

Ngày thi: 03 tháng 10 năm 2019

Thời gian làm bài: 180 phút (đề thi gồm 01 trang)

Bài I (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+4)x + m + 2$ có đồ thị (C_m) và điểm $M\left(2; -\frac{3}{2}\right)$. Tìm m để đường thẳng $y = 2x + 2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1; 0)$, B , C sao cho $\triangle MBC$ là tam giác đều.

Bài II (5 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 22x + 29} - x - 2 = 2\sqrt{2x + 3}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + y)^3 - (y^2 + x)^3 = 6(x^2 - x) - 6(y^2 - y) \\ 8x^4 + 8y^4 + 8x^2 + 8y^2 = 9 - 16xy(x + y) \end{cases}$$

Bài III (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 1} - 1}{u_n}$; $n = 1, 2, \dots$

1) Chứng minh (u_n) là dãy số bị chặn.

2) Chứng minh $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2019}} < 2^{2020}$.

Bài IV (6 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm I với M , $N(1; -1)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng IA , CD . Biết điểm B có hoành độ dương và đường thẳng MB có phương trình $x - 3y + 6 = 0$, tìm tọa độ điểm C .

2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $CA = CB = \sqrt{2}$, $AB = 2$, $\triangle SAB$ là tam giác đều, $mp(SAB) \perp mp(ABC)$. Gọi D là chân đường phân giác trong hạ từ đỉnh C của tam giác SBC .

a) Tính thể tích khối chóp $D.ABC$.

b) Gọi M là điểm sao cho các góc tạo bởi các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) với mặt phẳng (ABC) là bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$.

Bài V (2 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}.$$

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT HÀ NỘI

KỶ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ

ĐỀ CHÍNH THỨC

LỚP 12 THPT

(Đề thi có 01 trang)

NĂM HỌC 2019 - 2020



Ngày thi : 3/10/2019

MÔN: TOÁN

Thời gian: 180 phút

Họ và tên:.....SBD:.....

Bài I. (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+4)x + m+2$ có đồ thị (C_m) và điểm $M\left(2; -\frac{3}{2}\right)$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x+2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1;0), B, C$ sao cho ΔMBC là tam giác đều.

Bài II. (5 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 22x + 29} - x - 2 = 2\sqrt{2x+3}$
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 + y)^3 - (y^2 + x)^3 = 6(x^2 - x) - 6(y^2 - y) \\ 8x^4 + 8y^4 + 8x^2 + 8y^2 = 9 - 16xy(x+y) \end{cases}$

Bài III. (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 1} - 1}{u_n}; n = 1, 2, 3, \dots$

- 1) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số bị chặn.
- 2) Chứng minh $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2019}} < 2^{2020}$.

Bài IV. (6 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm I với $M, N(1; -1)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng IA, CD . Biết điểm B có hoành độ dương và đường thẳng MB có phương trình $x - 3y + 6 = 0$, tìm tọa độ điểm C .

2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $CA = CB = \sqrt{2}, AB = 2$, mặt bên ABC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là chân đường phân giác trong góc C của tam giác SBC .

a. Tính thể tích khối chóp $D.ABC$.

b. Gọi M là điểm sao cho các góc tạo bởi các mặt phẳng $(MAB), (MBC), (MCA)$ với mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$.

Bài V. (2 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}.$$

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài I. (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+4)x + m + 2$ có đồ thị (C_m) và điểm $M\left(2; -\frac{3}{2}\right)$. Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x + 2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1; 0), B, C$ sao cho $\triangle MBC$ là tam giác đều.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + (m+4)x + m + 2 = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + (m+2)x + m = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt, khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ -1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 \quad (*)$$

+) Gọi $A(-1; 0), B(x_1; 2x_1 + 2), C(x_2; 2x_2 + 2)$ là tọa độ ba giao điểm của (d) và (C_m) .

$\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2)

$$\text{Theo Viet, có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_1^2 + 2x_1 = -m \\ x_2^2 + 2x_2 = -m \end{cases}$$

Cách 1: Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; x_1 + x_2 + 2\right) \Rightarrow I(-1; 0)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MI} = \left(-3; \frac{3}{2}\right); \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; 2(x_2 - x_1))$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ hay $\triangle MBC$ là tam giác cân tại M .

$$\text{Do đó } \triangle MBC \text{ là tam giác đều } \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{3}}{2} MB \Leftrightarrow 4MI^2 = 3MB^2$$

$$\Leftrightarrow 45 = 3 \left[(x_1 - 2)^2 + \left(2x_1 + \frac{7}{2} \right)^2 \right] \Leftrightarrow 4x_1^2 + 8x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4(x_1^2 + 2x_1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \quad (\text{Thỏa mãn } (*)).$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$.

