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6}$ là $3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}$ vào hai vế của phương trình (1')

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (8)

Lời giải

Cách 1: Điều kiện $x > 0$. Khi đó (8) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x(x+1)} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + x = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}$

Cách 2: Điều kiện $x > 0$. Khi đó (8) $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4x=x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}. \text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x=\frac{1}{3}$$

Ví dụ 11: Giải phương trình: $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$ (9)

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{Khi đó (9)} \Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2+\sqrt{x(x-1)}(1-\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2+\sqrt{x(x-1)}(1-\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}-1-\sqrt{x(x-1)})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x-1}=1+\sqrt{x(x-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x-1}=1+\sqrt{x(x-1)} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x-1=1+x(x-1)+2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=-x^2+2x-2 \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=2$

4. Dạng 4: Giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức bằng cách đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình : $2x^2-3-5\sqrt{2x^2+3}=0$ (10)

Lời giải

$$\text{Đặt } y=\sqrt{2x^2+3}, y \geq 0 \Rightarrow y^2=2x^2+3 \Rightarrow y^2-6=2x^2-3$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành : } y^2-5y-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1(\text{loại}) \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow y=6.$$

$$\text{Khi } y=6 \text{ thì } \sqrt{2x^2+3}=6 \Leftrightarrow 2x^2+3=36 \Leftrightarrow x=\pm \frac{\sqrt{66}}{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x=\pm \frac{\sqrt{66}}{2}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (11)

Lời giải

$$\text{Đặt } y=\sqrt{2x-1}, y \geq 0 \Rightarrow y^2=2x-1 \Rightarrow x=\frac{y^2+1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành: } y+\left(\frac{y^2+1}{2}\right)^2-3\frac{y^2+1}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow y^4-4y^2+4y-1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y^2+2y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$$\text{Khi } y=1 \text{ thì } \sqrt{2x-1}=1 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Khi } y = \sqrt{2} - 1 \text{ thì } \sqrt{2x-1} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x=1 \vee x=2-\sqrt{2}$$

Ví dụ 3 Giải phương trình : $9 - \sqrt{81 - 7x^3} = \frac{x^3}{2}$ (12)

Lời giải

$$\text{Ta có (12)} \Leftrightarrow 18 - x^3 = 2\sqrt{81 - 7x^3} \text{ (12')}$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{81 - 7x^3}, y \geq 0 \Rightarrow y^2 = 81 - 7x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{81 - y^2}{7}$$

$$\text{Khi đó (12')} \text{ trở thành: } 18 - \frac{81 - y^2}{7} = 2y \Leftrightarrow y^2 - 14y + 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Khi } y=9 \text{ thì } \sqrt{81 - 7x^3} = 9 \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{Khi } y=5 \text{ thì } \sqrt{81 - 7x^3} = 5 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x=0 \vee x=2$$

Ví dụ 4 Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 + 5x + 2} - 2\sqrt{2x^2 + 5x - 6} = 1$ (13)

Lời giải

$$\text{Đặt } y = \sqrt{2x^2 + 5x - 6}, y \geq 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 5x - 6$$

$$\Rightarrow y^2 + 8 = 2x^2 + 5x + 2$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành : } \sqrt{y^2 + 8} - 2y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 8} = 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 8 = (2y + 1)^2 \text{ (vì } 2y + 1 > 0 \text{)} \Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ (Do } y \geq 0 \text{)}$$

$$\text{Khi } y=1 \text{ thì } \sqrt{2x^2 + 5x - 6} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x=1 \vee x=-7/2$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$ (14)

Lời giải

$$\text{Ta có } (\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}})(\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}) = 1$$

$$\text{Nên đặt } y = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \text{ (} y > 0 \text{) thì } \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{y}$$

$$\text{Phương trình trở thành: } y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Khi $y=1$ thì: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-1=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=1$

Ví dụ 6: Giải phương trình : $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$ (15)

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Đặt $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$ ($y \geq 0$) $\Rightarrow y^2 = x+1+4-x+2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{y^2-1}{2}$$

Khi đó phương trình trở thành: $y + \frac{y^2-1}{2} = 5 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \text{ (Do } y \geq 0)$$

Khi $y=3$ thì $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0 \vee x=3$

Cách 2: Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{4-x}$ ($u, v \geq 0$)

Ta có hệ $\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u + v + uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 5 \\ u + v + uv = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \cdot \text{ Khi đó } \begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{4-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{4-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0 \vee x=3$

Ví dụ 7: Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ (16)

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $6-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6/5$.

Đặt $y = \sqrt[3]{3x-2} \Rightarrow y^3 = 3x-2 \Rightarrow x = \frac{y^3+2}{3}$

Phương trình trở thành : $2y + 3\sqrt{6 - \frac{5y^3+10}{3}} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(8-5y^3)} = 8-2y \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2y \geq 0 \\ 24-15y^3 = 64-32y+4y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ 15y^3 + 4y^2 - 32y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ (y+2)(15y^2 - 26y + 20) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2. \text{ Khi đó } \sqrt[3]{3x-2} = -2 \Leftrightarrow 3x-2 = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \leq 6/5)$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -2$

Cách 2: Điều kiện: $6-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6/5$

Đặt $u = \sqrt[3]{3x-2}, v = \sqrt{6-5x} (v \geq 0)$. Ta có hệ $\begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{8-2u}{3} \\ 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{8-2u}{3} \\ (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 \\ u = -2 \end{cases}. \text{ Khi đó } \begin{cases} \sqrt[3]{3x-2} = -2 \\ \sqrt{6-5x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \leq 6/5)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2$

Ví dụ 8: Giải phương trình $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9 \quad (17)$

Lời giải

Cách 1: Điều kiện $|x| \leq \sqrt{17}$.

Đặt $y = x + \sqrt{17-x^2} \Rightarrow y^2 = 17 + 2x\sqrt{17-x^2}$. Khi đó (1) trở thành: $y + \frac{y^2-17}{2} = 9$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 5 \end{cases}$$

Khi $y = 5$ ta được $x + \sqrt{17-x^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{17-x^2} = 5-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 17-x^2 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq x \\ 2x^2 - 10x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Khi $y = -7$ ta được $x + \sqrt{17-x^2} = -7 \Leftrightarrow \sqrt{17-x^2} = -7-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7-x \geq 0 \\ 17-x^2 = (-7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \geq x \\ 2x^2 + 14x + 32 = 0 (*) \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = 4$

Cách 2: Đặt $y = \sqrt{17-x^2} \geq 0$. Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy = 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 17 \\ x + y + xy = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2[9-(x+y)] = 17(2) \\ x+y+xy=9 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+y=-7 \end{cases}$$

Khi $x+y=5 \Rightarrow xy=4 \Rightarrow x=1, y=4$ hoặc $x=4, y=1$

Khi $x+y=-7 \Rightarrow xy=16$ (Hệ vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=4 \vee x=1$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Với $x=1$, VT = $\sqrt{2}$, VP = 0 suy ra $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Do đó, với $x > 1$ thì $\sqrt[4]{x^2-1} > 0$, ta chia hai vế phương trình cho $\sqrt[4]{x^2-1}$, ta có:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}} = \frac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} - 3\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}}{\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - 3\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = 2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ ($t > 0$). Khi đó, phương trình trở thành: $t - \frac{3}{t} = 2$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \quad \text{Vì } (t > 0) \text{ nên ta loại giá trị } t = -1.$$

Với $t = 3$, ta có: $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 81 \Leftrightarrow x+1 = 81(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{41}{40}$ (thỏa mãn điều kiện $x > 1$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{41}{40}$.

