

MỤC LỤC

CHƯƠNG IV. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1

1. ĐỊNH NGHĨA VECTƠ

- A. Lý thuyết.....1
- B. Phân dạng, bài tập minh họa và câu hỏi trắc nghiệm..... 2
 - Dạng 1. Xác định một vectơ, phương, hướng, độ dài..... 3
 - Dạng 2. Chứng minh hai vectơ bằng nhau.....8

2. TỔNG, HIỆU CỦA HAI VECTƠ

- A. Lý thuyết.....18
- B. Phân dạng, bài tập minh họa và câu hỏi trắc nghiệm.....19
 - Dạng 1. Xác định độ dài tổng, hiệu của hai vectơ.....19
 - Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ.....28
 - Dạng 3. Bài toán thực tế-Ứng dụng Vật Lý.....45

3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

- A. Lý thuyết.....48
- B. Phân dạng, bài tập minh họa và câu hỏi trắc nghiệm.....50
 - Dạng 1. Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ.....50
 - Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ.....57
 - Dạng 3. Xác định vị trí điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ.....70
 - Dạng 4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.....79
 - Dạng 5. Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác có cùng trọng tâm.....90
 - Dạng 6. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.....96
 - Dạng 7. Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ.....101
 - Dạng 8. Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vectơ.....105

4. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

- A. Lý thuyết.....108
- B. Phân dạng, bài tập minh họa và câu hỏi trắc nghiệm.....112
 - Dạng 1. Tìm tọa độ một điểm, vectơ và độ dài đại số của một vectơ trên (O, i) 112
 - Dạng 2. Tìm tọa độ một điểm, vectơ trên (Oxy) 115
 - Dạng 3. Tính tọa độ của một tổng, hiệu và tích của điểm của vectơ trên (Oxy) 120

Dạng 4. Tính tọa độ các điểm của một hình trên (Oxy)	127
Dạng 5. Sự cùng phương của hai vector trên (Oxy)	137
5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ	146
A. Lý thuyết.....	146
B. Phân dạng, bài tập minh họa và câu hỏi trắc nghiệm.....	148
Dạng 1. Xác định góc của hai vector	148
Dạng 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng	153
Dạng 3. Xác định biểu thức của tích vô hướng, góc của hai véctơ.....	171
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức của tích vô hướng, tính độ dài.....	183
Dạng 5. Chứng minh các đẳng thức của tích vô hướng.....	193
Dạng 6. Điều kiện để hai véctơ vuông góc	201
Dạng 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.....	204

Chương

4

VÉC TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

SBÀI 1.

ĐỊNH NGHĨA VÉC TƠ VÀ TỔNG HIỆU HAI VÉC TƠ

A. LÝ THUYẾT

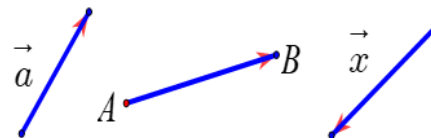
I. Định nghĩa:

1. Vector là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

➤ Vector có điểm đầu (gốc) là A , điểm cuối (ngọn) là B ta kí hiệu: $\overrightarrow{AB}$

➤ Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của véc tơ.

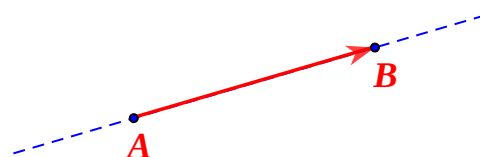
➤ Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài véc tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$. Vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



Hình 1.1

Ví dụ 1. ở hình vẽ bên thì vector $\overrightarrow{AB}$ có

- Điểm gốc là A .
- Điểm ngọn là B .
- Phương (giá) là đường thẳng AB .
- Hướng từ A đến B .
- Độ dài (môđun) là AB .



2. Nhận xét: Vector còn được kí hiệu là: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

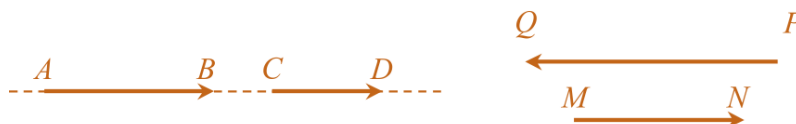
➤ Vector - không, kí hiệu là $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \dots \overrightarrow{FF}$ là vector có :

- ① Điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- ② Độ dài bằng 0.
- ③ Hướng bất kỳ

II. Hai vector cùng phương, cùng hướng.

1. Giá của véc tơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vector.

2. Hai vector cùng phương là hai vector có giá song song hoặc trùng nhau (chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song).



Ví dụ 2.

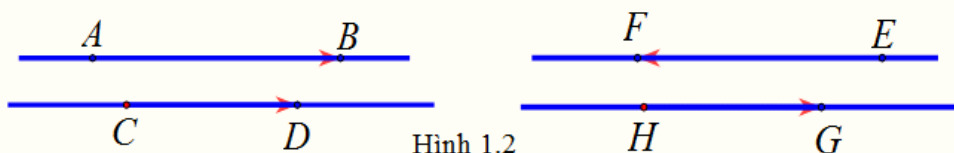
- ★ Từ hình vẽ trên ta thấy hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có giá nằm trên một đường thẳng(trùng) nên chúng cùng phương.
- ★ Từ hình vẽ trên ta thấy hai véc tơ $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{MN}$ có giá song song nên chúng cùng phương.

|| Nhận xét:

➤ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi $AB \parallel CD$ hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

3. Hướng của hai véc tơ : Hai vector cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 3: Ở hình vẽ dưới thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng còn $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HG}$ ngược hướng.



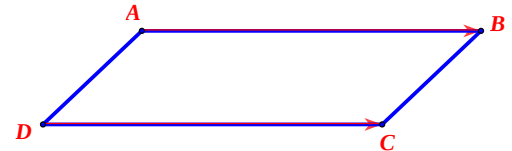
Hình 1.2

|| Đặc biệt: vector - không cùng hướng với mọi véc tơ.

3. Hai vector bằng nhau

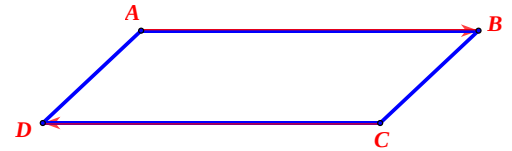
- Hai vector được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \text{ cùng hướng} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| \end{cases}$



- Véc tơ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc tơ và có độ lớn bằng 0.
- Hai vector được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ngược hướng} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$



B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. XÁC ĐỊNH MỘT VEC TƠ, PHƯƠNG, HƯỚNG, ĐỘ DÀI

1. Phương pháp.

- Để xác định một vector ta cần 2 điểm A và B .
- Cứ hai điểm A và B ta xác định được hai véc tơ đối nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
- Nhận xét:** cứ n điểm phân biệt có $n(n-1)$ véc tơ khác véc tơ-không được tạo thành từ các điểm đó.
- Sự cùng phương, cùng hướng của hai vector ta áp dụng theo định nghĩa.
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vector.
 - Tính chất hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình thang, hình tam giác...
 - Áp dụng định lý Pytago, hệ thức lượng...

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Bài tập 2. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

- Xác định các vector khác vector - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.
- Xác định các vector khác vector - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.
- Vẽ các vector bằng vector $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B .

Lời giải (Hình 1.4)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 3. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của vector sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 4. Chứng minh ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Tìm các vector từ 5 điểm A, B, C, D, O .

a). Bằng vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$.

b). Có độ dài bằng $|\overrightarrow{OB}|$.

Lời giải

Bài 3. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a). Khi nào thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ?

b). Khi nào thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ?

Lời giải

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a). Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì có nhận xét gì về ba điểm A, B, C .

b). Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì có nhận xét gì về bốn điểm A, B, C, D .

Lời giải

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O . Hãy cho biết khẳng định nào sau đây đúng ?

a). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

b). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

c). $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$

d). $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$

e). $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

f). $2|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho

a). Bằng với $\overrightarrow{AB}$

b). Ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB .
Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9. Cho trước hai điểm A, B phân biệt. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Vector có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là:

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

.....

.....

Câu 2. Cho tam giác ABC , có thể xác định được bao nhiêu vector khác vector không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 9.

Lời giải.

.....

.....

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vector khác vector không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Lời giải.

.....

.....

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.
- B. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.
- C. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.
- D. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.

Lời giải.

Câu 5. Véc tơ có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là

- A. AB .
- B. $|\overrightarrow{AB}|$.
- C. $\overrightarrow{BA}$.
- D. $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Câu 6. Xét các mệnh đề sau

- (I): Véc tơ – không là véc tơ có độ dài bằng 0.
- (II): Véc tơ – không là véc tơ có nhiều phương.

- A. Chỉ (I) đúng.
- B. Chỉ (II) đúng.
- C. (I) và (II) đúng.
- D. (I) và (II) sai.

Lời giải

Câu 7. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Có tất cả bao nhiêu véc tơ khác véc tơ – không có điểm đầu, điểm cuối là hai điểm trong ba điểm A, B, C ?

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.

Lời giải

Câu 8. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

- A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vector.
- B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector.
- C. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải

Câu 9. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó:

- A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
- B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
- C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
- D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$.
- B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$.
- C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$.
- D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vector khác vector không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

- A. 4.
- B. 6.
- C. 7.
- D. 9.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI VÉC TƠ BẰNG NHAU

1. Phương pháp.

Để chứng minh hai vector bằng nhau ta chứng minh

- Chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC .

Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

b). Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC , AB theo thứ tự lấy các điểm M , N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM , DB và Q là giao điểm của CN , DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải (hình 1.8)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. Bài tập vận dụng Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.
--

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

b). $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

[illegible][illegible]

Mức độ 1. Nhân biết

D. Đô dài của $\overrightarrow{ED}$.

.....

.....

.....

D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector.

Câu 14. Hai vector được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
- B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
- C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
- D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải.

Câu 15. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
- B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
- D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Lời giải.

Câu 16. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

- A. $ABCD$ là hình bình hành.
- B. $ABDC$ là hình bình hành.
- C. AD và BC có cùng trung điểm.
- D. $AB = CD$.

Lời giải.

Câu 17. Từ mệnh đề $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ta suy ra

- A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$.
- B. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$.
- C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.
- D. $ABCD$ là hình bình hành.

Hỏi khẳng định nào là sai?

Lời giải.

Câu 18. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- B. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.
- C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.
- D. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Câu 19. Cho 4 điểm A, B, C, D . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MA}$ là $N \equiv M$.
- B. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.
- C. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ là $A \equiv B$.
- D. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vector đối nhau là $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Lời giải

Câu 20. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
- B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
- C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
- D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Câu 21. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
- B. $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$.
- C. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.
- D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

Câu 22. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.
- D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Câu 23. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.
- B. $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.
- C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng.
- D. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải.

Câu 24. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. D. $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Lời giải.

Câu 25. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = a$. D. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Câu 26. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BAD = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $|\overrightarrow{BD}| = a$. C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Câu 27. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$. C. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải.

Câu 28. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vector bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Câu 29. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải.

Câu 30. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Câu 31. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C , có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Câu 32. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} = a$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Lời giải.

Câu 33. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba vector bằng vector $\overrightarrow{BA}$ là

- A. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$. C. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CO}$. D. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{OC}$

Lời giải

Câu 34. Hai vector có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. Hai vector cùng hướng. B. Hai vector cùng phương.
C. Hai vector đối nhau. D. Hai vector bằng nhau.

Lời giải

Câu 35. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$.

Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai.

- A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. B. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$. C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Lời giải

Câu 37. Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. Vô số.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. Không có điểm nào.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 38. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

B. $ABCD$ là hình thoi.

C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải

.....

.....

.....