Cách 2: $\triangle MBC$ là tam giác đều $\Leftrightarrow MB = MC = BC \Leftrightarrow \begin{cases} MB^2 = MC^2 \\ MB^2 = BC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + \left(2x_1 + \frac{7}{2}\right)^2 = (x_2 - 2)^2 + \left(2x_2 + \frac{7}{2}\right)^2 \\ (x_1 - 2)^2 + \left(2x_1 + \frac{7}{2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_1^2 - x_2^2) + 10(x_1 - x_2) = 0 \\ 5x_1^2 + 10x_1 + \frac{65}{4} = 5(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0 \\ 4x_2^2 - 8x_1x_2 - 8x_1 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2 = 0 \text{ (ld)} \\ 4(x_2^2 + 2x_2) - 8(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 13 = 0 \end{cases} \text{ (vì } x_1 \neq x_2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow -4m + 16 - 8m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$.

Bài II. (5 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 22x + 29} - x - 2 = 2\sqrt{2x + 3}$

Lời giải

Điều kiện : $x \geq -\frac{3}{2}$.

Khi đó phương trình (*) $\Leftrightarrow 2x^2 + 22x + 29 = x^2 + 4x + 4 + 4(x + 2)\sqrt{2x + 3} + 4(2x + 3)$

$$\Leftrightarrow 3(2x + 3) - 4(x + 2)\sqrt{2x + 3} + (x + 2)^2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2x + 3}$ ($t \geq 0$).

$$\Rightarrow 3t^2 - 4(x + 2)t + (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 2 \\ t = \frac{x + 2}{3} \end{cases}$$

Với $t = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x + 3 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$

Với $t = \frac{x + 2}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{2x + 3} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 9(2x + 3) = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 14x - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 6\sqrt{2} \\ x = 7 - 6\sqrt{2} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 7 \pm 6\sqrt{2}\}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 + y)^3 - (y^2 + x)^3 = 6(x^2 - x) - 6(y^2 - y) \\ 8x^4 + 8y^4 + 8x^2 + 8y^2 = 9 - 16xy(x + y) \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x^2 + y = a \\ y^2 + x = b \end{cases}$ thay vào từng phương trình của hệ thu được

$$(1) \Rightarrow a^3 - b^3 = 6(a - b)$$

$$(2) \Leftrightarrow 8(x^4 + 2x^2y + y^2 + y^4 + 2xy^2 + x^2) = 9 \Rightarrow 8(a^2 + b^2) = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 6(a - b) \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{8} \end{cases}.$$

$$\text{TH1. } \begin{cases} a - b = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \pm \frac{3}{4}.$$

Với $x^2 + y = y^2 + x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \\ x^2 + y = \frac{3}{4} \end{cases}$. Vậy ta có các nghiệm là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{-3}{2}; \frac{-3}{2}\right)$.

$$\text{TH2. } \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 6 \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{39}{8} \\ a^2 + b^2 = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = -\frac{69}{8} < 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{-3}{2}; \frac{-3}{2}\right)$

Bài III. (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 1} - 1}{u_n}; n = 1, 2, 3, \dots$

1) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số bị chặn.

2) Chứng minh $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2019}} < 2^{2020}$.

Lời giải

1) Ta có $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 < u_1 < 1$, $u_n = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 1} - 1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 1} + 1} > 0; n = 2, 3, \dots$ do đó (u_n) bị chặn dưới.

