

CHUYÊN ĐỀ 3: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

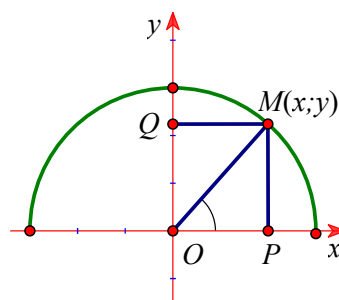
Chủ đề 1-GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với mỗi góc α ($0^0 \leq \alpha \leq 180^0$), ta xác định điểm M trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm O sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử điểm M có tọa độ $(x; y)$.

Khi đó:



Hình 2.1

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq 90^0); \cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq 0^0, \alpha \neq 180^0)$$
 Các số

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *giá trị lượng giác* của góc α .

Chú ý: Từ định nghĩa ta có:

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy khi đó $M(\overline{OP}; \overline{OQ})$.

Với $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Dấu của giá trị lượng giác:

Góc α	0^0	90^0	180^0
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

b) Tính chất

• Góc phụ nhau

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^0 - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^0 - \alpha) = \tan \alpha$$

• Góc bù nhau

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

4. Các hệ thức lượng giác cơ bản

- 1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^0) ;$
- 2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^0; 180^0)$
- 3) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^0; 90^0; 180^0)$
- 4) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- 5) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^0)$
- 6) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^0; 180^0)$

Chứng minh:

- Hệ thức 1), 2) và 3) dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

- Ta có $\sin \alpha = \overline{OQ}$, $\cos \alpha = \overline{OP}$

Suy ra $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = OQ^2 + OP^2$

+ Nếu $\alpha = 0^0$, $\alpha = 90^0$ hoặc $\alpha = 180^0$ thì dễ dàng thấy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

+ Nếu $\alpha \neq 0^0$, $\alpha \neq 90^0$ và $\alpha \neq 180^0$ khi đó theo định lý Pitago ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = OQ^2 + OP^2 = OQ^2 + QM^2 = OM^2 = 1$$

Vậy ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Mặt khác $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra được 5)

Tương tự $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ suy ra được 6)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1:- Tính giá trị của một biểu thức-Hai góc phụ nhau, bù nhau

a) Phương pháp: Dùng bảng tỉ số lượng giác các góc đặc biệt và góc phụ nhau, bù nhau.

b) Ví dụ minh họa

I- BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 0^0 + \cos^2 180^0$

b) $B = \tan 30^0 + \cot 30^0 - 2 \cdot \sin^2 180^0$.

$$\text{c) } C = \sin^2 45^\circ + \cot^2 60^\circ - \frac{1}{\cos^2 135^\circ}$$

$$\text{d) } D = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ) \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \tan 72^\circ$$

$$\text{e) } E = \frac{\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 60^\circ}$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = \sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 0^\circ + \cos^2 180^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 0^2 + (-1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{b) } B = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ - 2 \cdot \sin^2 180^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 2 \cdot 0^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) } C = \cos^2 135^\circ + \cot^2 60^\circ - \frac{1}{\sin^2 60^\circ} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

d)

$$D = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ) \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \tan 72^\circ = \frac{2 \tan 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = \frac{2 \sin 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$\text{e) } E = \frac{\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 60^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{4} + 1 - 3 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức của các biểu thức

$$\text{a) } P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ.$$

$$\text{b) } Q = \cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ.$$

$$\text{c) } R = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

$$\text{d) } S = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ.$$

$$\text{e) } E = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ.$$

$$\text{f) } F = 4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

$$\text{c) } G = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

a) Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

$$\text{b) } Q = \cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ = (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) = 1 + 1 = 2.$$

c) Sử dụng công thức $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ ta được:

$$\begin{aligned}
 R &= (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) \\
 &\quad + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d) Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $S = 1$.

e) $E = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ = 3$.

f) Ta có:

$$\begin{aligned}
 F &= 4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ \\
 &= 4a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2ab(-1)^2 + \frac{4}{3} b^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.
 \end{aligned}$$

c) $G = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 - c^2$.

Ví dụ 3: Cho α là góc nhọn. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin(90^\circ - \alpha) + 2\cos\alpha - 5\cos(90^\circ - \alpha)$.

b) $B = \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) + \cot(180^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha)$

c) $C = 2\cos(180^\circ - \alpha) - \sin(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ - \alpha) \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$.

d) $D = \frac{2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + 5 \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha - 4 \cos(90^\circ - \alpha)}$

e) $F = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} - \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin(90^\circ - \alpha) + 2\cos\alpha - 5\cos(90^\circ - \alpha) \\
 &= \cos\alpha + 2\cos\alpha - 5\sin\alpha \\
 &= 3\cos\alpha - 5\sin\alpha.
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) + \cot(180^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha) \\
 &= \cos\alpha - \sin\alpha - \cot\alpha + \cot\alpha \\
 &= \cos\alpha - \sin\alpha.
 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= 2\cos(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ - \alpha) \cdot \cot(180^\circ - \alpha) \\
 &= -2\cos\alpha + \cos\alpha + \tan\alpha \cdot \cot\alpha \\
 &= 1 - \cos\alpha.
 \end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + 5 \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha - 4 \cos(90^\circ - \alpha)} \\
 &= \frac{-2 \cos \alpha + 5 \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \sin \alpha} = -\cot \alpha.
 \end{aligned}$$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} + \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha). \\
 &= \frac{\sin \alpha - \cot(180^\circ - (90^\circ - \alpha))}{\tan \alpha} - \sin \alpha \cdot \cot \alpha \\
 &= \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha} - \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} + 1 - \cos \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biết A, B, C là các góc nhọn của tam giác ABC . Hãy chứng minh

a) $\cos(A + C) = -\cos B$.

b) $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

c) $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

d) $\tan\left(\frac{B+C-2A}{2}\right) = \cot \frac{3A}{2}$.

Lời giải:

a) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = 180^\circ - B$.

Do đó $\cos(A + C) = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$.

b) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = 180^\circ - B \Rightarrow \frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}$

Do đó: $\sin \frac{A+C}{2} = \sin(90^\circ - \frac{B}{2}) = \cos \frac{B}{2}$.

d) Ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C - 2A = 180^\circ - 3A \Rightarrow \frac{B+C-2A}{2} = 90^\circ - \frac{3A}{2}$$

$$\tan\left(\frac{B+C-2A}{2}\right) = \tan(90^\circ - \frac{3A}{2}) = \cot \frac{3A}{2}.$$

c) Ta có $\sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$

b) $B = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} + \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha)$

Lời giải:

a) Ta có: $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ \Leftrightarrow \cos 10^\circ + \cos 170^\circ = 0$

$$\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ \Leftrightarrow \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \Leftrightarrow \cos 30^\circ + \cos 150^\circ = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

Vậy $A = -1$.

b) Ta có: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = \cot(180^\circ + \alpha - 90^\circ) = \cot(\alpha - 90^\circ) = -\tan \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

Do đó $B = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha} + \sin \alpha (-\cot \alpha)$

$$B = \sin \alpha \cot \alpha + 1 - \sin \alpha \cot \alpha$$

Vậy: $B = 1$.

Ví dụ 6: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $C = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

b) $D = \sin(90^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) - \cos \alpha + \sin \alpha$

Lời giải:

a) Ta có: $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ \Leftrightarrow \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0$

$$\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ \Leftrightarrow \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$$

$$\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ \Leftrightarrow \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0$$

$$\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ \Leftrightarrow \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Vậy: $C = -1$.

b) Ta có: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Vậy: $D = \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$.

Ví dụ 7: Đơn giản biểu thức:

$$E = 2 \sin \alpha - 3 \cos(90^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha) + 2 \cot(180^\circ - \alpha) + 2 \sin \alpha - 3 \cot \alpha.$$

Lời giải:

Ta có: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Vậy: $E = 2 \sin \alpha - 3 \sin \alpha + \cot \alpha - 2 \cot \alpha + 2 \sin \alpha - 3 \cot \alpha$

$$E = \sin \alpha - 4 \cot \alpha.$$

Ví dụ 8: Đơn giản biểu thức:

$$T = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$$

Lời giải:

Ta có: $\sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 90^\circ = 1$

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ \Rightarrow \sin^2 80^\circ = \cos^2 10^\circ \Rightarrow \sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ = 1$$

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ \Rightarrow \sin^2 70^\circ = \cos^2 20^\circ \Rightarrow \sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ \Rightarrow \sin^2 60^\circ = \cos^2 30^\circ \Rightarrow \sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$$

$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ \Rightarrow \sin^2 50^\circ = \cos^2 40^\circ \Rightarrow \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ = 1$$

Vậy $T = \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + 1$

$$T = 5.$$

Ví dụ 9: Đơn giản biểu thức:

$$T = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ.$$

Lời giải:

Ta có $\cos^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ \Rightarrow \cos^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ$

$$\cos^2 65^\circ = \sin^2 25^\circ \Rightarrow \cos^2 65^\circ = \sin^2 25^\circ$$

$$\cos^2 45^\circ = \sin^2 45^\circ \Rightarrow \cos^2 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vậy $T = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \frac{1}{2} + \sin^2 25^\circ + \sin^2 15^\circ = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Ví dụ 10: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $\sin \frac{B+A}{2} = \cos \frac{C}{2}$

$$\text{b) } \sin A = \sin(B + C)$$

$$\text{c) } \cos A = -\cos(B + C).$$

Lời giải:

a) Vì A, B, C là 3 góc của một tam giác nên $A + B + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}.$$

b) Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

$$\Rightarrow \sin A = \sin[180^\circ - (B + C)] = \sin(B + C).$$

c) Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

$$\Rightarrow \cos A = \cos[180^\circ - (B + C)] = -\cos(B + C).$$

Ví dụ 11: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$\text{b) } B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$\text{c) } C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$$

$$\text{b) } B = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\text{c) } C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 (\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 (\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Ví dụ 12: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$\text{b) } B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$\text{c) } C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$\text{b) } B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ)$$

$$= 0$$

$$\text{c) } C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ) (\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$$

$$= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ) (\tan 15^\circ \cot 5^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 5^\circ)$$

$$= 1$$

Vấn đề 2: Dấu của một biểu thức lượng giác.

a) Phương pháp: Dùng dấu của các tỉ số lượng giác.

b) Ví dụ minh họa

I- BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Ví dụ 1: Xét dấu biểu thức: $P = \cos x \cdot \sin x$ biết $0^\circ < x < 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có $\cos x > 0$; $\sin x > 0$ với $0^\circ < x < 90^\circ$. Do đó $P = \cos x \cdot \sin x > 0$.

Ví dụ 2: Xét dấu biểu thức: $P = \sin^2 x \cdot \tan x$ biết $90^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Ta có $\sin^2 x > 0$; $\tan x < 0$, với $90^\circ < x < 180^\circ$. Do đó $P = \sin^2 x \cdot \tan x < 0$

Ví dụ 3: Xét dấu biểu thức: $P = (\cos x - 1) \sin x \tan x$ biết $0^\circ < x < 90^\circ$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = (\cos x - 1) \sin x \frac{\sin x}{\cos x} = (\cos x - 1) \sin^2 x \frac{1}{\cos x}$$

Ta có: $\sin^2 x \geq 1$; $\cos x - 1 < 0$ (vì $0^\circ < x < 90^\circ$) $\Leftrightarrow 0 < \cos x < 1$,
 $\cos x > 0$

Ta có bảng tổng kết:

x	0°	90°
$\cos x - 1$		—
$\cos x$		+
P		—

Vậy $0^\circ < x < 90^\circ$ thì $P = (\cos x - 1) \sin x \tan x < 0$.

Ví dụ 4: Xét dấu của $P = \sin^2 x \cos^3 x \tan x$, biết $45^\circ < x < 180^\circ$, $x \neq 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 x \geq 0$ với $45^\circ < x < 180^\circ$

$\cos x \geq 0$ với $45^\circ < x \leq 90^\circ$

$\cos x < 0$ với $90^\circ < x < 180^\circ$

$\tan x > 0$ với $45^\circ < x < 90^\circ$

$\tan x < 0$ với $90^\circ < x < 180^\circ$

Ta có bảng dấu như sau:

x	45°	90°	180°
$\cos^3 x$	+	0	—
$\tan x$	+		—
P	+		+

Vậy $P = \sin^2 x \cos^3 x \tan x$ luôn luôn dương khi $45^\circ < x < 180^\circ$, $x \neq 90^\circ$

Ví dụ 5: Xét dấu của $P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x)$, biết $75^\circ < x < 125^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin x > 0 \Rightarrow \sin^3 x > 0$ với $75^\circ < x < 125^\circ$

và $1 - \sin^9 x \geq 0$

và $\cos x \geq 0$ với $75^\circ < x \leq 90^\circ$

$$\cos x < 0 \quad \text{với} \quad 90^\circ < x < 125^\circ$$

Ta có bảng xét dấu:

x	75°	90°	125°
$\cos x$	+	0	-
P	+	0	-

Vậy $P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x) < 0$ nếu $90^\circ < x < 125^\circ$

$P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x) \geq 0$ nếu $75^\circ < x \leq 90^\circ$.

Ví dụ 6: Định x để $P = \sin x \cos x > 0$, biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Vì $0^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow \sin x > 0$

Ta có: $\cos x \geq 0$ khi $0^\circ < x \leq 90^\circ$

$\cos x < 0$ khi $90^\circ < x < 180^\circ$

Ta có bảng xét dấu:

x	0°	90°	180°
$\sin x$	0	+	1
$\cos x$	+	0	-
$P = \sin x \cos x$	+	0	-

Vậy để $P = \sin x \cos x > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < x < 90^\circ$.

Ví dụ 7: Định x để $T = \sin(115^\circ - x) > 0$, biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin(115^\circ - x) > 0 \Rightarrow 0^\circ < 115^\circ - x < 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^\circ < 115^\circ - x \\ 115^\circ - x < 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 115^\circ \\ x > -65^\circ \end{cases}$$

Vì giả thiết cho $0^\circ < x < 180^\circ$ nên ta chọn $0^\circ < x < 115^\circ$ thì $T > 0$.

Ví dụ 8: Định x để $P = \sin^2 x (1 - \cos x) \cot x > 0$, biết $30^\circ < x < 160^\circ$, $x \neq 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 x > 0$ và $1 - \cos x > 0$ với $30^\circ < x < 160^\circ$

Ta chỉ cần xét dấu $\cot x$

x	30°	90°	160°
$\cot x$	+	0	-
P	+	0	-

Vậy $P > 0$ khi $30^\circ < x < 90^\circ$.

Ví dụ 9: Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :

$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$, $\cot 124^\circ 15'$.

Lời giải:

$$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\tan 103^\circ 45' = -\tan(180^\circ - 103^\circ 45') = \tan 76^\circ 15'$$

$$\cot 124^\circ 15' = -\cot(180^\circ - 124^\circ 15') = -\cot 55^\circ 45'$$

Vấn đề 3. Cho biết một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại hoặc tính giá trị của một biểu thức lượng giác.

Phương pháp: dùng các hệ thức lượng giác cơ bản và dấu của các tỉ số lượng giác.

Ví dụ 1: Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

a) Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

b) Biết α nhọn và $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

c) Biết $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$

Với $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ thì $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$.

Với $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ thì $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$.

b) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$ (α nhọn)

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}$.

c) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ (vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{5}{12}$.

Ví dụ 2: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Lời giải:

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

Do đó $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}}; \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Tính $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Lời giải:

$$\text{Vì } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ và } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}; \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Tìm $\tan 15^\circ$

Lời giải:

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{3}} - 1 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}.$$

Ví dụ 5: Tính các tỉ số lượng giác còn lại của góc α .

a) Biết $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

b) Biết $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

c) Biết $\tan \alpha = 2$.

d) Biết $\cot \alpha = -3$.

Lời giải:

a) Ta có: $\cos \alpha = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \alpha = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot \alpha = \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Ta có: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}.$$

c) Ta có: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{do } \tan \alpha = 2 > 0 \Rightarrow \alpha \text{ là góc nhọn})$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\text{vì } \alpha \text{ nhọn})$$

Ta có: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}.$

Chú ý: $\sin \alpha$ có thể được tính theo công thức sau

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$

d) $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{3}.$

Vì $\cot \alpha = -3 < 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$

Ta có: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (\text{vì } 90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Chú ý: $\cos \alpha$ có thể được tính theo công thức sau

Ta có: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ví dụ 6: Cho $\cos x = \frac{4}{13}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 3\sin^2 x - 4\cos^2 x - 1$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 3(1 - \cos^2 x) - 4\cos^2 x - 1 = 2 - 7\cos^2 x \\ &= 2 - 7\left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{226}{169}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Cho $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 3\sin^4 x + \cos^4 x - 3$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 3\sin^4 x + \cos^4 x - 3 = 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 - 3 \\ &= 3\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 - 3 \\ &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^2 - 3 = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ Vậy } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$E = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{2}{57}.$$

Ví dụ 9: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$\text{c) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ Do đó: } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$C = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{2}{57}$$

Ví dụ 10: Cho $\cot \alpha = \sqrt{2}$. Tính $E = \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$

Lời giải:

Vì $\cot \alpha = \sqrt{2}$ nên $\sin \alpha \neq 0$

Chia tử và mẫu cho $\sin^2 \alpha \neq 0$, ta được: $E = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot^2 \alpha} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = -1 - \sqrt{2}$.

Ví dụ 11: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Lời giải:

$$A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = 7.$$

Ví dụ 12: Cho $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha - 2 \cot \alpha}{\cos \alpha}$.

Lời giải:

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0$

Ta có: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}} - 2\sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}}{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}} = -\frac{4\sqrt{2} + 3}{2}.$$

Ví dụ 13: Cho $\tan \alpha = -2$. Tính $T = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

Lời giải:

Ta có: $\tan \alpha = -2$ nên $\cos \alpha \neq 0$

Ta chia tử và mẫu T cho $\cos \alpha \neq 0$

$$T = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 - 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 14: Tìm giá trị của biểu thức $E = \frac{\sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$ khi $\tan \alpha = 3$.

Lời giải:

Vì $\tan \alpha = 3$ nên $\cos \alpha \neq 0$

Ta chia tử và mẫu của E cho $\cos^2 \alpha \neq 0$

$$E = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{5 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha - 5}{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 1}$$

$$E = \frac{9-5}{18+9+1} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

Ví dụ 15: Cho $\tan \alpha = \sqrt{3}$. Tính $E = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Lời giải:

Ta có:
$$E = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)}$$

$$= 1 + \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right) = \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \right) (1 + \tan^2 \alpha + \tan \alpha)$$

Do đó $E = \left(\frac{1}{1+3} \right) (1+3+\sqrt{3}) = \frac{1}{4} (4+\sqrt{3})$.

Ví dụ 16: Cho $\cot \alpha = 5$. Tính $A = \frac{\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

Lời giải:

Vì $\cot \alpha = 5 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$

$$A = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha - \cot \alpha = 25 - 5 = 20.$$

Ví dụ 17: Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải:

Ta có

$$3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$6 \sin^4 \alpha - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4 \sin^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin^2 \alpha - 1)(2 \sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2 \sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)}$$

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Suy ra $A = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$

Ví dụ 18: Biết $\sin x + \cos x = m$. Tính $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

Lời giải:

Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ hay $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

Ví dụ 19: Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{7}{8}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 14$$

Vấn đề 4: Đơn giản một biểu thức lượng giác.

Phương pháp:

- Dùng các công thức cơ bản.
- Dùng các công thức cung liên quan đặc biệt.
- Biến đổi đại số.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức: $A = (1 + \cos \alpha) \cot^2 \alpha (1 - \cos \alpha)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) \cot^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) \cot^2 \alpha$$

$$A = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $B = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{Tương tự: } \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)} = 1 + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{Do đó } B = (1 - \sin \alpha \cos \alpha) + (1 + \sin \alpha \cos \alpha) = 2$$

$$\text{Vậy } B = 2.$$

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức:

$$\text{a) } E = \cos^2 a + \cos^2 a \cot^2 a$$

$$\text{b) } F = \sin^2 a + \sin^2 a \tan^2 a$$

$$\text{c) } G = \frac{2 \cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a}$$

$$\text{d) } H = \sqrt{\sin^2 a(1 + \cot a) + \cos^2 a(1 + \tan a)}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } E = \cos^2 a + \cos^2 a \cdot \cot^2 a = \cos^2 a(1 + \cot^2 a)$$

$$E = \cos^2 a \cdot \frac{1}{\sin^2 a} = \cot^2 a.$$

$$\text{b) Ta có: } F = \sin^2 a + \sin^2 a \cdot \tan^2 a = \sin^2 a(1 + \tan^2 a)$$

$$F = \sin^2 a \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a.$$

$$\text{c) Ta có: } G = \frac{2 \cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a} = \frac{2 \cos^2 a - \cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a + \cos a}$$

$$G = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a + \cos a} = \frac{(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a)}{(\sin a + \cos a)}$$

$$G = \cos a - \sin a.$$

$$\text{d) Ta có: } H = \sqrt{\sin^2 a \left(1 + \frac{\cos a}{\sin a}\right) + \cos^2 a \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a}\right)}$$

$$H = \sqrt{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a + \sin a \cos a} = \sqrt{(\sin a + \cos a)^2}$$

$$H = |\sin a + \cos a|.$$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } A = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cot \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } A = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$A = 1 - \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos^3 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 1 - \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$A = 1 - (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{b) Ta có: } B = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 + (\cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$B = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0, \sin \alpha > 0)$$

$$B = \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức: $A = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1$.

Lời giải:

Ta có: $A = (\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 1$
 $A = 1 - 1 = 0.$

Vấn đề 5: Chứng minh một đẳng thức lượng giác.

Phương pháp: Chẳng hạn cần chứng minh $A = B$

- *Cách 1:* Dùng công thức lượng giác để biến đổi A bằng B.
- *Cách 2:* Dùng công thức lượng giác để biến đổi B bằng A.
- *Cách 3:* Dùng công thức lượng giác để biến đổi $A = C, B = C$.
- *Cách 4:* Thu gọn riêng từng vế rồi so sánh kết quả.
- *Cách 5:* Chứng minh $A - B = 0$.
- *Cách 6:* Chứng minh quy nạp nếu đẳng thức cần chứng minh phụ thuộc vào số nguyên dương n ($n \in \mathbb{N}$).

Ví dụ 1: Với điều kiện biểu thức đã cho có nghĩa, chứng minh:

a) $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

b) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

Lời giải:

a) Ta có $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

b) Ta có $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$

Ví dụ 2: Chứng minh: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$
 $= 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

Ví dụ 3: Chứng minh: $\frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = 1 + 2 \tan^2 a.$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = \frac{1 + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} + \tan^2 a = 1 + \tan^2 a + \tan^2 a = 1 + 2 \tan^2 a.$

Ví dụ 4: Chứng minh: $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{1}{\cos a}.$

Lời giải:

Ta có: $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{\cos a}{1 + \sin a} + \frac{\sin a}{\cos a} =$
 $= \frac{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin a}{\cos a(1 + \sin a)} = \frac{1 + \sin a}{\cos a(1 + \sin a)}$

Vậy: $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{1}{\cos a}.$

Ví dụ 5: Chứng minh: $\frac{\sin a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{2}{\sin a}.$

Lời giải:

Ta có:
$$\frac{\sin a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a + 1 + 2 \cos a + \cos^2 a}{\sin a(1 + \cos a)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos a)}{\sin a(1 + \cos a)} = \frac{2}{\sin a}$$

Vậy: $\frac{\sin a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{2}{\sin a}.$

Ví dụ 6: Chứng minh: $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot \alpha} = 1.$

Lời giải:

Ta có:
$$\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \left[\frac{\frac{1}{\tan^2 \alpha} - 1}{\frac{1}{\tan \alpha}} \right]$$

$$= \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \left[\frac{1 - \tan^2 \alpha}{\frac{\tan^2 \alpha}{\tan \alpha}} \right] = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \times \frac{1 - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} \times \frac{\tan \alpha}{1} = 1.$$

Ví dụ 7: Cho $\sin x + \cos x = a.$

a) Tính $A = \sin^3 x + \cos^3 x$ theo $a.$

b) Tính $B = \sin^4 x + \cos^4 x$ theo $a.$

Lời giải:

Ta có: $a^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{a^2 - 1}{2} = \sin x \cos x$

a) Ta có: $A = \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

$$= a \left[1 - \frac{a^2 - 1}{2} \right] = \frac{a}{2}(3 - a^2).$$

b) Ta có: $B = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$$= 1 - 2 \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^2 = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}.$$

Ví dụ 8: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

b) $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right].$

Lời giải:

a) Ta có: $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$

$$= \frac{\cos^3 x + \sin x \cos^2 x + \sin^2 x \cos x + \sin^3 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(\cos^3 x + \sin^3 x) + \sin x \cos x (\cos x + \sin x)}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x)}{\cos^3 x}$$

Vậy: $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

b) Ta có: $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$

$$= \frac{\cos x - \sin x \cos x + \cos x + \sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

Suy ra: $\frac{1}{2} \left[\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right] = \frac{1}{\cos x}$.

Vấn đề 6: Chứng minh một biểu thức độc lập đối với x .

Phương pháp: Dùng các công thức lượng giác cơ bản và công thức góc phụ, góc bù để biến đổi biểu thức cho thành một biểu thức không có x .

Ví dụ 1: Chứng tỏ biểu thức sau không phụ thuộc x :

$$M = \cos^6 x + 2 \sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Lời giải:

Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

Ta có: $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^6 x + \sin^4 x(1 - \sin^2 x) = \sin^4 x$

Vậy: $M = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 + \sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \sin^4 x - \sin^2 x$$

$$= 1 + \sin^2 x(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x(1 - \sin^2 x)$$

$$M = 1$$

Nên ta có M không phụ thuộc vào x .

