

Câu 1. (5,0 điểm).

1. Tìm số nguyên dương n biết rằng:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024.$$

2. Một trường có 50 học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất để 3 em được chọn không có cặp anh em sinh đôi.

Câu 2. (2,0 điểm). Giải phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}.$

Câu 3. (5,0 điểm).

1. Cho ba số $a > 0, b > 0, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 + 3}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 + 3}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 + 3}} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Câu 4. (2,0 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + 2y} + \sqrt{9 + x^2 + y^2 - 6y}$$

trong đó x, y là các số thực thỏa mãn $x = \frac{y}{2} + 1$.

Câu 5. (6,0 điểm).

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$, M là trung điểm của CD .

a) Tính góc giữa SM và mp(SAB).

b) Tính theo a khoảng cách từ A đến mp(SBM)

2. Cho M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB của ΔABC . Gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP . Chứng minh H, G, O, I thẳng hàng.

.....**HẾT**.....

Họ và tên:..... **Lớp:**..... **SBD:**.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 11 THPT NĂM HỌC 2020-2021.
MÔN TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.1 (2 điểm)	+Xét khai triển $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \quad (1)$ $(1-x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^2 x^2 - \dots - C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \quad (2)$ +Trừ từng vế (1), (2) ta có $(1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^3 x^3 + C_{2n+1}^5 x^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}) \quad (3)$ +Thay $x = 1$ vào (3) rồi chia hai vế cho 2 ta có $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$ +Suy ra $2^{2n} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 1.2 (3 điểm)	+Số cách chọn 3 học sinh bất kì từ 50 học sinh là $C_{50}^3 \Rightarrow \Omega = C_{50}^3 = 19600$ +Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 1 cặp anh em sinh đôi là 4.48 Gọi biến cố A: “Chọn được 3 học sinh không có cặp anh em sinh đôi” +Ta có $\Omega_A = C_{50}^3 - 4.48 = 19408$ $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{19408}{19600} = \frac{1213}{1225}$ +	1 0,5 1 0.5
Câu 2 (2 điểm)	+Điều kiện $x > 1 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 1$ $x < -1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm +Xét $x > 1$: Đặt $x = \frac{1}{\cos t}, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ Ta có phương trình $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2} \sin t \cos t$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 2t \Leftrightarrow \sin 2t = \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right)$	0.5 1

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2t = \pi - \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ $+ t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \text{ thỏa } x > 1$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{2}$	0.5
Câu 3.1 (3 điểm)	+Ta có $\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}} + \frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}} + \frac{b^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} = \frac{3}{4}a^2 (1)$ $\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}} + \frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}} + \frac{c^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{64}} = \frac{3}{4}b^2 (2)$ $\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}} + \frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}} + \frac{a^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}} = \frac{3}{4}c^2 (3)$ +Cộng (1), (2), (3) về theo về ta có $P + \frac{a^2+b^2+c^2+9}{16} \geq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ $\Leftrightarrow P + \frac{12}{16} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \geq \frac{9}{4} - \frac{12}{16} = \frac{3}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$	1.5 1.5
Câu 3.2 (2 điểm)	Ta có $\forall n \in N^* : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in N^*$ $\Rightarrow$ Dãy (u_n) tăng (u_n) tăng $\Rightarrow u_n \geq u_1 = 1, \forall n \in N^*$ $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n}$ $= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ $\Rightarrow 1 \leq u_n < 2, \forall n \in N^*$ $\Rightarrow (u_n)$ bị chặn	0.5 0.25 1.0 0.25

Câu 4 (2 điểm)	+Ta có $P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ Đường thẳng $\Delta : 2x - y - 2 = 0$ +Lấy $M(x; y) \in \Delta$, hai điểm $A(0; -1), B(0; 3)$ $\Rightarrow P = AM + BM$ A, B nằm cùng phía đối với Δ, lấy A' đối xứng với A qua Δ $\Rightarrow A' \left(\frac{4}{5}; -\frac{7}{5} \right), MA' = MA$ + $P = AM + BM = A'M + BM \geq A'B = 2\sqrt{5}$ + $\min P = 2\sqrt{5}$ khi A', B, M thẳng hàng Khi $M = A'B \cap \Delta \Rightarrow M \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right)$ Vậy $\min P = 2\sqrt{5}$ khi $x = \frac{2}{3}; y = -\frac{2}{3}$	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 5.1 (4 điểm)	a) +Gọi E là trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} ME \parallel AD \\ AD \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow ME \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ Góc giữa SM và (SAB) là góc $\varphi = \widehat{MSE}$ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) +Tính $\tan \varphi : ME = AD = 2a$ $SE = \sqrt{AS^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow \tan \varphi = \tan \widehat{MSE} = \frac{ME}{SE} = \frac{2a}{a \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$	1 1

	b. + $AN \perp BM \Rightarrow (SAN) \perp (SBM)$ Kẻ $AK \perp SN \Rightarrow AK \perp (SBM)$ $AK = d(A, (SBM))$ +Tinh $AK : S_{\triangle ABM} = S_{ABCD} - (S_{\triangle ADM} + S_{\triangle BCM})$ $= S_{ABCD} - 2S_{\triangle ADM} = 2a^2 - a^2 = a^2$ $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AN \cdot BM \Rightarrow AN = \frac{2S_{\triangle ABM}}{BM} = \frac{2a^2}{\sqrt{BC^2 + BM^2}}$ $= \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$ + $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AK = \frac{4a}{\sqrt{33}} \Rightarrow d(A, (SBM)) = AK = \frac{4a}{\sqrt{33}}$	0.5 0,5 0.5 0,5
Câu 5.2 (2 điểm)	+ $V_{(G, -\frac{1}{2})} : \triangle ABC \rightarrow \triangle MNP$ +Ta có $\begin{cases} PN // BC \\ MO \perp BC \end{cases} \Rightarrow MO \perp PN$ Tương tự $NO \perp PM$ $\Rightarrow O$ là trực tâm tam giác MNP + $V_{(G, -\frac{1}{2})} : H \rightarrow O \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \Rightarrow H, G, O$ thẳng hàng + $V_{(G, -\frac{1}{2})} : O \rightarrow I \Rightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow I, G, O$ thẳng hàng Vậy H, G, O, I thẳng hàng.	0.5 0.5 0.5 0.5

.....**HẾT**.....