Lại có $\sqrt{u_{n-1}^2 + 1} + 1 > u_{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 1} + 1} < 1; n = 1, 2, \dots$ do đó (u_n) bị chặn trên suy ra (u_n) bị chặn.

$$2) u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}, u_2 = \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{6} + 1} - 1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} - 1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} = \tan \frac{\pi}{12}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $u_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, n = 1, 2, \dots$

Dễ thấy mệnh đề trên đã đúng với $n = 1$

Giả sử mệnh đề trên đã đúng với $n = k \geq 1$ tức là $u_k = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Thật vậy

$$u_{k+1} = \frac{\sqrt{u_k^2 + 1} - 1}{u_k} = \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} + 1} - 1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} = \frac{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} - 1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$$

Lại có bất đẳng thức $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Thật vậy: xét hàm số $f(x) = \tan x - x$ liên tục $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x > x$

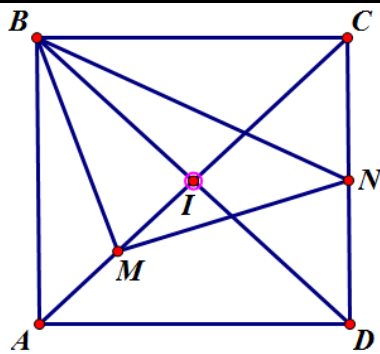
hay $\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Áp dụng ta được

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{2019}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^2}} + \dots + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2019}}} < \frac{3}{\pi} (2 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{3}{\pi} \cdot 2 \cdot (2^{2019} - 1) < 2^{2020}.$$

Bài IV. (6 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm I với $M, N(1; -1)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng IA, CD . Biết điểm B có hoành độ dương và đường thẳng MB có phương trình $x - 3y + 6 = 0$, tìm tọa độ điểm C .

Lời giải



+) Gọi hình vuông $ABCD$ có cạnh là 1

$$\text{Khi đó ta có } BN^2 = \frac{5}{4}; BM^2 = BI^2 + MI^2 = \frac{5}{8}; MN^2 = MC^2 + CN^2 - 2CM \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow BN^2 = BM^2 + MN^2 \Rightarrow \triangle BMN \text{ vuông tại } M$$

+) Đường thẳng MN qua $N(1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $BM: x - 3y + 6 = 0$ có phương trình là $3x + y - 2 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm hệ phương trình } \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0; 2)$$

+) Gọi $B(3y_o - 6; y_o)$, $y_o > 2$

$$\text{Khi đó } MB^2 = MN^2 \Leftrightarrow (3y_o - 6)^2 + (y_o - 2)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} y_o = 3 & (\text{tm}) \\ y_o = 1 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Với } y_o = 3 \Rightarrow x_o = 3 \Rightarrow B(3; 3)$$

Cách 1. Ta có $BN^2 = 20 \Rightarrow BC = 4$ và phương trình đường thẳng $BN: 2x - y - 3 = 0$

$$\text{Gọi } (C_1) \text{ đường tròn đường kính } BN: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$(C_2) \text{ là đường tròn tâm } B \text{ bán kính } BC: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$\text{Tọa độ } C \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ (1 - 2y - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{3}{5} \\ x = 3 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3; -1) \\ C\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

Mà C và M nằm về 2 phía của BN , nên tọa độ cần tìm là $C(3; -1)$.

Cách 2.

Gọi J là giao điểm của BN và CM , khi đó J là trọng tâm tam giác BCD , vậy $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_J - 3 = \frac{2}{3}(1-3) \\ y_J - 3 = \frac{2}{3}(-1-3) \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

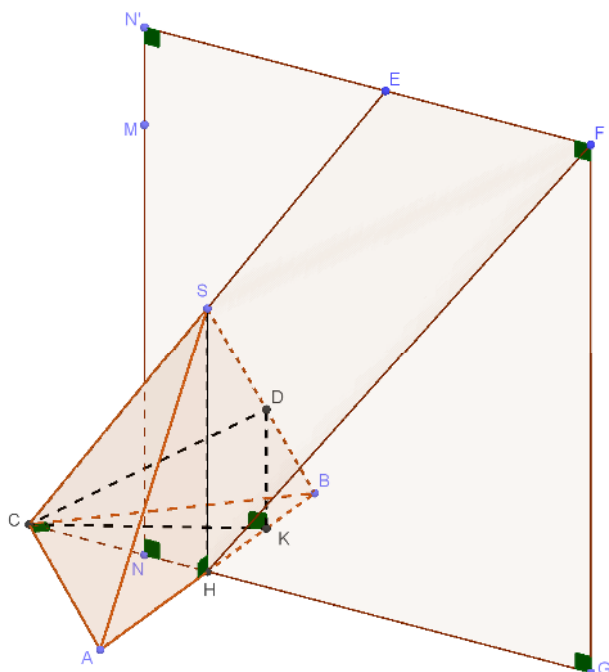
Lại có $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \frac{4}{9}\overrightarrow{CM} \Rightarrow C(3; -1)$

2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $CA = CB = \sqrt{2}$, $AB = 2$, mặt bên ABC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là chân đường phân giác trong góc C của tam giác SBC .

a. Tính thể tích khối chóp $D.ABC$.

b. Gọi M là điểm sao cho các góc tạo bởi các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Ta lần lượt có những điều như sau:

+ $SH \perp (ABC)$.