Ví dụ 2: Chứng minh biểu thức sau đây độc lập đối với x .

$$P = \frac{1}{1 + \tan^2 x} + \sin^2(180^\circ - x) + \cos(90^\circ - x) - \sin x + \tan^2(90^\circ - x) + 1 - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Lời giải:

$$P = \cos^2 x + \sin^2 x + \sin x - \sin x + \cot^2 x + 1 - \frac{1}{\sin^2 x}$$

Vậy ta có $P = 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 1$

Vậy P độc lập đối với x .

Vì ta có $\sin(180^\circ - x) = \sin x$; $\cos(90^\circ - x) = \sin x$; $\tan(90^\circ - x) = \cot x$.

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau đây độc lập đối với x .

$$P = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 - 2.$$

Lời giải:

Ta có: $P = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 2$

$P = 0$. Vậy P độc lập đối với x .

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau đây độc lập đối với x .

$$S = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x - \tan^2(180^\circ - x).$$

Lời giải:

Ta có: $S = \cos x - \cos x + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

$$S = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) - \tan^2 x = \tan^2 x - \tan^2 x = 0$$

Vậy S độc lập đối với x .

Ví dụ 5: Chứng minh các biểu thức sau đây độc lập đối với x .

a) $E = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

b) $F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x).$

Lời giải:

a) Ta có: $E = 3[\sin^8 x - (1 - \sin^2 x)^4] + 4[(1 - \sin^2 x)^3 - 2\sin^6 x] + 6\sin^4 x$

$$= 3[\sin^8 x - (1 - 4\sin^2 x + 6\sin^4 x - 4\sin^6 x + \sin^8 x)] + \\ + 4[1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x - 2\sin^6 x] + 6\sin^4 x$$

$$E = 3\sin^8 x - 3 + 12\sin^2 x - 18\sin^4 x + 12\sin^6 x - 3\sin^8 x + 4 - \\ - 12\sin^2 x + 12\sin^4 x - 12\sin^6 x + 6\sin^4 x$$

$$E = 1$$

Vậy E độc lập đối với x .

b) $F = 2[(1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x + (1 - \cos^2 x)\cos^2 x]^2 - [(1 - \cos^2 x)^4 + \cos^8 x]$

$$= 2[1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x + \cos^2 x - \cos^4 x]^2 - \\ - [1 - 4\cos^2 x + 6\cos^4 x - 4\cos^6 x + \cos^8 x + \cos^8 x] \\ = 2[1 - \cos^2 x + \cos^4 x]^2 - [1 - 4\cos^2 x + 6\cos^4 x - 4\cos^6 x + 2\cos^8 x] \\ = 2[1 + \cos^4 x + \cos^8 x - 2\cos^2 x - 2\cos^6 x + 2\cos^4 x] - \\ - [1 - 4\cos^2 x + 6\cos^4 x - 4\cos^6 x + 2\cos^8 x] \\ = 2 + 2\cos^4 x + 2\cos^8 x - 4\cos^2 x - 4\cos^6 x + 4\cos^4 x - 1 + \\ + 4\cos^2 x - 6\cos^4 x + 4\cos^6 x - 2\cos^8 x$$

$$F = 1.$$

Ví dụ 6: Chứng minh biểu thức sau đây không phụ thuộc a :

$$T = 3(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2(\sin^6 a + \cos^6 a).$$

Lời giải:

Ta có: $\sin^4 a + \cos^4 a = [\sin^2 a + \cos^2 a]^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a$

$$\sin^6 a + \cos^6 a = [\sin^2 a + \cos^2 a]^3 - 3\sin^2 a \cos^2 a(\sin^2 a + \cos^2 a) \\ = 1 - 3\sin^2 a \cos^2 a$$

Vậy: $T = 3 - 6\sin^2 a \cos^2 a - 2 + 6\sin^2 a \cos^2 a = 1$

Nên T không phụ thuộc vào a .

II- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\tan(180^\circ + a) = -\tan a$.

B. $\cos(180^\circ + a) = -\cos a$.

C. $\sin(180^\circ + a) = \sin a$.

D. $\cot(180^\circ + a) = -\cot a$.

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết “cung hơn kém 180° ”

Câu 2. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

B. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

C. $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.

D. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 3. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin \alpha = \sin \beta$.

B. $\cos \alpha = -\cos \beta$.

C. $\tan \alpha = -\tan \beta$.

D.

$\cot \alpha = \cot \beta$.

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 4. Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha > 0$.

D.

$\cot \alpha < 0$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 5. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$.

B. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$.

D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải

Chọn B.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 6. Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $\sin \alpha = \cos \beta$.

B. $\tan \alpha = \cot \beta$.

C. $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$.

D.

$\cos \alpha = -\sin \beta$.

Lời giải

Chọn D.

$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$.

2- Tính giá trị lượng giác của một góc

Câu 7. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C.

$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 8. Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$. B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$. C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$. D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 9. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

$$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$$

Câu 10. Giá trị của $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn C.

$$\cos 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Câu 11. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D.

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$

Câu 13. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. 1

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 14. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A.

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 15. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1.$

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1.$

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1.$

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1.$

Lời giải

Chọn D.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ.$

B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ.$

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ.$

D.

$\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ.$

Lời giải

Chọn B.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 17. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1.$

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0.$

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0.$

Lời giải

Chọn D.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 18. Cho hai góc nhọn α và β ($\alpha < \beta$). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos \alpha < \cos \beta.$

B. $\sin \alpha < \sin \beta.$

C. $\tan \alpha + \tan \beta > 0.$

D.

$\cot \alpha > \cot \beta.$

Lời giải

Chọn B.

Biểu diễn lên đường tròn.

Câu 19. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , góc B bằng 30° . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\cos C = \frac{1}{2}.$

D.

$\sin B = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A.

$\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 20. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ.$

B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ.$

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ.$

D.

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ.$

Lời giải

Chọn A.

Lý thuyết.

Câu 21. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2.$

B. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a.$

$$\text{C. } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - a^2}{2}.$$

$$\text{D. } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Lời giải

Chọn D.

$$a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Câu 22. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?

$$\text{A. } -\frac{19}{13}.$$

$$\text{B. } \frac{19}{13}.$$

$$\text{C. } \frac{25}{13}.$$

$$\text{D. } -\frac{25}{13}$$

Lời giải

Chọn B.

$$E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3(\tan^2 \alpha + 1) - 2}{1 + (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

Câu 23. Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$?

$$\text{A. } \frac{10}{26}.$$

$$\text{B. } \frac{100}{26}.$$

$$\text{C. } \frac{50}{26}.$$

$$\text{D. } \frac{101}{26}.$$

Lời giải

Chọn D.

$$E = \sin^2 \alpha \left(2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}.$$

Câu 24. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

$$\text{A. } (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$$

B.

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$$

$$\text{C. } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$$

D.

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$$

Lời giải

Chọn D.

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

Câu 25. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

$$\text{A. } \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$$

$$\text{B. } \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$$

$$\text{C. } \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$$

$$\text{D. } \sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$$

Lời giải

Chọn D.

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1.$$

Câu 26. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A. $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$.

B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.

C. $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$.

D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Công thức lượng giác cơ bản.

Câu 27. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A. $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$.

B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.

C. $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$.

D.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Công thức lượng giác cơ bản.

Câu 28. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\tan \alpha$?

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Do $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 29. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D.

$A = (\tan 1^\circ \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$.

Câu 30. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

Câu 31. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A. $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$.

B. $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$.

C. $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$.

D.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Công thức lượng giác cơ bản.

Câu 32. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. -1.

D. 0.

Câu 39. Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ là:

- A. $-\frac{15}{13}$. B. -13 . C. $\frac{15}{13}$. D. 13 .

Lời giải

Chọn D.

$$A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cot \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13.$$

Câu 40. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{25}{3}$. B. $-\frac{11}{13}$. C. $-\frac{11}{3}$. D. $-\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn C.

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

Câu 41. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m để $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$.

- A. $m = 9$. B. $m = 3$. C. $m = -3$. D. $m = \pm 3$.

Lời giải

Chọn D.

$$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Câu 42. Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. B. $\cot^2 a + \tan^2 a + 2$. C. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2$.

Lời giải

Chọn C.

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \cdot \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Câu 43. Rút gọn biểu thức sau $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

- A. $A = 4$. B. $A = 1$. C. $A = 2$. D. $A = 3$

Lời giải

Chọn A.

$$A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4.$$

Câu 44. Đơn giản biểu thức $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

- A. $\sin^2 x$. B. $\cos^2 x$. C. $\frac{1}{\cos x}$. D. $\cos x$.

Lời giải

Chọn A.

$$G = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

$$\tan \alpha . \cot \alpha = \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\cos x}{\sin x} = 1 .$$

Câu 50. Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x . \cos x}$ ta được

A. $P = \frac{1}{2} \tan x .$

B. $P = \frac{1}{2} \cot x .$

C. $P = 2 \cot x .$

D.

$P = 2 \tan x .$

Lời giải

Chọn B.

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x . \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x . \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x .$$

CHỦ ĐỀ 2: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông:

Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao.

Ta có các hệ thức sau:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

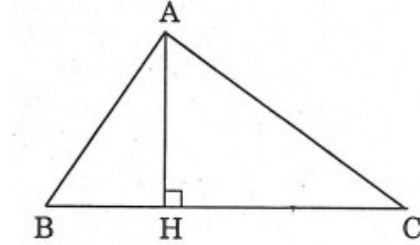
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$AC = BC \cdot \sin B ; \quad AB = BC \cdot \sin C$$

$$AC = BC \cdot \cos C ; \quad AB = BC \cdot \cos B$$

$$AB = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B$$

$$AC = AB \cdot \tan B = AB \cdot \cot C$$



II. Các hệ thức lượng trong tam giác:

1. Định lý côsin: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

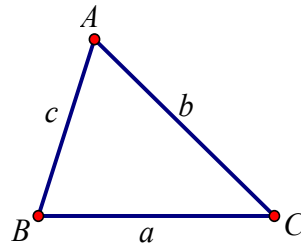
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Hình 2.6

b) Định lý sin : Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

c) Diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a , h_b , h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC , CA , AB ; R , r

lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác; $p = \frac{a + b + c}{2}$ là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông}) \end{aligned}$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Vấn đề 1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài toán: Cho biết một số yếu tố của tam giác vuông. Tính các yếu tố còn lại

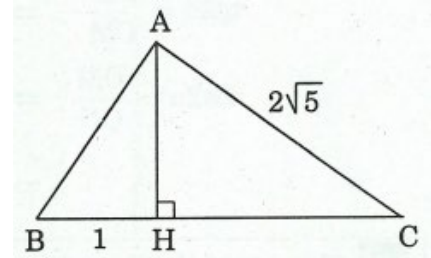
Phương pháp: Dùng các hệ thức lượng trong tam giác vuông

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AH là đường cao và có $BH = 1$, $AC = 2\sqrt{5}$.

Tính AB , BC , AH .

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } CA^2 &= CB \cdot CH = CH(CH + HB) \\ \Rightarrow 20 &= CH(CH + 1) \Rightarrow CH = 4 \\ \Rightarrow BC + BH + HC &= 1 + 4 = 5 \\ AB^2 &= BH \cdot BC \Rightarrow AB = \sqrt{5} \\ AH &= \frac{AB \cdot AC}{BC} = 2.\end{aligned}$$



Ví dụ 2: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow AB \cdot AC = AH^2$ (*).

Mặt khác $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}AC$ thế vào (*), ta được $\frac{3}{4}AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}$.

Suy ra $AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$ cm.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH (H ở trên BC). Tính AH , CH , BH , BC nếu biết $AB = 3$, $AC = 4$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} \\ \Rightarrow AH^2 &= \frac{144}{25} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}\end{aligned}$$

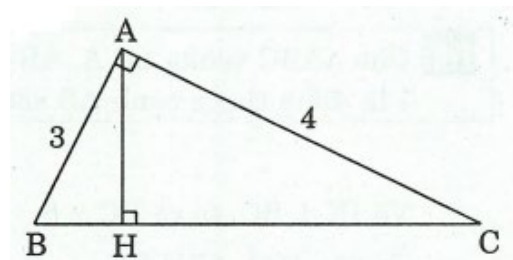
Xét $\triangle AHC$:

$$\begin{aligned}AC^2 &= AH^2 + HC^2 \\ \Leftrightarrow HC^2 &= AC^2 - AH^2 \\ \Leftrightarrow HC^2 &= 16 - \frac{144}{25} = \frac{256}{25} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$HC = \frac{16}{5}$$

$$\triangle ABH: BH^2 = AB^2 - AH^2 = 9 - \frac{144}{25} = \frac{225 - 144}{25} = \frac{81}{25} \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

$$\text{Ta có: } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5.$$



Ví dụ 4: Cho hình thang $ABCD$ với đường cao AB . Biết rằng $AD = 3a$, $BC = 4a$, $\widehat{BDC} = 90^\circ$. Tính AB , CD , AC .

Lời giải

Vẽ $DH \perp BC$ (H ở trên BC) thì $ADHB$ là hình chữ nhật nên

$BH = AD = 3a$
 và $AB = DH$
 Xét tam giác vuông BDC , ta có:

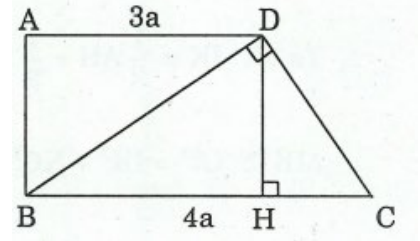
$$DH^2 = HB.HC = HB(BC - BH) = 3a(4a - 3a) = 3a^2$$

$$\Rightarrow DH = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = DH = a\sqrt{3}$$

Ta lại có: $DC^2 = CH.CB = a.4a = 4a^2$

Suy ra $DC = 2a$.

Ta lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 16a^2} = a\sqrt{19}$.



Ví dụ 5: Cho ΔABC vuông tại C , CD là đường cao, $DA = 9$, $DB = 16$.
 Tính CD , AC , BC .

Lời giải

Ta có: $DC^2 = DA.DB = 9 \times 16 = 144$

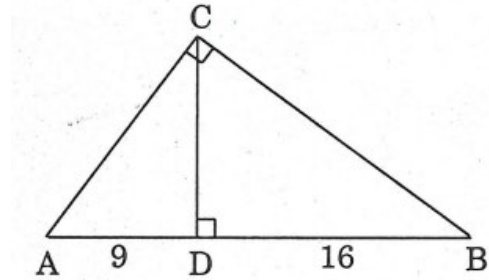
$$\Rightarrow DC = 12$$

Ta có: $AC^2 = AB.AD = 25 \times 9$

$$\Rightarrow AC = 5 \times 3 = 15$$

Ta có: $CB^2 = AB.DB = 25 \times 16 = 400$

$$\Rightarrow CB = 20.$$



Ví dụ 6: Cho ΔABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, AH là đường cao ($H \in BC$). Gọi I là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AI = 2BI$, CI cắt AH tại E . Tính CE .

Lời giải

Vẽ $IK \perp BC$, ta có $BC = 5$.

Ta có: $BA^2 = BH.BC$

$$\Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{9}{5}$$

Ta có:

Δ vuông $BKI \sim \Delta$ vuông BHA

$$\Rightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow BK = \frac{BH}{3} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Và } CK = CB - BK = 5 - \frac{3}{5} = \frac{22}{5}$$

$$\text{Ta có: } IK = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5} \quad \left(\text{vì } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{12}{5} \right)$$

$$\Delta IKC: CI^2 = IK^2 + KC^2 = \frac{16}{25} + \left(\frac{22}{5} \right)^2 = 20 \Rightarrow CI = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Ta lại có: } AH^2 = BH.HC \Rightarrow HC = \frac{AH^2}{BH} = \frac{\frac{144}{25}}{\frac{9}{5}} = \frac{144}{5.9} = \frac{16}{5}$$

Δ vuông $CHE \sim \Delta$ vuông CKI nên ta có:

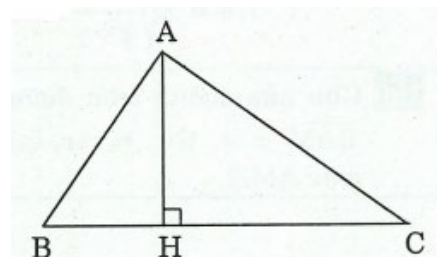
$$\frac{CE}{CI} = \frac{CH}{CK} \Rightarrow EC = \frac{CI.CH}{CK} = \frac{16\sqrt{5}}{11}.$$

Ví dụ 7: Cho ΔABC vuông tại A , $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$. Đường cao $AH = 6$.

Tính HB , HC , AB , AC .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3} = \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} \quad (\text{vì } \Delta ABC \sim \Delta HCA)$$



$$\Rightarrow HC = \frac{3}{2} AH = 9$$

Ta lại có: $\frac{2}{3} = \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$

$$\Rightarrow HB = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$AB = \sqrt{BH \cdot BC} = \sqrt{4(4+9)} = 2\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{CH \cdot BC} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

Ví dụ 8: Cho ΔABC vuông tại C , AD là đường phân giác trong, $BD = x$, $CD = y$.

Tính AB , BC , AC .

Lời giải

Ta có: $BC = a = x + y$

Vì AD là phân giác nên ta có:

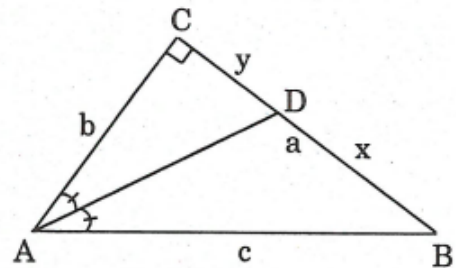
$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{c^2 - b^2}{b^2} = \frac{x^2 - y^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{x^2 - y^2}{y^2} \Rightarrow b^2 = \frac{y^2(x+y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{y^2(x+y)}{x-y}$$

$$\Rightarrow b = y \cdot \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}; \quad c = b \frac{x}{y} = x \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

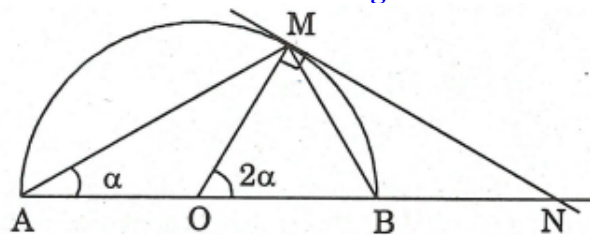
Vậy: $BC = x + y; \quad AC = y \sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$

$$AB = x \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$



Ví dụ 9: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, m chạy trên đường tròn, đặt $\widehat{BAM} = \alpha$, tiếp tuyến tại M cắt AB tại N . Hãy tính các cạnh của tam giác AMN .

Lời giải



Ta có: $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = 2R \cos \alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{MN}{OM} \Rightarrow MN = R \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{OM}{ON} \Rightarrow ON = \frac{R}{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow AN = R + \frac{R}{\cos 2\alpha} = R \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right).$$

Ví dụ 10: Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao AB . Ngoại tiếp đường tròn đường kính r , cho

$\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$. Tính các cạnh của hình thang.

Lời giải

Ta có: $AB = 2r$

Gọi M, N, P, Q là các tiếp điểm như hình vẽ.

Vì $ON = OP$

$\Rightarrow OC$ là phân giác góc $\widehat{BCD}$

$\Rightarrow \triangle NOC$ là nửa tam giác đều

$\Rightarrow NC = r\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = BN + NC = r + r\sqrt{3} = r(1 + \sqrt{3})$

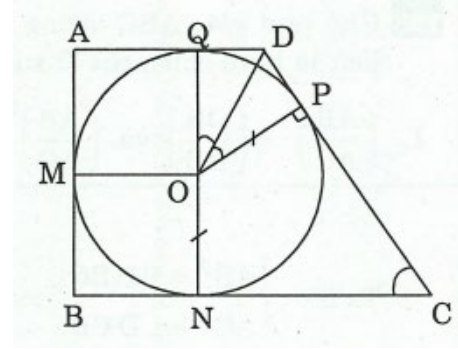
Ta có: $\widehat{ADC} = 120^\circ$ (vì $\widehat{C} = 60^\circ$)

$\Rightarrow \triangle QDO$ là nửa tam giác đều (vì $\widehat{QDO} = 60^\circ$)

$\Rightarrow QD = r \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$$AD = AQ + QD = r + r \frac{\sqrt{3}}{3} = r \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Ta có: $DC = DP + PC = DQ + CN = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$.



Ví dụ 11: Đường phân giác trong góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài bằng $\frac{15}{7}$ và $\frac{20}{7}$. Tính các cạnh góc vuông và đường cao phát xuất từ đỉnh góc vuông.

Lời giải

Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{A}$

Giả sử $DB = \frac{15}{7}$; $CD = \frac{20}{7}$.

Đặt $AB = x$; $AC = y$ ($x, y > 0$)

Do tính chất phân giác, ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{x}{\frac{15}{7}} = \frac{y}{\frac{20}{7}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \quad (1)$$

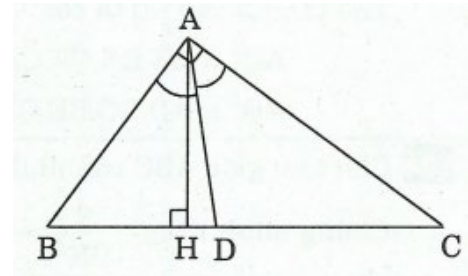
$$\text{Mặt khác} \quad BC = BD + DC = \frac{15}{7} + \frac{20}{7} = 5$$

$$\text{và} \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra} \quad \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 + y^2}{25} = \frac{25}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Do đó $AB = 3$; $AC = 4$

$$\text{Ta có:} \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{9 \cdot 16} \quad \text{Suy ra} \quad AH = \frac{12}{5}.$$



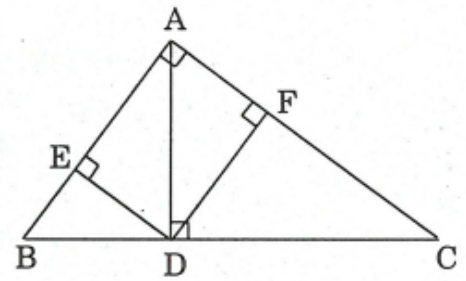
Ví dụ 12: Cho tam giác ABC vuông tại A , D là hình chiếu của A lên BC , E, F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC . Chứng minh rằng:

$$1. \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \left(\frac{DB}{DC} \right) \text{ và } \left(\frac{AB}{AC} \right)^3 = \frac{BE}{CF}$$

$$b) AD^3 = BC \cdot BE \cdot CF.$$

Lời giải

$$\text{Ta có:} \quad \begin{cases} AB^2 = BD \cdot BC \\ AC^2 = CD \cdot CB \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BC}{CD \cdot CB} = \frac{BD}{CD}$$



Từ kết quả trên, ta suy ra: $\frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BD^2}{CD^2}$

Mặt khác, các tam giác vuông ADB và ADC cho ta:

$$DB^2 = BE.BA \quad (1)$$

$$DC^2 = CF.CA \quad (2)$$

Nên $\frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BE.BA}{CF.CA} \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF}.$

b) Tam giác vuông ABC cho: $AD^2 = DB.DC \Rightarrow AD^4 = DB^2.DC^2 \quad (3)$

Thế (1), (2) vào (3) ta có:

$$AD^4 = BE.BA.CF.CA = AB.AC.BE.CF$$

$$AD^4 = AD.BC.BE.CF \Rightarrow AD^3 = BC.BE.CF.$$

Ví dụ 13: Cho tam giác ABC cân đỉnh A . Vẽ các đường cao AH , BK .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$

Lời giải

Trong Δ vuông AHC , vẽ đường cao HI

Xét tam giác vuông BKC , ta có:

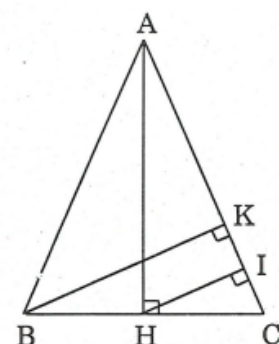
$$\begin{cases} HI \parallel BK \\ HB = HC \end{cases} \Rightarrow HI = \frac{1}{2}BK \quad (1)$$

Ta lại có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HC^2} \quad (2)$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\frac{1}{\frac{BK^2}{4}} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{\frac{BC^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{4AH^2} + \frac{1}{BC^2}.$$



Ví dụ 14: Cho hình vuông $ABCD$. Đường thẳng qua A , cắt các cạnh BC tại M và đường thẳng CD tại I .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2}.$

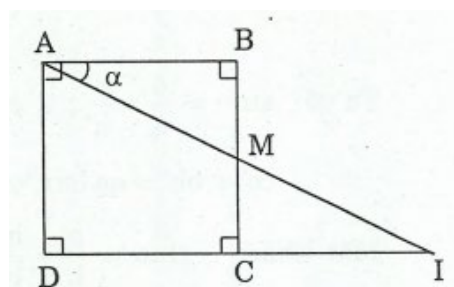
Lời giải

Ta đặt $AB = a$; $\widehat{MAB} = \alpha$

$$\Rightarrow AM \cos \alpha = AB$$

$$\text{và } AI \sin \alpha = AD$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} &= \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} = \frac{1}{AB^2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$



Ví dụ 15 Cho ΔABC vuông cân tại A , M là một điểm trên cạnh huyền BC . Chứng minh rằng:

$$MB^2 + MC^2 = 2MA^2.$$

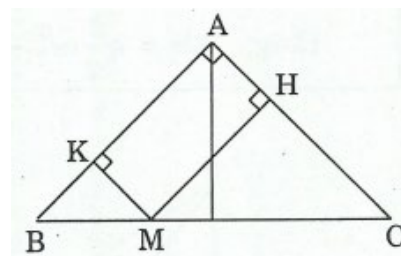
Lời giải

Ta dựng $MH \perp AC$; $MK \perp AB$

Ta có:

$$\begin{aligned} MB^2 + MC^2 &= KB^2 + KM^2 + HC^2 + HM^2 \\ &= 2KM^2 + 2HM^2 = 2KH^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2.$$



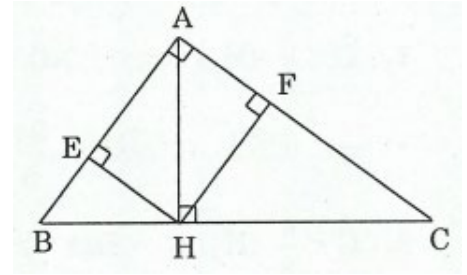
Ví dụ 16: Cho ΔABC vuông tại A , dựng đường cao AH . Trong ΔAHB dựng đường cao HE , trong ΔAHC dựng đường cao HF . Chứng minh:

1. $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$

b) $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Lời giải

1. Ta có: $BC^2 = (BH + HC)^2$
 $= BH^2 + HC^2 + 2HB.HC$
 $= BE^2 + HE^2 + CF^2 + HF^2 + 2HA^2$
 $= BE^2 + CF^2 + 3HA^2$.



b) Ta có: $BE^2 = BE^2 \cdot \frac{BA^2}{BA^2} = \frac{(BE.BA)^2}{BH.BC} = \frac{BH^4}{BH.BC} = \frac{BH^3}{BC}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{BE^2} = \frac{BH}{\sqrt[3]{BC}}$, tương tự $\Rightarrow \sqrt[3]{CF^2} = \frac{CH}{\sqrt[3]{BC}}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \frac{BC}{\sqrt[3]{BC}} = \sqrt[3]{BC^2}$.