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$ (18)

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} (*)$$

Nếu $x_0 \geq 1$ là nghiệm của (1) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của (1) nên ta chỉ cần xét (1) với $x \geq 1$

*Khi $x=1$ thì (1) trở thành $\sqrt[3]{2} = 0 \Rightarrow x=1$ không là nghiệm của (1)

*Khi $x>1$ thì $\sqrt[6]{x^2-1} > 0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}} - \sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \quad (2)$$

Đặt $y = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} > 0$ thì (2) trở thành $y - \frac{1}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (do $y > 0$). Khi đó: $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = k^6, k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x-1} = k^6 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = k^6 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{k^6 + 1}{k^6 - 1}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = \pm \frac{k^6 + 1}{k^6 - 1}$ với $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 11: Giải phương trình : $2\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0 \quad (19)$

Lời giải

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + 3 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \quad (2)$$

Đặt $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ thì $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{y}$. Khi đó (2) trở thành: $2y + 3 + \frac{1}{y} = 0$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi $y=1$ thì $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \Leftrightarrow 1+x=x-1$ (phương trình vô nghiệm)

Khi $y=-1/2$ thì $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = -1/2 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = \frac{-1}{8} \Leftrightarrow 8(x+1)=x-1 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{7}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{-9}{7}$

Ví dụ 12: Giải phương trình $x\sqrt[3]{35-x^3} (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30 \quad (20)$

Lời giải

Đặt $y = \sqrt[3]{35-x^3} \Rightarrow y^3 = 35-x^3$. ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 35 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 125 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}. \text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x=3 \vee x=2$$

5. Dạng 5-Kỹ thuật nhân liên hợp để giải phương trình, bất phương trình vô tỉ

Ví dụ 1: Giải phương trình : $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$ (1)

Phân tích: chỉ cần biến đổi (1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2x-6$ và nhận thấy $9(x-2) - (x-6) = 8x-24 = 4(2x-6)$, xuất hiện nhân tử $2x-6$, do đó ta có lời giải:

Lời giải

Điều kiện $x \geq 2$, khi đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2x-6 \Leftrightarrow 4(x-3) = (x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} - 4 = 0(1') \end{cases}$$

$$(1') \Leftrightarrow 9(x-2) + x+6 + 6\sqrt{(x-2)(x+6)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)(x+6)} = 14-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14-5x \geq 0 \\ 9(x-2)(x+6) = (14-5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x^2 - 11x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11+3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$ và $x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 2: Giải phương trình : $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 1} = x + 1$ (2)

Phân tích: nhận thấy $x^2 + 3x + 2 - (x^2 - 1) = 3(x+1)$, xuất hiện nhân tử $x+1$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x = -1 \vee x \geq 1$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - (x^2 - 1) = (x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1}) \\
 &\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1} - 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1} - 3 = 0(2') \end{cases}
 \end{aligned}$$

Từ (2) và (2') ta suy ra:

$$2\sqrt{x^2 + 3x + 2} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 4(x^2 + 3x + 2) = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

(thử lại thấy thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3} \vee x = -1$

Ví dụ 3: Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4$ (3)

Phân tích: nhận thấy $(2x+4)^2 - (2x^2 + 16x + 18) = 2(x^2 - 1)$, xuất hiện nhân tử $\sqrt{x^2 - 1}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^2 + 16x + 18 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (3) &\Leftrightarrow (2x + 4 - \sqrt{2x^2 + 16x + 18}) = \sqrt{x^2 - 1} \\
 &\Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}(2x + 4 + \sqrt{2x^2 + 16x + 18}) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ 2\sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4 + \sqrt{2x^2 + 16x + 18}(3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ 2\sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4 + \sqrt{2x^2 + 16x + 18}(3') \end{cases}
 \end{aligned}$$

Từ (3) và (3') ta suy ra: $2\sqrt{2x^2 + 16x + 18} = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow 7x^2 + 64x + 73 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-1$

Ví dụ 4: Giải phương trình : $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 1} = 2x^2 - x - 3$ (4)

Phân tích: nhận thấy $3x-2-(x+1)=2x-3$ và phân tích $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$ thì xuất hiện nhân tử $2x-3$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$, khi đó ta có

$$(4) \Leftrightarrow 3x - 2 - (x + 1) = (2x - 3)(x + 1)(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1})$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3) \left[1 - (x + 1)(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 1 - (x + 1)(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ (x + 1) = \frac{1}{\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1}} \quad (4') \end{cases}$$

Xét phương trình (4'), ta có: $x + 1 \geq \frac{5}{3}, \forall x \geq \frac{2}{3} \quad (a)$

Hàm số $f(x) = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1}$ có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} >, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $f(x)$ là hàm

số đồng biến trên $\left[\frac{2}{3}; +\infty \right)$, do đó: $f(x)$

$$\geq f(2/3) = \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x + 1}} \leq \sqrt{\frac{3}{5}}, \forall x \geq \frac{2}{3} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra phương trình (4') vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2/3$

Ví dụ 5: Giải phương trình sau: $\sqrt{x + 1} - 4x = \frac{16 - 4x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > -1$.

$$\text{Khi đó: } \sqrt{x + 1} - 4x = \frac{16 - 4x^2}{\sqrt{x + 1}} \Leftrightarrow x + 1 - 4x\sqrt{x + 1} = 16 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2.2x\sqrt{x + 1} + x + 1 = 16 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{x + 1})^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x + 1} = 4 & (1) \\ 2x - \sqrt{x + 1} = -4 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x + 1 = (2x - 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ (TMĐK).}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ x + 1 = (2x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 + 15x + 15 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{3\}$.

6. Dạng 6: Các bài toán chứa tham số

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1} \quad (1)$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 = 2x^2 + mx + m + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 + (m-1)x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 + (m-1)x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 - 2\sqrt{2} \\ m \geq 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x^2 - 1} = x + m$ (21)

Lời giải

$$\text{Ta có (21)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 - 1 = (x + m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -1 - m^2 \end{cases} (*)$$

Nếu $m=0$ thì (*) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm

$$\text{Nếu } m \neq 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x = \frac{-1 - m^2}{2m}$$

$$\text{Mà } x \geq -m \text{ nên } \frac{-1 - m^2}{2m} \geq -m \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Vậy

$$\text{Nếu } \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{cases} \text{ thì (21) vô nghiệm}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \text{ thì (21) có nghiệm } x = \frac{-1 - m^2}{2m}$$

Ví dụ 3: Biết phương trình (ẩn x): $\sqrt{x-1} = 5-m$ có nghiệm. Khi đó tìm số các giá trị nguyên dương của tham số m

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$.