+ Tam giác CAB vuông cân ở C .

+ Tam giác SCA , SCB cân ở S .

+ $CH = 1$, $SH = \sqrt{3}$.

+ (SCH) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp $S.ABC$.

a. Ta có $\frac{V_{D.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{DB}{SB}$ do đó $\frac{V_{D.ABC}}{V_{S.ABC} - V_{D.ABC}} = \frac{DB}{DS} = \frac{CB}{CS} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tức $V_{D.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \right) \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

b. Gọi N là hình chiếu của M trên (ABC) . Do tính đối xứng của hình chóp $S.ABC$ qua (SCH) nên $M \in (SCH)$, tức $N \in CH$.

Do góc tạo bởi (MAB) , (MBC) , (MCA) với (ABC) bằng nhau nên khoảng cách từ N đến các cạnh của tam giác ABC bằng nhau, gọi khoảng cách này là x ta được $1-x = x\sqrt{2}$. Tìm được $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Gọi E là đối xứng của C qua S , dựng hình bình hành $CHFE$ ta được

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{CS}| = 2MF.$$

Dựng hình chữ nhật $NN'FG$ với N', G lần lượt thuộc MN, CH . Ta thấy MF nhỏ nhất khi và chỉ khi $MF = NG = 3 - CN = 3 - (1-x) = \frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}|$ là $\frac{6+4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Bài V. (2 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}.$$

Lời giải

+ Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$ và $a+b+c=3 \Rightarrow a \geq 1$, $b+c=3-a \leq 2$ mà $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow bc \leq 1$.

+ Xét $P = f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c}$ ta chứng minh: $f(a, b, c) \leq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{a} - \frac{3}{b} - \frac{3}{c} \leq a^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 - \frac{3}{a} - \frac{6}{b+c} - \frac{6}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 - \frac{3}{b} - \frac{3}{c} \leq 2 \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 - \frac{12}{b+c} \Leftrightarrow \frac{4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3}{4} + \frac{12bc - 3(b+c)^2}{bc(b+c)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(b+c)(b^2 - bc + c^2) - (b+c)^3}{4} - \frac{3(b-c)^2}{bc(b+c)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b+c)(b-c)^2}{4} - \frac{3(b-c)^2}{bc(b+c)} \leq 0 \Leftrightarrow (b-c)^2 \left[\frac{(b+c)}{4} - \frac{1}{bc(b+c)} \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 [bc(b+c)^2 - 4] \leq 0 \Leftrightarrow bc(b+c)^2 - 4 \leq 0 \text{ (đúng do } b+c \leq 2; bc \leq 1)$$

$$+ \text{Đặt } t = \frac{b+c}{2} \Rightarrow b+c = 2t \Rightarrow a = 3-2t$$

$$\Rightarrow f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = g(t) = (3-2t)^3 + 2t^3 - \frac{3}{3-2t} - \frac{6}{t}, 0 < t \leq 1.$$

$$\Rightarrow g'(t) = -6(3-2t)^2 + 6t^2 - \frac{6}{(3-2t)^2} + \frac{6}{t^2} = 6 \left[-(3-2t)^2 + t^2 \right] \left[1 - \frac{1}{t^2(3-2t)^2} \right]$$

$$\Rightarrow g'(t) = 6 \frac{(t-1)^2(-2t+1)(t-3)(-2t^2+3t+1)}{t^2(3-2t)^2}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(3-2t)^2 + t^2 = 0 \\ 1 - \frac{1}{t^2(3-2t)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

BBT:

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(t)$		$+$	$-$
$g(t)$		$-\frac{21}{4}$	

$$\Rightarrow \max_{(0;1]} g(t) = -\frac{21}{4} \Rightarrow P = f(a;b;c) \leq g(t) \leq -\frac{21}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a=2; b=c=\frac{1}{2} \text{ và các hoán vị } \Rightarrow \max P = \max f(a;b;c) = -\frac{21}{4}.$$

----- HẾT -----