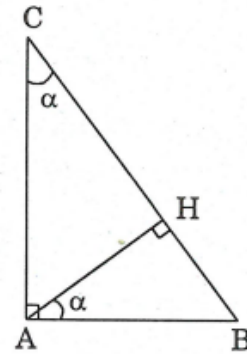
Ví dụ 17: Cho ΔABC , $\Delta A'B'C'$ đồng dạng, ΔABC vuông tại A , $\Delta A'B'C'$ vuông tại A' . Hãy chứng minh:

1. $aa' = bb' + cc'$

b) $\frac{1}{hh'} = \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}$.

Lời giải

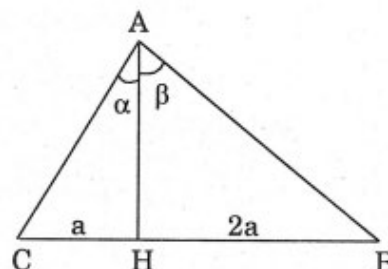
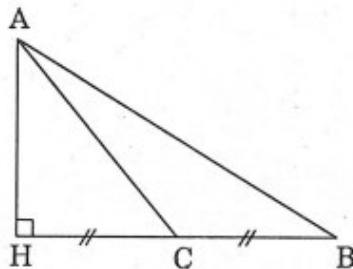
Ta có: $\sin \alpha = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$; $\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$
 $\Rightarrow cc' + bb' = aa'(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = aa'$
 Mặt khác: $\sin \alpha = \frac{h}{b} = \frac{h'}{b'}$; $\cos \alpha = \frac{h}{c} = \frac{h'}{c'}$
 $\Rightarrow \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} = \frac{\sin^2 \alpha}{h.h'} + \frac{\cos^2 \alpha}{h.h'} = \frac{1}{hh'}$.



Ví dụ 18: Cho ΔABC có $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, AH là đường cao, $BH = 2a$, $CH = a$. Chứng minh rằng:

$$AH = a \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Lời giải



Ta chia làm 2 trường hợp:

a) $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$ (H_1) $\Rightarrow AC > HC = CB \Rightarrow \widehat{CBA} > \widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{CAB} > \frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$. Mâu thuẫn với $\widehat{ACB} \geq \frac{\pi}{2}$

b) $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$ (H_2) Đặt $AH = x$; $\widehat{HAC} = \alpha$; $\widehat{HAB} = \beta$; $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{3a}{x}}{1 - \frac{2a^2}{x^2}} = \frac{3ax}{x^2 - 2a^2}$$

$$\Rightarrow x = a \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Ví dụ 19: Góc vuông $\widehat{xOy}$, có Ox tiếp xúc với đường tròn $(I; R)$ tại A , sao cho $OA = a$, Oy cắt đường tròn đó tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Lời giải

a) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O .

Đường thẳng $B'A$ cắt đường tròn tại điểm thứ hai là C' .

Ta có: $\widehat{BAO} = \widehat{ACB}$

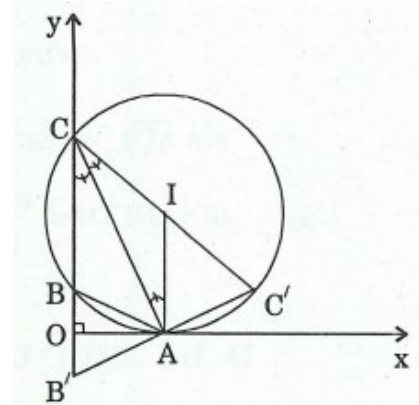
$\Rightarrow \Delta CAB'$ vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{B'A^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BA^2}.$$

b) Ta có: $\widehat{ICA} = \widehat{IAC} = \widehat{BCA}$

Do $\widehat{CAC'} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C, I, C'$ thẳng hàng

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = AC^2 + C'A^2 = C'C^2 = 4R^2.$$



Vấn đề 2: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

1-Định lý côsin

Bài toán 1: Biết hai cạnh và góc xen giữa, tính độ dài cạnh còn lại

Phương pháp: Dùng định lý côsin

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 5$ và $\cos A = \frac{4}{5}$. Tính cạnh BC .

Lời giải

Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 21$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $BC = 2, AC = 2\sqrt{2}, \cos(A+B) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Độ dài cạnh AB là

Lời giải

$$\text{Do } \cos(A+B) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Áp dụng định lý côsin trong tam giác có:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \Rightarrow AB = 2.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có $AB = 3, BC = 3\sqrt{3}, \sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tìm độ dài cạnh AC (chính xác đến hàng phần trăm)

Lời giải

Ta có $\cos B > 0$ (vì B nhọn), do đó $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$AC^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 36 - 18\sqrt{2} \Rightarrow AC \approx 3,25.$$

Ví dụ 4: Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\hat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh b

Lời giải

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7.$$

Ví dụ 5: Trong tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 1$ cm, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Lời giải

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BC^2 = 3$$

$$\text{Vậy } BC = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có $\hat{C} = 30^\circ$, cạnh $a = 8$, cạnh $b = 6$. Tính cạnh c (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Theo định lý côsin, ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$= 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ$$

$$c = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ} \approx 4,11.$$

Ví dụ 7: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

$$\text{A. } AC = \sqrt{3}. \quad \text{B. } AC = \sqrt{2}. \quad \text{C. } AC = 2\sqrt{3}. \quad \text{D. } AC = 2.$$

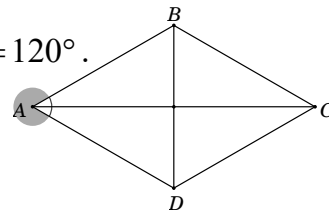
Lời giải

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Theo định lý côsin, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$



Ví dụ 8: Cho $\triangle ABC$ có 2 trung tuyến $BM = 6$; $CN = 9$ và hợp với nhau một góc 120° .

Tính các cạnh $\triangle ABC$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

+Trường hợp 1: $\widehat{BGC} = 120^\circ$

Áp dụng định lý côsin trong $\triangle GBC$

$$BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB \cdot GC \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 19 \Rightarrow a = 2\sqrt{19}$$

$$\triangle GMC: \quad MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM \cdot GC \cdot \cos \widehat{CGM}$$

$$\frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{9}m_b \cdot m_c \cos 60^\circ$$

$$\frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{3}6\right)^2 + \left(\frac{2}{3}9\right)^2 - \frac{4}{9}6.9\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 7.16 \Rightarrow b = 4\sqrt{7}$$

$$\Delta BGN: NB^2 = GB^2 + GN^2 - 2BG.GN.\cos \widehat{BGN}$$

$$\frac{1}{4}c^2 = \left(\frac{1}{3}6\right)^2 + \left(\frac{1}{3}9\right)^2 - 2.4.3.\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 4.13 \Rightarrow c = 2\sqrt{13}.$$

+ Trường hợp 2: $\widehat{BGC} = 60^\circ$

Giải tương tự như trên ta có kết quả: $a = 2\sqrt{7}$; $b = 2\sqrt{34}$; $c = 2\sqrt{19}$.

Ví dụ 9: Cho ΔABC có $\cos A = \frac{5}{9}$. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$, $DA = 6$, $BD = \frac{16}{3}$.

Tính chu vi ΔABC .

Lời giải

Do $\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$

$$\Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$$

$$\Rightarrow CA^2 = CB.CD$$

$$\text{Đặt: } x = DC \Rightarrow CA^2 = x\left(x + \frac{16}{3}\right).$$

Theo định lí côsin ta có

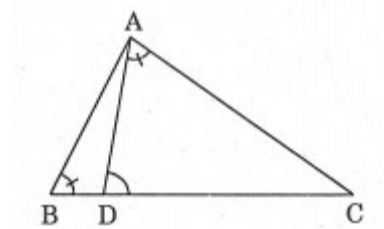
$$CA^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.\cos \widehat{D_1} \quad (\text{vì } \widehat{D_1} = \widehat{BAC})$$

$$CA^2 = 36 - x^2 - 12x.\frac{5}{9}$$

$$\text{Vậy } x^2 + \frac{16}{3}x = x^2 + 36 - 20.\frac{x}{3} \Rightarrow x = 3,$$

$$AC = 5, BC = \frac{25}{3}, \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AB = 10$$

$$\text{Do đó chu vi } \Delta ABC = \frac{70}{3}.$$



Ví dụ 10: Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32 \text{ cm}$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A , có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là 3:4 nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB.$$

Trong ΔABC có AH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}AB\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{32^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB = 40. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 11: Tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$. Chứng minh

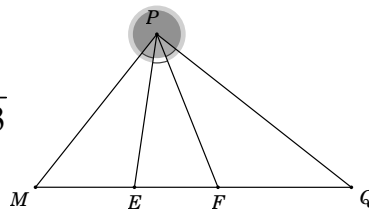
$$MF^2 = q^2 + y^2 - yq.$$

Lời giải

Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60^\circ$.

Theo định lí côsin, ta có

$$\begin{aligned} ME^2 &= AM^2 + AE^2 - 2 \cdot AM \cdot AE \cdot \cos \widehat{MAE} \\ &= q^2 + x^2 - 2qx \cdot \cos 30^\circ = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3} \\ MF^2 &= AM^2 + AF^2 - 2 \cdot AM \cdot AF \cdot \cos \widehat{MAF} \\ &= q^2 + y^2 - 2qy \cdot \cos 60^\circ = q^2 + y^2 - qy \\ MQ^2 &= MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2. \text{ Chọn C.} \end{aligned}$$



Ví dụ 12: Tam giác ABC vuông tại A , có $AB = c$, $AC = b$. Gọi ℓ_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính ℓ_a theo b và c .

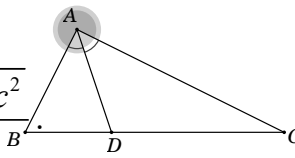
A. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. B. $\ell_a = \frac{2(b+c)}{bc}$. C. $\ell_a = \frac{2bc}{b+c}$. D. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{bc}$.

Lời giải

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$

$$\Rightarrow BD = \frac{AB}{AC} \cdot DC = \frac{c}{b} \cdot DC = \frac{c}{b+c} \cdot BC = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{b+c}$$



Theo định lí hàm côsin, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{ABD} \Leftrightarrow \frac{c^2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} = c^2 + AD^2 - 2c \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \left(c^2 - \frac{c^2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \frac{2bc^3}{(b+c)^2} = 0.$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \text{ hay } \ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}. \text{ Chọn A.}$$

Bài toán 2: Biết độ dài ba cạnh của một tam giác, tính các góc của tam giác

Phương pháp: Dùng hệ quả của định lí côsin

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. Tính góc ABC

Lời giải

Áp dụng hệ quả của định lí côsin trong tam giác ta có:

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} \Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra góc $\widehat{ABC} \approx 104^\circ 29'$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $a = 2$; $b = \sqrt{6}$; $c = 1 + \sqrt{3}$. Góc $\hat{A}$

Lời giải

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $a = 2$; $b = \sqrt{6}$; $c = 1 + \sqrt{3}$. Góc $\widehat{B}$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ.$$

Ví dụ 4: Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$. Tính số đo của góc C .

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a + b + c)(a + b - c) = 3ab \Leftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

Ví dụ 5: Tính góc A của $\triangle ABC$, biết rằng $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) &\Leftrightarrow b^3 + c^3 &= a^2(b + c) \\ &&\Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2 - bc) &= a^2(b + c) \\ &&\Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - bc \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Theo định lí số côsin ta có: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

Ví dụ 6: Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$.

Tìm số đo của $\widehat{ADB}$

Lời giải

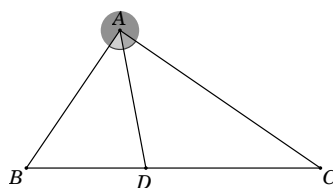
Theo định lí côsin, ta có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

Trong $\triangle ABD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ$.



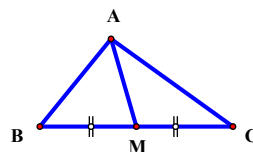
Ví dụ 7: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 6$ cm. Tìm độ dài đường trung tuyến AM của tam giác.

Lời giải

Ta có

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABM , ta được:



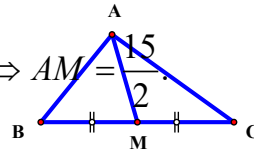
$$\begin{aligned}
AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B \\
&= AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} \\
&= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \\
&= \frac{8^2 + 6^2}{2} - \frac{10^2}{4} = 25 \\
\Rightarrow AM &= 5.
\end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

Lời giải

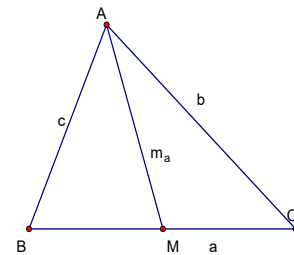
Áp dụng công thức ở ví dụ 7, ta được:

$$AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{12^2 + 9^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$



Chú ý: Công thức tính độ dài đường trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \quad m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$



Ví dụ 9: Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

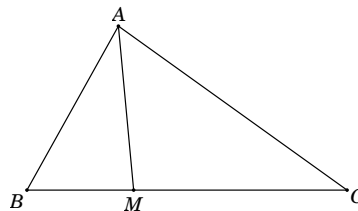
Lời giải

Theo định lí hàm cosin, ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2.4.6} = \frac{1}{2}.$

Do $MC = 2MB \longrightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2.$

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned}
AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2.AB.BM.\cos \hat{B} \\
&= 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{1}{2} = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$



Ví dụ 10: Cho $\triangle ABC$ có $a = 5$, $b = 6$, $c = 3$. Trên đoạn AB , BC lấy lần lượt các điểm M , K sao cho $BM = 2$, $BK = 2$. Tính MK .

Lời giải

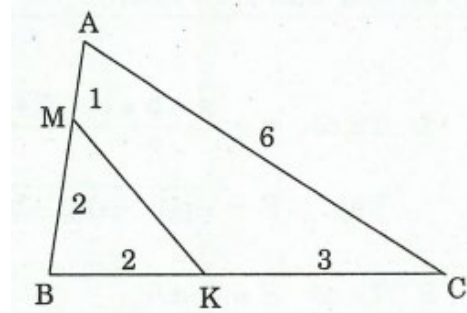
$$\Delta ABC: b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 9 - 36}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{15}$$

ΔMBK :

$$MK^2 = BM^2 + BK^2 - 2BM \cdot BK \cdot \cos B = 4 + 4 - \left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{128}{15}$$

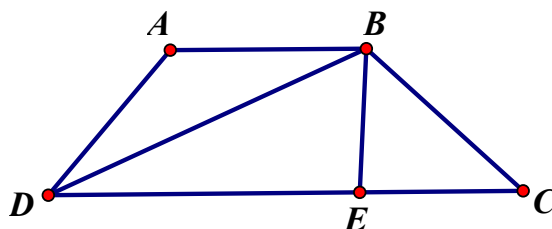
$$\Rightarrow MK = \frac{\sqrt{64 \cdot 2}}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{30}}{15}$$



Ví dụ 11: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = CD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$.

Tính $\cos \widehat{BAD}$.

Lời giải



Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên DC . Đặt $AB = AD = BC = x$.

Ta có $EC = \frac{DC - x}{2}$ (1).

Trong tam giác vuông BDE ta có: $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{3}{4}ED$

$$\Leftrightarrow BE = \frac{3}{4} \left(DC - \frac{DC - x}{2} \right) = \frac{3}{8}(DC + x) \quad (2).$$

Trong tam giác vuông BEC ta có $BC^2 = EC^2 + BE^2$ (3).

Thay (1), (2) vào (3) biến đổi ta được: $39x^2 + 14DC \cdot x - 25DC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{39}DC$ hay

$$DC = \frac{39}{25}x. \text{ Khi đó } EC = \frac{7}{25}x.$$

$$\text{Mặt khác: } \cos \widehat{BAD} = -\cos \widehat{BCE} = -\frac{EC}{BC} = -\frac{7}{25}.$$

2-Định lý sin:

Bài toán 3: Biết độ dài một cạnh và số đo hai góc của một tam giác hoặc biết độ dài hai cạnh và một góc (không xen giữa) tính độ dài cạnh còn lại;

Phương pháp:

- Biết độ dài một cạnh và số đo hai góc của một tam giác Dùng định lý sin.
- Biết độ dài hai cạnh và một góc (không xen giữa) tính độ dài cạnh còn lại;

Cách 1: Dùng định lý sin.

Cách 2: Dùng định lý cosin

Ví dụ 1: Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Lời giải

Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ có $a = 137,5\text{cm}$, $\hat{B} = 83^\circ$; $\hat{C} = 57^\circ$.

Tính góc và độ dài các cạnh còn lại của tam giác(chính xác đến hàng phần mười)

Lời giải

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 40^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx 211,6\text{cm}$$

Tương tự: $c \approx 178,8\text{ cm}$

Ví dụ 3: Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\hat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

Lời giải

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos \hat{C} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + BC^2 - 2.\sqrt{3}.BC.\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 4: Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính chu vi tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}.$$

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 4^2 - 2.4.4.\cos 30^\circ$$

$$= 32 - 16\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{32 - 16\sqrt{3}}.$$

Chu vi của tam giác ABC là

Ví dụ 5: Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Tìm độ dài lớn nhất của đoạn OB .

Lời giải

Theo định lí hàm sin, ta có:

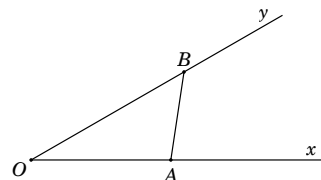
$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} . \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} . \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ.$$

Khi đó $OB = 2$.

Chọn D.



Ví dụ 6: Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Tìm độ dài của đoạn OA khi OB có độ dài lớn nhất.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Theo định lí hàm sin, ta có

$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

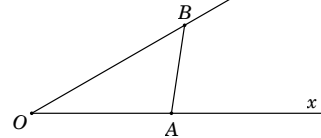
Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ.$$

Khi đó $OB = 2$.

Tam giác OAB vuông tại $A \Rightarrow OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

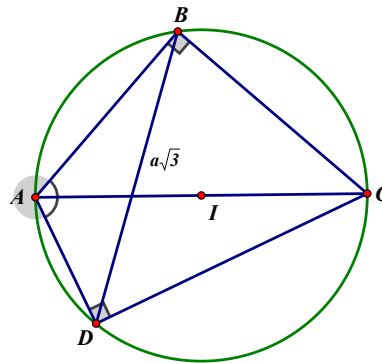
Chọn B



Ví dụ 7: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và $BD = a\sqrt{3}$. Tính AC .

Lời giải

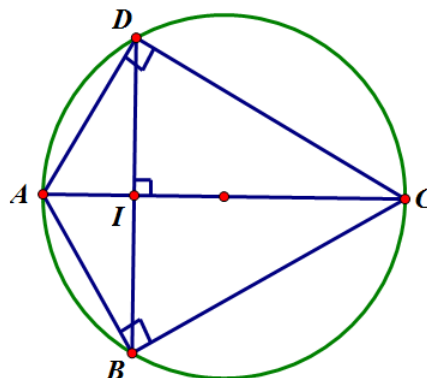
Cách 1:



$\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

Áp dụng định sin trong $\triangle ABD$, ta có $AC = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2a$.

Cách 2:



Để không mất tính tổng quát ta có thể chọn $BD \perp AC$ tại I .

Ta có $\widehat{C} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}) = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$.

Do $BD \perp AC \Rightarrow \begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$. Suy ra $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Ta có $CI = \frac{3a}{2}$.

Xét $\triangle AID$ vuông tại I , $ID = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AI = \frac{ID}{\tan \frac{A}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{2}$.

Ta có $AC = AI + CI = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} = 2a$.

Vậy $AC = 2a$.

3- Diện tích tam giác

Bài toán Tìm diện tích của tam giác. Tìm độ dài đường cao, tìm bán kính đường tròn nội-ngoại tiếp tam giác.

Phương pháp:

3.1. Tìm diện tích tam giác

-Biết hai cạnh và góc xen giữa thì $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

-Biết độ dài ba cạnh thì $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ($p = \frac{a+b+c}{2}$, nửa chu vi)

Ngoài ra $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$S = pr$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$, r là bán kính đường tròn nội tiếp

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C .

3.2 Tìm độ dài đường cao: $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$.

3.3 Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

-Biết độ dài cạnh và góc đối diện thì dùng định lý sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

-Ngoài ra $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$

4.4 Bán kính đường tròn nội tiếp:

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}.$$

3.5. Bán kính đường tròn bàng tiếp:

$$r_a = p \tan \frac{A}{2}; \quad r_b = p \tan \frac{B}{2}; \quad r_c = p \tan \frac{C}{2}.$$

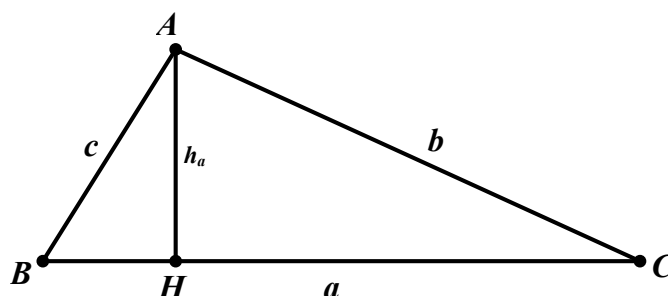
Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 5$, $\hat{B} = 150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 4.5 \sin 150^\circ = 5$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tìm độ dài đường cao h_a của tam giác ABC

Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$.

Ta lại có: $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$.

Vì $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ nên $h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $a = 5$ cm, $c = 9$ cm, $\cos C = -\frac{1}{10}$. Tính độ dài đường cao h_a hạ từ A của tam giác ABC .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 81 = 25 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow b^2 - b - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ b = -8 \end{cases}$$

Ta nhận được $b = 7$ (cm)

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2} \left(\frac{21}{2} - 5\right) \left(\frac{21}{2} - 7\right) \left(\frac{21}{2} - 9\right)} = \frac{21\sqrt{11}}{4} (\text{cm}^2)$$

$$\text{Độ dài đường cao } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{\frac{21\sqrt{11}}{2}}{5} = \frac{21\sqrt{11}}{10} (\text{cm})$$

Ví dụ 4: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

Lời giải

Áp dụng định lý côsin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3.$$

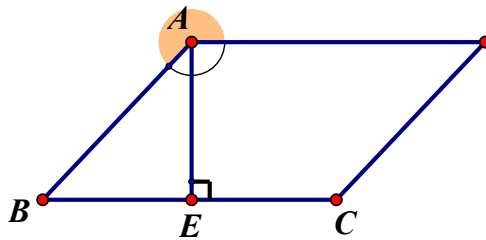
Ví dụ 5: Tam giác ABC có $a=8$; $b=7$; $c=5$. Tìm diện tích của tam giác ABC bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = 10, S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 10\sqrt{3}.$$

Ví dụ 6: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=135^\circ$. Tính diện tích của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải



Ta có $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

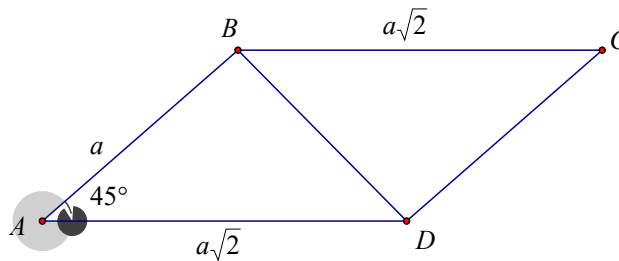
Gọi AE là đường cao của tam giác ABC , khi đó tam giác AEB vuông cân tại E .

$$\text{Suy ra } AE = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $AE \cdot BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$.

Ví dụ 7: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45^\circ$. Tính diện tích của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải



Ta có: $AD = BC = a\sqrt{2}$ nên $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a^2$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có $BC=10$, $\widehat{A}=30^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Trong tam giác ABC ta có: $R = \frac{BC}{2 \sin A} = 10$.