+ Nếu $5-m < 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $5-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5$ khi đó $\sqrt{x-1} = 5-m \Leftrightarrow x = (5-m)^2 + 1 \geq 1$ suy ra phương trình có nghiệm là $x = (5-m)^2 + 1$.

Vậy các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình có nghiệm là:
 $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x-m} = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$\text{Phương trình tương đương: } \begin{cases} x \geq m \\ x = m \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x = m \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-3 \leq m < -1$.

Ví dụ 5: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ có nghiệm duy nhất

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x > 2$.

$$\text{Khi đó phương trình } \frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+3)x + 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2m \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $(*)$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x > 2$

$$\text{tương đương với } \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m \leq 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau $\sqrt{x^2 + 2x + m} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

$$\text{Phương trình } \sqrt{x^2 + 2x + m} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 2x + 1 = m \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x^2 + 2x + 1, x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$\frac{11}{4}$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 < m \leq \frac{11}{8}$.

Ví dụ 7: Tìm tham số m để phương trình $(x^2 - x)\sqrt{x - m} = 0$ chỉ có một nghiệm

Lời giải

Điều kiện $x \geq m(1)$.

$$(x^2 - x)\sqrt{x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = m \text{ (tm(1))} \end{cases}.$$

Phương trình luôn có nghiệm $x = m$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = m \geq 1$

Vậy $m \geq 1$.

Ví dụ 8: Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 10x + m} = 2 - x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 10x + m} = 2 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 10x + m = (2 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 10x + m = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 6x = m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{m - 4}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Để phương trình vô nghiệm thì $\frac{m - 4}{6} > 2 \Leftrightarrow m - 4 > 12 \Leftrightarrow m > 16$.

Ví dụ 9: Cho phương trình $\sqrt{2x + m} = x - 1$ (1). Tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Lời giải

$$\text{Phương trình } \sqrt{2x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 < x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + m > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ 1 - m - 4 + 1 > 0 \\ 4 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x + 4} + \sqrt{4 - x} + 2\sqrt{-x^2 + 16} - m + 2 = 0$ có nghiệm

Lời giải

- Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

- Đặt $t = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 + 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow t^2 \geq 8 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}$.

Lại có: $t = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{(1+1)(4+x+4-x)} = 4$.

Do đó: với $x \in [-4; 4]$ thì $t \in [2\sqrt{2}; 4]$.

- Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - 6 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = m$.

Nhận thấy hàm số $f(t) = t^2 + t - 6$ đồng biến trên đoạn $[2\sqrt{2}; 4]$ nên

$$f(2\sqrt{2}) \leq f(t) \leq f(4), \forall t \in [2\sqrt{2}; 4]$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2} \leq f(t) \leq 14, \forall t \in [2\sqrt{2}; 4].$$

Suy ra phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên đoạn $[2\sqrt{2}; 4]$ khi và chỉ khi

$$2 + 2\sqrt{2} \leq m \leq 14.$$

Lại do m nguyên nên $m \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 11: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + \sqrt{1-x^2} = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Tính $S = a + b$.

Lời giải

$$x^2 + \sqrt{1-x^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ -(1-x^2) + \sqrt{1-x^2} + 1 - m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -(1-x^2) + \sqrt{1-x^2} + 1 - m = 0 (*) \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{1-x^2} = t$. Điều kiện $t \in [0; 1]$. Phương trình (*) trở thành: $-t^2 + t + 1 = m$ (**)

Số nghiệm của phương trình (**) là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + t + 1$ trên $[0; 1]$

và đường thẳng $y = m$ vuông góc với trục Oy .

Xét đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + t + 1$ là đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, vì

$a = -1 < 0$ nên bề lõm quay xuống dưới. Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: Phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

$$\text{Vậy } a=1; b=\frac{5}{4} \Rightarrow S=a+b=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}.$$

Ví dụ 12: Cho phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}+3\sqrt{(x-1)(5-x)}=m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình trên có nghiệm?

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$. Ta có $t^2=4+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{5-x}\geq 4\Rightarrow t\geq 2$.

Mặt khác $t^2=4+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{5-x}\leq 2+(x-1)+(5-x)=6\Rightarrow t\leq\sqrt{6}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$t+3\cdot\frac{t^2-4}{2}=m\Leftrightarrow 3t^2+2t-12=2m.$$

Xét hàm số $f(t)=3t^2+2t-12$ với $t\in[2;\sqrt{6}]$.

Hàm số f đồng biến trên $[2;\sqrt{6}]$ nên $f(2)\leq f(t)\leq f(\sqrt{6})\Rightarrow 4\leq f(t)\leq 6+2\sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $4\leq m\leq 6+2\sqrt{6}$

Do m nguyên nên $m\in\{4;5;...;10\}$.

Ví dụ 13: Giải và biện luận phương trình sau theo m :

$$\sqrt{x^2+x+\frac{m^2}{(x-1)^2}}=x-\frac{m}{x-1}\quad(22)$$

Lời giải

$$\text{Ta có (22)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x - \frac{m}{x-1} \geq 0 \\ x^2 + x + \frac{m^2}{(x-1)^2} = x^2 + \frac{m^2}{(x-1)^2} - \frac{2mx}{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x - \frac{m}{x-1} \geq 0 \\ x(x-1+2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1(**) \\ x - \frac{m}{x-1} \geq 0(**) \\ x = 0 \vee x = 1-2m \end{cases}$$

Để $x=0$ thỏa mãn (*) và (**), ta cần có $0 - \frac{m}{-1} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Để $x=1-2m$ thỏa mãn (*) và (**), ta cần có $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$

Từ đó suy ra:

Nếu $m < 0$: phương trình (1) có nghiệm $x=1-2m$

Nếu $m=0$: phương trình (1) có nghiệm $x=0$

Nếu $0 < m \leq \frac{3}{4}$: phương trình (1) có nghiệm $x=0, x=1-2m$

Nếu $m > \frac{3}{4}$: phương trình (1) có nghiệm $x=0$

Ví dụ 14: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \quad (23)$$

Lời giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 - (m-4)x - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 + 12 > 0 \\ \frac{s}{2} = \frac{m-4}{6} > -\frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{m-4}{2} - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{với } f(x) = 3x^2 - (m-4)x - 1$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}. \text{ Vậy } m \geq \frac{9}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ví dụ 15: Với những giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm.