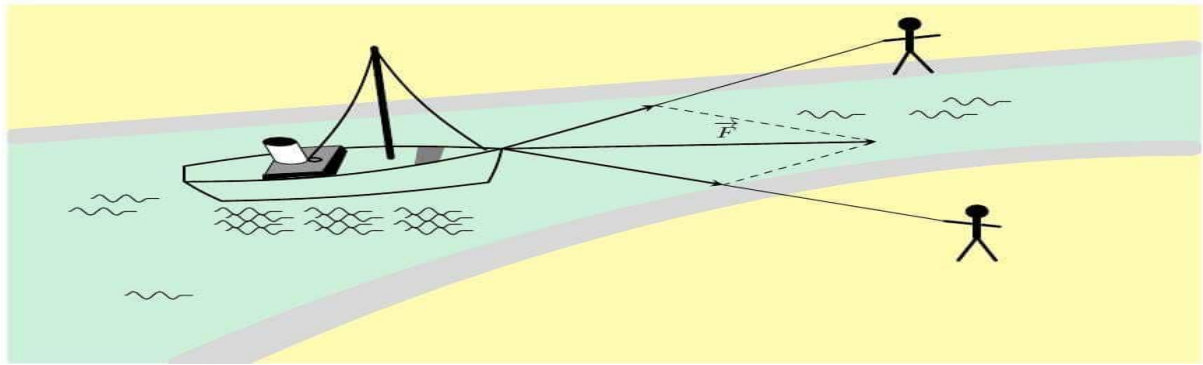
.....

.....

.....

SBAI 2.

TỔNG-HIỆU HAI VÉC TƠ



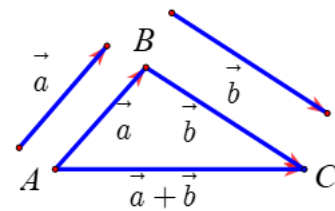
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Tổng hai vector

1) **Định nghĩa.** Cho hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Từ điểm A tùy ý vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ rồi từ B vẽ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ khi đó vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (Hình 1.9)



Hình 1.9

2) **Tính chất :**

- ✦ Giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ✦ Kết hợp : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- ✦ Tính chất vector – không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \forall \vec{a}$.

Ví dụ 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MR}$.

B. $\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{PR}$.

D. $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

II. Hiệu hai vector

1). Vector đối của một vector.

Vector **đối** của vector $\vec{a}$ là vector ngược hướng và cùng độ dài với vector $\vec{a}$.

Kí hiệu $-\vec{a}$

Như vậy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\forall \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

2). Định nghĩa hiệu hai vector:

Hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$.

Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Nhận xét: Cho O, A, B tùy ý ta có : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

Ví dụ 3. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây **sai** ?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

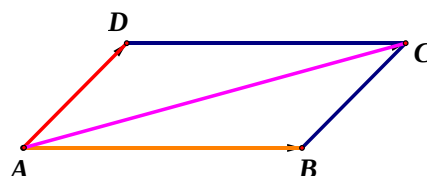
.....

.....

III. Các quy tắc:

1. Quy tắc ba điểm : Cho A, B, C tùy ý, ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2. Quy tắc hình bình hành : Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



3. Quy tắc về hiệu vector : Cho O, A, B tùy ý ta có : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

|| Chú ý: Ta có thể mở rộng quy tắc ba điểm cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thì

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \overrightarrow{A_1 A_n}$$

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI TỔNG VÀ HIỆU HAI VÉC TƠ

👉 **Đặt biệt.** Ta phải chú ý **ĐỈNH CHUNG** (đỉnh đầu $\rightarrow$ Hiệu, đỉnh giữa $\rightarrow$ tổng) để áp dụng.

[illegible][illegible]

[illegible]

3. Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.11)

[illegible]

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.

- a). Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$
- b). Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Lời giải

[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BCD = 60^\circ$. Gọi O là tâm hình thoi.
 Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, O phân biệt có độ dài ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ cùng bằng a và thỏa $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

a). Tính các góc AOB , BOC , COA

b). Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Cho góc Oxy . Trên Ox , Oy lấy hai điểm A, B . Tìm điều kiện của A, B sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nằm trên phân giác của góc Oxy .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{3}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính $|\vec{CA} + \vec{AB}|$.

A. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 2$.

B. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 2\sqrt{13}$.

C. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 5$.

D. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = \sqrt{13}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $BAC = 120^\circ$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$.

B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a$.

C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a}{2}$.

D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

A. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{a}{2}$.

B. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{3a}{2}$.

C. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

D. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của vector $\vec{v} = \vec{GB} + \vec{GC}$.

A. $|\vec{v}| = 2$. B. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$. C. $|\vec{v}| = 8$. D. $|\vec{v}| = 4$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$ và $BD = a$. Tính $|\vec{AC} + \vec{BD}|$.

A. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = 3a$. B. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = a\sqrt{3}$.
 C. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = a\sqrt{5}$. D. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = 5a$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 0$.

B. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a$.

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$.

D. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 2a$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$.

A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$.

B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a\sqrt{2}$.

C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a}{2}$.

D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\vec{OA} - \vec{OB}|$.

A. $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4$.

B. Đáp án khác.

C. $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 12$.

D. $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tổng hai véc tơ $\vec{GB} + \vec{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

A. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

B. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = 5$.

C. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

D. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

[illegible]

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC TƠ

1. Phương pháp.

Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi:

- Biến vế này thành vế kia. (phương pháp chèn điểm)
- Biến đối tương đương. (chuyển về cùng một vế và chứng minh đẳng thức cuối cùng đúng)
- Biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian.

Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vector.

2. Lưu ý:

- ✦ Khi biến đổi cần phải **hướng đích**, chẳng hạn biến đổi về phải, ta cần xem về trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở về trái.
- ✦ Và ta thường biến đổi về phức tạp về về đơn giản hơn.

3. Bài tập minh họa.

Bài tập 3. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

b). $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

[illegible]

Bài tập 4. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

a). $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải (Hình 1.12)

[illegible]

Bài tập 5. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

[illegible]

4. Bài tập vận dụng.

Bài 6. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}.$

b). $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}.$

Lời giải

Bài 7. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

c). $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}$

[illegible]

a). $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
b). $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$

[illegible]

Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$.
 Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 15. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vector khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vector đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

B. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài.

D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải.

.....

.....

.....

Câu 17. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Câu 18. Cho $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

B. $ABCD$ là hình bình hành.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Câu 19. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MR}$.

B. $\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{PR}$.

D. $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Câu 20. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $IA = IB$.

B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

C. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Câu 21. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

A. $IA = IB$.

B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Câu 22. Cho $\triangle ABC$ cân ở A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

D. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.
 D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 B. Ba điểm A, B, C bất kì thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
 C. I là trung điểm AB thì $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ với mọi điểm M .
 D. $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$

Lời giải

Câu 27. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

A. ΔADC

B. $\overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

D. $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Câu 28. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.

D. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Câu 29. Cho ba điểm A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 30. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Câu 31. Cộng các vectơ có cùng độ dài 5 và cùng giá. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Cộng 5 vectơ ta được kết quả là $\vec{0}$.
- B. Cộng 4 vectơ đôi một ngược hướng ta được kết quả là $\vec{0}$.
- C. Cộng 121 vectơ ta được kết quả là $\vec{0}$.
- D. Cộng 25 vectơ ta được vectơ có độ dài là 0.

Lời giải.

Câu 32. Cho tam giác ABC , với M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AM} + \vec{MB} + \vec{BA} = \vec{0}$.
- B. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{AB}$.
- C. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$.
- D. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.

Lời giải.

Câu 33. Cho tam giác ABC , với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} = \vec{0}$.
- B. $\vec{AP} + \vec{BM} + \vec{CN} = \vec{0}$.
- C. $\vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PM} = \vec{0}$.
- D. $\vec{PB} + \vec{MC} = \vec{MP}$.

Lời giải.

Câu 34. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
- B. $\vec{AG} = 2(\vec{AB} + \vec{AC})$.
- C. $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.
- D. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Lời giải

Câu 35. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$.

B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$.

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức véc tơ nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Câu 37. Cho $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ với 4 điểm bất kì A, B, C, D . Chọn khẳng định đúng?

A. $\vec{u} = \vec{0}$.

B. $\vec{u} = 2\overrightarrow{DC}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Câu 38. Tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng

A. $\overrightarrow{MR}$.

B. $\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{MP}$.

D. $\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải

Câu 39. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Khi đó vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$ là vector nào sau đây?

A. $\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AQ}$.

D. $\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 42. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Khi đó:

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.

C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 44. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 45. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$.

B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 46. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|$.

B. $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$.

D. $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}|$.

Lời giải.

Câu 47. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{AP}$.

B. $\overrightarrow{BP}$.

C. $\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NB}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B . Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OB}$. **C.** $OA = -OB$. **D.** $AB = -BA$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến MT, MT' (T và T' là hai tiếp điểm). Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$. **B.** $MT + MT' = TT'$. **C.** $MT = MT'$. **D.** $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 50. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 51. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vector nào trong các vector dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 52. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 53. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào trong các vector sau?

A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 57. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

D. $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 58. Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M .

A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

C. M trùng với C .

D. M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải.

.....

.....

.....

Câu 59. Cho tam giác ABC .

Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$ là

A. đường thẳng AB .

B. trung trực đoạn BC .

C. đường tròn tâm A , bán kính BC .

D. đường thẳng qua A và song song với BC .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 60. Cho hình bình hành $ABCD$.

Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.

B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.

D. một đoạn thẳng.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Câu 61.** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .
- A. M là trung điểm của AC . B. M là trung điểm của AB .
- C. M là trung điểm của BC . D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Câu 62.** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $MABC$ là hình bình hành. B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$. D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Câu 63.** Cho tam giác ABC . Tập hợp những điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = 6|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là
- A. M nằm trên đường tròn tâm I , bán kính $R = 2AB$ với I nằm trên cạnh AB sao cho $IA = 2IB$.
- B. M nằm trên đường trung trực của BC .
- C. M nằm trên đường tròn tâm I , bán kính $R = 2AC$ với I nằm trên cạnh AB sao cho $IA = 2IB$.
- D. M nằm trên đường thẳng qua trung điểm AB và song song với BC .

Lời giải

[illegible]

Dạng 3. BÀI TOÁN THỰC TẾ(VẬT LÝ HỌC).

1. Phương pháp.

Để tính hợp lực của hai hay nhiều véctơ ta áp dụng:

- Quy tắc hình bình hành để tìm véc tơ tổng.
- Sau đó ta áp dụng định lý Py ta go, hệ thức lượng...để tính tổng của hợp lực.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 6. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O và tạo với nhau góc 60° .

Cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là $100N$. Cường độ tổng hợp lực của hai lực đó là

- A. $100N$ B. $100\sqrt{3}N$ C. $50N$ D. $50\sqrt{3}N$.

Lời giải

[illegible]

Bài tập 7. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O vuông góc với nhau. Cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ lần lượt là $80N, 60N$. Cường độ tổng hợp lực của hai lực đó là

- A. $100N$ B. $100\sqrt{3}N$ C. $50N$ D. $50\sqrt{3}N$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Bài tập 8. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O hợp với nhau một góc 120° .

Cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là $50N$. Cường độ tổng hợp lực của hai lực đó là

A. $100N$

B. $100\sqrt{3}N$

C. $50N$

D. $50\sqrt{3}N$.

Lời giải

Bài tập 9. Có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là $50 (N)$ và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

A. $100 (N)$.

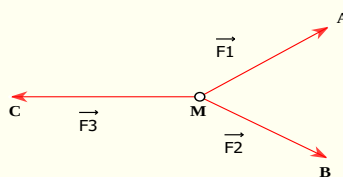
B. $50\sqrt{3} (N)$.