Ví dụ 9: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Lời giải

$$\text{Ta có: } p = \frac{52+56+60}{2} = 84.$$

Áp dụng hệ thức Hê – rông ta có: $S = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344$.

$$\text{Mặt khác } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52 \cdot 56 \cdot 60}{4 \cdot 1344} = 32,5.$$

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin ta có } R = \frac{a}{2 \sin A} = \sqrt{2}.$$

Ví dụ 11: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn (O). Tính bán kính R của đường tròn.

Lời giải

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh } a: R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 12: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm. Tính diện tích tam giác

Lời giải

Ta có diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$. Do tam giác ABC đều nên

$$S_{ABC} = \frac{a^3}{4R} = \frac{(2R \sin A)^3}{4R} = 2R^2 \sin^3 A = 2 \cdot 4^2 \cdot (\sin 60^\circ)^3 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Ví dụ 13: Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm nên

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 24$.

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } ABC \text{ là } r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2.$$

Ví dụ 14: Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

$$\text{A. } r = 1. \quad \text{B. } r = 2. \quad \text{C. } r = \sqrt{3}. \quad \text{D. } r = 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 15: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tìm tỉ số $\frac{R}{r}$?

Lời giải

$$\text{Ta có } R = \frac{abc}{4S}, r = \frac{S}{P}$$

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $b = c$ và $a = \sqrt{b^2 + c^2} = b\sqrt{2}$

$$\text{Xét tỉ số } \frac{R}{r} = \frac{abc \cdot p}{4S^2} = \frac{abc \cdot \frac{a+b+c}{2}}{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (b \cdot c)^2} = \frac{a(a+2b)}{2b^2} = \frac{2b^2(1+\sqrt{2})}{2b^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ví dụ 16: Cho tam giác ABC . Tính đường cao vẽ từ A và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Biết:

a) $CA = 8; AB = 5; \hat{A} = 60^\circ$

b) $BC = 21; CA = 17; AB = 8.$

Giải

a) *Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

$$BC^2 = 25 + 64 - 2.5.8.\frac{1}{2} = 49 \quad \text{Vậy: } BC = 7.$$

* Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2} .5.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

Ta lại có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC.h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = \frac{2.10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$

Ta lại có: $S = \frac{AB.AC.BC}{4R} \Rightarrow R = \frac{5.7.8}{4.10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$

b) Ta có: $p = \frac{AB + AC + CB}{2} = \frac{8 + 21 + 17}{2} = 23$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{23(23-12)(23-17)(23-8)} = 6\sqrt{115}$$

$$R = \frac{AB.BC.CA}{4S} = \frac{8.21.17}{4.6\sqrt{115}} = \frac{7.17}{\sqrt{115}} = \frac{119}{\sqrt{115}}$$

$$S = \frac{1}{2} BC.h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = \frac{4}{7}\sqrt{115}.$$

Ví dụ 17: Cho ΔABC có $a = 5, b = 6, c = 7$. Tính:

a) Diện tích S của ΔABC

b) Các đường cao h_a, h_b, h_c .

c) Các bán kính R, r .

Giải

a) Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9; \quad p-a=4, \quad p-b=3, \quad p-c=2$

Vậy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9.4.3.2} = 6\sqrt{6}.$

b) Ta có: $S = \frac{1}{2} a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.6\sqrt{6}}{5} = \frac{12\sqrt{6}}{5}$

$$S = \frac{1}{2} b.h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.6\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

$$S = \frac{1}{2} c.h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.6\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7}.$$

c) Ta có: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{5.6.7}{4.6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 18: Tính các góc A, B và các độ dài h_a, R của ΔABC , biết

a) $a = \sqrt{6}; b = 2; c = (\sqrt{3} + 1)$

b) $a = 7; b = 5; c = 8.$

Giải

a) Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 6}{2.2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow A = 60^\circ$$

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ.$$

b) Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$

c) $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \sqrt{2}.$$

Ví dụ 19: Cho $\triangle ABC$ có $a = 9$, đường tròn nội tiếp, tiếp xúc với cạnh BC tại D sao cho $AD = DC$ và $\cos \hat{C} = \frac{2}{3}$.

a) Tính b, c theo x với $x = AD > 0$

b) Suy ra giá trị b .

Giải

a) Ta có: $x = \frac{a+b-c}{2}; \quad \cos \widehat{DAC} = \cos \hat{C} = \frac{b}{2x}$

Vậy $b - c = 2x - 9; \quad b = \frac{4}{3}x \quad \text{và} \quad c = 9 - \frac{2}{3}x.$

b) Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \left(9 - \frac{2}{3}x\right)^2 = 9^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{4}{3}x \cdot \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow x = 3$ và do đó $b = 4; c = 7$.

Ví dụ 20: Cho $\triangle ABC$ có $c = 2, b = 3, a = 4$, M là trung điểm AB . Tính bán kính r của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCM$.

Giải

Áp dụng định lý đường trung tuyến.

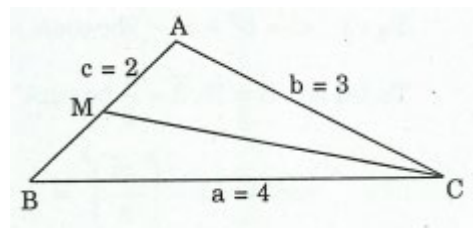
Ta có: $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2$

$$\Rightarrow m_c = \sqrt{\frac{23}{2}}$$

$\triangle ABC: \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11}{16} \Rightarrow$

$$\sin B = \frac{3}{16}\sqrt{15}$$

$\triangle BMC: \frac{MC}{\sin B} = 2r \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\frac{23}{2}}}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} = \frac{16}{3} \sqrt{\frac{23}{30}}.$



Ví dụ 21: Cho $\triangle ABC$ có $c = 3, b = 4, S_{ABC} = 3\sqrt{3}$. Tính a .

Giải

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 - 24 \cos A$

Ta lại có: $S = 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos A = \pm \frac{1}{2}$$

* Nếu $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 25 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

* Nếu $\cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 25 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 37 \Rightarrow a = \sqrt{37}$

Ví dụ 22: Cho $\triangle ABC$ có $A = \frac{\pi}{3}$, $h_c = \sqrt{3}$, $R = 5$. Tính a, b, c .

Giải

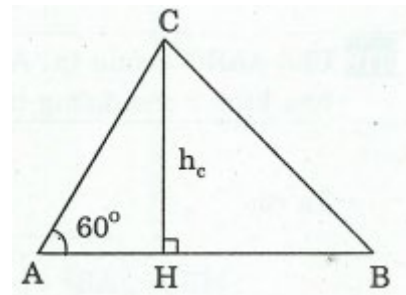
Ta có: $a = 2R \sin A = 5\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow b = \frac{h_c}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

Ta có: $c = AH = HB = 1 + \sqrt{a^2 - h_c^2}$

$$c = 1 + 6\sqrt{2}$$

Vậy: $a = 5\sqrt{3}$; $b = 2$; $c = 1 + 6\sqrt{2}$.



Ví dụ 23: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, M là trung điểm của AC . Tính bán kính r của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCM$.

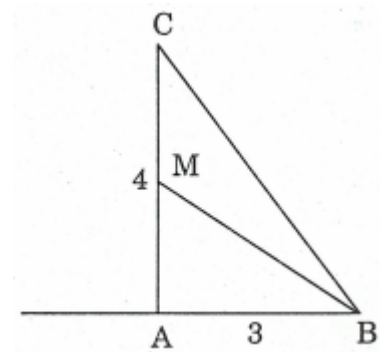
Giải

Ta có:

$$MB = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\sin C = \frac{3}{5};$$

$$r = \frac{BM}{2 \sin C} = \frac{5}{6} \sqrt{13}.$$



Ví dụ 24: Cho $\triangle ABC$ vuông ở B kéo dài AC về phía C một đoạn $CD = AB = 1$, $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{6}$. Tính AC .

Giải

Qua D , dựng đường thẳng vuông góc với DC , cắt BC tại E

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DAE}$$

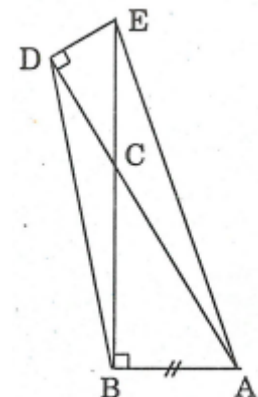
Đặt $AC = x > 1$ thì $DA = x + 1$

$$DE = DA \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{x+1}{\sqrt{3}}; \quad CB = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\triangle CDE \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{CB}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = (x+1)\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2) + 2(x^3 - 2) = 0$$



$$\Leftrightarrow (x^3 - 2)(x + 2) = 0 \quad \text{vì } x > 0 \Rightarrow x + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 2 \quad \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

Ví dụ 25: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$, $AB = a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$. Tính AC .

Giải

$$\text{Ta có: } DB^2 = a^2 + 9a^2 - 2.a.3a \cos \frac{\pi}{3}$$

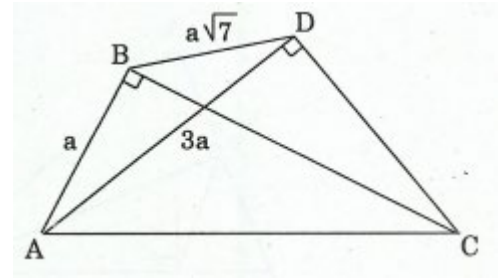
$$DB^2 = 7a^2$$

$$\text{Suy ra } DB = a\sqrt{7}$$

Vì $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn nên ta có:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BD}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } AC = \frac{a\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a \frac{\sqrt{21}}{3}.$$



Ví dụ 26: Cho $\triangle ABC$ có $B < \frac{\pi}{2}$, AQ và CP là các đường cao và $\frac{dt(\triangle BPQ)}{dt(\triangle ABC)} = \frac{1}{9}$.

a) Tính $\cos B$.

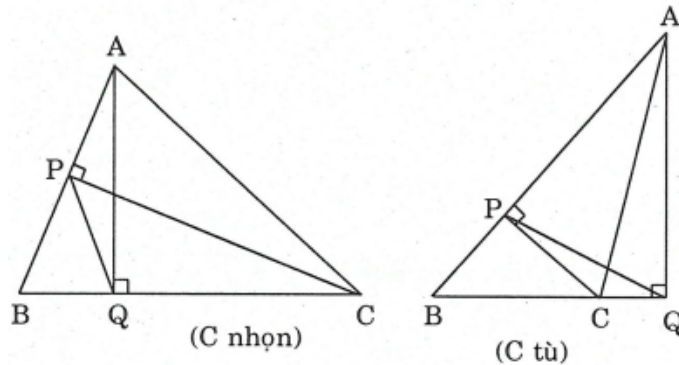
b) Cho $PQ = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Giải

$$\text{a) Ta có: } dt(\triangle BPQ) = \frac{1}{2} BP \cdot BQ \sin B; \quad dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin B$$

$$\Rightarrow \frac{dt(\triangle BPQ)}{dt(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2} BP \cdot BQ \sin B}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \sin B} = \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos^2 B = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{1}{3}.$$



b) Vì $ACQP$ nội tiếp trong một đường tròn nên

$$\frac{AC}{\sin 90^\circ} = \frac{PQ}{\sin \widehat{BAQ}} = \frac{PQ}{\cos B} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{PQ}{\cos B}$$

$$\text{Mà } R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{PQ}{2 \cdot \frac{1}{3} \sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 27: Cho điểm $O \in$ đoạn AB , $OA = 13$, $OB = 7$. Vẽ đường tròn tâm O , bán kính bằng 5. Từ A, B vẽ các tiếp tuyến với đường tròn, chúng cắt nhau tại M , các điểm tiếp xúc nằm về một phía cạnh

AB. Tìm bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.

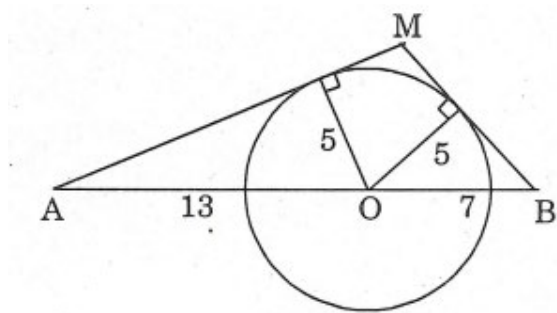
Giải

Ta có: $\sin A = \frac{5}{13}; \cos A = \frac{12}{13}$

$\sin B = \frac{5}{7}; \cos B = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\Rightarrow \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{10(6+\sqrt{6})}{91}$

$\Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{91}{6+\sqrt{6}}$.



Ví dụ 28: Cho $\triangle ABC$ có $B = \frac{\pi}{3}$, $R = 2$, I là tâm đường tròn nội tiếp. Tìm bán kính r của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIC$.

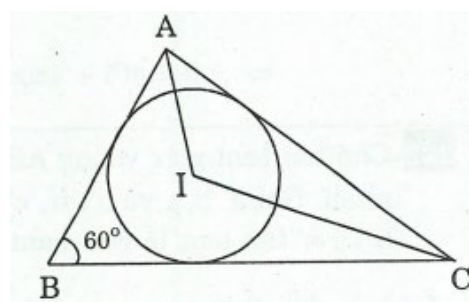
Giải

Ta có: $B = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 120^\circ$
(vì $\widehat{AIC}$ bù với $\frac{A+C}{2}$)

Trong $\triangle ABC$:

$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R = 4 \Rightarrow AC = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Trong $\triangle AIC$: $AC = 2r \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$



Ví dụ 30: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $\hat{A} = \alpha$, $AB = m$, D là điểm trên cạnh BC , sao cho $BC = 3BD$.

a) Tính BC .

b) Tính AD theo m, α .

c) Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD , ACD bằng nhau. Tính $\cos \alpha$ để bán kính của chúng bằng $\frac{1}{2}R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$).

Giải

a) Ta có: $\frac{BC}{2} = AB \cdot \sin \alpha$

$\Rightarrow BC = 2AB \cdot \sin \alpha = 2m \sin \frac{\alpha}{2}$.

b) Áp dụng định lý côsin:

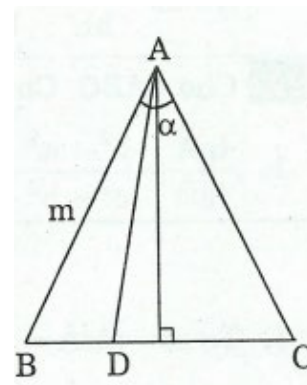
$$AD^2 = m^2 + \left(\frac{2}{3}m \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2m \cdot \frac{2m}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cos B$$
$$= m^2 \left[1 - \frac{8}{9} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] = \frac{m^2}{2} (5 + 4 \cos \alpha)$$

$\Rightarrow AD = \frac{m}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$.

c) • Đpcm $\Leftrightarrow \frac{AD}{\sin B} = \frac{AD}{\sin C} \Leftrightarrow \sin B = \sin C$ (hiển nhiên)

• Đpcm $\Leftrightarrow \frac{AD}{\sin B} = \frac{1}{2} \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow AC = 2AD$

$\Leftrightarrow m = \frac{2m}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$



$$\Leftrightarrow 9 = 4(5 + 4\cos\alpha) \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{11}{16}.$$

Bài toán 5 : Giải tam giác và các ứng dụng vào thực tế

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC, biết $b = 14, c = 10, \hat{A} = 145^\circ$

Lời giải

Xét ΔABC , theo định lý côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^\circ \approx 525.35$$

$$\Rightarrow BC \approx 23.$$

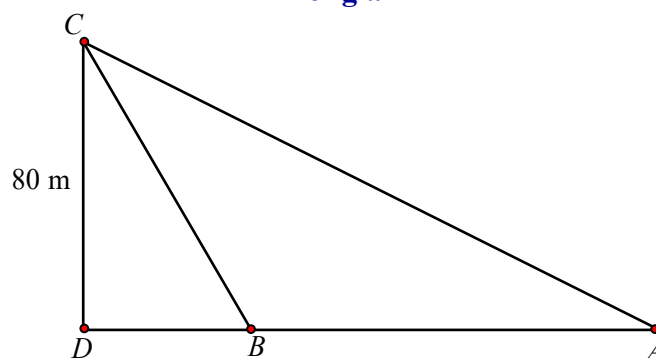
Theo định lý sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b.\sin A}{a} \approx \frac{14.\sin 145^\circ}{23} \approx 0.349 \Rightarrow \hat{B} \approx 20^\circ 26'$$

$$C = 180^\circ - (A + B) \approx 14^\circ 34'$$

Ví dụ 2: Từ hai điểm A và B trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh C và chân D của tháp CD dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Biết tháp CD cao 80 m. Tính khoảng cách AB

Lời giải



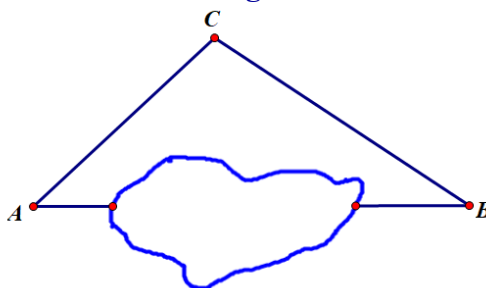
Ta có: $\widehat{DBC} = 72^\circ 12'$, $\widehat{DAC} = 34^\circ 26'$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{DBC} - \widehat{DAC} = 37^\circ 46'$

$$BC = \frac{CD}{\cos \widehat{DBC}} \approx 84 \text{ m.}$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có $AB = \frac{BC}{\sin \widehat{DAC}} \cdot \sin \widehat{ACB} \approx 91 \text{ m.}$

Ví dụ 3: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(\text{m})$, $CB = 180(\text{m})$. Tính khoảng cách AB ?

Lời giải



$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m}).$$

Ví dụ 4: Một tàu biển xuất phát từ cảng Vân Phong (Khánh Hòa) theo hướng đông với vận tốc 20km/h. Sau khi đi được 1 giờ, tàu chuyển sang hướng Đông Nam rồi giữ nguyên vận tốc và đi tiếp.

a) Hãy vẽ sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát (1km trên thực tế ứng với 1cm trên bản vẽ).

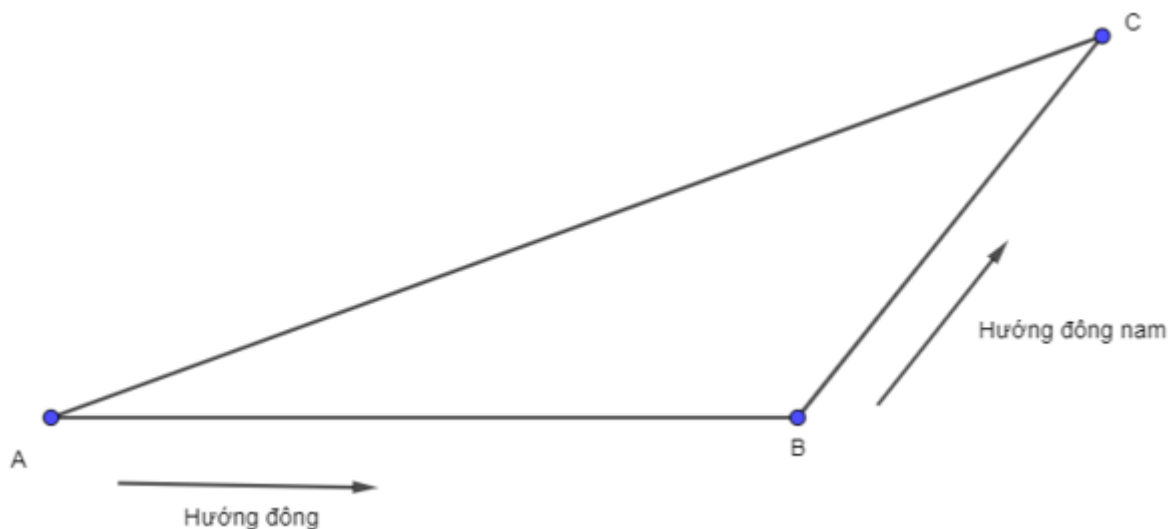
b) Hãy đo trực tiếp trên bản vẽ và cho biết sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng Vân Phong bao

nhiều kilômét (số đo gần đúng).

c) Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì có thể dùng Định lí Pythagore (Pi – ta – go) để tính chính xác các số đo trong câu b hay không?

Lời giải

a) Sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát là:

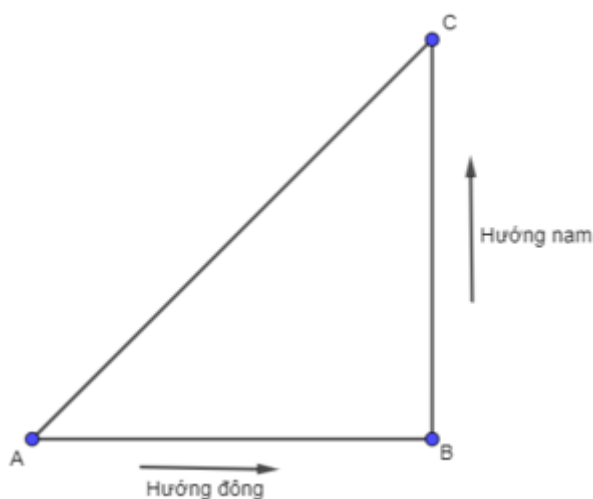


Trong đó vị trí A là vị trí là vị trí cảng Vân Phong.

b) Sau khi đi 1h theo hướng đông với vận tốc 20km/h thì tàu đi đến vị trí B, đi tiếp 0,5 giờ còn lại theo hướng đông nam cũng với vận tốc 20km/h thì tàu đến vị trí C. Tiến hành đo đoạn AC ta thấy xấp xỉ 27,9 cm.

Vậy sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng vân phong 27,9 km.

c)



Sau khi đi 1h theo hướng đông với vận tốc 20km/h thì tàu đi đến vị trí B, quãng đường AB là: $20 \cdot 1 = 20$ (km).

Còn 1h còn lại, tàu đi theo hướng nam với vận tốc 20km/h thì tàu đi đến vị trí B, quãng đường BC là: $20 \cdot 1 = 20$ (km).

Do hướng đông hợp với hướng nam một góc 90° nên $B=90^\circ$

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \approx 28,28.$$

Ví dụ 5: Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình ta có thể ngắm được Đảo yến. Hãy đề xuất cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).



Đảo Yến, nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

Lời giải



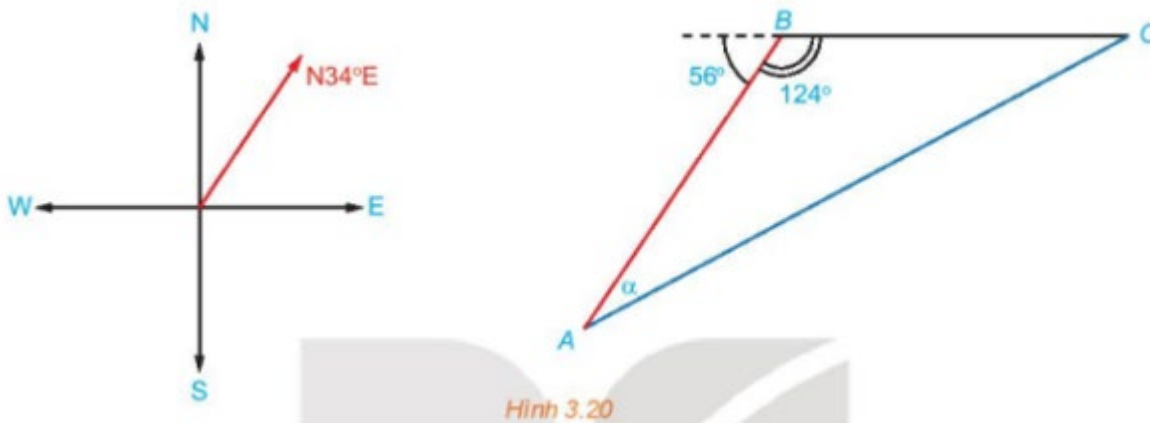
Đảo Yến, nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

- Bước 1. Trên bờ, đặt một cọc ở vị trí A, một cọc ở vị trí B, một cọc ở vị trí C. Đo khoảng cách AB, AC.
 Bước 2. Đứng tại A ngắm điểm B và điểm E để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó là góc $\widehat{BAE}$. Đứng tại B ngắm điểm E và điểm A để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó là góc $\widehat{EBA}$
 Bước 3. Dựa vào định lý sin trong tam giác ABE ta tính được cạnh AE.
 Bước 4. Đứng tại A ngắm điểm C và điểm D để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó là góc $\widehat{DAC}$. Đứng tại C ngắm điểm D và điểm A để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó là góc $\widehat{DCA}$
 Bước 5. Dựa vào định lý sin trong tam giác ADC tính được AD.
 Bước 6. Xét tam giác ADE, sử dụng định lý cosin để tính cạnh DE.
 Vậy độ dài DE chính là chiều rộng của đảo.

Ví dụ 6: Trên biển, tàu B ở vị trí cách tàu A 53 km về hướng $N34^\circ E$. Sau đó, tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30km/h về hướng đông và tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50km/h để đuổi kịp tàu B.

- a) Hỏi tàu A cần phải chuyển động theo hướng nào?
 b) Với hướng chuyển động đó thì sau bao lâu tàu A đuổi kịp tàu B?