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = a \quad (24)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } u = \sqrt[3]{1-x}, v = \sqrt[3]{1+x}. \text{ Ta có hệ: } \begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ (u+v)[u^2+v^2-uv]=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ uv = \frac{a^3-2}{3a} \end{cases} \quad (a=0 \text{ không thỏa mãn phương trình})$$

$$u, v \text{ là nghiệm của phương trình } t^2 - at + \frac{a^3-2}{3a} = 0 (*)$$

Phương trình (24) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4 \frac{a^3-2}{3a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^3-8}{a} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $0 < a \leq 2$

Ví dụ 16: Với những giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm.

$$\sqrt{x-4a+16} - 2\sqrt{x-2a+4} + \sqrt{x} = 0 \quad (25)$$

Lời giải

Ta có (25) $\Leftrightarrow \sqrt{x-4a+16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x-2a+4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4a-16 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2a-4 \\ 2x-4a+16+2\sqrt{x^2-4ax+16x} = 4x-8a+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4a-16 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2a-4 \\ \sqrt{x^2-4ax+16x} = x-2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4a-16(1') \\ x \geq 0(2') \\ x \geq 2a(3') \\ x = \frac{a^2}{4}(4') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2a \\ x = \frac{a^2}{4} \end{cases} \text{ (vì (4') luôn thỏa (1') và (2'))}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\frac{a^2}{4} \geq 2a \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a \leq 0) \vee (a \geq 8)$

Vậy $(a \leq 0) \vee (a \geq 8)$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 17: Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (5)$

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Khi đó (5) $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{1}{3}$$

Chú ý: Có thể giải bài toán trên bằng cách:

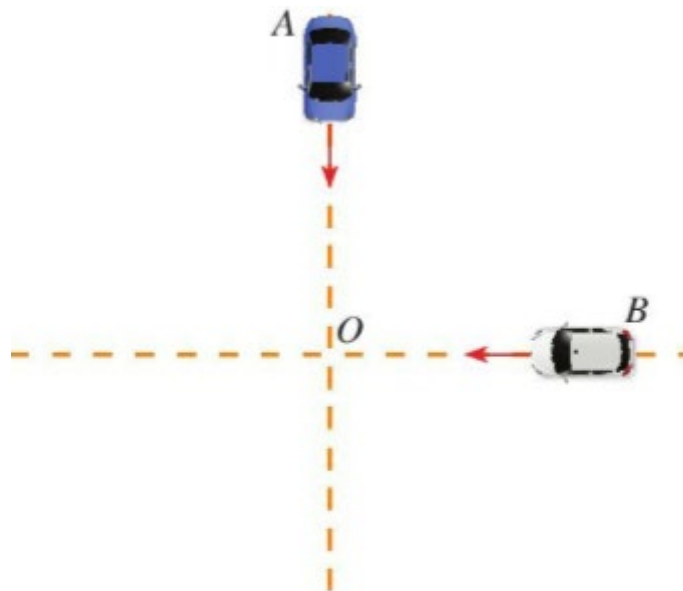
Điều kiện $x > 0$. Khi đó (5) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x(x+1)} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + x = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}$

7. Dạng 7- Các bài toán thực tế về phương trình chứa căn thức

Ví dụ 1: Hai ô tô xuất phát tại cùng một điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến cuối O (Hình 31). Vị trí A cách bến 8 km, vị trí B cách bến 7 km. Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km.



Hình 31

Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$.

Làm thế nào để tìm được giá trị của x ?

Lời giải

Để tìm được giá trị của x , ta cần giải phương trình $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$. (1).

Điều kiện xác định: $(8-40x)^2 + (7-40x)^2 \geq 0$.

Bình phương hai vế ta có: $(8-40x)^2 + (7-40x)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow 1\,600x^2 - 640x + 64 + 1\,600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3\,200x^2 - 1\,200x + 88 = 0$$

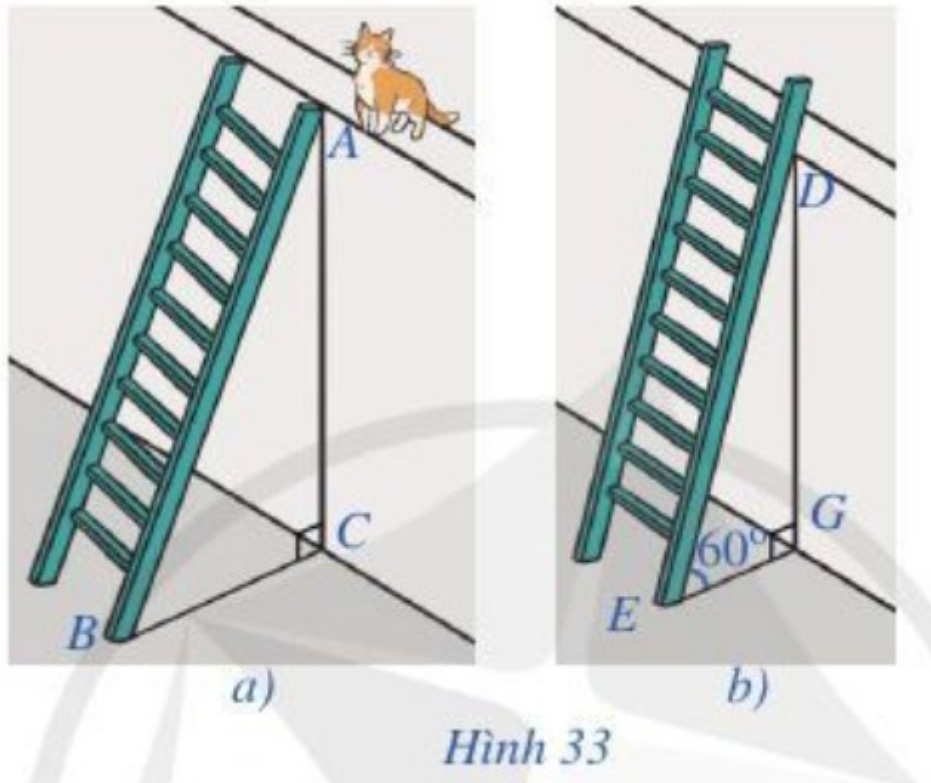
$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm là $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,275$.

Thử lại với điều kiện, ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn.

Vậy $x = 0,1$; $x = 0,275$.

Ví dụ 2: Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng và mép trên bức tường (Hình 33a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình 33b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Gọi chiều cao của bức tường là x (mét) ($x > 0$).

Vì chiếc thang cao hơn tường 1 m nên chiều cao của chiếc thang là $x + 1$ (m).

Khi đó quan sát Hình 33a ta thấy, $AC = x$, $AB = x + 1$, tam giác ABC vuông tại C, áp dụng định lý Pythagore ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Suy ra: $BC^2 = AB^2 - AC^2 = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ (m). $BC = \sqrt{2x + 1}$ (m)

Quan sát Hình 33b, ta thấy chiều cao bức tường không thay đổi nên $DG = x$ (m).

Khi bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần tường thêm 0,5 m thì $GE = BC - 0,5$.