C. $100\sqrt{3} (N)$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Bài tập 10. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $50N$ và góc $AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là:



A. $100\sqrt{3} N$.

B. $25\sqrt{3} N$.

C. $50\sqrt{3} N$.

D. $50\sqrt{2} N$.

Lời giải

.....

.....

.....

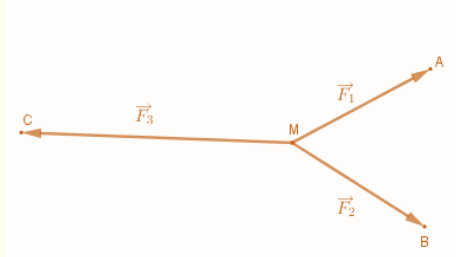
.....

.....

.....

.....

Bài tập 11. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ F_1, F_2 đều bằng $25N$ và góc $AMB = 60^\circ$.



Khi đó cường độ lực $\vec{F}_3$ là:

- A. $25\sqrt{3}N$. B. $50\sqrt{3}N$. C. $50\sqrt{2}N$. D. $100\sqrt{3}N$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SBÀI 3.

TÍCH CỦA MỘT VEC TƠ VỚI MỘT SỐ

A. LÝ THUYẾT

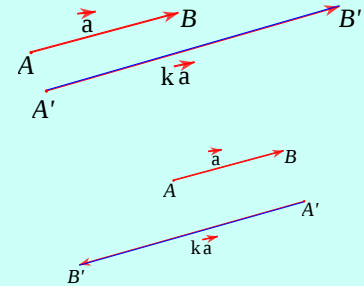
1. Định nghĩa:

Tích của vector $\vec{a}$ với số thực $k \neq 0$ là một vector, **Kí hiệu** là $k\vec{a}$,

➤ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.

➤ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

➤ Và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$



Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

a). Tìm mối quan hệ của hai véc tơ $\vec{MB}, \vec{MC}$.

b). Cho N trên cạnh AC sao cho $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC}$. Xác định điểm N .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Tính chất :

➤ $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$

➤ $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

➤ $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

➤ $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$

➤ $1\vec{a} = \vec{a},$
 $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. Điều kiện để hai vector cùng phương

➤ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$.

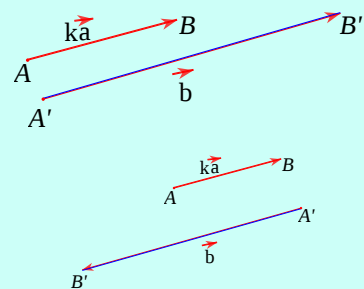
Nhận xét:

➤ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.

➤ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Ứng dụng: chứng minh ba điểm thẳng hàng

➤ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$.



Với $k > 0$ thì $\vec{AB}, \vec{AC}$ cùng hướng.



Ví dụ 2. Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

4. Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương.

Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$.

Với mọi vector $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a). Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

b). Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

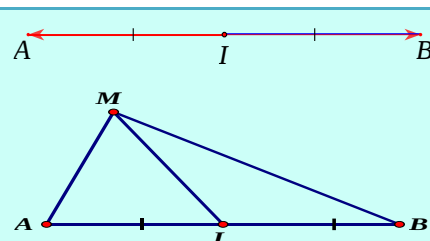
Lời giải

5. Ứng dụng

➤ Tính chất trung điểm:

✧ I là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

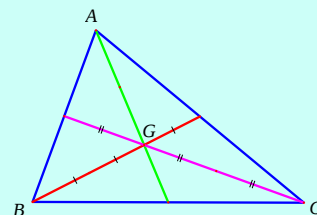
✧ I là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
(M là điểm bất kỳ)



➤ Tính chất trọng tâm:

✧ G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

✧ G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
(M là điểm bất kỳ)



Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a). Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

b). $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm P sao cho $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$.

Lời giải

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VÉC TƠ CHỨA TÍCH MỘT VÉC TƠ

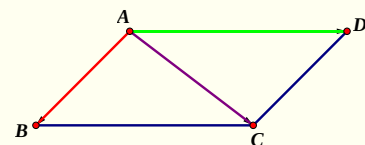
1. Phương pháp.

- Sử dụng định nghĩa tích của một véc tơ với một số và các quy tắc về phép toán véc tơ để dựng véc tơ chứa tích một véc tơ với một số.
- Sử dụng phương pháp **cân bằng hệ số** để đưa về **đỉnh chung**, sau đó sử dụng quy tắc đỉnh đầu (Tổng, hiệu) và đỉnh giữa (Tổng).

Phương pháp cân bằng hệ số bất kỳ: chọn $I \in AB$ sao cho $AI = k \cdot AB$, $k \neq 0$ rồi suy ra véc tơ (nhớ chiều nhé).

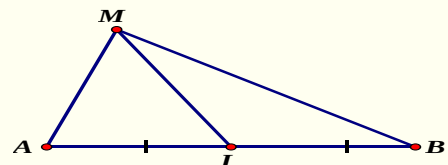
- ✦ **Phương pháp cân bằng hệ số 1:** Dựng hình bình hành $ABCD$. Khi đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



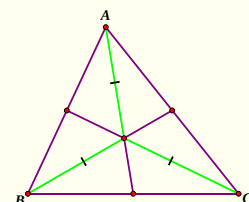
- ✦ **Phương pháp cân bằng hệ số 2:** gọi I là trung điểm AB thì M bất kỳ

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$



- ✦ **Phương pháp cân bằng hệ số 3:** Gọi G là trọng tâm ABC thì M bất kỳ

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$



- Kết hợp với các định lý pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông ... để tính độ dài của chúng.

2. Bài tập minh họa.

a). $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$

b). $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

c). $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

d). $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$

[illegible]

a). Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

b). Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

51 *Lớp Toán Thầy-Diệp Tuấn*

Bài tập 3. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Dựng và tính độ dài các vectơ

a). $3\vec{OA} + 4\vec{OB}$;

b). $\frac{11}{4}\vec{OA} - \frac{3}{7}\vec{OB}$

Lời giải

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm BC, CA . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a). $\vec{AN} + \frac{1}{2}\vec{CB}$

b). $\frac{1}{2}\vec{BC} - 2\vec{MN}$

c). $\vec{AB} + 2\vec{AC}$

d). $0,25\vec{MA} - \frac{3}{2}\vec{MB}$

Lời giải

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .

- a). Chứng minh rằng $\vec{u} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 2\vec{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
- b). Tính độ dài vector $\vec{u}$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

- A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a$.

Lời giải

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

A. $3a$.

B. $(2 + \sqrt{2})a$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$?

A. $4a\sqrt{2}$.

B. $4a$.

C. $2a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

A. $\frac{5a}{2}$.

B. $\frac{7a}{2}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Câu 5. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

A. a .

B. $(1 + \sqrt{2})a$.

C. $a\sqrt{5}$.

D. $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

D. $\left| 11\overrightarrow{OA} \right| - \left| 6\overrightarrow{OB} \right| = 5a.$

D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Câu 8. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $2a$.

C.

$\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\angle AMB = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

A. $0(\text{N})$.

B. $700(\text{N})$.

C. $100(\text{N})$.

D. $500(\text{N})$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

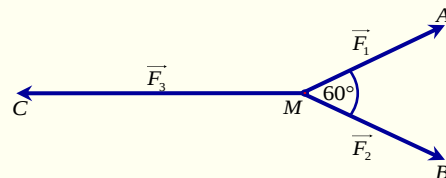
.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 25N và góc $\angle AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là



A. $25\sqrt{3}\text{ N}$.

B. $50\sqrt{3}\text{ N}$.

C. $50\sqrt{2}\text{ N}$.

D. $100\sqrt{3}\text{ N}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC TƠ

1. Phương pháp.

Sử dụng các biện pháp sau:

- Biến đổi vế này thành vế kia.
- Hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba.
- Hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

Các kiến thức

➤ **Các quy tắc:** quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ

➤ **Tính chất trung điểm:**

☞ I là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

☞ I là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ (Với M là điểm tùy ý)

➤ **Tính chất trọng tâm:**

☞ G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

☞ G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG}$ (Với M là điểm tùy ý)

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng:

a). $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$

b). $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

c). $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$ với M là điểm bất kì

Lời giải (Hình 1.16)

Bài tập 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BD . Chứng minh rằng $2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

Lời giải

[illegible]

c). $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$.

[illegible]

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kỳ.

Lời giải

Bài 4. Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} - \frac{5}{6} \overrightarrow{AB}$ với M là trung điểm của BC .

Lời giải

Bài 5. Cho tam giác ABC có điểm M thuộc cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}$

Lời giải

Bài 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A .

Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

Lời giải

Bài 7. Cho tam giác ABC đều tâm O . M là điểm tùy ý trong tam giác.

Hạ MD, ME, MF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB . Chứng minh: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$.

Lời giải

Bài 8. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC . Một đường thẳng Δ là đường thẳng bất kỳ. Gọi G là trọng tâm ΔABC và A', B', C', G' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C, G lên đường thẳng Δ . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Lời giải

Bài 9. Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC, CA, AB .

Chứng minh rằng $a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.18)

Bài 10. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Lời giải

Bài 11. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm và D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

a). $\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \overrightarrow{IA} + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \overrightarrow{IB} + \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

b). $\cot \frac{A}{2} \overrightarrow{IM} + \cot \frac{B}{2} \overrightarrow{IN} + \cot \frac{C}{2} \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

c). $(b + c - a) \overrightarrow{IM} + (a + c - b) \overrightarrow{IN} + (a + b - c) \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

d). $a \overrightarrow{AD} + b \overrightarrow{BE} + c \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Lời giải

Bài 12. Cho tam giác ABC . M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng : $S_{MBC} \overrightarrow{MA} + S_{MCA} \overrightarrow{MB} + S_{MAB} \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A . I là trung điểm của đường cao AH .

Chứng minh rằng : $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 11. Cho các điểm A, B, C, D và số thực k . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB = |k|CD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

B. $AB = kCD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = |k|CD$.

D. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = kCD$.

Lời giải

Câu 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**.

A. $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = IA$.

B. $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$.

C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI$.

D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 3GA$.

Lời giải

Câu 13. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, với mọi điểm M .

B. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$.

D. $3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải

Câu 14. Cho tam giác ABC , trọng tâm G , gọi M là trung điểm BC . Tìm mệnh đề **đúng**?

A. $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.

C. $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{CG}$.

D. $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$.

Lời giải

Câu 15. Cho I là trung điểm của đoạn MN ? Mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. $\vec{IM} + \vec{IN} = \vec{0}$.

B. $\vec{MN} = 2\vec{NI}$.

C. $\vec{MI} + \vec{NI} = \vec{IM} + \vec{IN}$.

D. $\vec{AM} + \vec{AN} = 2\vec{AI}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD ; O là trung điểm của IJ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.

D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho tam giác ABC và I là trung điểm của cạnh BC . Điểm G có tính chất nào sau đây là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC ?

A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

C. $AI = 3GI$.

D. $GA = 2GI$.

Lời giải

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O , gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Tìm mệnh đề sai:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BO}$.

D. $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Câu 20. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G .

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$.

C. $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{MG} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

Lời giải

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Câu 22. Cho tam giác ABC , có AM là trung tuyến; I là trung điểm của AM . Đẳng thức nào đúng

A. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

B. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

C. $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 4\vec{IA}$.

D. $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

Câu 23. Tam giác ABC là tam giác nhọn có AA' là đường cao.

Khi đó véc tơ $\vec{u} = (\tan B)\vec{A'B} + (\tan C)\vec{A'C}$ là

A. $\vec{u} = \vec{BC}$.

B. $\vec{u} = \vec{0}$.

C. $\vec{u} = \vec{AB}$.

D. $\vec{u} = \vec{AC}$.

Lời giải

Câu 24. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\vec{GA} = 2\vec{GI}$.