Lời giải



Hình 3.20

- a) Gọi thời gian tàu A đuổi kịp tàu B ở vị trí C là x (h) ($x > 0$)
 Vì tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30km/h đến C nên quãng đường BC là 30x (km)
 Vì tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50km/h để đuổi kịp tàu B nên quãng đường AC là 50x (km)
 Xét $\triangle ABC$, có:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2500x^2 = 900x^2 + 53^2 - 2 \cdot 53 \cdot 30x \cdot \cos 124^\circ$$

$$\Leftrightarrow 1600x^2 - 1778x - 2809 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \approx 1,99 \text{ TM}, x \approx -0,88 \text{ (KTM)}$$

Do đó tàu A mất 1,99 giờ đuổi kịp tàu B.

$$\Rightarrow BC = 30 \cdot x = 30 \cdot 1,99 = 59,7;$$

$$AC = 50 \cdot x = 50 \cdot 1,99 = 99,5$$

Ta lại có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{59,7}{\sin A} = \frac{99,5}{\sin 124^\circ} \Rightarrow \hat{A} \approx 29,83^\circ$$

$$\Rightarrow AC \text{ hợp với phương nam một góc } 34^\circ + 29,83^\circ = 63,83^\circ$$

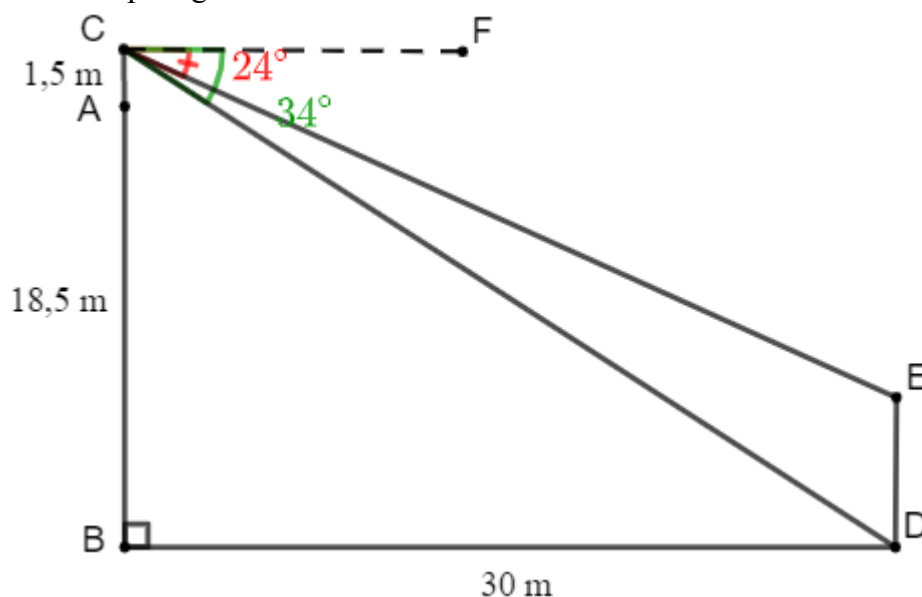
Vậy tàu A chuyển động theo hướng N63,83°E

Ví dụ 7: Từ trên nóc của một tòa nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách tòa nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34° , góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24° . Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

Giả sử tòa nhà là AB, AB = 18,5 m; giác kế AC = 1,5 m; chiều cao của cái cây là DE; khoảng cách từ tòa nhà tới cây là BD = 30 m; góc tạo bởi phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là $\widehat{FCD} = 34^\circ$, góc tạo bởi phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là $\widehat{FCE} = 24^\circ$. Ta cần tính DE.

Hình vẽ mô phỏng:



Ta có: $BC = BA + AC = 18,5 + 1,5 = 20$ (m).

Tam giác BCD vuông tại B, áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = 20^2 + 30^2 = 1300 \Rightarrow CD = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \approx 36,06.$$

$$\text{Lại có: } \widehat{ECD} = \widehat{FCD} - \widehat{FCE} = 34^\circ - 24^\circ = 10^\circ$$

$$CF \parallel BD \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{FCD} = 34^\circ \text{ (so le trong)}$$

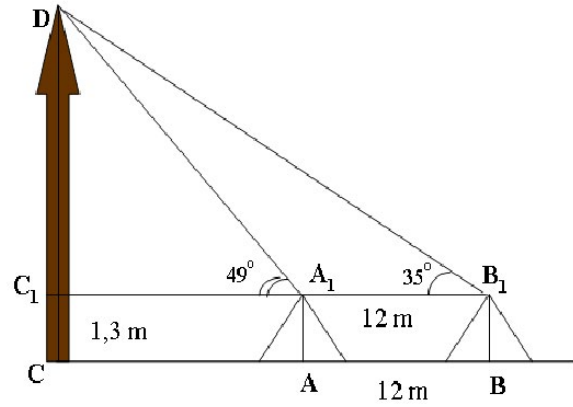
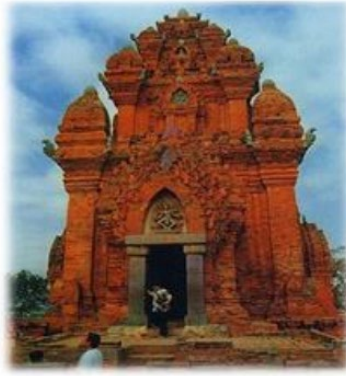
$$\Rightarrow \widehat{CDB} = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ; \widehat{CED} = 114^\circ. \widehat{CDB} = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác CDE ta có: } \frac{CD}{\sin \widehat{CED}} = \frac{DE}{\sin \widehat{ECD}} \Rightarrow DE \approx 6,6 \text{ m.}$$

Vậy chiều cao của cây khoảng 6,6 m.

Ví dụ 10: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của

tháp.



Lời giải

Ta có $\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$; $\widehat{C_1DB_1} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $\widehat{A_1DB_1} = 14^\circ$.

Xét tam giác A_1DB_1 , có $\frac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1DB_1}} = \frac{A_1D}{\sin \widehat{A_1B_1D}} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45 \text{ m}$.

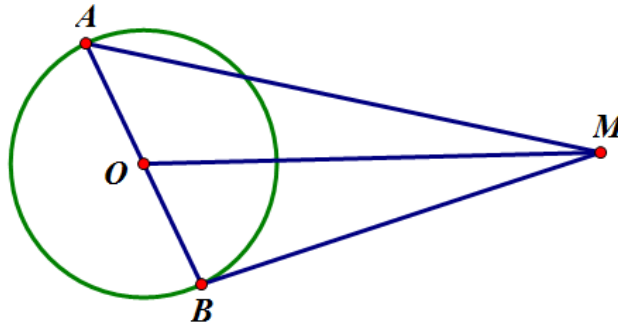
Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 , có

$$\sin \widehat{C_1A_1D} = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin \widehat{C_1A_1D} = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47 \text{ m}$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77 \text{ m}.$$

Ví dụ 12: Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M thỏa mãn $MO = 3R$. Một đường kính AB thay đổi trên đường tròn. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = MA + MB$.

Lời giải



Gọi $\widehat{MOA} = \alpha \Rightarrow \widehat{MOB} = 180^\circ - \alpha$.

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cdot \cos \alpha} = \sqrt{9R^2 + R^2 - 6R^2 \cos \alpha} = R\sqrt{10 - 6\cos \alpha}.$$

$$MB = \sqrt{MO^2 + BO^2 - 2MO \cdot BO \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{9R^2 + R^2 + 6R^2 \cos \alpha} = R\sqrt{10 + 6\cos \alpha}.$$

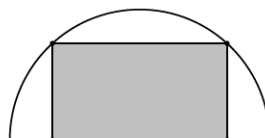
$$\text{Xét } C = \sqrt{10 - 6\cos \alpha} + \sqrt{10 + 6\cos \alpha} \Rightarrow C^2 = 20 + 2\sqrt{100 - 36\cos^2 \alpha} \geq 20 + 2\sqrt{100 - 36} = 36.$$

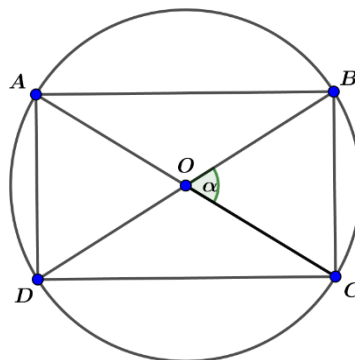
$$\text{Suy ra } C \geq 6. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } S = MA + MB = R(\sqrt{10 - 6\cos \alpha} + \sqrt{10 + 6\cos \alpha}) \geq 6R.$$

Suy ra $\min S = 6R$ khi và chỉ khi A, O, B, M thẳng hàng.

Ví dụ 13: Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa đường tròn bán kính 1 m, người ta cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi có thể cắt được miếng tôn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?





Xét đường tròn bán kính 1, ta cắt trên đó một hình chữ nhật $ABCD$.

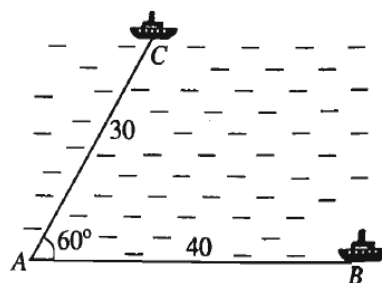
Khi đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = 90^\circ$.

Vậy diện tích lớn nhất của miếng tôn cắt trên nửa đường tròn bằng 1.

Ví dụ 14: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý?

Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



Lời giải

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lý, tàu C đi được 30 hải lý. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC , ta có

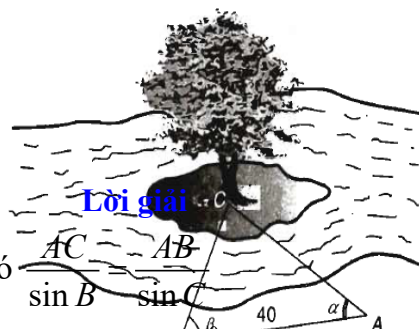
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lý).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$.

Tìm khoảng cách AC



Lời giải

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC , ta có

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m. Chọn C.}$$

Ví dụ 16: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tìm chiều cao của cây

Lời giải

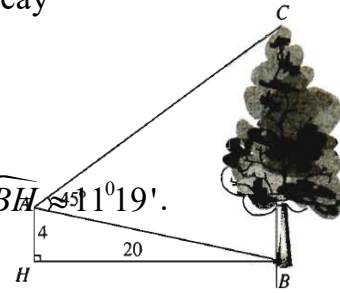
Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'$.

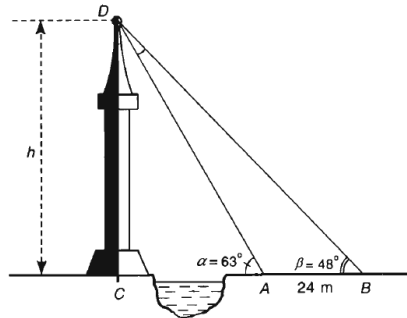
Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17\text{m. Chọn B.}$$



Ví dụ 17: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{m}$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Tìm chiều cao h của tháp



Lời giải

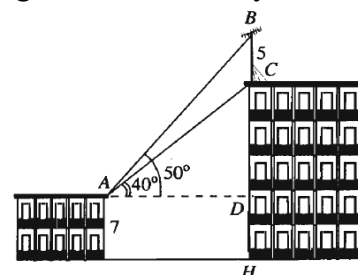
Áp dụng định lý sin vào tam giác ABD , ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \widehat{D}}$.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91\text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4\text{ m. Chọn D.}$

Ví dụ 18: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5m . Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tìm chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



Lời giải

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \rightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9 \text{ m}.$

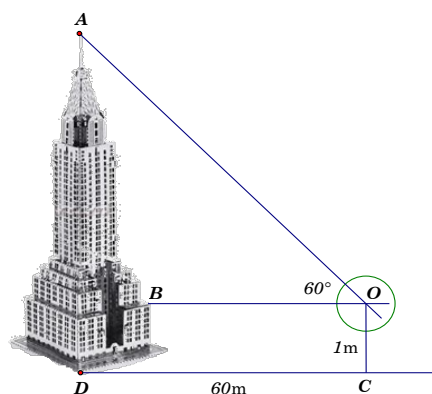
Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9 \text{ m}$. **Chọn B.**

Ví dụ 19: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$.

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy

đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Tìm chiều cao của ngọn tháp



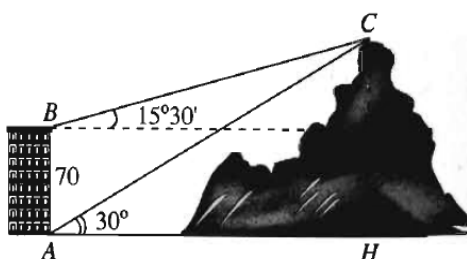
Lời giải

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3} \text{ m}.$

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1)\text{m}$. **Chọn C.**

Ví dụ 20: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Tính độ cao của ngọn núi so với mặt đất.

Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



Lời giải

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'.$

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

$$\text{Do đó } AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4 \text{ m.}$$

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7 \text{ m.}$

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m. **Chọn A.**

Bài toán 6: Chứng minh các hệ thức trong tam giác

Phương pháp: Dùng các hệ thức lượng trong tam giác

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Chứng minh $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

$$\text{Mà } b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Chứng minh

$$\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}.$$

$$3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{6S}{a} = \frac{4S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , nếu $2h_a = h_b + h_c$. Chứng minh $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$.

Lời giải

$$2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{4S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{4}{2R \sin A} = \frac{2}{2R \sin B} + \frac{2}{2R \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

Ví dụ 4: Diện tích S của tam giác chứng minh $8S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức Hê – rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Nếu thay $p = \frac{a+b+c}{2}$ vào công thức Hê – rông thì ta

$$\text{có: } 8S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

Ví dụ 5: Cho hai tam giác vuông $ABC, A'B'C'$ vuông góc tại A và A' đồng dạng với nhau. Gọi a, b, c và a', b', c' lần lượt là độ dài các cạnh đối với các đỉnh, h và h' lần lượt là các đường cao xuất phát từ A và A' . Chứng minh:

a) $aa' = bb' + cc'$

b) $\frac{1}{hh'} = \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}.$

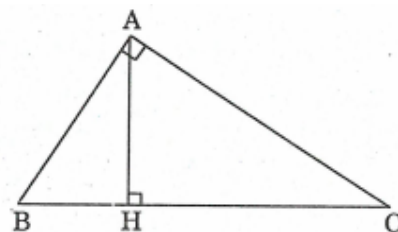
Giải

a) Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$\Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{aa'}{a'^2} = \frac{bb'}{b'^2} = \frac{cc'}{c'^2} = \frac{bb' + cc'}{b'^2 + c'^2}$$

Tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $a'^2 = b'^2 + c'^2$

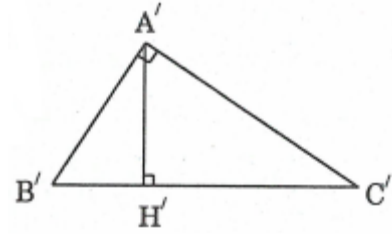


$$\text{Do đó } \frac{aa'}{a'^2} = \frac{bb' + cc'}{a'^2} \Rightarrow aa' = bb' + cc'.$$

b) Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nên ta có

$$\begin{aligned} ah = bc &\Leftrightarrow \frac{1}{h} = \frac{a}{bc} \\ a'h' = b'c' &\Leftrightarrow \frac{1}{h'} = \frac{a'}{b'c'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{1}{hh'} &= \frac{aa'}{bc \cdot b'c'} = \frac{bb' + cc'}{bc \cdot b'c'} \Rightarrow \\ \frac{1}{hh'} &= \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}. \end{aligned}$$



Ví dụ 6: Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$

b) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A).$

Giải

a) Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \sin A = \frac{a}{2R}$
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}$

Ta có: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A} = \frac{\frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

b) Ta có: $\frac{1}{4} \left(a^2 \cdot 2 \frac{b}{2R} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b^2 \cdot 2 \frac{a}{2R} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$
 $= \frac{1}{4} \left[\frac{ab}{2Rc} (a^2 + c^2 - b^2) + \frac{ab}{2Rc} (b^2 + c^2 - a^2) \right]$
 $= \frac{ab}{8Rc} (a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{ab}{8Rc} \cdot 2c^2 = \frac{abc}{4R} = S.$

Ví dụ 7: Cho $\triangle ABC$ có các cạnh là a, b, c và các đường trung tuyến xuất phát từ B, C là m_b, m_c thỏa

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1.$$

a) Chứng minh rằng: $2a^2 = b^2 + c^2$

b) Suy ra rằng: $2\cotg A = \cotg B + \cotg C.$

Giải

a) Ta có: $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{2} \left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \right)}{\frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4$$

$$\Leftrightarrow c^4 - b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - 2a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 - 2a^2 = 0 \quad (\text{vì } c \neq b \Rightarrow c^2 - b^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2.$$

b) Ta có: $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow a^2 + 2bc \cos A = 2a^2 \Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc}$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin A; b = 2R \sin B; c = 2R \sin C$$

$$\text{Vậy } \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{\sin^2 A}{2 \sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{2 \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cot A = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} \quad (A \text{ bù với } B+C)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cot A = \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cot A = \cot B + \cot C.$$

Ví dụ 8: Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD .

a) Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình bình hành.

Giải

a) Áp dụng định lý trung tuyến đối với hai $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$, ta có

$$AB^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (1)$$

$$BC^2 + CD^2 = 2CJ^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta có:

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 2(AJ^2 + CJ^2) + BD^2 \quad (3)$$

Áp dụng định lý trung tuyến với $\triangle AJC$ ta có:

$$AJ^2 + CJ^2 = 2IJ^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (4)$$

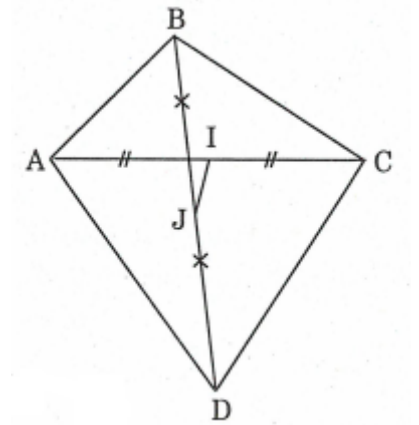
Thế (4) vào (3) ta được:

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2.$$

b) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow I \equiv J \Leftrightarrow IJ = 0$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

Ta phát biểu: $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo.



Ví dụ 9: Ba cạnh của một tam giác có số đo là $x^2 + x + 1$; $2x + 1$; $x^2 - 1$.

a) Tìm x để tồn tại một tam giác như trên.

b) Khi đó chứng minh tam giác ấy có một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Giải

a) Để tồn tại một tam giác có số đo ba cạnh như đề bài thì

$$\begin{cases} 2x+1 > 0, x^2-1 > 0 \\ x^2+3x+2 > x^2-1, 2x^2+x > 2x+1, x^2+2x > x^2+x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, x < -1, 1 < x \\ x > -1, x < -\frac{1}{2} \vee x > 1, x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

b) Đặt $a = x^2 + x + 1$; $b = x^2 - 1$; $c = 2x + 1$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2x+1)(1-x^2)}{2(2x+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}.$$

Ví dụ 10: $\triangle ABC$ vuông tại A , AH là đường cao, r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC .

a) Chứng minh rằng $\frac{r_1}{r} = \frac{c}{a}, \frac{r_2}{r} = \frac{b}{a}$.

b) Suy ra $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

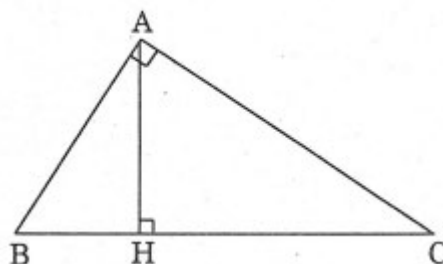
Giải

a) Ta có $\triangle HBA \sim \triangle HAC$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{BA} = \frac{r}{BC} = \frac{r_2}{AC} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a}$$

và $\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$.

b) Suy ra $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow r^2 = r_1^2 + r_2^2$.



Ví dụ 11: Cho $\triangle ABC$ có $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh:

a) $b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow \triangle ABC$ nhọn.

b) $2 \sin^2 A = \tan B \tan C$.

Giải

a) Ta có: $a^4 = b^4 + c^4 \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$

Ta lại có: $a^4 = b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2$

Suy ra $a^2 < b^2 + c^2$ (đpcm)

Hay $b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$

$\Rightarrow 0 < A < \frac{\pi}{2}$ vì $A > B, A > C \Rightarrow B, C$ nhọn

Kết luận: $\triangle ABC$ nhọn.

b) Ta có: $a^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2$

$\Leftrightarrow a^4 = (a^2 + 2bc \cos A)^2 - 2b^2c^2$

$\Leftrightarrow 0 = 4b^2c^2 \cos^2 A + 4a^2bc \cos A - 2b^2c^2$

$\Leftrightarrow 0 = 2bc(1 - \sin^2 A) + 2a^2 \cos A - bc$

$\Leftrightarrow 0 = (2 \sin B \sin C)(1 - \sin^2 A) - 2 \sin^2 A \cos(B + C) - \sin B \sin C$

$\Leftrightarrow 0 = \sin B \sin C - 2 \sin^2 A \cos B \cos C$

$\Leftrightarrow \sin B \sin C = 2 \sin^2 A \cos B \cos C$

$\Leftrightarrow \tan B \tan C = 2 \sin^2 A$ (do chia 2 vế cho $\cos B \cos C$).

Ví dụ 12: Cho $\triangle ABC$, có các đường cong AA_1, BB_1, CC_1 và A, B, C nhọn.

a) Chứng minh rằng $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = a \cos A + b \cos B + c \cos C$.

b) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng hai lần bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_1B_1C_1$.

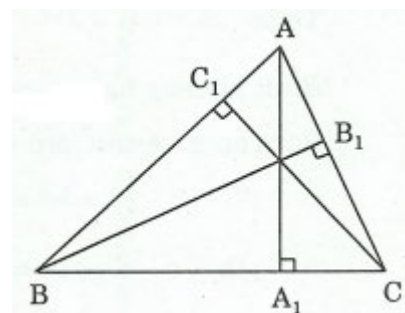
Giải

a) Ta có: $\frac{A_1B_1}{\sin \widehat{ACA_1}} = AB \Rightarrow A_1B_1 = AB \cos C = c \cos C$

Tương tự $B_1C_1 = a \cos A; C_1A_1 = b \cos B$

Do đó:

$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = a \cos A + b \cos B + c \cos C$.



b) Gọi R_1, R lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC , ta có:

$$2R_1 = \frac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1C_1B_1}} = \frac{c \cos C}{\sin(\widehat{A_1AC} + \widehat{B_1BC})} = \frac{c \cos C}{\sin 2C}$$

$$\Rightarrow 2R_1 = \frac{c}{2 \sin C} = R \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 13: Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Chứng minh rằng:

$$\cot gA + \cot gB + \cot gC = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}.$$

Giải

Áp dụng định lí hàm số cosin vào ΔABC , ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Áp dụng định lí hàm số sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$

Do đó $\cot gA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{2R}{a} = \frac{2R(b^2 + c^2 - a^2)}{2bca}$

Tương tự $\cot gB = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}; \quad \cot gC = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$

Suy ra: $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \frac{R}{abc} [b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2]$
 $= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} R.$

Ví dụ 14: Chứng minh rằng ΔABC vuông nếu có $S = p(p-a)$ với S là diện tích, p là nửa chu vi, a, b, c là độ dài 3 cạnh.

Giải

Ta có: $S = p(p-a) \Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p(p-a)$

Bình phương hai vế, ta có: $p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2(p-a)^2$

Rút gọn 2 vế cho $p(p-a) \Rightarrow (p-b)(p-c) = p(p-a)$

$\Leftrightarrow p^2 - pc - pb + bc = p^2 - pa \Leftrightarrow pa - pb - pc + bc = 0$

$\Leftrightarrow p(b+c-a) - bc = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2}(b+c-a) - bc = 0$

$\Leftrightarrow [(b+c)+a][(b+c)-a] - 2bc = 0 \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 - 2bc = 0$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc - a^2 - 2bc = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (đpcm).

Ví dụ 15: Cho ΔABC thỏa $a = 2bc \cos C$. Hỏi ΔABC có đặc điểm gì ?

Giải

Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow a = 2b \cos C = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$

Vậy ΔABC cân tại A nếu $a = 2b \cdot \cos C$.

Ví dụ 16: Cho 2 đường tròn $(O_1; R)$ và $(O_2; r)$ cắt nhau tại A, B , tiếp xúc với một đường thẳng tại C, D . Gọi N là giao điểm của AB và CD (B nằm giữa A và N). Đặt $\widehat{AO_1C} = \alpha; \widehat{AO_2D} = \beta$.

a) Tính AC theo R và α , AD theo r, β .

b) Tính bán kính x của đường tròn ngoại tiếp ΔACD .

Lời giải

a) Ta có: $AC = 2R \sin \frac{\alpha}{2}; AD = 2r \sin \frac{\beta}{2}.$

b) Mặt khác: $AC = 2x \sin \widehat{CDA} = 2x \sin \frac{\beta}{2}$

$$AD = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 4Rr \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 4x^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{Rr}.$$

Ví dụ 17: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AC.BD = a; \widehat{CAB} = \alpha; \widehat{CAD} = \beta.$

a) Tính AC .

b) Tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo $a, \alpha, \beta.$

Lời giải

a) Ta có: $AC = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD

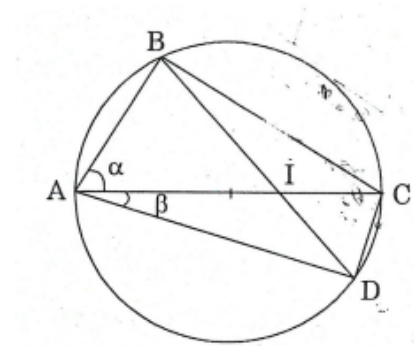
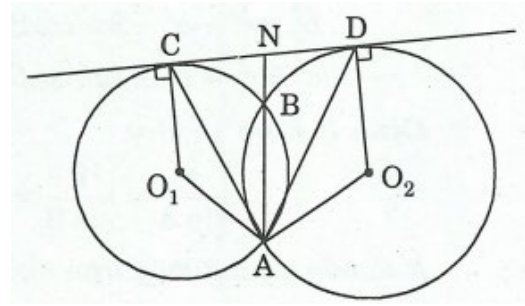
$$dt(ABCD) = \frac{1}{2} BD.AC.\sin \widehat{AIB}$$

Ta có: $\sin \widehat{AIB} = \sin(\alpha + \widehat{ABI})$

$$= \sin(\alpha + \widehat{ACD}) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AIB} = \cos(\beta - \alpha)$$

Vậy $dt(ABCD) = \frac{a^2 \cos(\beta - \alpha)}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}.$

B. $3\sqrt{12}.$

C. $2\sqrt{37}.$

D. $\sqrt{20}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2.6.8.\cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}.$

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. 8,125.