Suy ra $GE = \sqrt{2x + 1} - 0,5$ (m)

Lại có tam giác DGE vuông tại G nên ta có: $\tan \widehat{DEG} = \frac{DG}{GE}$

Mà $\widehat{DEG} = 60^\circ$, $DG = x$, $GE = \sqrt{2x + 1} - 0,5$

Do đó:

$$\frac{x}{\sqrt{2x+1}-0,5} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}(\sqrt{2x+1}-0,5)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3(2x+1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

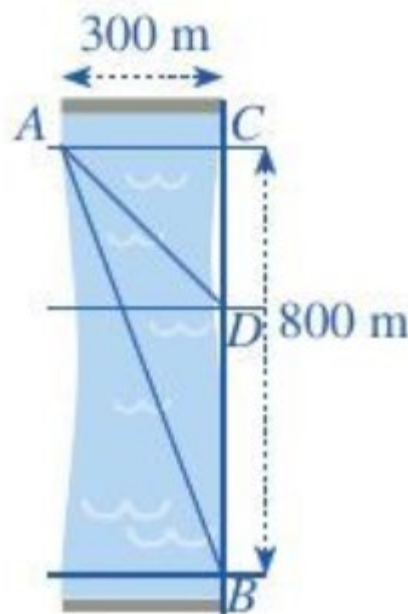
$$\Leftrightarrow \sqrt{3(2x+1)} = x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \\ 3(2x+1) = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + (\sqrt{3}-6)x - \frac{9}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6-\sqrt{3}+\sqrt{48-12\sqrt{3}}}{2} \approx 4,7 \\ x = \frac{6-\sqrt{3}+\sqrt{48-12\sqrt{3}}}{2} \approx -0,5 \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên $x \approx 4,7$ là giá trị thỏa mãn.

Vậy bức tường cao khoảng 4,7 m.

Ví dụ 3: Một người đứng ở điểm A trên bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như Hình 34. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Hình 34

Lời giải

Đổi: 300 m = 0,3 km; 800 m = 0,8 km; 7,2 phút = 0,12 giờ.

Gọi độ dài khoảng cách từ vị trí C đến D là x (km, $x > 0$).

Khi đó ta có: AC = 0,3 km; CD = x km; BC = 0,8 km; DB = BC – CD = 0,8 – x (km).

Lại có tam giác ACD vuông tại C, áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = (0,3)^2 + x^2 = 0,09 + x^2$$

Suy ra $AD = \sqrt{0,09 + x^2}$ (km)

Do đó khoảng cách từ vị trí A đến vị trí D là $AD = \sqrt{0,09 + x^2}$ (km), mà vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc dòng nước không đáng kể nên thời gian người đó chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí D là $t_1 = \frac{\sqrt{0,09 + x^2}}{6}$ (giờ).

Quãng đường từ vị trí D đến vị trí B là $0,8 - x$ (km) và vận tốc chạy bộ là 10 km/h nên thời gian người đó chạy bộ từ vị trí D đến vị trí B là $t_2 = \frac{0,8 - x}{10}$ (giờ).

Tổng thời gian người đó chèo thuyền là $t_1 + t_2 = t = 0,12$ (giờ).

Khi đó ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{0,09 + x^2}}{6} + \frac{0,8 - x}{10} &= 0,12 \\ \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{0,09 + x^2}}{30} + \frac{3(0,8 - x)}{30} &= 0,12 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{0,09 + x^2} + 2,4 - 3x &= 3,6 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{0,09 + x^2} &= 1,2 + 3x \quad (1) \end{aligned}$$

Bình phương cả hai vế của (1) ta được: $25.(0,09 + x^2) = (1,2 + 3x)^2$

$$\Leftrightarrow 2,25 + 25x^2 = 1,44 + 7,2x + 9x^2$$

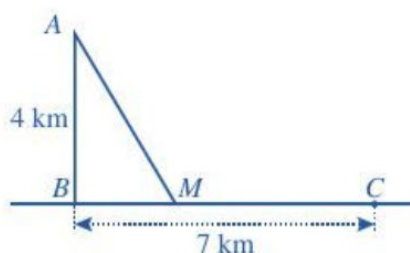
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 7,2x + 0,81 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0,225 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0)$$

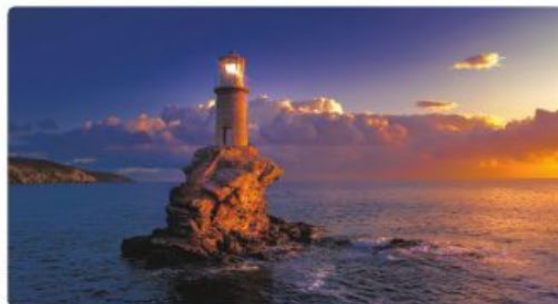
Suy ra $x = 0,225 \text{ km} = 225 \text{ m}$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C đến D là 225 m.

Ví dụ 4: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như Hình 35. Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



Hình 35



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải

Đổi 148 phút = $37/15$ giờ.

Gọi khoảng cách từ vị trí B đến M là x (km, $x > 0$).

Khi đó ta có: $AB = 4$ km, $BM = x$ km, $BC = 7$ km, $MC = BC - BM = 7 - x$ (km).

Tam giác ABM vuông tại B, áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{16 + x^2} \text{ (km)}$$

Do đó khoảng cách từ vị trí A đến M là $AM = \sqrt{16 + x^2}$ (km) và vận tốc chèo thuyền là 3 km/h nên thời gian chèo thuyền từ A đến M là $t_1 = \frac{\sqrt{16 + x^2}}{3}$ (giờ).

Khoảng cách từ M đến C là $7 - x$ (km) và người đó đi bộ với vận tốc 5 km/h nên thời gian đi bộ từ M đến C là $t_2 = \frac{7 - x}{5}$ (giờ).

Thời gian người đó đi từ A đến C chính bằng tổng thời gian người đó đi từ A đến M và từ M đến C nên ta có $t_1 + t_2 = t = 37/15$ (giờ).

Khi đó ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{16 + x^2}}{3} + \frac{7 - x}{5} = \frac{37}{15} \Leftrightarrow 5\sqrt{16 + x^2} + 3(7 - x) = 37 \Leftrightarrow 5\sqrt{16 + x^2} = 16 + 3x \quad (1)$$

Bình phương cả hai vế của (1) ta được: $25 \cdot (16 + x^2) = (16 + 3x)^2$

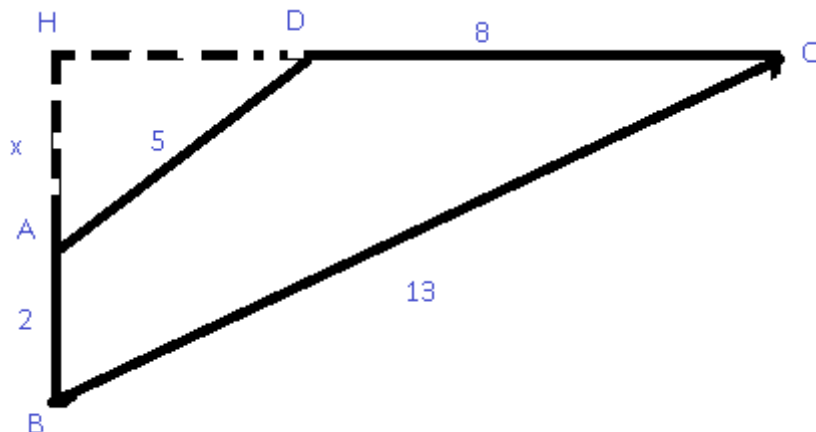
$$\Leftrightarrow 400 + 25x^2 = 256 + 96x + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0)$$

Vậy khoảng cách từ vị trí B đến vị trí M là 3 km.