B. $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$.

C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.

Lời giải

Câu 25. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC .

Khẳng định nào sau đây sai ?

A. $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.

C. $\vec{GA} = \vec{BG} + \vec{CG}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GM}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của BC .

Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. C. $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$. C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\vec{IA} = 2\vec{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} - 2\vec{CB}}{3}$.

B. $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{3}$.

C. $\vec{CI} = -\vec{CA} + 2\vec{CB}$.

D. $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{-3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{AC} + 2\vec{BC}$.

B. $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$.

C. $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{CA} + \vec{CB}$.

D. $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{CB} - \vec{CA}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$.

B. $\vec{AD} + \vec{DO} = -\frac{1}{2}\vec{CA}$.

C. $\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{CB}$.

D. $\vec{AC} + \vec{DB} = 2\vec{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$.

B. $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}$.

C. $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{CD}$.

D. $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{CD}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo.

Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. XÁC ĐỊNH ĐIỂM M THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VEC TƠ

1. Phương pháp.

① **Bước 1.** Ta biến đổi đẳng thức vector về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết.

② **Bước 2.** Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$.

Để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vector bằng vector $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vector này chính là điểm M .

③ **Bước 3.** Ta biến đổi về đẳng thức vector đã biết như *trung điểm đoạn thẳng* và *trọng tâm tam giác* hoặc một đỉnh của hình bình hành, điểm đối xứng ...

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 8. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 9. Cho tam giác ABC

a). Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.

b). Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Bài tập 10. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M, N, P sao cho

a). $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c). $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.22)

Bài tập 11. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh với mọi điểm O thì: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

3. Bài tập luyện tập.

Bài 14. Xác định điểm M biết $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

Bài 15. Xác định các điểm I, J, K, L biết

a). $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

c). $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$

d). $2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Lời giải

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$. Tìm điểm cố định I và hằng số k để hệ thức sau thỏa mãn với mọi M

a). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI}$

b). $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

c). $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

[illegible][illegible][illegible]

Bài 19. Cho tam giác ABC và ba số thức α, β, γ không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a). Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b). Nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$ thì không tồn tại điểm N sao cho $\alpha \overrightarrow{NA} + \beta \overrightarrow{NB} + \gamma \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Lời giải

5. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 34. Cho tam giác ABC , biết $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác ABC vuông tại A .

B. Tam giác ABC vuông tại B .

C. Tam giác ABC vuông tại C .

D. Tam giác ABC cân tại A .

Lời giải

Câu 35. Cho tam giác ABC . Vị trí của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

A. M trùng C .

B. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.

C. M trùng B .

D. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.

Lời giải

Câu 36. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là:

A. Tam giác vuông A .

B. Tam giác vuông C .

C. Tam giác vuông B .

D. Tam giác cân tại C .

Lời giải

Câu 37. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. M trùng A .

B. M trùng B .

C. M trùng C .

D. M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Câu 38. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$.

Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

A. $m = 1, n = 2$.

B. $m = -1, n = -2$.

C. $m = 2, n = 1$.

D. $m = -2, n = -1$.

Lời giải

Câu 39. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ

$\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P = x + y$.

A. $P = 0$.

B. $P = 2$.

C. $P = -2$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Câu 40. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$.

Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k$ là

A. một đoạn thẳng.

B. một đường thẳng.

C. một đường tròn.

D. một điểm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là

A. trung trực của đoạn thẳng AB . **B.** trung trực của đoạn thẳng AD .

C. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AC}{2}$. **D.** đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB + BC}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 42. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

A. đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$.

B. đường tròn đường kính AB .

C. đường trung trực của đoạn thẳng AB .

D. đường trung trực đoạn thẳng IA .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 43. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB .
 B. đường tròn đường kính AB .
 C. đường trung trực đoạn thẳng IA .
 D. đường tròn tâm A , bán kính AB .

Lời giải

Câu 44. Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn BC .
 B. đường tròn đường kính BC .
 C. đường tròn tâm G , bán kính $\frac{a}{3}$.
 D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Lời giải

Câu 45. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

D. $R = \frac{a}{6}$.

[illegible]

D. Vô số.

1. Phương pháp.

- ## 2. Bài tập minh họa.

c). Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$.

Lời giải (hình 1.24)

Lời giải (hình 1.25)

Lời giải (hình 1.24)

Bài 21. Cho tam giác ABC . Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

- a). Tính $\overline{IJ}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$.
 b). Đường thẳng $\overline{IJ}$ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải (hình 1.24)

Bài 22. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

- a). Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b). Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải (hình 1.24)

Bài 23. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Tìm x sao cho

a). $\vec{u} = \vec{a} + (2x - 1)\vec{b}$ và $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương.

b). $\vec{u} = 3\vec{a} + x\vec{b}$ và $\vec{u} = (1 - x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải (hình 1.24)

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 47. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\vec{IB} + 2\vec{IC} + \vec{IA} = \vec{0}$.

B. $\vec{IB} + \vec{IC} + 2\vec{IA} = \vec{0}$.

C. $2\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA} = \vec{0}$.

D. $\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA} = \vec{0}$.

Lời giải

Câu 48. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

B. $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} - \vec{AC})$.

C. $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

D. $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 50. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 51. Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM = AB$ và N là trung điểm của AC . Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 52. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần $BM = MN = NC$.
 Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 53. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 54. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

[illegible]

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$

B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}.$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$

Lời giải

[illegible]

Câu 56. Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$.

B. $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

C. $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}.$

D. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

[illegible]

Câu 57. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Ba điểm C, M, B thẳng hàng.

B. AM là phân giác trong của góc BAC .

C. A, M và trọng tâm tam giác ABC thẳng hàng.

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 58. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$. Biểu diễn $\overrightarrow{IC}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{IC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 59. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Biết $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 1$. B. $a + b = \frac{1}{2}$. C. $a + b = \frac{3}{4}$. D. $a + b = \frac{1}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 60. Cho tam giác ABC . Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}, 3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Hệ thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 61. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 62. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$

A. $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

B. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$.

C. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

D. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 63. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$.

B. $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$.

D. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Câu 64. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm được xác định: $4\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Khi đó vector $\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Câu 65. Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm AB, CI . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Câu 66. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Câu 67. Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây sai ?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Lời giải

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$ trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

[illegible]

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

[illegible]

Tel: 0935.660.880

Bài tập 16. Cho tam giác ABC , trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Bài tập 17. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.26)

Lời giải (hình 1.27)

Lời giải

Bài 26. Cho tam giác ABC có A' là điểm đối xứng của A qua B , B' là điểm đối xứng của B qua C , C' là điểm đối xứng của C qua A .

Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 27. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 28. Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C} + 2012\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{C'A} + 2012\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ cùng trọng tâm

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm G , gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC' . Chứng minh rằng $\triangle G_1G_2G_3$ cũng có trọng tâm G .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 30. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Lời giải

Bài 31. Cho tam giác ABC đều và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng M qua BC, CA, AB . Chứng minh rằng tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Bài 32. Cho các tam giác ABC , điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB . Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia OA_1, OB_1, OC_1 sao cho $OA_2 = a, OB_2 = b, OC_2 = c$. Chứng minh O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 70. Cho ba điểm A, B, C . Tìm khẳng định **sai** khi nêu điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng?

A. $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$.

B. $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{BC}$.

C. $\forall M : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

D. $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BC} = k \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Câu 71. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Câu 72. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N là các điểm thỏa: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP}$. Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = 3$.

C. $k = \frac{2}{3}$.

D. $k = \frac{3}{5}$.

Lời giải

Câu 73. Cho tam giác ABC , M và N là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

- A. 3. B. $-\frac{1}{3}$. C. 2. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Dạng 6. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN VEC TƠ CHO TRƯỚC.

1. Phương pháp.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện vector ta quy về một trong các dạng sau

- ① Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB .
- ② Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k \cdot |\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C , bán kính bằng $k \cdot |\overrightarrow{AB}|$.
- ③ Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
 - M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$.
 - M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.
 - M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$.
- ④ Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC .

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 19. Cho tam giác ABC

- a). Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

Bài tập 20. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a). $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right|$

b). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$ với k là số thực thay đổi.

Lời giải (hình 1.28)

Bài tập 21. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

3. Bài tập luyện tập.

Bài 33. Cho 2 điểm cố định A, B . Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a). $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$.

b). $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$.

Lời giải

Bài 34. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a). $\vec{MA} + k\vec{MB} = k\vec{MC}$ với k là số thực thay đổi

b). $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ cùng phương với véc tơ $\vec{BC}$

c). $|\vec{MA} + \vec{BC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ (HD: dựng hình bình hành $ABCD$)

Lời giải

Bài 35. Cho ΔABC . Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a). $|2\vec{MA} + 3\vec{MB}| = |3\vec{MB} - 2\vec{MC}|$

b). $|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$.

Lời giải

Bài 36. Cho tứ giác $ABCD$.

a). Xác định điểm O sao cho : $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$.

b). Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức $|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

Bài 37. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Bài 38. Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho $OM + ON = a$ với a là số thực cho trước. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN .

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 74. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. M là trọng tâm tam giác. B. M là trung điểm của BC .
C. M trùng với B hoặc C . D. M trùng với A .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 75. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + MD^2 = 9a^2$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó là

- A. $R = 2a$. B. $R = 3a$. C. $R = a$. D. $R = a\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 76. Cho tam giác ABC , trọng tâm G , gọi I là trung điểm BC , M là điểm thỏa mãn:

$$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|. \text{ Khi đó, tập hợp điểm } M \text{ là}$$

- A. Đường trung trực của BC . B. Đường tròn tâm G , bán kính BC .
C. Đường trung trực của IG . D. Đường tròn tâm I , bán kính BC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 77. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

- A. Tập hợp các điểm M là một đường tròn.
B. Tập hợp của các điểm M là một đường thẳng.
C. Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
D. Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 78. Cho tam giác đều ABC cạnh 18 cm .

Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right|$ là

- A. Tập rỗng.
- B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2\text{ cm}$.
- C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3\text{ cm}$.
- D. Một đường thẳng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 7. XÁC ĐỊNH TÍNH CHẤT CỦA HÌNH KHI BIẾT MỘT ĐẲNG THỨC VECTOR.

1. Phương pháp.

- Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vector của giả thiết.
- **Lưu ý** tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả " $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector không cùng phương "

2. Bài tập minh họa

Bài tập 22. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác $ABCD$.

Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P .

Biết $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

.....

.....

Bài tập 23. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn:

$$a^2 \overrightarrow{GA} + b^2 \overrightarrow{GB} + c^2 \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

Bài tập 24. Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC .

Lời giải

Bài 39. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

[illegible][illegible][illegible]

Bài 42. Cho 4 điểm A, B, C, D ; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$. Chứng minh J là trung điểm của CD .

Lời giải

Bài 43. Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tồn tại điểm O sao cho $OA = OB = OC = OD$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải

Bài 44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , gọi G là trọng tâm tam giác ABC . A', B', C' là các điểm thoả mãn: $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

[illegible]

👉 MI đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn (O) .

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 25. Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 26. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = AA' + BB' + CC'$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Bài tập luyện tập.

Bài 47. Cho tam giác ABC , đường thẳng d và ba số α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức $T = |\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 48. Cho tam giác ABC . M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Lời giải.

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 49. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các đỉnh ta có: $MC.AB < MA.BC + MB.AC$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 50. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thuộc đoạn CD . Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là chu vi của các tam giác AMB, ACB, ADB . Chứng minh rằng $p < \max\{p_1; p_2\}$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

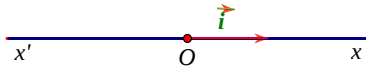
SBÀI 4.

TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. LÝ THUYẾT :

I. TRỤC TỌA ĐỘ:

1. Định nghĩa: Trục tọa độ (Trục, hay trục số) là một đường thẳng trên đó ta đã xác định một điểm O và một vector đơn vị $\vec{i}$ (tức là $|\vec{i}| = 1$)



Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*.

Vec tơ $\vec{i}$ được gọi là *vector đơn vị* của trục tọa độ.

Kí hiệu $(O; \vec{i})$ hay $x'Ox$ hoặc đơn giản là Ox .

2. Tọa độ của vector và của điểm trên trục:

a). Tọa độ của vector:

➤ Cho vec tơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ thì có số thực a sao cho $\vec{u} = a\vec{i}$ với $a \in \mathbb{R}$.

✧ Số a như thế được gọi là tọa độ của vector $\vec{u}$ đối với trục $(O; \vec{i})$.

Ví dụ 1. Tọa độ của véctơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = -2\vec{i}$ là -2 .

b). Tọa độ của điểm:

➤ Cho điểm M nằm trên $(O; \vec{i})$ thì có số m sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$.

✧ Số m như thế được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục $(O; \vec{i})$.

➤ Như vậy tọa độ điểm M là tọa độ vector $\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 2. Tọa độ của của điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$ là 3 .

3. Độ dài đại số của vec tơ trên trục :

Cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)$.

Khi đó độ dài đại số của vector $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox là tọa độ của vector đó kí hiệu là $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Như vậy $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}$

Tính chất :

➤ $\overline{AB} = -\overline{BA}$

➤ $\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

➤ $\forall A; B; C \in (O; \vec{i}) : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Ví dụ 3. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là -2 ; 1 và 4 .

a). Tính tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$

b). Chứng minh B là trung điểm của AC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

Lời giải

.....

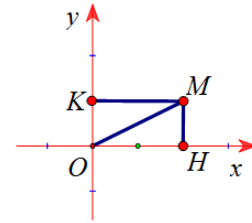
.....

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Định nghĩa. Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$.

Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, Ox gọi là *trục hoành* và Oy gọi là *trục tung*.

Kí hiệu Oxy hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$



2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ.

a). Tọa độ vectơ :

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

✦ x được gọi là hoành độ.

✦ y được gọi là tung độ.

Ví dụ 5. Viết tọa độ các vectơ sau

a). $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

b). $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} + 5\vec{j}$.

c). $\vec{c} = 3\vec{i}$.

d). $\vec{d} = -2\vec{j}$.

Lời giải

Ví dụ 6. Viết vectơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của $\vec{u}$ là: $(2; -3), (-1; 8), (2; 0), (0; -1), (0; 0), (\pi; -\sin 10^\circ)$.

Lời giải

b). Tọa độ điểm:

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ điểm $M(x; y)$ là : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Trong đó:

✦ x được gọi là hoành độ.

✦ y được gọi là tung độ.

Nhận xét:

- ✦ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy thì $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$
 Như vậy $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$ hay $x = \overrightarrow{OH}$, $y = \overrightarrow{OK}$
 ✦ Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khi đó tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Ví dụ 7. Cho ba điểm A, B, C lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{j} + \vec{i}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$.

- a). Xác định tọa độ các điểm A, B, C .
 b). Xác định tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.

- ✦ Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và M là trung điểm AB .

✧ Tọa độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

- ✦ Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

✧ Tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có $A(2; 1), B(-1; -2), C(-3; 2)$.

- a). Tìm tọa độ điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB .
 b). Xác định trọng tâm tam giác ABC .
 c). Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vector.

Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có :

➤ Hai véc tơ bằng nhau: $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

➤ Tổng và hiệu của hai véc tơ : $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$

➤ Tích của một véc tơ với một số: $k \cdot \vec{u} = (kx; ky)$

➤ Điều kiện cùng phương: $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

Nhận xét: sử dụng điều kiện cùng phương để chứng minh song song, trùng nhau hoặc thẳng hàng.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 vectơ: $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (-1; 5)$, $\vec{c} = (-2; -5)$.

Tìm tọa độ của vectơ sau

a). $\vec{u} + 2\vec{v}$ với $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ và $\vec{v} = \pi\vec{i}$.

b). $\vec{k} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{l} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 10. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4)$; $\vec{c} = (-1; 3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ biết

a). $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

b). $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 11. Cho ba điểm $A(-4; 0)$, $B(0; 3)$ và $C(2; 1)$

a). Xác định tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

b). Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = \vec{0}$

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 12. Xét xem các cặp vectơ sau có cùng phương hay không? Trong trường hợp cùng phương thì xét xem cùng hay ngược hướng?

a). $\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (-10; -15)$.

b). $\vec{u} = (0; 5), \vec{v} = (0; 8)$.

c). $\vec{m} = (-2; 1), \vec{n} = (-6; 3)$.

d). $\vec{c} = (3; 4), \vec{d} = (6; 9)$.

Lời giải

Ví dụ 13. Tìm tham số để các cặp vectơ cùng phương:

a). $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

b). $\vec{m} = (x; -3), \vec{n} = (-2; 2x)$.

Lời giải

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP.

Dạng 1. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM, VECTƠ, ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ CỦA VECTƠ TRÊN $(O; \vec{i})$.

1. Phương pháp.

Sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

➤ Trên trục $(O, \vec{i})$ điểm $M(x)$ khi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

➤ Trên trục $(O, \vec{i})$ vectơ $\vec{u}(x)$ khi $\vec{u} = x\vec{i}$.

➤ Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{i}$.

➤ Độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục là tọa độ của vectơ đó $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A$.

Các tính chất

➤ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

➤ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

➤ Hệ thức Sac lơ $\forall A; B; C \in (O; \vec{i}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

➤ Tọa độ trung điểm I của đoạn $AB : x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Trên trục $x'Ox$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là a và b . Tìm tọa độ điểm I biết $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Bài tập 2. Trên trục $x'Ox$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là a và b .

- Tìm tọa độ x của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $k \neq 1$.
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .
- Tìm tọa độ x của điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} = -5\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 3. Cho các điểm A, B, C trên trục $(O, \vec{i})$ có tọa độ lần lượt là $5; -3; -4$. Tính độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 4. Trên trục $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c . Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 5. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $-5; 2; 4$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau

a). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b). $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

Bài tập 6. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $8, -2, 5$

a). Tính tọa độ của điểm C đối xứng với điểm M qua điểm B .

b). Tính tỉ số $\frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}$.

Lời giải

Bài tập 7. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho bốn điểm A, B, C, D . Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AB, CD . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b). $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}$.

c). Hai đoạn IJ và KL có chung trung điểm.

Lời giải

Dạng 2. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTOR Oxy

1. Phương pháp.

- Tọa độ điểm $M = (x; y) : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ suy ra tọa độ : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- Tọa độ trung điểm I của đoạn $AB : x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$
- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
- Cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \ (k \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$.

2. Bài tập minh họa:

Bài tập 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho điểm $M(x; y)$. Tìm tọa độ của các điểm

- a). M_1 đối xứng với M qua trục hoành.
- b). M_2 đối xứng với M qua trục tung.
- c). M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 9. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục $(O; \vec{i})$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.33)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BAD = 60^\circ$. Biết A trùng với gốc tọa độ O , C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$.

Lời giải (hình 1.34)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 11. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8, BD = 6$. Chọn hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$

a). Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.

b). Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm G của tam giác ABC .

c). Tìm tọa độ điểm đối xứng I' của I qua tâm O . Chứng minh A, I', D thẳng hàng.

d). Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 12. Cho lục giác đều $ABCDEF$, chọn hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ trong đó O là tâm của lục giác đều, hai vector $\vec{i}$ và $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{EC}$. Tính tọa độ các đỉnh của lục giác biết độ dài cạnh lục giác bằng 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Cho trục tọa độ $(O, \vec{e})$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $\overline{AB} = \overline{AB}$.
- B. $\overline{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{e}$.
- C. Điểm M có tọa độ là a đối với trục tọa độ $(O, \vec{e})$ thì $|\overline{OM}| = a$.
- D. $|\overline{AB}| = \overline{AB}$.

Lời giải

Câu 2. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tọa độ $\vec{i} + \vec{j}$ là:

- A. $(0; 1)$.
- B. $(1; -1)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(1; 1)$.

Lời giải.

Câu 3. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$, $C \in Ox$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB}$ có tung độ khác 0.
- B. A, B có tung độ khác nhau.
- C. C có hoành độ khác 0.
- D. $x_A + x_C - x_B = 0$.

Lời giải.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; 4)$ và $B(4; -1)$. Khi đó, tọa độ của $\overline{AB}$ là

- A. $\overline{AB} = (-2; 5)$.
- B. $\overline{AB} = (6; 3)$.
- C. $\overline{AB} = (2; 5)$.
- D. $\overline{AB} = (2; -5)$.

Lời giải

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $N(5; -3)$, $P(1; 0)$ và M tùy ý. Khi đó $\overline{MN} - \overline{MP}$ có tọa độ là

- A. $(4; 3)$.
- B. $(-4; 1)$.
- C. $(4; -3)$.
- D. $(-4; 3)$.

Lời giải

Câu 6. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của vector $\overline{AB}$?

- A. $(15; 10)$.
- B. $(2; 4)$.
- C. $(5; 6)$.
- D. $(50; 16)$.

Lời giải.

Câu 7. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$.

Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$?

A. $(-5; -3)$.

B. $(1; 1)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(4; 0)$.

Lời giải.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$.

B. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$.

C. $I\left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$.

D. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 9. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB

A. $(6; 4)$.

B. $(2; 10)$.

C. $(3; 2)$.

D. $(8; -21)$.

Lời giải.

Câu 10. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; 2)$.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

A. $(-3; 4)$.

B. $(4; 0)$.

C. $(\sqrt{2}; 3)$.

D. $(3; 3)$.

Lời giải.

Câu 11. Cho các điểm $A\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(3; -\frac{3}{2}\right)$, $C(9; -6)$. Tọa độ trọng tâm G là

A. $G\left(2; -\frac{11}{3}\right)$.

B. $G\left(-\frac{11}{3}; 2\right)$.

C. $G\left(\frac{11}{3}; -2\right)$.

D. $G\left(-2; \frac{11}{3}\right)$.

Lời giải

Câu 12. Cho tam giác ABC với $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, trọng tâm của tam giác là $G(2; -1)$.

Tọa độ đỉnh C là

A. $(6; -4)$.

B. $(6; -3)$.

C. $(4; -5)$.

D. $(2; 1)$.

Lời giải

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

D. $(1; -1)$.

Lời giải

Câu 14. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(4; 7)$.

Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

A. $I(2; 10)$.

B. $I(6; 4)$.

C. $I(8; -21)$.

D. $I(3; 2)$.

Lời giải

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O , hai đỉnh $A(-2; 2)$ và $B(3; 5)$. Tọa độ đỉnh C là

A. $(-1; -7)$.

B. $(2; -2)$.

C. $(-3; -5)$.

D. $(1; 7)$.

Lời giải

Câu 16. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$, $D(3; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCD .

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Lời giải.

Câu 17. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $M(3; -4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy . Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OM_1} = -3$.

B. $\overrightarrow{OM_2} = 4$.

C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3; -4)$.

D. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3; -4)$.

Lời giải.

Câu 18. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có gốc O làm tâm hình vuông và các cạnh của nó song song với các trục tọa độ. Khẳng định nào đúng?

A. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = AB$.

B. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.

C. $x_A = -x_C, y_A = y_C$.

D. $x_B = -x_C, y_B = -y_C$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Dạng 3. TÍNH TỌA ĐỘ CỦA MỘT TỔNG, HIỆU VÀ TÍCH CỦA ĐIỂM, VECTOR

1. Phương pháp.

- Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.
- Với $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k , khi đó $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$ và $k\vec{u} = (kx; ky)$.