B. 130.

C. 8.

D. 8,5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}.$

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48.

B. 24.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Nửa chu vi ΔABC : $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$.

Câu 4. Cho ΔABC thỏa mãn: $2\cos B = \sqrt{2}$. Khi đó:

- A.** $B = 30^\circ$. **B.** $B = 60^\circ$. **C.** $B = 45^\circ$. **D.** $B = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2\cos B = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$.

Câu 5. Cho ΔABC vuông tại B và có $\hat{C} = 25^\circ$. Số đo của góc A là:

- A.** $A = 65^\circ$. **B.** $A = 60^\circ$. **C.** $A = 155^\circ$. **D.** $A = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: Trong ΔABC $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Câu 6. Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

- A.** 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 7. Cho ΔABC có $\hat{C} = 45^\circ, \hat{B} = 75^\circ$. Số đo của góc A là:

- A.** $A = 65^\circ$. **B.** $A = 70^\circ$ **C.** $A = 60^\circ$. **D.** $A = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Câu 8. Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

- A.** 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

Câu 9. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A.** $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5$.

Câu 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $2\cos A = 1$. Khi đó:

- A.** $A = 30^\circ$. **B.** $A = 45^\circ$. **C.** $A = 120^\circ$. **D.** $A = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $2\cos A = 1 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $b = 7; c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là

- A.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$. **D.** $80\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$.

Mặt khác: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (Vì $\sin A > 0$).

Mà: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}a h_a \Rightarrow h_a = \frac{bc \sin A}{a} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$.

B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

D. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Câu 13. Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

B. $\sin A = \frac{a}{2R}$.

C. $b \sin B = 2R$.

D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 14. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $a=8, b=10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?

A. $c = 3\sqrt{21}$.

B. $c = 7\sqrt{2}$.

C. $c = 2\sqrt{11}$.

D. $c = 2\sqrt{21}$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot c$.

B. $\frac{a}{\sin A} = R$.

C. $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

D. $m_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$.

Lời giải**Chọn D.****Câu 17.** Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng?

A. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot AB \cos C$.

B. $AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2AC \cdot BC \cos C$.

C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$.

D. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC + \cos C$.

Lời giải**Chọn C.**

Câu 18. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b+c}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Câu 19. Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai** ?

A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$.

B. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

C. $\sin(A + B) = \sin C$.

D. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A+B+2C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2} \Rightarrow \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) = \cos \left(90^\circ + \frac{C}{2} \right) \Leftrightarrow \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) = -\sin \frac{C}{2}.$$

Câu 20. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

B. $S = a^2 + b^2 + c^2$.

C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

D. $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Câu 21. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của ΔABC bằng biểu thức nào sau đây

A. $\frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

B. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2} + \frac{c^2}{4}}$.

C. $\frac{1}{2} \sqrt{(2b^2 + 2a^2) - c^2}$.

D. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4}}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} \Rightarrow m_c = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(2b^2 + 2a^2) - c^2}.$$

Câu 22. Tam giác ABC có $\cos B$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

B. $\sqrt{1 - \sin^2 B}$.

C. $\cos(A + C)$.

D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Câu 23. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó :

A. Góc $C > 90^\circ$

B. Góc $C < 90^\circ$

C. Góc $C = 90^\circ$

D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\text{Mà: } a^2 + b^2 - c^2 > 0 \text{ suy ra: } \cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ.$$

Câu 24. Chọn đáp án **sai** : Một tam giác giải được nếu biết :**A.** Độ dài 3 cạnh**B.** Độ dài 2 cạnh và 1 góc bất kỳ**C.** Số đo 3 góc**D.** Độ dài 1 cạnh và 2 góc bất kỳ**Lời giải****Chọn C.**

Ta có: Một tam giác giải được khi ta biết 3 yếu tố của nó, trong đó phải có ít nhất một yếu tố độ dài (tức là yếu tố góc không được quá 2).

Câu 25. Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu ?**A.** 84.**B.** $\sqrt{84}$.**C.** 42.**D.** $\sqrt{168}$.**Lời giải****Chọn A.**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84.$$

Câu 26. Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:**A.** 16.**B.** 8.**C.** 4.**D.** $4\sqrt{2}$.**Lời giải****Chọn B.**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8.$$

Câu 27. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:**A.** $\frac{65}{8}$.**B.** 40.**C.** 32,5.**D.** $\frac{65}{4}$.**Lời giải****Chọn C.**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344.$$

$$\text{Mà } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2}.$$

Câu 28. Tam giác với ba cạnh là 3,4,5. Có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?**A.** 1.**B.** $\sqrt{2}$.**C.** $\sqrt{3}$.**D.** 2.**Lời giải****Chọn A.**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = 6.$$

$$\text{Suy ra: } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}{6} = 1.$$

Câu 29. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu ?**A.** $\sqrt{9}$.**B.** 9.**C.** 3.**D.** $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: Trong tam giác ABC có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra M là trung điểm BC .

$$\text{Suy ra: } AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3.$$

Câu 30. Cho ΔABC , biết $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$. Để tính diện tích S của ΔABC . Một học sinh làm như sau:

$$(I) \quad \text{Tính } \cos A = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$(II) \quad \text{Tính } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2)}}$$

$$(III) \quad S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$(IV) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Học sinh đó đã làm sai bắt đầu từ bước nào?

A. (I)

B. (II)

C. (III)

D. (IV)

Lời giải**Chọn A.**

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Câu 31. Câu nào sau đây là phương tích của điểm $M(1;2)$ đối với đường tròn (C) tâm $I(-2;1)$, bán kính $R = 2$:

A. 6.

B. 8.

C. 0.

D. -5.

Lời giải**Chọn A.**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MI} = (-3;1) \Rightarrow MI = \sqrt{10}.$$

Phương tích của điểm M đối với đường tròn (C) tâm I là:

$$MI^2 - R^2 = \left(\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} \right)^2 - 4 = 6.$$

Câu 32. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250m, CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 266m.

B. 255m.

C. 166m.

D. 298m.

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có: } AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255.$$

Câu 33. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

A. 13.

B. $15\sqrt{13}$.

C. $10\sqrt{13}$.

D. 15.

Lời giải**Chọn**

Không có đáp án.

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60 \text{ km}$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 34. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

A. 71m.

B. 91m.

C. 79m.

D. 40m.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.

Câu 35. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200 \text{ m}$, $CB = 180 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 163m.

B. 224m.

C. 112m.

D. 168m.

Lời giải

Chọn

Không có đáp án

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 200^2 + 180^2 - 2 \cdot 200 \cdot 180 \cdot \cos 56^\circ 16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.

Câu 36. Cho đường tròn (C) đường kính AB với $A(-1; -2)$; $B(2; 1)$. Kết quả nào sau đây là phương tích của điểm $M(1; 2)$ đối với đường tròn (C) .

A. 3.

B. 4.

C. -5.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overline{AB} = (3; 3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$.

Đường tròn (C) đường kính AB có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ là trung điểm AB và bán kính

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra: phương tích của điểm M đối với đường tròn (C) là: $MI^2 - R^2 = 2$.

Câu 37. Cho các điểm $A(1; -2), B(-2; 3), C(0; 4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$.

B. 13.

C. 26.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overline{AB} = (-3; 5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$, $\overline{AC} = (-1; 6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$, $\overline{BC} = (2; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$.

$$\text{Mặt khác } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{34} + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \frac{13}{2}.$$

Câu 38. Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

A. 12.

B. 6.

C. $6\sqrt{2}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overline{AB} = (2; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$, $\overline{AC} = (5; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$, $\overline{BC} = (3; 3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$.

Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6$.

Câu 39. Cho $\vec{a} = (2; -3)$ và $\vec{b} = (5; m)$. Giá trị của m để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

- A. -6. B. $-\frac{13}{2}$. C. -12. D. $-\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương suy ra $\frac{5}{2} = \frac{m}{-3} \Rightarrow m = -\frac{15}{2}$.

Câu 40. Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 90^0 . B. 60^0 . C. 45^0 . D. 30^0 .

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;3), \overrightarrow{AC} = (9;-3)$.

Suy ra: $\cos \widehat{BAC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.

Câu 41. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là ?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 42. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A. $9\sqrt{15}$. B. $3\sqrt{15}$. C. 105. D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$.

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$.

Câu 43. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$. Mà $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

Mặt khác $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2$.

Câu 44. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu ?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 45. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó :

A. $A = 30^0$.

B. $A = 45^0$.

C. $A = 60^0$.

D. $A = 75^0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^0$.

Câu 46. Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\hat{B} = 56^0 13'$; $\hat{C} = 71^0$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. 29,9.

B. 14,1.

C. 17,5.

D. 19,9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: Trong tam giác ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow \hat{A} = 180^0 - 71^0 - 56^0 13' = 52^0 47'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^0}{\sin 52^0 47'} \approx 19,9$.

Câu 47. Cho tam giác ABC , biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A ?

A. $33^0 34'$.

B. $117^0 49'$.

C. $28^0 37'$.

D. $58^0 24'$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^0 49'$.

Câu 48. Tam giác ABC có $\hat{A} = 68^0 12'$, $\hat{B} = 34^0 44'$, $AB = 117$. Tính AC ?

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: Trong tam giác ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow \hat{C} = 180^0 - 68^0 12' - 34^0 44' = 77^0 4'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^0 44'}{\sin 77^0 4'} \approx 68$.

Câu 49. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^0$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49.

B. $\sqrt{97}$

C. 7.

D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 50. Cho tam giác ABC , biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc B ?

A. $59^0 49'$.

B. $53^0 7'$.

C. $59^0 29'$.

D. $62^0 22'$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^0 29'$.

Câu 51: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy.Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^0 24'$. Biết $CA = 250m, CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 266m.

B. 255m.

C. 166m.

D. 298m.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^0 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$.

Câu 52: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60^0 . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

A. 13.

B. $20\sqrt{13}$.C. $10\sqrt{13}$.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Sau 2^h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60 \text{ km}$.Sau 2^h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.Vậy: sau 2^h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.**Câu 53:** Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?A. 71 m .B. 91 m .C. 79 m .D. 40 m .

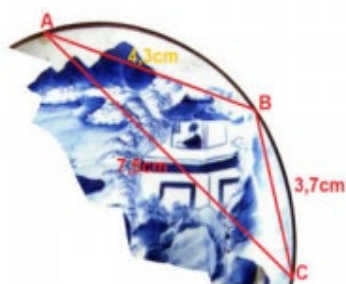
Lời giải

Chọn B

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.**Câu 54:** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy.Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$.Biết $CA = 200 \text{ m}$, $CB = 180 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?A. 180 m .B. 224 m .C. 112 m .D. 168 m .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^\circ 16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.**Câu 55:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3 \text{ cm}$; $BC = 3,7 \text{ cm}$; $CA = 7,5 \text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.A. $5,73 \text{ cm}$.B. $6,01 \text{ cm}$.C. $5,85 \text{ cm}$.D. $4,57 \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .Nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{2} \text{ cm}$.Diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} \approx 5,2 \text{ cm}^2$.Mà $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73 \text{ cm}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Câu 1. Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 2. Tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 1$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = \sqrt{3}$.

Câu 3. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\hat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}$. B. $BC = 3\sqrt{6} - 3$. C. $BC = 3\sqrt{7}$. D. $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

Câu 4. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}, AC = \sqrt{3}$ và $\hat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{5}$. B. $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. C. $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. D. $BC = \sqrt{6}$.

Câu 5. Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\hat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \sqrt{3}$. B. $AC = \sqrt{2}$. C. $AC = 2\sqrt{3}$. D. $AC = 2$.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

- A. $AM = 4\sqrt{2}$. B. $AM = 3$. C. $AM = 2\sqrt{3}$. D. $AM = 3\sqrt{2}$.

Câu 8. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, BC = \sqrt{3}, CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\hat{A}$. Khi đó góc $\hat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?

- A. 45° . B. 60° . C. 75° . D. 90° .

Câu 9. Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32$ cm. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. 38 cm. B. 40 cm. C. 42 cm. D. 45 cm.

Câu 10. Tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\hat{MPE}, \hat{EPF}, \hat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A. $ME = EF = FQ$. B. $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.
C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. D. $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Câu 11. Cho góc $\hat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 12. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Khi OB có độ dài lớn nhất thì độ dài của đoạn OA bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 13. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

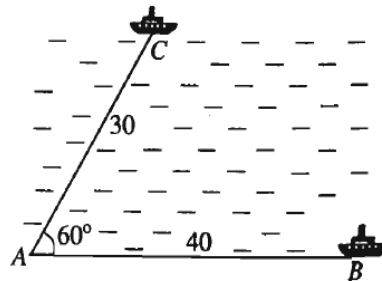
Câu 14. Tam giác ABC vuông tại A , có $AB = c$, $AC = b$. Gọi ℓ_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính ℓ_a theo b và c .

- A. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. B. $\ell_a = \frac{2(b+c)}{bc}$. C. $\ell_a = \frac{2bc}{b+c}$. D. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{bc}$.

Câu 15. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?

Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

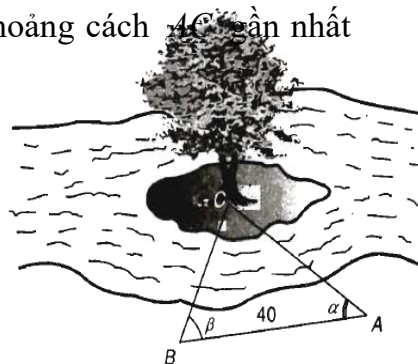
- A. 61 hải lí.
B. 36 hải lí.
C. 21 hải lí.
D. 18 hải lí.



Câu 16. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$.

Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 53 m.
B. 30 m.
C. 41,5 m.
D. 41 m.

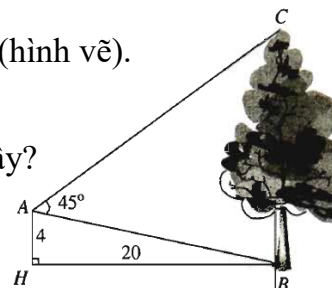


Câu 17. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 17,5m.
B. 17m.
C. 16,5m.
D. 16m.

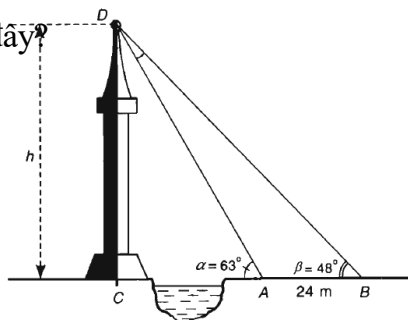


Câu 18. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$,

$$\widehat{CAD} = 63^\circ, \widehat{CBD} = 48^\circ.$$

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

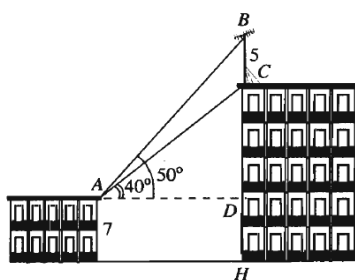
- A. 18m.
- B. 18,5m.
- C. 60m.
- D. 60,5m.



Câu 19. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang.

Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 12m.
- B. 19m.
- C. 24m.
- D. 29m.



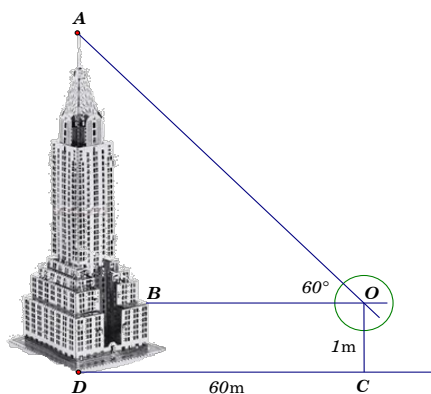
Câu 20. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$.

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy

đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

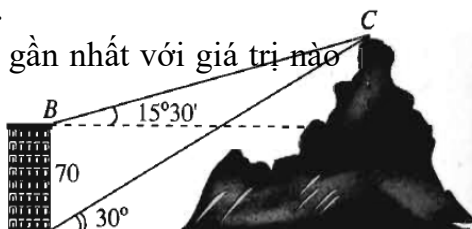
Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

- A. 40m.
- B. 114m.
- C. 105m.
- D. 110m.



Câu 21. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$.

Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 135m. B. 234m.
C. 165m. D. 195m.

Câu 22. Tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

- A. 4cm. B. $\sqrt{3}\text{cm}$. C. 7cm. D. 5cm.

Câu 23. Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

- A. $BM = 1,5a$. B. $BM = a\sqrt{2}$. C. $BM = a\sqrt{3}$. D. $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 24. Tam giác ABC có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ và $BC = 15\text{cm}$. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

- A. $AM = \frac{15}{2}\text{cm}$. B. $AM = 10\text{cm}$. C. $AM = 9\text{cm}$. D. $AM = \frac{13}{2}\text{cm}$.

Câu 25. Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9\text{cm}$ và $AC = \frac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính độ dài cạnh AD .

- A. $AD = 6\text{cm}$. B. $AD = 9\text{cm}$. C. $AD = 12\text{cm}$. D. $AD = 12\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 26. Tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \sqrt{13}$. B. $AC = \sqrt{7}$. C. $AC = 13$. D. $AC = 7$.

Câu 27*. Tam giác .. có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = \sqrt{11}$. B. $AB = \sqrt{13}$. C. $AB = 2\sqrt{11}$. D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Câu 28.** Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là 9; 12; 15. Diện tích của tam giác ABC bằng:

- A. 24. B. $24\sqrt{2}$. C. 72. D. $72\sqrt{2}$.

Câu 29*. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nếu giữa a , b , c có liên hệ $b^2 + c^2 = 2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $3a\sqrt{3}$.

Câu 30*. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

- A. $m^2 + n^2 = 3(a^2 + b^2)$. B. $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.
C. $2(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$. D. $3(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$.

Câu 31.** Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a , b , c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN là góc nào?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 32.** Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a , m_b , m_c thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi

đó tam giác này là tam giác gì?

A. Tam giác cân.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác vuông cân.

Câu 33.** Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi m_a , m_b , m_c là độ dài ba đường trung tuyến, G trọng tâm. Xét các khẳng định sau:

$$(I). m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (II).$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Trong các khẳng định đã cho có

A. (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai cùng sai. D. Cả hai cùng đúng.

Câu 34. Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Câu 35. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 3$. B. $R = 3\sqrt{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 6$.

Câu 36. Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$. B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$. C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$. D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Câu 37. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 38. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}\text{cm}$ và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 2,5\text{cm}$. B. $R = 1,5\text{cm}$. C. $R = 2\text{cm}$. D. $R = 3,5\text{cm}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$ và $CA = 9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

A. $R = \frac{9}{6}$. B. $R = 3$. C. $R = 3\sqrt{3}$. D. $R = \frac{9}{2}$.

Câu 40.** Tam giác nhọn ABC có $AC = b$, $BC = a$, BB' là đường cao kẻ từ B và $\widehat{CBB'} = \alpha$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a , b và α là:

A. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$. B. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.

C. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \cos \alpha}$. D. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2 \cos \alpha}$.

Câu 41. Tam giác $A(1;3)$, $B(5;-1)$ có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$.

B. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Câu 42. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 8$. B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 4$. D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Câu 43. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC} = 16$. B. $S_{\Delta ABC} = 48$. C. $S_{\Delta ABC} = 24$. D. $S_{\Delta ABC} = 84$.

Câu 44. Tam giác $A(1;3)$, $B(5;-1)$ có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a = 3\sqrt{3}$. B. $h_a = \sqrt{3}$. C. $h_a = 3$. D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Câu 45. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h = 2\sqrt{3}$. B. $h = 4\sqrt{3}$. C. $h = 2$. D. $h = 4$.

Câu 46. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

A. $BB' = 8$. B. $BB' = \frac{84}{5}$. C. $BB' = \frac{168}{17}$. D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Câu 47. Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm². Giá trị $\sin A$ bằng:

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin A = \frac{3}{8}$. C. $\sin A = \frac{4}{5}$. D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Câu 48. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. a^2 . D. $a^2\sqrt{3}$.

Câu 49*. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC bằng:

A. 50 cm². B. $50\sqrt{2}$ cm². C. 75 cm². D. $15\sqrt{105}$ cm².

Câu 50*. Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm² B. $13\sqrt{2}$ cm² C. $12\sqrt{3}$ cm² D. 15 cm².

Câu 51*. Tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 2AB$ và độ dài đường cao $AH = 2$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $AB = 2$. B. $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. D. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 52*. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$. B. $3S$. C. $4S$. D. $6S$.

Câu 53*. Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° .

B. 90° .

C. 150° . D. 120° .

Câu 54*. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM , CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$. B. $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 55. Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2\sqrt{3}$.

Câu 56. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$. B. $r = 7$. C. $r = \frac{7}{2}$. D. $r = 8$.

Câu 57. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Câu 58. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm. B. $r = \sqrt{2}$ cm. C. $r = 2$ cm. D. $r = 3$ cm.

Câu 59. Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = \frac{a}{2}$. B. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. D. $r = \frac{a}{3}$.

Câu 60. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1 + \sqrt{2}$. B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 1. Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2.5.8} = \frac{1}{2}$.

Do đó, $\hat{A} = 60^\circ$. **Chọn C.**

Câu 2. Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \hat{A} = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60^\circ = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3}. \text{ **Chọn D.**}$$

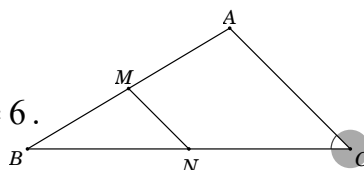
Câu 3.

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , BC .

→ MN là đường trung bình của ΔABC .

→ $MN = \frac{1}{2}AC$. Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos \widehat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 - 2.6.BC.\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{6}$$

Chọn A.

Câu 4. Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos \widehat{C} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + BC^2 - 2.\sqrt{3}.BC.\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 5. Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$

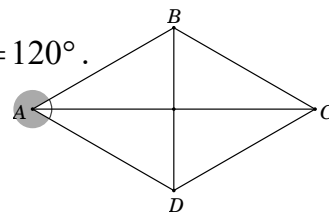
Chọn A.

Câu 6.

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ.$

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos \widehat{ABC} \\ &= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3} \end{aligned}$$



Chọn A.

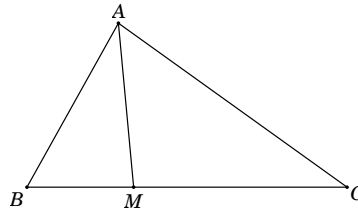
Câu 7.

Theo định lí hàm cosin, ta có : $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2.4.6} = \frac{1}{2}.$

Do $MC = 2MB \longrightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2.$

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2.AB.BM.\cos \widehat{B} \\ &= 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{1}{2} = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



Chọn C.

Câu 8.

Theo định lí hàm cosin, ta có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

Trong $\triangle ABD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ.$

Chọn C.

Câu 9. Do tam giác ABC vuông tại A , có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là $3:4$ nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB$.

Trong $\triangle ABC$ có AH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}AB^2\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{32^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB = 40. \text{ Chọn B.}$$

Câu 10.

Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

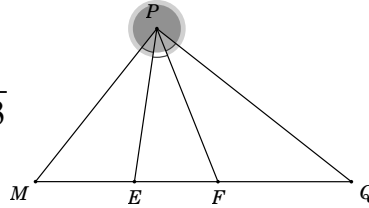
$$ME^2 = AM^2 + AE^2 - 2 \cdot AM \cdot AE \cdot \cos \widehat{MAE}$$

$$= q^2 + x^2 - 2qx \cdot \cos 30^\circ = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3}$$

$$MF^2 = AM^2 + AF^2 - 2 \cdot AM \cdot AF \cdot \cos \widehat{MAF}$$

$$= q^2 + y^2 - 2qy \cdot \cos 60^\circ = q^2 + y^2 - qy$$

$$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2. \text{ Chọn C.}$$



Câu 11. Theo định lí hàm sin, ta có:

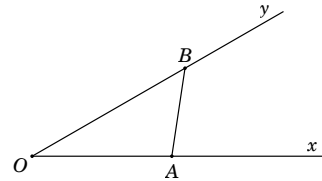
$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ.$$

Khi đó $OB = 2$.

Chọn D.



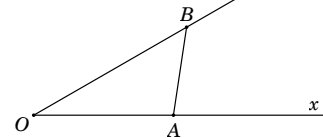
Câu 12. Theo định lí hàm sin, ta có

$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ.$$

Khi đó $OB = 2$.