Ví dụ 5: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AB = 2$; $BC = 13$; $CD = 8$; $DA = 5$. Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x , từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Lời giải

Hướng dẫn: Sử dụng định lý Pytago để tìm x .

Ta có: $HD = \sqrt{25 - x^2}$. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 25 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5 \quad (*)$

Xét tam giác vuông BHC , ta có $HB^2 + HC^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (\sqrt{25-x^2} + 8)^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 25 - x^2 + 16\sqrt{25-x^2} + 64 - 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{25-x^2} = 76 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{25-x^2} = 19 - x \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $16(25 - x^2) = 361 - 38x + x^2$

$$\text{Sau khi thu gọn ta được } 17x^2 - 38x - 39 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-13}{17} \end{cases}$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình (1) và kết hợp với điều kiện (*), ta thấy $x = 3$ thỏa mãn.

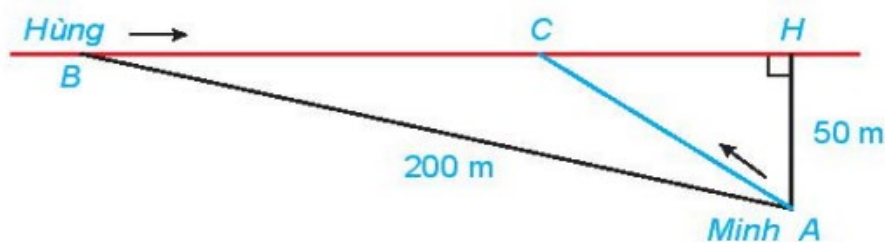
Vậy $x = 3$

Hướng dẫn: Để tính diện tích tứ giác $ABCD$, ta áp dụng công thức tính diện tích tam giác cho $\triangle BHC$, $\triangle AHD$.

Ta có $HB = 5$, $HC = 12$, $HA = 3$, $HD = 4$.

$$S_{ABCD} = S_{BHC} - S_{AHD} = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot HC - \frac{1}{2} \cdot HA \cdot HD = \frac{1}{2} (5 \cdot 12 - 3 \cdot 4) = 24.$$

Ví dụ 6: Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng $50m$ để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn $200m$ thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là $5km/h$, vận tốc xe đạp của Hùng là $15km/h$. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (H.6.22) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 6.22

Lời giải

Vận tốc của bạn Minh: $v_1 = 5(km/h)$.

Vận tốc của bạn Hùng: $v_2 = 15(km/h)$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHB :

$$BH = \sqrt{(0,2)^2 - (0,05)^2} = \frac{\sqrt{15}}{20} (km)$$

Gọi $BC = x(km)$, $x > 0$.

Suy ra: $CH = \frac{\sqrt{15}}{20} - x$, $x \leq \frac{\sqrt{15}}{20}$.

Ta cần xác định vị trí điểm C để Minh và Hùng gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia

Nghĩa là: ta cần tìm x để thời gian hai bạn di chuyển đến C là bằng nhau.

Thời gian Hùng đi từ B đến C là: $t_2 = \frac{S_{BC}}{v_2} = \frac{x}{15}(h)$.

Quãng đường AC Minh đã đi là: $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}$

Thời gian Minh đã đi từ A đến C là: $t_1 = \frac{S_{AC}}{v_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}}{5}(h)$.

Theo yêu cầu bài toán: $\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}}{5} = \frac{x}{15}$

Bình phương 2 vế: $\frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2 + (0,05)^2}{25} = \frac{x^2}{225}$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{3}{80} - \frac{\sqrt{15}}{10}x + x^2\right) + \frac{9}{400} = x^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - \frac{9\sqrt{15}}{10}x + \frac{9}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,3 \\ x \approx 0,1 \end{cases}$$

Vì $0 < x \leq \frac{\sqrt{15}}{20} \approx 0,19$ nên $x \approx 0,1$ thỏa mãn.

Vậy hai bạn Minh và Hùng di chuyển đến vị trí C cách điểm B một đoạn $x \approx 0,1(km) = 100(m)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $0 = 0$ hay $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 2: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$?

A. 0.

B. vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Với $x = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn. Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 3: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x}$ là

- A.** 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 4: Phương trình $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3$ có nghiệm là

- A.** $x = 1$ hoặc $x = 3$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B.

$$\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2$.

- A.** $x = 4$. **B.** $\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. **C.** $x = 4 + 2\sqrt{2}$. **D.** $x = 6$.

Lời giải

Chọn A.

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 6: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x - 3} = x - 3$ là:

- A.** $S = \{6; 2\}$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{6\}$. **D.** $S = \emptyset$.

Câu 7. Cách 1: $\sqrt{2x - 3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6. \text{ Chọn C.}$

Cách 2: Thử đáp án.

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 2 - 3$ (sai).

Thay $x = 6$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 6 - 3$ (đúng).

Vậy $x = 6$ là nghiệm của phương trình.

Câu 8: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ là:

- A.** $S = \{0; 2\}$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{0\}$. **D.** $S = \emptyset$.

Câu 9. Cách 1: $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Chọn B.}$

Cách 2: Thử đáp án.

Thay $x = 0$ vào phương trình ta được $\sqrt{0^2 - 4} = 0 - 2$ (sai).

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\sqrt{2^2 - 4} = 2 - 2$ (đúng).

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 10. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 11. Điều kiện xác định của phương trình $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

Ta có $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)[\sqrt{2x+7} - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7} - (x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+7} = x+2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình

$$(1): \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2$ nên tổng hai nghiệm của phương trình là $1+2=3$. **Chọn D.**

Câu 12. Phương trình $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 13. Điều kiện xác định của phương trình $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$$\text{Từ phương trình đã cho ta được: } x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$$

So với điều kiện $x > 2$ thì $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình. **Chọn A.**

Câu 14. Phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Điều kiện xác định của phương trình $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Từ phương trình đã cho ta được

$$\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+3)+4=2(\sqrt{2-x}+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \sqrt{2-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. **Chọn B.**

Câu 16: Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17-x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $17-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$.

Ta có: $(x^2 - 6x)\sqrt{17-x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17-x^2} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 6) = 0 \\ 16 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (T) \\ x = 6 & (L) \\ x = \pm 4 & (T) \end{cases} \text{ . Vậy phương trình có 3 thực phân} \\ \text{biệt.}$$

Câu 17: Phương trình $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x + 3} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -3$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \\ x = -4 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} .$$

Câu 18: Một học sinh đã giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x$ (1) như sau:

$$(I). (1) \Leftrightarrow x^2 - 5 = (2 - x)^2$$

$$(II). \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$(III). \text{ Vậy phương trình có một nghiệm là } x = \frac{9}{4}$$

Lý luận trên nếu sai thì sai từ giai đoạn nào

A. (I).

B. (III).

C. (II).

D. Lý luận

đúng.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Đúng là } (1) \Rightarrow x^2 - 5 = (2 - x)^2 .$$

Câu 19: Phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1 .