2. Bài tập luyện tập.

Bài tập 13. Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (7; 4)$. Tính tọa độ của $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $8\vec{u}$, $3\vec{u} - 4\vec{v}$, $-(3\vec{u} - 4\vec{v})$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 14. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$

- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
- Tìm các số k, m để $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 15. Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Hãy biểu diễn vectơ $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 16. Cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;-3)$.

a). Tìm tọa độ vector $\vec{u} = \vec{AB} - 2\vec{BC} + 3\vec{CA}$.

b). Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm:

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 19. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tọa độ $\vec{i} + \vec{j}$ là:

A. $(0;1)$.

B. $(1;-1)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(1;1)$.

Lời giải.

Câu 20. Cho $\vec{a} = (3;-4)$, $\vec{b} = (-1;2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$.

A. $(-4;6)$.

B. $(2;-2)$.

C. $(4;-6)$.

D. $(-3;-8)$.

Lời giải.

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2;-4)$, $\vec{b} = (-5;3)$. Véc tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(7;-7)$.

B. $(9;-5)$.

C. $(-1;5)$.

D. $(9;-11)$.

Lời giải

Câu 22. Cho $\vec{a} = (-1;2)$, $\vec{b} = (5;-7)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$.

A. $(6;-9)$.

B. $(4;-5)$.

C. $(-6;9)$.

D. $(-5;-14)$.

Lời giải.

Câu 23. Cho $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (3; 4)$. Vector $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ có tọa độ là

- A. $\vec{m} = (10; 12)$. B. $\vec{m} = (11; 16)$. C. $\vec{m} = (12; 15)$. D. $\vec{m} = (13; 14)$.

Lời giải

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai vector $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Khi đó tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b}$ là

- A. $(2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(1; -5)$. D. $(2; -3)$.

Lời giải

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 25. Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- A. $x = -15$. B. $x = 3$. C. $x = 15$. D. $x = 5$.

Lời giải.

Câu 26. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$ và $C(0; -3)$.

Vector $\vec{AB} + \vec{AC}$ có tọa độ là

- A. $(4; 8)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; -1)$. D. $(-4; -8)$.

Lời giải

Câu 27. Cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Ta có $\vec{AB} = x\vec{AC}$ thì giá trị x là

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Lời giải

Câu 28. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cho hai véc tơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$.

Tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là

A. $\vec{u} = (9; -5)$.

B. $\vec{u} = (-1; 5)$.

C. $\vec{u} = (7; -7)$.

D. $\vec{u} = (9; -11)$.

Lời giải

Câu 29. Cho $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

A. $\vec{u} = (7; -7)$.

B. $\vec{u} = (9; -11)$.

C. $\vec{u} = (9; -5)$.

D. $\vec{u} = (-1; 5)$.

Lời giải.

Câu 30. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ là:

A. $k = 2, 5; h = -1, 3$.

B. $k = 4, 6; h = -5, 1$.

C. $k = 4, 4; h = -0, 6$.

D. $k = 3, 4; h = -0, 2$.

Lời giải.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{u} = (2; -4)$, $\vec{a} = (-1; -2)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Biết $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b}$, tính $m - n$.

A. 5.

B. -2.

C. -5.

D. 2.

Lời giải

Câu 32. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$.

Tính $m^2 + n^2$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Câu 33. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$

- A. $(1;2)$. B. $\left(1; \frac{2}{5}\right)$. C. $\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. D. $(2;-2)$.

Lời giải.

Câu 34. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$.

Tìm tọa độ điểm E sao cho $\vec{AE} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$

- A. $(3;-3)$. B. $(-3;3)$. C. $(-3;-3)$. D. $(-2;-3)$.

Lời giải.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $M(2;-3)$, $N(-1;2)$, $P(3;-2)$.

Gọi Q là điểm thỏa $\vec{QP} + \vec{QN} - 4\vec{MQ} = \vec{0}$. Tìm tọa độ điểm Q .

- A. $Q\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$. B. $Q\left(\frac{5}{3}; -2\right)$. C. $Q\left(\frac{3}{5}; 2\right)$. D. $Q\left(\frac{3}{5}; -2\right)$.

Lời giải

Câu 36. Cho hai điểm $M(8;-1)$ và $N(3;2)$.

Nếu P là điểm đối xứng với điểm M qua điểm N thì P có tọa độ là

- A. $(-2;5)$. B. $(13;-3)$. C. $(11;-1)$. D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(0; 3)$.

Xác định tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{AB}$.

A. $\vec{u} = (-8; -6)$.

B. $\vec{u} = (8; 6)$.

C. $\vec{u} = (-4; -3)$.

D. $\vec{u} = (4; 3)$.

Lời giải

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$.

Tìm tọa độ điểm C để I là trọng tâm tam giác ABC .

A. $C(1; -4)$.

B. $C(1; 0)$.

C. $C(1; 4)$.

D. $C(9; -4)$.

Lời giải

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{BC}$ là

A. $\vec{u} = (2; 2)$.

B. $\vec{u} = (-4; 1)$.

C. $\vec{u} = (1; -4)$.

D. $\vec{u} = (-1; 4)$.

Lời giải

Câu 40. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 5)$, $B(1; -1)$. Tìm tọa độ M sao cho $\vec{MA} = -2\vec{MB}$.

A. $M(1; 0)$.

B. $M(0; -1)$.

C. $M(-1; 0)$.

D. $M(0; 1)$.

Lời giải

Câu 41. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(2; 3)$, $B(4; -1)$. Tọa độ của $\vec{OA} - \vec{OB}$ là

A. $(-2; 4)$.

B. $(2; -4)$.

C. $(3; 1)$.

D. $(6; 2)$.

Lời giải

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2; -2)$; $B(5; -4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle OAB$.

A. $G\left(-\frac{7}{2}; 1\right)$.

B. $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $G(1; -2)$.

D. $G\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$.

Lời giải

Câu 43. Cho $A(0; 3)$, $B(4; 2)$. Điểm D thỏa $\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, tọa độ D là

A. $(-3; 3)$.

B. $(-8; 2)$.

C. $(8; -2)$.

D. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 44. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(1; -2)$ là trung điểm của AB , với $A \in Ox$, $B \in Oy$. Khi đó:

A. $A(0; 2)$.

B. $B(0; 4)$.

C. $B(-4; 0)$.

D. $A(2; 0)$.

Lời giải

Câu 45. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-1; 2)$, $B(1; -3)$. Gọi D đối xứng với A qua B . Khi đó tọa độ điểm D là

A. $D(3; -8)$.

B. $D(-3; 8)$.

C. $D(-1; 4)$.

D. $D(3; -4)$.

Lời giải

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$.

Điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{1}{5}; 0\right)$.

B. $M\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.

C. $M\left(0; \frac{1}{5}\right)$.

D. $M\left(0; -\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. TÍNH TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM CỦA MỘT HÌNH

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng các công thức:

➤ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

➤ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

➤ Hai vectơ bằng nhau $\vec{u}(x; y) = \vec{u}'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

➤ Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$

2. Bài tập luyện tập.

Bài tập 17. Cho ba điểm $A(3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(-1; -2)$

a). Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b). Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 19. Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(1;-3)$, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ đỉnh C .

Lời giải

Bài tập 20. Cho tam giác ABC có M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Biết $M(1;1)$, $N(-2;-3)$, $P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải

Bài tập 21. Cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$. A' là điểm đối xứng của A qua B , B' là điểm đối xứng của B qua C , C' là điểm đối xứng của C qua A .
 a). Tìm tọa độ các điểm A', B', C' .
 b). Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Bài tập 22. Cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;-5)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox mà

$$T = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \text{ bé nhất.}$$

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. Bài tập vận dụng.

Bài 1. Trên mặt phẳng Oxy cho 2 điểm $A(-2; -2)$ và $B(5; -4)$.

- a). Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác OAB .
- b). Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2; 0)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 2. Cho tam giác ABC với $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$, $C(1; 1)$. Tìm các tọa độ của đỉnh D của hình bình hành.

- a). $ABCD$.
- b). $ACBD$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 3. Cho $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$.

- a). Tìm điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD .
- b). Tìm điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 4. Cho tam giác ABC . Các điểm $M(1;1), N(2;3), P(0;-4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Tính tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải

Bài 5. Cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$.

a). Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

b). Tìm tọa độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tam hình bình hành ấy.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 47. Cho $\vec{a} = (2; -4), \vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

A. $\vec{u} = (7; -7)$.

B. $\vec{u} = (9; -11)$.

C. $\vec{u} = (9; -5)$.

D. $\vec{u} = (-1; 5)$.

Lời giải.

Câu 48. Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(1;1), B(2;-1), C(4;3), D(3;5)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCD .

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Lời giải.

Câu 49. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;1)$, $B(0;-3)$, $C(3;1)$.

Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(5;5)$.

B. $(5;-2)$.

C. $(5;-4)$.

D. $(-1;-4)$.

Lời giải.

Câu 50. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$.

Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(4;3)$.

B. $(3;4)$.

C. $(4;4)$.

D. $(8;6)$.

Lời giải.

Câu 51. Cho ba điểm M, N, K thỏa $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để N là trung điểm MP ?

A. $\frac{1}{2}$.

B. -1 .

C. 2 .

D. -2 .

Lời giải.

Câu 52. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $B(9;7)$, $C(11;-1)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MN}$?

A. $(2;-8)$.

B. $(1;-4)$.

C. $(10;6)$.

D. $(5;3)$.

Lời giải.

Câu 53. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm tọa độ đỉnh A ?

- A. $(1;5)$. B. $(-3;-1)$. C. $(-2;-7)$. D. $(1;-10)$.

Lời giải.

Câu 54. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $(6;-3)$. B. $(-6;3)$. C. $(-6;-3)$. D. $(-3;6)$.

Lời giải.

Câu 55. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(-2;-2)$, $C(-7;-7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC . B. B ở giữa hai điểm A và C .
C. A ở giữa hai điểm B và C . D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Câu 56. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O . Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $(-1;-7)$. B. $(2;-2)$. C. $(-3;-5)$. D. $(1;7)$.

Lời giải.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M\left(-\frac{5}{2};-1\right)$, $N\left(-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$. B. $G(-4;-4)$. C. $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$. D. $G(4;-4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho tam giác ABC với $A(1; -2)$, $B(3; -4)$, $C(5; 2)$. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng BC với đường phân giác ngoài của góc A .

A. $I\left(\frac{11}{3}; -2\right)$.

B. $I(4; -1)$.

C. $I(1; -10)$.

D. $I\left(\frac{13}{3}; 0\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; 3)$ và tâm $I(-1; 1)$. Biết điểm $M(4; 9)$ nằm trên đường thẳng AD và điểm D có tung độ gấp đôi hoành độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành?

A. Tọa độ các đỉnh $C(-4; -1)$, $B(-5; -4)$, $D(3; 6)$.

B. Tọa độ các đỉnh $C(-4; -1)$, $B(-4; -2)$, $D(2; 4)$.

C. Tọa độ các đỉnh $C(-4; -1)$, $B(-1; 4)$, $D(-1; -2)$.

D. Tọa độ các đỉnh $C(4; 1)$, $B(-5; -4)$, $D(3; 6)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác MNP có $M(1; -1)$, $N(5; -3)$ và P là điểm thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác MNP nằm trên trục Ox . Tọa độ điểm P là

A. $(2; 4)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 61. Cho hình bình hành $ABCD$ có tọa độ tâm $I(3;2)$ và hai đỉnh $B(-1;3)$; $C(8;-1)$.