Tam giác OAB vuông tại $A \Rightarrow OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Chọn B

Câu 13. Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$.

$$\text{Mà } b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 \Leftrightarrow -a^2(b+c) + (b^3 + c^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2 - a^2 - bc) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 - bc = 0 \text{ (do } b > 0, c > 0)$$

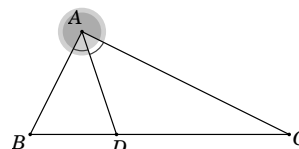
$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

$$\text{Khi đó, } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ. \text{ Chọn C.}$$

Câu 14.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$



$$\Rightarrow BD = \frac{AB}{AC} \cdot DC = \frac{c}{b} \cdot DC = \frac{c}{b+c} \cdot BC = \frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}.$$

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{ABD} \Leftrightarrow \frac{c^2(b^2+c^2)}{(b+c)^2} = c^2 + AD^2 - 2c \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \left(c^2 - \frac{c^2(b^2+c^2)}{(b+c)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \frac{2bc^3}{(b+c)^2} = 0.$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \text{ hay } \ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 15. Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác ABC, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí. **Chọn B.**

Câu 16. Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m. Chọn C.}$$

Câu 17. Trong tam giác AHB, ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'.$

$$\text{Suy ra } \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17 \text{ m. Chọn B.}$$

Câu 18. Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD, ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}.$

$$\text{Ta có } \alpha = \widehat{D} + \beta \text{ nên } \widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ.$$

$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ACD, có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4 \text{ m. Chọn D.}$

Câu 19. Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \rightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9$ m.

Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9$ m. **Chọn B.**

Câu 20. Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3}$ m.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1)$ m. **Chọn C.**

Câu 21. Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

Do đó $AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7$ m.

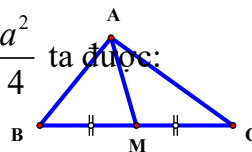
Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m. **Chọn A.**

Câu 22.

Áp dụng công thức đường trung tuyến $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ta được:

$$m_a^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{8^2 + 6^2}{2} - \frac{10^2}{4} = 25$$

$\Rightarrow m_a = 5$. **Chọn D.**

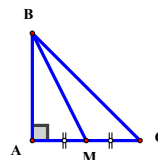


Câu 23.

M là trung điểm của $AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác $\triangle BAM$ vuông tại A

$\Rightarrow BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **Chọn D.**

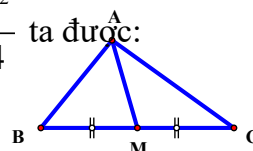


Câu 24.

Áp dụng hệ thức đường trung tuyến $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ta được:

$$m_a^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{12^2 + 9^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4}$$

$\Rightarrow m_a = \frac{15}{2}$. **Chọn A.**



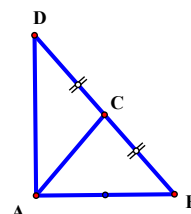
Câu 25.

Ta có: D là điểm đối xứng của B qua $C \Rightarrow C$ là trung điểm của BD .

$\Rightarrow AC$ là trung tuyến của tam giác $\triangle DAB$.

$$BD = 2BC = 2AC = 15.$$

Theo hệ thức trung tuyến ta có:



$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Rightarrow AD^2 = 2AC^2 + \frac{BD^2}{2} - AB^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15^2}{2} - 9^2 = 144 \Rightarrow AD = 12. \text{ Chọn C.}$$

Câu 26.

Ta có: M là trung điểm của $BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 4$.

Trong tam giác ABM ta có: $\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$

$$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{13}.$$

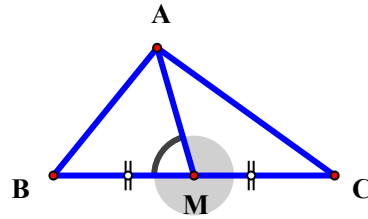
Ta có: $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù.

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

Trong tam giác $\triangle AMC$ ta có:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos \widehat{AMC}$$

$$= 13 + 16 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49 \Rightarrow AC = 7. \text{ Chọn D.}$$



Câu 27*.

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BGN} = 120^\circ$.

G là trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$

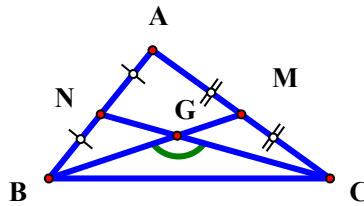
$$\Rightarrow \begin{cases} BG = \frac{2}{3}BM = 4. \\ GN = \frac{1}{3}CN = 3. \end{cases}$$

Trong tam giác $\triangle BGN$ ta có:

$$BN^2 = GN^2 + BG^2 - 2GN \cdot BG \cdot \cos \widehat{BGN}$$

$$\Rightarrow BN^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BN = \sqrt{13}.$$

N là trung điểm của $AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}. \text{ Chọn D.}$



Câu 28.** Ta có:
$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 81 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 144 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 292 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{73} \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{208 + 100 - 292}{2 \cdot 4\sqrt{13} \cdot 10} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{18\sqrt{13}}{65}. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Diện tích tam giác } \Delta ABC : S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{13} \cdot 10 \cdot \frac{18\sqrt{13}}{65} = 72$$

Câu 29*. Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

$$\text{Mà: } b^2 + c^2 = 2a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 30*. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{m}{2}$.

BO là trung tuyến của tam giác ΔABC

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2). \text{ Chọn B.}$$

Câu 31.** Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC .

$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow AG^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}$$

$$BN^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow GN^2 = \frac{1}{9}BN^2 = \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}$$

Trong tam giác ΔAGN ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AGN} &= \frac{AG^2 + GN^2 - AN^2}{2 \cdot AG \cdot GN} = \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} \\ &= \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = \frac{10c^2 - 2(a^2 + b^2)}{36 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{AGN} = 90^\circ. \text{ Chọn D.}$$

Câu 32.** Ta có:
$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{Mà: } 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Rightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow$ tam giác $\triangle ABC$ vuông. **Chọn C.**

Câu 33.** Ta có:
$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. **Chọn D.**

Câu 34. Áp dụng định lý sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{10}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 10$.

Chọn B.

Câu 35. Áp dụng định lý Cosin, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$
 $= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27 \Leftrightarrow BC^2 = 27 \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại B , do đó bán kính $R = \frac{AC}{2} = 3$. **Chọn A.**

Câu 36. Đặt $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 24$. Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} = \sqrt{24 \cdot (24 - 21) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 10)} = 84 \text{ cm}^2$.

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 84} = \frac{85}{8} \text{ cm}$.

Chọn C.

Câu 37. Xét tam giác ABC đều cạnh a , gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $AM \perp BC$ suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 - BM^2} \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vậy bán kính cần tính là $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{a \sqrt{3}}{3}$.

Chọn C.

Câu 38. Tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow AB \cdot AC = AH^2$ (*).

Mặt khác $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4} AC$ thế vào (*), ta được $\frac{3}{4} AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}$.

Suy ra $AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Câu 39. Vì D là trung điểm của $BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$.

Tam giác ABD có $AB = BD = DA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3$. **Chọn B.**

Câu 40.** Xét tam giác $BB'C$ vuông tại B' , có $\sin \widehat{CBB'} = \frac{B'C}{BC} \Rightarrow B'C = a \cdot \sin \alpha$.

Mà $AB' + B'C = AC \Leftrightarrow AB' = b - a \cdot \sin \alpha$ và $BB'^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha$.

Tam giác ABB' vuông tại B' , có $AB = \sqrt{BB'^2 + AB'^2} = \sqrt{(b - a \cdot \sin \alpha)^2 + a^2 \cdot \cos^2 \alpha}$
 $= \sqrt{b^2 - 2ab \cdot \sin \alpha + a^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp cần tính là

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

Câu 41. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 42. Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$. **Chọn C.**

Câu 43. Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$. **Chọn D.**

Câu 44. Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3$. **Chọn C.**

Câu 45. Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A .

Tam giác vuông AHC , có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \longrightarrow AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Chọn A.

Câu 46. Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2} b \cdot BB' \longleftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BB' \longrightarrow BB' = \frac{168}{17}$. **Chọn C.**

Câu 47. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}$. **Chọn D.**

Câu 48. Diện tích tam giác ABD là $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABD} = 2.\frac{a^2}{2} = a^2$. **Chọn C.**

Câu 49*. Vì F là trung điểm của $AC \Rightarrow FC = \frac{1}{2}AC = 15 \text{ cm}$.

Đường thẳng BF cắt CE tại G suy ra G là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó $\frac{d(B; (AC))}{d(G; (AC))} = \frac{BF}{GF} = 3 \Rightarrow d(G; (AC)) = \frac{1}{3}d(B; (AC)) = \frac{AB}{3} = 10 \text{ cm}$.

Vậy diện tích tam giác GFC là:

$$S_{\triangle GFC} = \frac{1}{2}.d(G; (AC)).FC = \frac{1}{2}.10.15 = 75 \text{ cm}^2. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 50*. Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2.4 \Leftrightarrow a = 8.\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.(4\sqrt{3})^2.\sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Chọn C.

Câu 51*. Ta có $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3AB}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{\left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)}.$$

$$\text{Lại có } S = \frac{1}{2}BC.AH = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có } 2\sqrt{3} = \left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)$$

$$\longleftrightarrow 12 = \frac{(9AB^2 - 12)(12 - AB^2)}{16} \longleftrightarrow \begin{cases} AB = 2 \\ AB = \frac{2\sqrt{21}}{3} \end{cases} \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 52*. Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2}.ab.\sin \widehat{ACB}$.

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin \widehat{ACB} = 6.\frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = 6S$. **Chọn D.**

Câu 53*. Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2}.ab.\sin \widehat{ACB}$.

Vì a, b không đổi và $\sin \widehat{ACB} \leq 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\triangle ABC} \leq \frac{ab}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$. **Chọn B.**

Câu 54*. Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \longrightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 55. Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \longrightarrow BC = 7.$$

$$\text{Diện tích } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 56. Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 57. Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Lại có } S = pr \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 58. Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 24. \text{ Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = 2 \text{ cm.}$$

Chọn C.

Câu 59. Từ giả thiết, ta có $AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 60. Giả sử $AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}$. Suy ra $R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$. **Chọn A.**

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 120^\circ$, cạnh $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. $R = 2$ cm. B. $R = 4$ cm. C. $R = 1$ cm. D. $R = 3$ cm.

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.
C. $a \cdot \sin A = b \cdot \sin B = c \cdot \sin C$. D. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = a$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Diện tích của $\triangle ABC$ là

- A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin C$. B. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin B$.
C. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B$. D. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin C$.

Câu 5: Cho tam giác ABC bất kỳ có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Đẳng thức nào sai?

- A. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
C. $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C$. D. $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.

Câu 6: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$. D. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Câu 7: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$. B. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$. C. $a = 2R \sin A$. D. $b = R \tan B$.

Câu 8: Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 9: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\sin \alpha < \sin \beta$. B. $\cos \alpha < \cos \beta$.
C. $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. D. $\cot \alpha + \tan \beta > 0$.

Câu 10: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cot(90^\circ + \alpha) = \tan \alpha$. B. $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$. D. $\tan(90^\circ + \alpha) = \cot \alpha$.

Câu 11: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. B. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$.

D. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$.

Câu 12: Cho tam giác ABC có $BC = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. 10.

B. $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

C. $10\sqrt{3}$.

D. 5.

Câu 13: Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Đường trung tuyến BM có độ dài là

A. $\frac{3}{2}a$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 14: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 15: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Câu 16: Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

A. $\hat{A}$ là góc tù.

B. $\hat{A}$ là góc vuông.

C. $\hat{A}$ là góc nhọn.

D. $\hat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Câu 17: Trong tam giác ABC có:

A. $a = 2R \cos A$.

B. $a = 2R \sin A$.

C. $a = 2R \tan A$.

D. $a = R \sin A$.

Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$, $\cos(B+C) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Độ dài cạnh BC là

A. 2.

B. 8.

C. 20.

D. 4.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 135^\circ$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ bằng

A. a^2 .

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $2a^2$.

Câu 20: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. a^2 .

Câu 21: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và $BD = a\sqrt{3}$. Tính AC .

A. $AC = 2a$.

B. $AC = a\sqrt{3}$.

C. $AC = a$.

D. $AC = a\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 23: Cho tam giác ABC có $b=7$, $c=5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là

A. 8.

B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

C. $80\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Câu 24: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

A. $\frac{65}{4}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. 65,8.

Câu 25: Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào sai?

A. $\sin(A+B-2C) = \sin 3C$.

B. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

C. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

D. $\sin(A+B) = \sin C$.

Câu 26: Từ hai điểm A và B trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh C và chân D của tháp CD dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Biết tháp CD cao 80 m. Khoảng cách AB gần đúng bằng

A. 91 m.

B. 71 m.

C. 79 m.

D. 40 m.

Câu 27: Tam giác ABC có $a=8$, $c=3$, $\hat{B}=60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49.

B. $\sqrt{97}$.

C. 7.

D. $\sqrt{61}$.

Câu 28: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA=200(\text{m})$, $CB=180(\text{m})$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 228(m).

B. $20\sqrt{91}(\text{m})$.

C. 112(m).

D. 168(m).

Câu 29: Cho tam giác ABC có $a=2$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}+1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $R=\sqrt{2}$.

D. $R=\sqrt{3}$.

Câu 30: Tam giác ABC có các cạnh a , b , c thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. Tính số đo của góc C .

A. 45° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 30° .

Câu 31: Biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị $\tan \alpha$ là bao nhiêu?

A. 2.

B. -2.

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32: Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

A. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$.

B. $B = \frac{3\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}+3}$.

C. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{8\sqrt{2}+1}$.

D. $B = \frac{3\sqrt{2}+1}{8\sqrt{2}-1}$.

Câu 33: Cho $\triangle ABC$ có $a=4$, $c=5$, $\hat{B}=150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S=10$.

B. $S=10\sqrt{3}$.

C. $S=5$.

D. $S=5\sqrt{3}$.

Câu 34: Biết $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị của $\cot \alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{\sqrt{15}}{15}$.

B. $-\sqrt{15}$.

C. $\sqrt{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 35: Cho $\cot \alpha = -\sqrt{2}$, ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}, \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 36: Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $P = |\sin x - \cos x|$.

A. $P = \frac{3}{4}$.

B. $P = \frac{4}{5}$.

C. $P = \frac{5}{6}$.

D. $P = \frac{7}{5}$.

Câu 37: Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$.

B. $P = 0$.

C. $P = \sqrt{3}$.

D. $P = -\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. Tính góc ABC (chọn kết quả gần đúng nhất).

A. 60° .

B. $104^\circ 29'$.

C. $75^\circ 31'$.

D. 120° .

Câu 39: Cho một hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Công thức nào dưới đây là công thức tính diện tích của hình bình hành đó?

A. $a^2 + b^2$.

B. $ab \sin \widehat{ABC}$.

C. ab .

D. $2(a+b)$.

Câu 40: Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r là

A. 1 cm.

B. $\sqrt{2}$ cm.

C. 2 cm.

D. 3 cm.

Câu 41: Tam giác ABC có: $a = \sqrt{3}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm, $c = 1$ cm. Đường trung tuyến m_a có độ dài là

A. 1 cm.

B. 1.5 cm.

C. $\frac{5}{2}$ cm.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

Câu 42: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích là

A. $12\sqrt{3}$ cm².

B. $13\sqrt{2}$ cm².

C. 13 cm².

D. 15 cm².

Câu 43: Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Câu 44: Tam giác ABC có ba cạnh thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

A. 120° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Câu 45: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình có diện tích là

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. a^2 .

D. $a^2\sqrt{3}$.

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 46: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 47: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$; $b = 10$; $c = 20$. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. $50\sqrt{3}$.

B. 50.

C. $50\sqrt{2}$.

D. $50\sqrt{5}$.

Câu 48: Cho tam giác ABC có $a=2$; $b=\sqrt{6}$; $c=1+\sqrt{3}$. Góc $\widehat{A}$ là

A. 30° .

B. 45° .

C. 68° .

D. 75° .

Câu 49: Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức giữa a, b, c

A. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$.

B. $3a = 2b + c$.

C. $3a = 2b - c$.

D. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Câu 50: Cho tam giác ABC , nếu $2h_a = h_b + h_c$ thì

A. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$.

B. $2 \sin A = \sin B + \sin C$.

C. $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$.

D. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$.

Câu 51: Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. Cả I và II.

D. Không có.

Câu 52: Trong tam giác ABC có $AB=2\text{ cm}$, $AC=1\text{ cm}$, $\widehat{A}=60^\circ$. Khi đó độ dài cạnh BC là

A. 1 cm .

B. 2 cm .

C. $\sqrt{3}\text{ cm}$.

D. $\sqrt{5}\text{ cm}$.

Câu 53: Tam giác ABC có: $a=5$; $b=3$; $c=5$. Số đo của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\widehat{A} > 60^\circ$.

B. $\widehat{A} = 30^\circ$.

C. $\widehat{A} = 45^\circ$.

D. $\widehat{A} = 90^\circ$.

Câu 54: Tam giác ABC có $a=8$; $b=7$; $c=5$. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. $5\sqrt{3}$.

B. $8\sqrt{3}$.

C. $10\sqrt{3}$.

D. $12\sqrt{3}$.

Câu 55: Cho tam giác ABC có $a=2$; $b=\sqrt{6}$; $c=1+\sqrt{3}$. Góc $\widehat{B}$ bằng

A. 115° .

B. 75° .

C. 60° .

D. $53^\circ 32'$.

Câu 56: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng

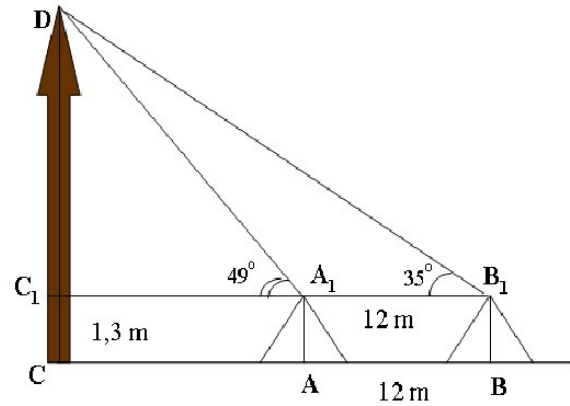
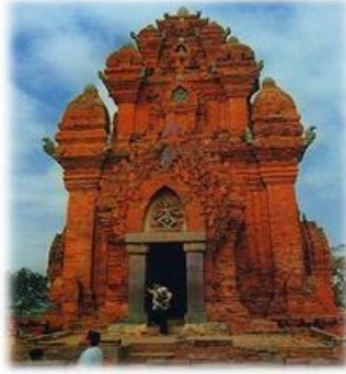
A. $1+\sqrt{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Câu 57: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB=12\text{ m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h=1,3\text{ m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1}=49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1}=35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



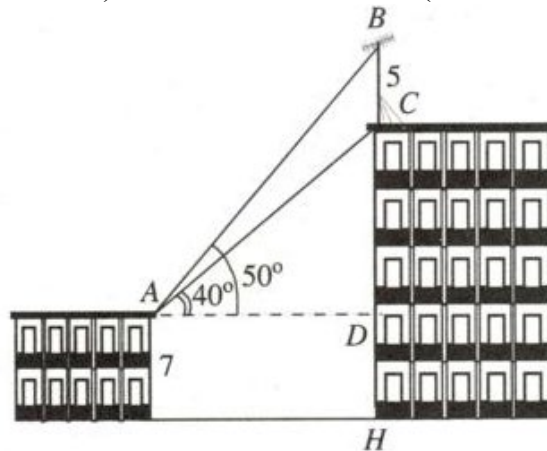
A. 22,77 m.

B. 21,47 m.

C. 20,47 m.

D. 21,77 m.

Câu 58: Trên nóc một tòa nhà có cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên). Chiều cao của tòa nhà (được làm tròn đến hàng phần mười) là



A. 21,2 m.

B. 14,2 m.

C. 11,9 m.

D. 18,9 m.

Câu 59: Cho tam giác ABC có $a = 5$ cm, $c = 9$ cm, $\cos C = -\frac{1}{10}$. Tính độ dài đường cao h_a hạ từ A của tam giác ABC .

A. $h_a = \frac{\sqrt{462}}{40}$ cm.

B. $h_a = \frac{\sqrt{462}}{10}$ cm.

C. $h_a = \frac{21\sqrt{11}}{40}$ cm.

D. $h_a = \frac{21\sqrt{11}}{10}$ cm.

Câu 60: Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M thỏa mãn $MO = 3R$. Một đường kính AB thay đổi trên đường tròn. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = MA + MB$.

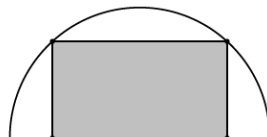
A. $\min S = 6R$.

B. $\min S = 4R$.

C. $\min S = 2R$.

D. $\min S = R$.

Câu 61: Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa đường tròn bán kính 1 m, người ta cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi có thể cắt được miếng tôn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?



A. $1,6 \text{ m}^2$.

B. 2 m^2 .

C. 1 m^2 .

D. $0,8 \text{ m}^2$.

Câu 62: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

A. $M = -\frac{\sqrt{2017}+1}{2018}$. B. $M = \frac{\sqrt{2017}+1}{2018}$. C. $M = -\frac{2018}{\sqrt{2017}+1}$. D. $M = \frac{2018}{\sqrt{2017}+1}$.

Câu 63: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = CD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$.

Tính $\cos \widehat{BAD}$.

A. $\frac{17}{25}$. B. $-\frac{7}{25}$. C. $\frac{5}{25}$. D. $-\frac{17}{25}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 120^\circ$, cạnh $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $R = 2$ cm. B. $R = 4$ cm. C. $R = 1$ cm. D. $R = 3$ cm.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng định lý sin trong tam giác có: $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = 2$ (cm).

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.

C. $a \sin A = b \sin B = c \sin C$.

D. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = a$.

Lời giải

Chọn D.

Theo định lý sin trong tam giác ta có $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Diện tích của $\triangle ABC$ là

A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin C$.

B. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin B$.

C. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$.

D. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$.

Câu 5: Cho tam giác ABC bất kỳ có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Đẳng thức nào sai?

A. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C$.

D. $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.

Lời giải

Chọn C.

Theo định lý hàm số cosin, $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$ nên C sai.

Câu 6: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$.

B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

D. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Câu 7: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$.

B. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

C. $a = 2R \sin A$.

D. $b = R \tan B$.

Lời giải

Chọn D.

Theo định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\Rightarrow a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$, $a = 2R \sin A$, nên các mệnh đề A, B, C đúng.

Vậy mệnh đề D là mệnh đề sai.

Câu 8: Cho $\tan x = -1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x}$.

A. -1 .

B. 1 .

C. 2 .

D. -2 .

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{1 + 2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 2}{1 + 2 \tan x} = \frac{-1 + 2}{1 + 2(-1)} = -1$.

Câu 9: Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C.

α là góc tù suy ra: $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Câu 10: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\sin \alpha < \sin \beta$.

B. $\cos \alpha < \cos \beta$.

C. $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

D. $\cot \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\alpha \text{ và } \beta \text{ là hai góc nhọn} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan x + \cot x > 0.$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

$$\text{Với } \alpha < \beta, \text{ biểu diễn trên nửa đường tròn đơn vị. Suy ra: } \begin{cases} \sin \alpha < \sin \beta \\ \cos \alpha > \cos \beta \end{cases}.$$

Câu 11: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot(90^\circ + \alpha) = \tan \alpha$.

B. $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

C. $\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$.

D. $\tan(90^\circ + \alpha) = \cot \alpha$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

B. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$.

D. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải

Chọn A.

Với hai góc bù nhau ta có $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. 10.

B. $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

C. $10\sqrt{3}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

Trong tam giác ABC ta có: $R = \frac{BC}{2 \sin A} = 10$.

Câu 14: Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Đường trung tuyến BM có độ dài là

A. $\frac{3}{2}a$.

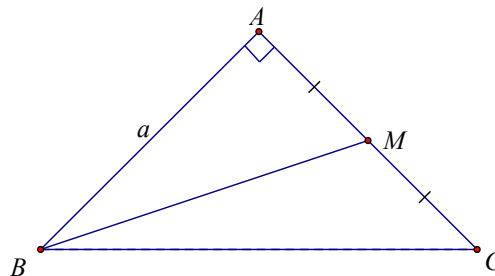
B. $a\sqrt{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.



$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 15: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a : $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn A.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a : $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 17: Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

A. $\widehat{A}$ là góc tù.

B. $\widehat{A}$ là góc vuông.

C. $\widehat{A}$ là góc nhọn.

D. $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ do $a^2 < b^2 + c^2$ nên $\cos A > 0$
 $\Rightarrow \widehat{A}$ là góc nhọn.

Câu 18: Trong tam giác ABC có:

A. $a = 2R \cos A$.

B. $a = 2R \sin A$.

C. $a = 2R \tan A$.

D. $a = R \sin A$.

Lời giải

Chọn B.

Định lý sin trong tam giác.

Câu 19: Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$, $\cos(B + C) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Độ dài cạnh BC là

A. 2.

B. 8.

C. 20.

D. 4.

Lời giải

Chọn A.