B. 2 .

C. 0 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn B.

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} . \text{ Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.}$$

Câu 20: Một học sinh tiến hành giải phương trình $\sqrt{5x + 6} = x - 6$ như sau:

$$\text{Bước 1: Điều kiện } 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{5} .$$

$$\text{Bước 2: Phương trình đã cho tương đương với } 5x + 6 = (x - 6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 15 \end{cases} .$$

Bước 3: Đối chiếu điều kiện, thấy cả 2 nghiệm thỏa mãn nên phương trình có 2 nghiệm $x = 2, x = 15$.

Lời giải của học sinh trên:

A. Sai từ bước 3. **B.** Đúng. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 2.

Lời giải

Chọn D.

Đúng là phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ 5x+6 = (x-6)^2 \end{cases}$.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình: $(\sqrt{x-4}-1)(x^2-7x+6)=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của phương trình $x \geq 4$.

Phương trình tương đương với $\begin{cases} \sqrt{x-4}=1 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \\ x=6 \end{cases}$ kết hợp điều kiện suy ra

$$\begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}$$

Câu 22: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ là

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x+7=4+x+1+4\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1=2\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 23: Số nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x-3}+5=\sqrt{7-x}+x$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$$+ \text{Điều kiện: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

+ Thay x lần lượt bằng 3, 4, 5, 6, 7 vào phương trình ta thấy các số 3, 7 là nghiệm.

+ Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên.

Câu 24: Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x-1}=x-3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \Rightarrow x = 5. \\ x = 5 \end{cases}$$

Câu 25: Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Rightarrow x^2+5x = t^3+2.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{-x^2+4} + 2m+3 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải

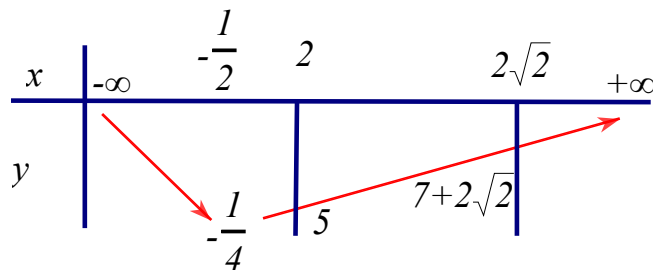
Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}, \text{ Điều kiện}$$

$$2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t + 2\frac{t^2-4}{2} + 2m+3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2m-1 = 0 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$, có bảng biến thiên



Phương trình (*) có nghiệm thỏa $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ khi $5 \leq 2m \leq 7+2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq \frac{7+2\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{7+2\sqrt{2}}{2} \rightarrow (2,5 \leq m \leq 4,91), \text{ có 2 giá trị } m \text{ nguyên dương là } m=3, m=4.$$

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 4\sqrt{x^2+1} - (m-1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B.

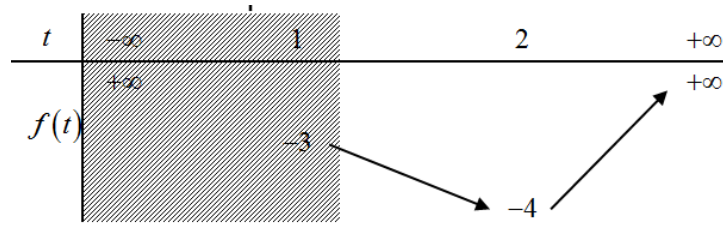
Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1.$$

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - 4t - m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = m$. (2)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Vẽ BBT ta có



Dựa BBT ta có $-4 < m < -3$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Biết phương trình $3x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - \sqrt{3x - 1} = 0$ có một nghiệm có dạng $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 14$.

B. $S = 21$.

C. $S = 10$.

D. $S = 12$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x^2 + 7x \geq 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} (*)$$

Với điều kiện trên, phương trình tương đương

$$\left[(2x+1) - \sqrt{3x^2 + 7x} \right] + \left[x - \sqrt{3x-1} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{(2x+1) + \sqrt{3x^2 + 7x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x + \sqrt{3x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{2x+1 + \sqrt{3x^2 + 7x}} + \frac{1}{x + \sqrt{3x-1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ (do } (*) \Rightarrow \frac{1}{2x+1 + \sqrt{3x^2 + 7x}} + \frac{1}{x + \sqrt{3x-1}} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Theo yêu cầu đề bài ta chọn nghiệm $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Vậy $a = 3, b = 5, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 10$.

Câu 29: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x+m} = x-1$ có nghiệm duy nhất?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.

$$\sqrt{2x+m} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi hệ có nghiệm duy nhất.

Xét $x^2 - 4x + 1 - m = 0$; $\Delta' = 3 + m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì (*) có nghiệm kép $x = 2 \geq 1$ (thỏa).

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất khi (*) có 2 nghiệm thỏa

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - m - 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

m không dương nên $m \in \{-3; -1; 0\}$.

Câu 30: Phương trình $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B.

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

$$\Leftrightarrow x+5+x+6+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\sqrt[3]{2x+11}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=-6 \\ x=-\frac{11}{2} \end{cases}$$

Thử lại ta được các nghiệm đều thỏa mãn

Câu 31: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$ là

A. $\emptyset$.

B. $\left\{\frac{7}{2}; 1\right\}$.

C. $\{0\}$.

D. $\{1\}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}, t > 0 \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Ta có pt: } t + \frac{1}{t^2} = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $t > 0$ ta tìm được $t=1, t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Trường hợp 1: } t=1: \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1$$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Trường hợp 2: } t=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ \left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Câu 32: Số nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $(4-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$.

$$x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}(1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}, t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = -(x^2 - 2x - 8) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow -t^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(n) \\ t = -4(l) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(n) \\ x = 4(n) \end{cases}. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.}$$

Câu 33: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x^2} = m$ có nghiệm là

A. $[\sqrt{2}; +\infty)$.

B. $[6; +\infty)$.

C. $[\sqrt{2}; 6]$.

D. $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn C.

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x^2} = m \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; 2].$$

$$(1) \text{ trở thành } t + 2(t^2 - 2) = m \Leftrightarrow 2t^2 + t - (4+m) = 0 \quad (2).$$

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2]$

$$\text{Tức là } \begin{cases} \Delta = 1 + 4 \cdot 2(4+m) = 8m + 33 \geq 0 \\ \sqrt{2} \leq \frac{-1 - \sqrt{8m+33}}{4} \leq 2 \\ \sqrt{2} \leq \frac{-1 + \sqrt{8m+33}}{4} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{33}{8} \\ 4\sqrt{2} + 1 \leq \sqrt{8m+33} \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{33}{8} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 6 \end{cases}$$

Vậy $m \in [\sqrt{2}; 6]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 34: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là

A. 5.

B. 13.

C. 10.

D. 25.

Lời giải:

Chọn B.