Tìm tọa độ hai đỉnh A, D .

A. $A(7;1), D(-2;5)$.

B. $A(-2;5), D(7;1)$.

C. $A(7;5), D(-2;1)$.

D. $A(-2;1), D(7;5)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$, $B(0;4)$, $C(5;-4)$.

Tọa độ đỉnh D là:

A. $(3;-5)$.

B. $(3;7)$.

C. $(3;\sqrt{2})$.

D. $(\sqrt{7};2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;-5)$, $B(3;0)$, $C(-3;4)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ vector $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MN} = (-3;2)$.

B. $\overrightarrow{MN} = (3;-2)$.

C. $\overrightarrow{MN} = (-6;4)$.

D. $\overrightarrow{MN} = (1;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 64. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-3)$, $B(4;5)$ và $G\left(0;-\frac{13}{3}\right)$ là

trọng tâm tam giác ADC . Tọa độ đỉnh D là

A. $D(2;1)$.

B. $D(-1;2)$.

C. $D(-2;-9)$.

D. $D(2;9)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G . Biết rằng $A(-1;4)$, $B(2;5)$, $G(0;7)$. Hỏi tọa độ đỉnh C là cặp số nào?

- A. $(2;12)$. B. $(-1;12)$. C. $(3;1)$. D. $(1;12)$.

Lời giải

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(1;-1)$, $N(3;2)$, $P(0;-5)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA và AB của tam giác ABC . Tọa độ điểm A là

- A. $(2;-2)$. B. $(5;1)$. C. $(\sqrt{5};0)$. D. $(2;\sqrt{2})$.

Lời giải

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;-3)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành là $H(1;0)$.
 B. Điểm đối xứng với M qua gốc tọa độ là $P(3;-1)$.
 C. Điểm đối xứng với M qua trục hoành là $N(1;3)$.
 D. Hình chiếu vuông góc của M trên trục tung là $K(0;-3)$.

Lời giải

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$. Cho $M(x;y)$ trên đoạn thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 4S_{ABM}$. Khi đó $x^2 - y^2$ bằng

A. $\frac{13}{8}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 69. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; -4)$.

Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{18}{7}; 0\right)$.

B. $M(4; 0)$.

C. $M(3; 0)$.

D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 70. Cho $M(-1; -2)$, $N(3; 2)$, $P(4; -1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$ nhỏ nhất.

A. $E(4; 0)$.

B. $E(3; 0)$.

C. $E(1; 0)$.

D. $E(2; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ điểm N trên cạnh BC của tam giác ABC có $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$ sao cho $S_{ABN} = 3S_{ANC}$ là

A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Câu 72. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $B(1; -3)$ và $C(1; 2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của $\triangle ABC$, biết $AB = 3$, $AC = 4$.

A. $H\left(1; \frac{24}{5}\right)$.

B. $H\left(1; -\frac{6}{5}\right)$.

C. $H\left(1; -\frac{24}{5}\right)$.

D. $H\left(1; \frac{6}{5}\right)$.

Lời giải

Dạng 5. SỰ CÙNG PHƯƠNG CỦA HAI VEC TƠ.

1. Phương pháp.

Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$.

➤ Vector $\vec{u}'$ cùng phương với vector $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

➤ **Chú ý.** Nếu $xy \neq 0$ ta có $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$.

➤ Để phân tích $\vec{c}(c_1; c_2)$ qua hai vector $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ không cùng phương:

Ta giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

2. Bài tập luyện tập.

Bài tập 23. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0)$; $\vec{c} = (-1; 3)$.

a). Chứng minh hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương.

b). Phân tích vector $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Lời giải

Bài tập 24. Cho $\vec{u} = (m^2 + m - 2 ; 4)$ và $\vec{v} = (m; 2)$. Tìm m để hai vecto $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Bài tập 25. Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$

a). Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b). Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC , điểm B chia đoạn AC , và điểm C chia đoạn AB

Lời giải

Bài tập 26. Trên mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(0;2)$, $B(1;1)$ và $C(-1;-2)$. Các điểm C', A', B' lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỉ số $-1, \frac{1}{2}, -2$

a). Tìm tọa độ của A', B', C' .

b). Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải

Bài tập 27.

a). Cho $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(m+4; 2m+1)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b). Cho $A(3;4)$, $B(2;5)$. Tìm x để điểm $C(-7; x)$ thuộc đường thẳng AB .

Lời giải

Bài tập 28. Cho $A(-3;4)$, $B(1;1)$, $C(5;5)$

a). Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b). Tìm điểm D sao cho A là trung điểm BD .

c). Tìm điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

Bài tập 29. Cho $A(-1; 3), B(4; 2), C(3; 5)$

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$.
- Tìm điểm E sao cho O là trọng tâm tam giác ABE .

Lời giải

Bài tập 30. Cho tam giác ABC có $A(-1; -1), B(5; -3)$, đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ đỉnh C .

Lời giải

Bài tập 31. Cho bốn điểm $A(-2; -3), B(3; 7), C(0; 3), D(-4; -5)$.

Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải

Bài tập 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6; 3), B(-3; 6), C(1; -2)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác;
- Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng;
- Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$;
- Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC .

Lời giải

[illegible]

Bài tập 33. Cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$.
 Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$

Lời giải

[illegible]

4. Câu hỏi trắc nghiệm:

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 73. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng hướng.

- B.** $\vec{c} = (7; 3)$ là vector đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.

- C.** $\vec{u} = (4; 2)$, $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương.

- D.** $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 74. Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (1; 6)$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng.

B. $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ cùng hướng.

D. $2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải.

Câu 75. Cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x = -1$.

B. $x = -\frac{1}{2}$.

C. $x = \frac{1}{4}$.

D. $x = 2$.

Lời giải.

Câu 76. Cho $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Tìm x để hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $x = -5$.

B. $x = 4$.

C. $x = 0$.

D. $x = -1$.

Lời giải.

Câu 77. Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-5; -2)$, $B(-5; 3)$, $C(3; 3)$, $D(3; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

B. ABCD là hình chữ nhật.

C. $I(-1; 1)$ là trung điểm AC.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Câu 78. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3;-2)$, $B(7;1)$, $C(0;1)$, $D(-8;-5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.

B. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

C. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

D. A , B , C , D thẳng hàng.

Lời giải.

Câu 79. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1;5)$, $B(5;5)$, $C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A , B , C thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

C. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Câu 80. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$.

Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Lời giải.

Câu 81. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(3;1)$, $D(0;-2)$.

Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AB \parallel DC$.

B. $AC = BD$.

C. $AD = BC$.

D. $AD \parallel BC$.

Lời giải.

Câu 82. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(-2;0)$.

Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.

B. A, B, C thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Lời giải.

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{u} = (-2;1)$ và $\vec{v} = 3\vec{i} - m\vec{j}$.

Tìm m để hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;-2)$, $C(1;5)$. Tọa độ D trên trục Ox sao cho $ABCD$ là hình thang có hai đáy AB và CD là

A. $(1;0)$.

B. $(0;-1)$.

C. $(-1;0)$.

D. Không tồn tại điểm D .

Lời giải

Câu 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2;5)$, $B(2;2)$, $C(10;-5)$.

Tìm điểm $E(m;1)$ sao cho tứ giác $ABCE$ là hình thang có một đáy là CE .

A. $E(-2;1)$.

B. $E(0;1)$.

C. $E(2;1)$.

D. $E(-1;1)$.

Lời giải

Câu 86. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;4)$.

Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

A. $M(-4; 0)$.

B. $M(4; 0)$.

C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải.

Câu 87. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(3; 4)$.

Tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng là

A. $M(1; 0)$.

B. $M(4; 0)$.

C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải

Câu 88. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Tìm x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x = -\frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{4}$.

C. $x = 2$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Câu 89. Cho 4 điểm $M(1; -2)$, $N(0; 3)$, $P(-3; 4)$, $Q(-1; 8)$.

Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho là thẳng hàng?

A. M, P, Q .

B. M, N, P .

C. N, P, Q .

D. M, N, Q .

Lời giải

SBAI 5.

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ

A - LÝ THUYẾT.

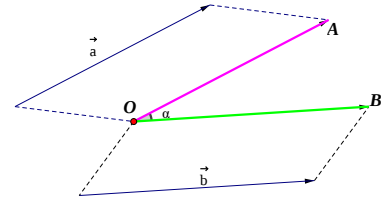
1. Định nghĩa:

a). Góc giữa hai vector.

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Từ điểm O bất kỳ dựng các vector $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

Số đo góc AOB được gọi là số đo góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý (từ 0^0 đến 180^0).

Kí hiệu: $(\vec{a}; \vec{b})$

Chú ý:

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì góc của nó là 0^0 .

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì góc của nó là 180^0 .

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Tính góc

a). $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

b). $(\vec{AH}, \vec{CB})$.

c). $(\vec{CA}, \vec{BC})$.

d). $(\vec{AH}, \vec{BA})$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

b) Tích vô hướng của hai vector.

Tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng:

a). $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b). $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$.

c). $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

2. Tính chất: Với ba véc tơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và mọi số thực k ta luôn có:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- 2) $\vec{a}(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- 3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- 4) $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Chú ý: Ta có kết quả sau:

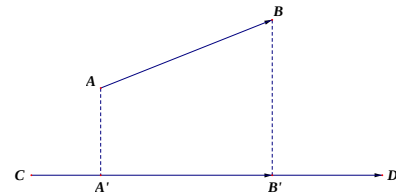
- Nếu hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ gọi là bình phương vô hướng của véc tơ $\vec{a}$.
- $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

3. Công thức hình chiếu và phương tích của một điểm với đường tròn.

a) Công thức hình chiếu.

Cho hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$.

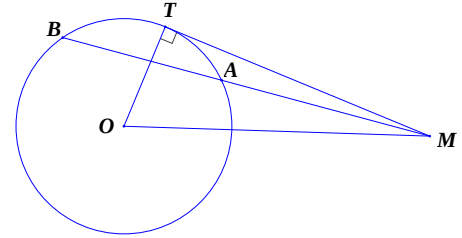
Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD khi đó ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$



b) Phương tích của một điểm với đường tròn.

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M . Một đường thẳng qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B .

Biểu thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ được gọi là *phương tích của điểm M đối với đường tròn $(O; R)$* . Kí hiệu là $P_{M/(O)}$.



Chú ý: Ta có $P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = MT^2$ với T là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm M .

4. Biểu thức tọa độ và ứng dụng của tích vô hướng

a). Cho hai vector $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

b). Độ dài của vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

c). Góc giữa hai vector

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vector ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

d). Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ví dụ 3. Cho hai vector $\vec{a} = (0; 4)$; $\vec{b} = (4; -2)$.

a). Tính cosin góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b). Xác định tọa độ của vector $\vec{c}$ biết $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$ và $(-\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{a} = 6$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho bốn điểm $A(-8; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$, $D(-3; -5)$.

Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Biết $A(1; -1)$, $B(3; 0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Lời giải

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1. Xác định góc giữa hai vector.

1. Phương pháp.

- Góc của hai vector lấy giá trị từ 0° đến 180° .
- Nếu 2 vector cùng hướng thì góc bằng 0° , nếu ngược hướng thì góc bằng 180° .
- Nếu $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = a^\circ$ thì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NM}) = -a^\circ$.

Chú ý sử dụng các tính chất khi biến đổi vector, tích vô hướng, các hằng đẳng thức.

- Để tính độ dài AB , ta có thể dùng bình phương vô hướng.

$$\text{Trong tam giác } ABC \text{ thì } BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính góc

- a). $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$. b). $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB})$. c). $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$. d). $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO})$.