Do $\cos(B + C) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos A = -\cos(B + C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \Rightarrow BC = 2.$$

Câu 20: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 135^\circ$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ bằng

A. a^2 .

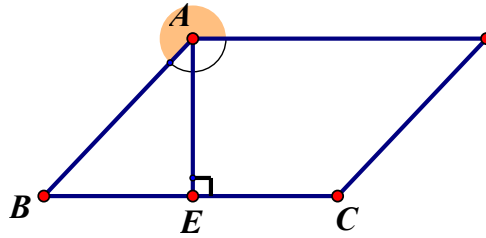
B. $a^2\sqrt{2}$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $2a^2$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

Gọi AE là đường cao của tam giác ABC , khi đó tam giác AEB vuông cân tại E .

$$\text{Suy ra } AE = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình bình hành } ABCD \text{ là } AE \cdot BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2.$$

Câu 21: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } AD = BC = a\sqrt{2} \text{ nên } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a^2.$$

Câu 22: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn lượng giác tâm O . Điểm M trên đường tròn sao cho $sđ(Ox, OM) = \alpha$. Tọa độ của điểm M là

A. $M(\alpha; 0)$.

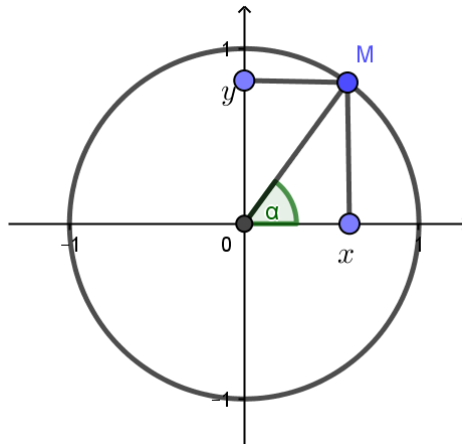
B. $M(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

C. $M(\sin \alpha; \cos \alpha)$.

D. $M(1; 0)$.

Lời giải

Chọn B.



$$\text{Gọi } M(x; y). \text{ Khi đó } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{OM} \\ \sin \alpha = \frac{y}{OM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \text{ (vì } OM = 1 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } M(\cos \alpha; \sin \alpha).$$

Câu 33: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và $BD = a\sqrt{3}$. Tính AC .

A. $AC = 2a$.

B. $AC = a\sqrt{3}$.

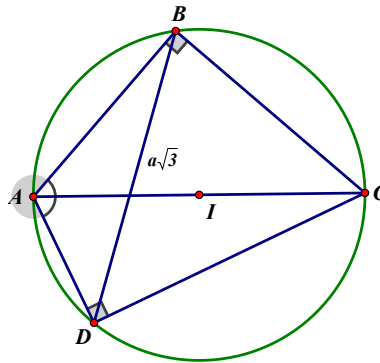
C. $AC = a$.

D. $AC = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

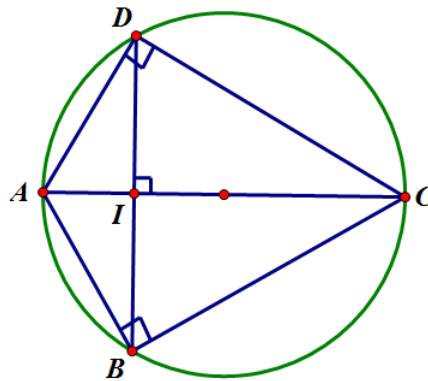
Cách 1:



$\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

Áp dụng định sin trong $\triangle ABD$, ta có $AC = 2R = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2a$.

Cách 2:



Đề không mất tính tổng quát ta có thể chọn $BD \perp AC$ tại I .

Ta có $\widehat{C} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}) = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$.

Do $BD \perp AC \Rightarrow \begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$. Suy ra $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Ta có $CI = \frac{3a}{2}$.

Xét $\triangle AID$ vuông tại I , $ID = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AI = \frac{ID}{\tan \frac{A}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{2}$.

Ta có $AC = AI + CI = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} = 2a$.

Vậy $AC = 2a$.

Câu 34: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

$$\text{Mà } b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Câu 35: Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là

A. 8.

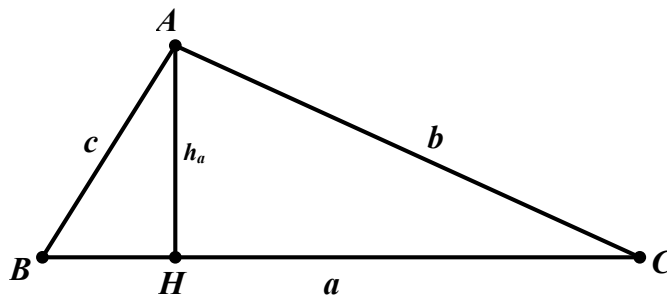
B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

C. $80\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\text{Theo định lí hàm cos ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta lại có: } \cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14.$$

$$\text{Vì } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a \text{ nên } h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 36: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

A. $\frac{65}{4}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. 65,8.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } p = \frac{52 + 56 + 60}{2} = 84.$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Hê – rông ta có: } S = \sqrt{84(84 - 52)(84 - 56)(84 - 60)} = 1344.$$

$$\text{Mặt khác } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52 \cdot 56 \cdot 60}{4 \cdot 1344} = 32,5.$$

Câu 37: Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$.

B. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

C. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}.$

D. $\sin(A+B) = \sin C.$

Lời giải

Chọn C.

Do $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \cos \left(\frac{A+B}{2} + C \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} + C \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \right) = -\sin \frac{C}{2}.$

Câu 38: Từ hai điểm A và B trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh C và chân D của tháp CD dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Biết tháp CD cao 80 m. Khoảng cách AB gần đúng bằng

A. 91 m.

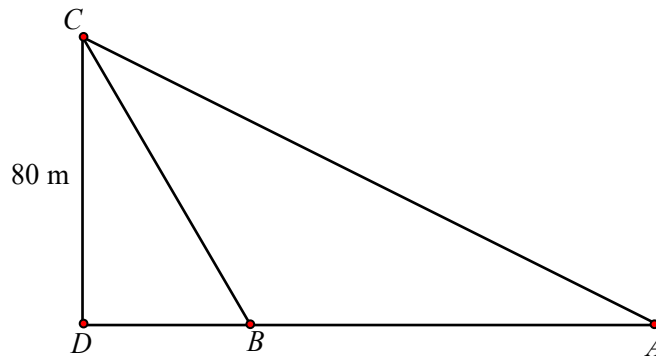
B. 71 m.

C. 79 m.

D. 40 m.

Lời giải

Chọn A.



Ta có: $\widehat{DBC} = 72^\circ 12'$, $\widehat{DAC} = 34^\circ 26'$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{DBC} - \widehat{DAC} = 37^\circ 46'$

$$BC = \frac{CD}{\cos \widehat{DBC}} \approx 84 \text{ m.}$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có $AB = \frac{BC}{\sin \widehat{DAC}} \cdot \sin \widehat{ACB} \approx 91 \text{ m.}$

Câu 39: Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49.

B. $\sqrt{97}$.

C. 7.

D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7.$$

Câu 40: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(\text{m})$, $CB = 180(\text{m})$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 228(m).

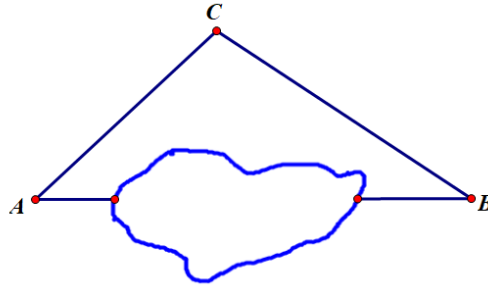
B. $20\sqrt{91}(\text{m})$.

C. 112(m).

D. 168(m).

Lời giải

Chọn B.



$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m}).$$

Câu 41: Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $R = \sqrt{2}$.

D. $R = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin ta có } R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}.$$

Câu 42: Tam giác ABC có các cạnh a , b , c thỏa mãn điều kiện $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$. Tính số đo của góc C .

A. 45° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } (a + b + c)(a + b - c) = 3ab \Leftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

Câu 43: Biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Hỏi giá trị $\tan \alpha$ là bao nhiêu?

A. 2.

B. -2.

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Vì } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 44: Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

A. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$.

B. $B = \frac{3\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}+3}$.

C. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{8\sqrt{2}+1}$.

D. $B = \frac{3\sqrt{2}+1}{8\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

Chọn A.

$$B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}$$
$$= \frac{(1 + \tan^2 \alpha)(\tan \alpha - 1)}{3 \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha + 3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 3}.$$

Câu 45: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 5$, $\hat{B} = 150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S = 10$.

B. $S = 10\sqrt{3}$.

C. $S = 5$.

D. $S = 5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin 150^\circ = 5$.

Câu 46: Biết $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị của $\cot \alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{\sqrt{15}}{15}$.

B. $-\sqrt{15}$.

C. $\sqrt{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - 1 = 15$.

Do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cot \alpha = -\sqrt{15}$.

Câu 47: Cho $\cot \alpha = -\sqrt{2}$, ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta thấy $\cot \alpha = -\sqrt{2} < 0$ nên suy ra $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Và: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ nên $\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mà: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 48 Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $P = |\sin x - \cos x|$.

A. $P = \frac{3}{4}$.

B. $P = \frac{4}{5}$.

C. $P = \frac{5}{6}$.

D. $P = \frac{7}{5}$.

Lời giải**Chọn D.**Ta có: $P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x$.

Theo giả thiết:

$$\frac{1}{5} = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{1}{25} = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Do đó: } P^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Rightarrow P = \frac{7}{5} \text{ (Vì } P \geq 0).$$

Câu 49: Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.**A. $P = 1$.****B. $P = 0$.****C. $P = \sqrt{3}$.****D. $P = -\sqrt{3}$.****Lời giải****Chọn A.**Ta có $P = \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$.**Câu 50:** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. Tính góc ABC (chọn kết quả gần đúng nhất).**A. 60° .****B. $104^\circ 29'$.****C. $75^\circ 31'$.****D. 120° .****Lời giải****Chọn B.**Áp dụng định lý cosin trong tam giác ta có: $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC}$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}.$$

Suy ra góc $\widehat{ABC} = 104^\circ 29'$.**Câu 51:** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2$, $BC = 5$, $CA = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA , với M là trung điểm của BC .**A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$.****B. $\frac{\sqrt{55}}{2}$.****C. $\frac{\sqrt{110}}{2}$.****D. $\sqrt{55}$.****Lời giải****Chọn B.**

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Câu 53: Cho một hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Công thức nào dưới đây là công thức tính diện tích của hình bình hành đó?**A. $a^2 + b^2$.****B. $ab \sin \widehat{ABC}$.****C. ab .****D. $2(a + b)$.****Lời giải****Chọn B.**

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin \widehat{ABC} = ab \sin \widehat{ABC}.$$

Câu 54: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 6$ cm. Đường trung tuyến AM của tam giác đó có độ dài bằng**A. 4 cm.****B. 5 cm.****C. 6 cm.****D. 7 cm.****Lời giải**

Chọn B.

Cách 1: Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{6^2 + 8^2}{2} - \frac{10^2}{4} = 25 \Rightarrow AM = 5 \text{ cm}.$$

Cách 2: Do $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A $AM = \frac{1}{2}BC = 5 \text{ cm}$.

Câu 55: Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r là

A. 1 cm.

B. $\sqrt{2} \text{ cm}$.

C. 2 cm.

D. 3 cm.

Lời giải

Chọn C.

Do tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$ nên

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 24$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2.24}{6 + 8 + 10} = 2$.

Câu 56: Tam giác ABC có: $a = \sqrt{3} \text{ cm}$, $b = \sqrt{2} \text{ cm}$, $c = 1 \text{ cm}$. Đường trung tuyến m_a có độ dài là

A. 1 cm.

B. 1.5 cm.

C. $\frac{5}{2} \text{ cm}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{2}^2 + 1^2}{2} - \frac{\sqrt{3}^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Câu 57: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4 \text{ cm}$ có diện tích là

A. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

C. 13 cm^2 .

D. 15 cm^2 .

Lời giải

Chọn A.

Ta có diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$. Do tam giác ABC đều nên

$$S_{ABC} = \frac{a^3}{4R} = \frac{(2R \sin A)^3}{4R} = 2R^2 \sin^3 A = 2.4^2.(\sin 60^\circ)^3 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Câu 58: Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$ nên $BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{2S_{ABC}}{AB+BC+CA} = \frac{a^2}{a+a+a\sqrt{2}} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Câu 59 Tam giác ABC có ba cạnh thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

A. 120° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $(a+b+c)(a+b-c)=3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Theo hệ quả của định lí hàm cosin: $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$.

Câu 60: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình có diện tích là

A. $2a^2$.

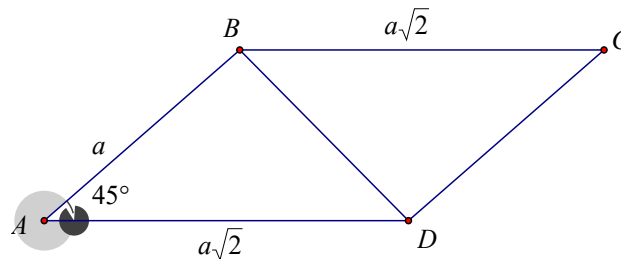
B. $a^2\sqrt{2}$.

C. a^2 .

D. $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ = a^2$.

Câu 61 Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos A = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ = b^2 + c^2 + ab$.

Câu 62: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$; $b = 10$; $c = 20$. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. $50\sqrt{3}$.

B. 50.

C. $50\sqrt{2}$.

D. $50\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = 50\sqrt{3}$.

Câu 63: Cho tam giác ABC có $a = 2$; $b = \sqrt{6}$; $c = 1 + \sqrt{3}$. Góc $\widehat{A}$ là

A. 30° .

B. 45° .

C. 68° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn B.

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ$.

Câu 64: Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức giữa a, b, c

A. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$.

B. $3a = 2b + c$.

C. $3a = 2b - c$.

D. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn D.

$$3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{6S}{a} = \frac{4S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}.$$

Câu 65: Cho tam giác ABC , nếu $2h_a = h_b + h_c$ thì

A. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$.

B. $2\sin A = \sin B + \sin C$.

C. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$.

D. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$.

Lời giải

Chọn A.

$$2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{4S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{4}{2R\sin A} = \frac{2}{2R\sin B} + \frac{2}{2R\sin C} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

Câu 66: Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. Cả I và II.

D. Không có.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức Hê – rông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

Nếu thay $p = \frac{a+b+c}{2}$ vào công thức Hê – rông thì ta có:

$$8S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

Câu 67: Trong tam giác ABC có $AB = 2\text{ cm}$, $AC = 1\text{ cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$. Khi đó độ dài cạnh BC là

A. 1 cm .

B. 2 cm .

C. $\sqrt{3}\text{ cm}$.

D. $\sqrt{5}\text{ cm}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Rightarrow BC^2 = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60^\circ \Rightarrow BC^2 = 3$

Vậy $BC = \sqrt{3}\text{ cm}$.

Câu 68: Tam giác ABC có: $a = 5$; $b = 3$; $c = 5$. Số đo của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\hat{A} > 60^\circ$.

B. $\hat{A} = 30^\circ$.

C. $\hat{A} = 45^\circ$.

D. $\hat{A} = 90^\circ$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos A = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2.3.5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \cos A < \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} > 60^\circ$.

- Câu 69:** Tam giác ABC có $a=8$; $b=7$; $c=5$. Diện tích của tam giác ABC bằng
- A. $5\sqrt{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $10\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 10$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 10\sqrt{3}$.

Cách 2 (Bấm máy)

Gán biến nhớ: (Cài font ES03 để đọc được kí tự phím máy tính)

8qJz

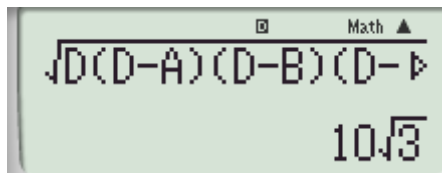
7qJx

5qJc

aJz+Jx+JcR2qJj

Tính diện tích

sJj (JjpJz) (JjpJx) (JjpJc) =



- Câu 70:** Cho tam giác ABC có $a=2$; $b=\sqrt{6}$; $c=1+\sqrt{3}$. Góc $\hat{B}$ bằng
- A. 115° . B. 75° . C. 60° . D. $53^\circ 32'$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$.

Cách 2 (Bấm máy)

Gán biến nhớ:

2qJz

s6qJx

1+s3qJc

Tính góc

aJzd+JcdpJxdR2JzJc=qkM=



- Câu 71:** Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng

A. $1+\sqrt{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Lời giải

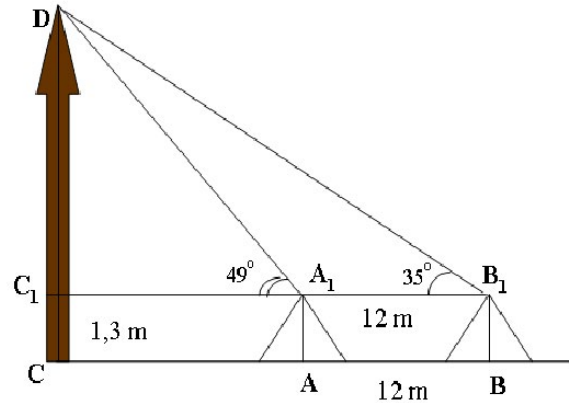
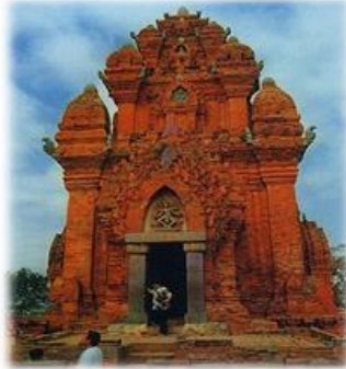
Chọn A.

Ta có $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{P}$

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $b = c$ và $a = \sqrt{b^2 + c^2} = b\sqrt{2}$

$$\text{Xét tỉ số } \frac{R}{r} = \frac{abc.p}{4S^2} = \frac{abc \cdot \frac{a+b+c}{2}}{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (b.c)^2} = \frac{a(a+2b)}{2b^2} = \frac{2b^2(1+\sqrt{2})}{2b^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Câu 72: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



A. 22,77 m.

B. 21,47 m.

C. 20,47 m.

D. 21,77 m.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$; $\widehat{C_1DB_1} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $\widehat{A_1DB_1} = 14^\circ$.

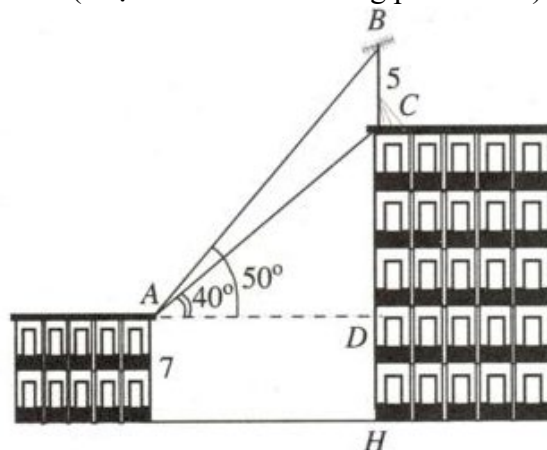
Xét tam giác A_1DB_1 , có $\frac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1DB_1}} = \frac{A_1D}{\sin \widehat{A_1B_1D}} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45$ m.

Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 , có

$$\sin \widehat{C_1A_1D} = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin \widehat{C_1A_1D} = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77 \text{ m}.$$

Câu 73: Trên nóc một tòa nhà có cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên). Chiều cao của tòa nhà (được làm tròn đến hàng phần mười) là



A. 21,2 m.

B. 14,2 m.

C. 11,9 m.

D. 18,9 m.

Lời giải

Chọn D.

Ta có chiều cao của tòa nhà chính là đoạn BH .

Mà $BH = CD + DH = CD + 7$.

Xét tam giác ACD vuông tại D có $AC = \frac{CD}{\sin 40^\circ}$

Xét tam giác ABD vuông tại D có $AB = \frac{5 + CD}{\sin 50^\circ}$

Xét tam giác ABC có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin^2 50^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD^2 + \left(\frac{10}{\sin^2 50^\circ} - \frac{10 \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD + \frac{25}{\sin^2 50^\circ} - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow CD \approx 11,9$$

$$\Rightarrow BH \approx 7 + 11,9 \approx 18,9 \text{ (m)}.$$

Vậy tòa nhà cao 18,9 m.

Câu 74 Cho tam giác ABC có $a = 5 \text{ cm}$, $c = 9 \text{ cm}$, $\cos C = -\frac{1}{10}$. Tính độ dài đường cao h_a hạ từ A của tam giác ABC .

A. $h_a = \frac{\sqrt{462}}{40} \text{ cm}$.

B. $h_a = \frac{\sqrt{462}}{10} \text{ cm}$.

C. $h_a = \frac{21\sqrt{11}}{40} \text{ cm}$.

D. $h_a = \frac{21\sqrt{11}}{10} \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow 81 = 25 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{10} \right) \Leftrightarrow b^2 - b - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ b = -8 \end{cases}$$

Ta nhận được $b = 7 \text{ (cm)}$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2} \left(\frac{21}{2} - 5 \right) \left(\frac{21}{2} - 7 \right) \left(\frac{21}{2} - 9 \right)} \\ &= \frac{21\sqrt{11}}{4} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\text{Độ dài đường cao } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{\frac{21\sqrt{11}}{4}}{5} = \frac{21\sqrt{11}}{10} (\text{cm})$$

Câu 75: Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M thỏa mãn $MO = 3R$. Một đường kính AB thay đổi trên đường tròn. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = MA + MB$.

A. $\min S = 6R$.

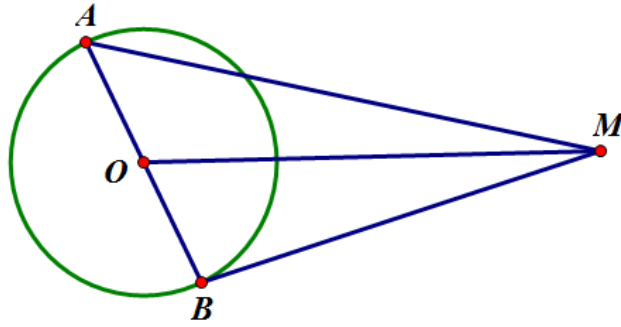
B. $\min S = 4R$.

C. $\min S = 2R$.

D. $\min S = R$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi $\widehat{MOA} = \alpha \Rightarrow \widehat{MOB} = 180^\circ - \alpha$.

Ta có $MA = \sqrt{MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cdot \cos \alpha} = \sqrt{9R^2 + R^2 - 6R^2 \cos \alpha} = R\sqrt{10 - 6\cos \alpha}$.

$MB = \sqrt{MO^2 + BO^2 - 2MO \cdot BO \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{9R^2 + R^2 + 6R^2 \cos \alpha} = R\sqrt{10 + 6\cos \alpha}$.

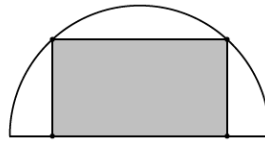
Xét $C = \sqrt{10 - 6\cos \alpha} + \sqrt{10 + 6\cos \alpha} \Rightarrow C^2 = 20 + 2\sqrt{100 - 36\cos^2 \alpha} \geq 20 + 2\sqrt{100 - 36} = 36$.

Suy ra $C \geq 6$. Dấu "=" xảy ra khi $\cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}$.

Ta có $S = MA + MB = R(\sqrt{10 - 6\cos \alpha} + \sqrt{10 + 6\cos \alpha}) \geq 6R$.

Suy ra $\min S = 6R$ khi và chỉ khi A, O, B, M thẳng hàng.

Câu 76: Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa đường tròn bán kính 1 m, người ta cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi có thể cắt được miếng tôn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?



A. $1,6 \text{ m}^2$.

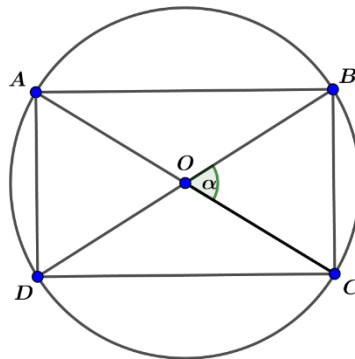
B. 2 m^2 .

C. 1 m^2 .

D. $0,8 \text{ m}^2$.

Lời giải

Chọn C.



Xét đường tròn bán kính 1, ta cắt trên đó một hình chữ nhật $ABCD$.

Khi đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = 90^\circ$.

Vậy diện tích lớn nhất của miếng tôn cắt trên nửa đường tròn bằng 1.

Câu 77: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

A. $M = -\frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$.

B. $M = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$.

C. $M = -\frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

D. $M = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

Lời giải**Chọn D.**

$$M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2018}{\sqrt{2017 + 1}}.$$

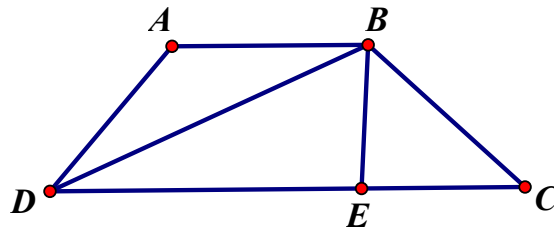
Câu 78: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = CD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$. Tính $\cos \widehat{BAD}$.

A. $\frac{17}{25}$.

B. $-\frac{7}{25}$.

C. $\frac{5}{25}$.

D. $-\frac{17}{25}$.

Lời giải**Chọn B.**

Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên DC . Đặt $AB = AD = BC = x$.

Ta có $EC = \frac{DC - x}{2}$ (1).

Trong tam giác vuông BDE ta có: $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{3}{4}ED$

$$\Leftrightarrow BE = \frac{3}{4} \left(DC - \frac{DC - x}{2} \right) = \frac{3}{8}(DC + x) \quad (2).$$

Trong tam giác vuông BEC ta có $BC^2 = EC^2 + BE^2$ (3).

Thay (1), (2) vào (3) biến đổi ta được: $39x^2 + 14DC \cdot x - 25DC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{39}DC$ hay

$DC = \frac{39}{25}x$. Khi đó $EC = \frac{7}{25}x$.

Mặt khác: $\cos \widehat{BAD} = -\cos \widehat{BCE} = -\frac{EC}{BC} = -\frac{7}{25}$.