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = -3 \\ x = x_2 = -2 \end{cases}.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Câu 35: Phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$ có nghiệm:

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có : } \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 36: Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ là

A. 17.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 37 Có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên m thuộc nửa khoảng $[-2017; 2017)$ để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm:

A. 2014.

B. 2021.

C. 2013.

D. 2020.

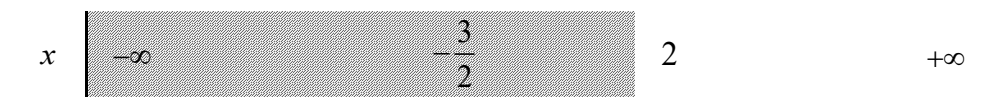
Lời giải

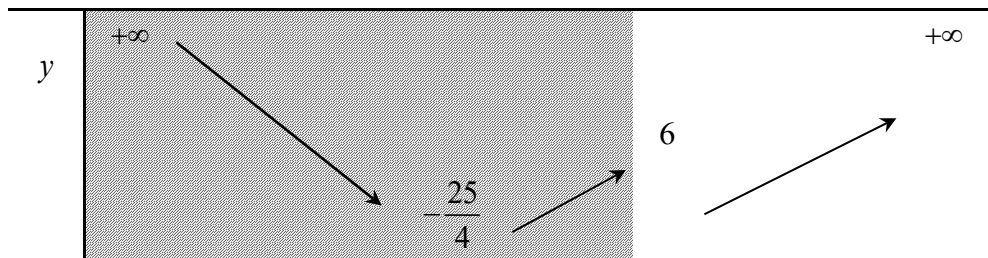
Chọn A.

Phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - x - 2m = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}.$$

BBT:





Để phương trình đã cho có nghiệm điều kiện là $2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$.

mà $m \in [-2017; 2017)$ suy ra $3 \leq m < 2017$.

Vậy có nhiều nhất 2014 số nguyên thuộc nửa khoảng $[3; 2017)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Tìm các giá trị của m để phương trình $2\sqrt{x+1} = x+m$ có nghiệm:

A. $m > 2$.

B. $m \geq 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn C.

$$2\sqrt{x+1} = x+m \quad (1)$$

$$\text{Phương trình tương đương: } \begin{cases} x+m \geq 0 \\ 4(x+1) = x^2 + 2mx + m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-m$.

$$\Delta' = 8 - 4m$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - m - \sqrt{8 - 4m} \\ x_2 = 2 - m + \sqrt{8 - 4m} > -m \end{cases}$$

Vậy $m \leq 2$.

Câu 39: Tập nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x-1$ là

A. $\{2 - \sqrt{2}\}$.

B. $\emptyset$.

C. $\{2 + \sqrt{2}\}$.

D. $\{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$.

Câu 40: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là:

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 2.

Câu 41: Cho phương trình $\sqrt{x^2 + x + 3} = x+m$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$ là

A. $\{1\}$.

B. $\{-5\}$.

C. $\{-5; 1\}$.

D. $[-5; 1]$.

Lời giải

$$\sqrt{x^2 + x + 3} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x+m \geq 0 & (1) \\ (2m-1)x + m^2 - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Để phương trình có nghiệm $x=2$, từ (2) ta phải có

$$2(2m-1) + m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Với $m = 1$, từ (2) ta có $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ thỏa mãn (1), do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Suy ra $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

Với $m = -5$, từ (2) ta có $-11x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ không thỏa mãn (1). Suy ra $m = -5$ không thỏa mãn bài toán.

Kết luận $m = 1$ thỏa mãn, vậy chọn A.

Câu 42: Có bao nhiêu tham số nguyên m để phương trình $(\sqrt{x+2} - \sqrt{10-x})(x^2 - 10x - 11)\sqrt{3x+3-m} = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 4.

B. 16.

C. 15.

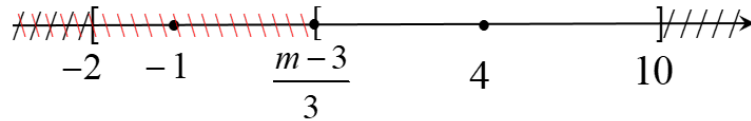
D. 17.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \in [-2; 10] \\ x \geq \frac{m-3}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } (\sqrt{x+2} - \sqrt{10-x})(x^2 - 10x - 11)\sqrt{3x+3-m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{10-x} \\ x^2 - 10x - 11 = 0 \\ 3x+3-m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-1; 4\} \\ x = \frac{m-3}{3} \end{cases}.$$



$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } -1 \leq \frac{m-3}{3} < 4 \Leftrightarrow m \in [0; 15).$$

Vậy có 15 giá trị nguyên.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1} \quad (1)$$

A. 4.

B. 16.

C. 15.

D. 17.

Lời giải

Ta có

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 = x^2 + mx + m - 1 \end{cases}$$

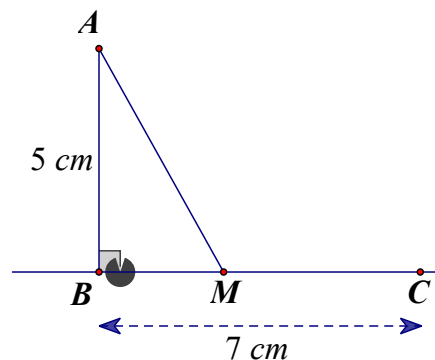
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 + (1-m)x + 2-m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x + 2-m = 0 \quad (2)$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (1-m)^2 - 4(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 - 2\sqrt{2} \approx -3,83 \\ m \geq -1 + 2\sqrt{2} \approx 1,83 \end{cases}$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$

Câu 44: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ (km). Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 (km). Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 (km/h) rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 (km/h). Vị trí của điểm M cách B một khoảng **gần nhất** với giá trị nào sau đây biết thời gian người đó đi từ A đến C là 135 phút.



A. 1,22 (km).

B. 7,0 (km).

C. 9,18 (km).

D. 1,23 (km).

Lời giải

Ta có 135 phút = 9/4 giờ

Đặt $BM = x$ (km), ($0 \leq x \leq 7$).

Khi đó:
$$\begin{cases} AM = \sqrt{x^2 + 25} \text{ (km)} \\ MC = 7 - x \text{ (km)} \end{cases}$$

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}$ (h).

Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \frac{7-x}{6}$ (h).

$\Rightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là:

$$t_{AM} + t_{MC} = t(h).$$

Khi đó ta có phương trình $\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} = \frac{9}{4}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 25} + 2(7-x) = 27 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 25} = 13 + 2x$$

Ta có
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13 + 2x \geq 0 \\ 9(x^2 + 25) = (13 + 2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{13}{2} \\ 5x^2 - 52x + 56 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26 - 6\sqrt{11}}{5} \approx 1,22 \\ x = \frac{26 + 6\sqrt{11}}{5} \approx 9,18(KTM) \end{cases}$$

Vậy $BM = 1,22(\text{km})$

Chọn A.