Lời giải

Bài tập 2. Cho tam giác ABC , tính tổng

- a). $P = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. b). $P = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

Lời giải

Bài tập 3. Cho tam giác ABC vuông ở A và $B = 30^\circ$. Tính

a). $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$.

b). $P = \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

Lời giải

Bài tập 4. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ khi nào dương, khi nào âm và khi nào bằng 0.

Lời giải

Bài tập 5. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng biết $OA = a, OB = b$. Tính $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a). A, B cùng phía với O .

b). A, B khác phía với O .

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$

B. $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$.

C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$.

D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Lời giải.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = -\frac{3}{2}$.

D. $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Câu 3. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

A. 30° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 150° .

Lời giải.

Câu 4. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $B = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.

B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$.

C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.

D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Lời giải.

Câu 5. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$.

B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Câu 6. Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 120° .

Lời giải.

Câu 7. Cho tam giác ABC với $A = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

- A. 120° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .

Lời giải.

Câu 8. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H .

Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

- A. 360° . B. 180° . C. 80° . D. 160° .

Lời giải.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

- A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$. D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Lời giải.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A. 45° .

B. 405° .

C. 315° .

D. 225° .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 135° .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 13. Cho tam giác ABC với $A = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

A. 120° .

B. 360° .

C. 270° .

D. 240° .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

DẠNG 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

➤ Tích vô hướng hai vector là $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

➤ Góc của hai vector được xác định bởi công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

➤ Để xác định độ dài một vector đoạn thẳng ta sử dụng công thức

① Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

② Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Một số công thức cần phải nhớ.

➤ Cho tam giác ABC với ba đỉnh có tọa độ xác định $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ thì

① Trung điểm I của đoạn $AB \Rightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

② Trọng tâm $G \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

③ Trực tâm $H \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$.

④ Tâm đường tròn ngoại tiếp $E \Rightarrow EA = EB = EC \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ AE^2 = CE^2 \end{cases}$.

⑤ Chân đường cao K hạ từ đỉnh $A \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BK} = k \overrightarrow{BC} \end{cases}$.

⑥ Chân đường phân giác trong góc A là điểm $D \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$.

⑦ Chu vi: $P = AB + BC + CA$.

⑧ Diện tích: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

⑨ Góc A : $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

⑩ Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases}$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

a). Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

b). Tính góc B của tam giác ABC .

c). Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

 **Bài tập 7.** Cho tam giác ABC có $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$.

- a). Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC .
- b). Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A .
- c). Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải

 **Bài tập 8.** Cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$.

Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Bài tập 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-2; -1)$, $B(2; -4)$.

- Tìm trên trục Oy điểm M sao cho $\angle MBA = 45^\circ$.
- Tìm trên trục Ox điểm N sao cho $NA = NB$.

Lời giải

Bài tập 10. Cho tam giác ABC với $A(3; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(6; 0)$.

- Tính góc A của tam giác ABC .
- Tính tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC .

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Bài tập 16. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A(1;4)$, $B(-2;-2)$ và $C(4;2)$. Xác định tọa độ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$.
Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$.

Lời giải.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$.

Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

- A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. D. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$.

Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3;2)$ và $\vec{b} = (-1;-7)$.

Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

- A. $\vec{c} = (-1;-3)$. B. $\vec{c} = (-1;3)$. C. $\vec{c} = (1;-3)$. D. $\vec{c} = (1;3)$.

Lời giải.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$.

Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

A. $P = 0$.

B. $P = 18$.

C. $P = 20$.

D. $P = 28$.

Lời giải.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$.

Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$.

Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$.

Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 60^\circ$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$.

Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha = 45^\circ$.

B. $\alpha = 60^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vector $\vec{a} = (9; 3)$. Vector nào sau đây không vuông góc với vector $\vec{a}$?

A. $\vec{v}_1 = (1; -3)$.

B. $\vec{v}_2 = (2; -6)$.

C. $\vec{v}_3 = (1; 3)$.

D. $\vec{v}_4 = (-1; 3)$.

Lời giải.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(5; -1)$.

Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$.

B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$ và $C(-1; -1)$.

Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 135° .

Lời giải.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-8; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$ và $D(-3; -5)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc BAD và BCD phụ nhau.

B. Góc BCD là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.

D. Hai góc BAD và BCD bù nhau.

Lời giải.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k = 20$.

B. $k = -20$.

C. $k = -40$.

D. $k = 40$.

Lời giải.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k = \frac{37}{4}$.

B. $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

C. $k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$.

D. $k = \frac{5}{8}$.

Lời giải.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k = 2m$.

B. $3k = 2m$.

C. $2k + 3m = 0$.

D. $3k + 2m = 0$.

Lời giải.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$.

Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = -2$.

A. $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

B. $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

C. $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$.

D. $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$.

Lời giải.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{u} = (4; 1)$, $\vec{v} = (1; 4)$ và $\vec{a} = \vec{u} + m\vec{v}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (4; 1)$ và $\vec{v} = (1; 4)$. Tìm m để vectơ $\vec{a} = m\vec{u} + \vec{v}$ tạo với vectơ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

A. $m = 4$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1; -2)$ và $N(-3; 4)$.

A. $MN = 4$. B. $MN = 6$. C. $MN = 3\sqrt{6}$. D. $MN = 2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P = 4 + 2\sqrt{2}$. B. $P = 4 + 4\sqrt{2}$. C. $P = 8 + 8\sqrt{2}$. D. $P = 2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 37. Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho vectơ $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{6}{5}$.

D. $\frac{7}{5}$.

Lời giải.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

D. $\vec{u} = -\vec{v}$.

Lời giải.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; -4)$, $C(0; 1)$ và $D\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$.

B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

C. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$.

B. Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(3; 1)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. Tam giác ABC đều.
- B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
- C. Tam giác ABC cân tại B .
- D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải.

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(10;5)$, $B(3;2)$ và $C(6;-5)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều.
- B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
- C. Tam giác ABC vuông cân tại B .
- D. Tam giác ABC có góc A tù.

Lời giải.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;-1)$ và $C(-2;2)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều.
- B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
- C. Tam giác ABC vuông tại B .
- D. Tam giác ABC vuông cân tại C .

Lời giải.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$.

Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

- A. $C(6;0)$.
- B. $C(0;0)$, $C(6;0)$.
- C. $C(0;0)$.
- D. $C(-1;0)$.

Lời giải.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$.

Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A. $C(0;6)$. B. $C(5;0)$. C. $C(3;1)$. D. $C(0;-6)$.

Lời giải.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$.

Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. $M(-2;0)$. B. $M(2;0)$. C. $M(-4;0)$. D. $M(-5;0)$.

Lời giải.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$.

Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M , N , P thẳng hàng.

- A. $P(0;4)$. B. $P(0;-4)$. C. $P(-4;0)$. D. $P(4;0)$.

Lời giải.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

- A. $M(1;0)$. B. $M(1;0)$, $M(-3;0)$. C. $M(3;0)$. D. $M(1;0)$, $M(3;0)$.

Lời giải.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$.

Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B .

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

B. $C\left(\frac{5}{3};0\right)$.

C. $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$.

D. $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$.

Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\angle AMB = 90^\circ$?

A. $M(0;1)$.

B. $M(6;0)$.

C. $M(1;6)$.

D. $M(0;6)$.

Lời giải.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$.

Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$.

B. $M(0;-1)$.

C. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tìm tọa độ điểm D .

A. $D(2;-3)$.

B. $D(2;3)$.

C. $D(-2;-3)$.

D. $D(-2;3)$.

Lời giải.

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(5;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

A. $G\left(2;\frac{10}{3}\right)$.

B. $G\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right)$.

C. $G(2;5)$.

D. $G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Lời giải.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right)$.

B. $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$.

C. $I\left(1;\frac{1}{4}\right)$.

D. $I\left(1;-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$.

Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$.

B. $a+6b=6$.

C. $a+6b=7$.

D. $a+6b=8$.

Lời giải.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$.

Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

A. $A'(1;-4)$.

B. $A'(-1;4)$.

C. $A'(1;4)$.

D. $A'(4;1)$.

Lời giải.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$.

Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

B. $A'\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

C. $A'\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

D. $A'\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$.
 Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

- A. $D(5;-8)$. B. $D(8;5)$. C. $D(-5;8)$. D. $D(-8;5)$.

Lời giải.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

- A. $C(4;0)$. B. $C(-2;2)$. C. $C(4;0)$, $C(-2;2)$. D. $C(2;0)$.

Lời giải.

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$.
 Tìm tọa độ điểm D , biết D có tung độ âm.

- D.** $D(-2; -3)$.

[illegible]

D. $ABCD$ là hình bình hành.

D. $E = (-2 + 3\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$.

[illegible]

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$.

Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

- A. $D(7;0)$. B. $D(7;0)$, $D(2;9)$. C. $D(0;7)$, $D(9;2)$. D. $D(9;2)$.

Lời giải.

DẠNG 3. Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vector.

1. Phương pháp .

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector.

2. Bài tập minh họa:

Bài tập 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- a). Tính các tích vô hướng: $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$; $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$.
- b). Tính giá trị của biểu thức $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$.
- c). Tính giá trị của biểu thức $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$.

Lời giải (hình 2.2)

Bài tập 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Với M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a). $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.

b). $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$.

Lời giải (hình 2.3)

Bài tập 19. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Với M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b). Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải (hình 2.3)

[illegible]

Nhận xét : Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$

3. Bài tập luyện tập:

 **Bài 1.** Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.
- Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

[illegible]

Bài 2. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{7}$.

Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Lời giải.

Bài 3. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

Lời giải.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos MNP$.

Lời giải.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\vec{AM} = 3\vec{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\vec{MB} \cdot \vec{GC}$

Lời giải.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $BD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{AC}, \vec{DB}$.

Lời giải.

Bài 8. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB , M là trung điểm của cạnh CB .

a). Xác định trên đường thẳng AC điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D . Tính diện tích tam giác đó.

b). Xác định trên đường thẳng AC điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M . Tính diện tích tam giác đó.

c). Tính cosin góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD .

Lời giải.

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 65. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải.

Câu 66. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

Câu 67. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải.

Câu 68. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

Câu 69. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Lời giải.

Câu 70. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Câu 71. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Câu 72. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$.

C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

Câu 73. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Câu 74. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Câu 75. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$.
C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải.

Câu 76. Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $CA = 5\text{cm}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải.

Câu 77. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$.

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Câu 78. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Câu 79. Cho ba điểm O , A , B không thẳng hàng.

Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều.

B. tam giác OAB cân tại O .

C. tam giác OAB vuông tại O .

D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải.

Câu 80. Cho M , N , P , Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$.

D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải.

Câu 81. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$.

Lời giải.

Câu 82. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

- A. $P = -1$. B. $P = 3a^2$. C. $P = -3a^2$. D. $P = 2a^2$.

Lời giải.

Câu 83. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- A. $P = 2\sqrt{2}a$. B. $P = 2a^2$. C. $P = a^2$. D. $P = -2a^2$.

Lời giải.

Câu 84. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải.

$AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

- Lời giải.**

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = 62.$ **B.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = 64.$ **C.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = -62.$ **D.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = -64.$

Lời giải.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}.$

B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}.$

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

[illegible]

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 \sqrt{2}.$

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}.$

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

DẠNG 4. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.

1. Phương pháp.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau: Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động, khi đó:
Trên đoạn AB , tập hợp các điểm M thỏa mãn:

➤ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là đường thẳng vuông góc với AB tại $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

➤ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là đường tròn đường kính AB .

Cho điểm I và một số k tập hợp các điểm M thỏa mãn $MI^2 = k$:

➤ Nếu $k < 0$ thì tập hợp điểm là rỗng.

➤ Nếu $k = 0$ thì tập hợp điểm là điểm I .

➤ Nếu $k > 0$ thì $MI = \sqrt{k}$, tập hợp điểm là đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{k}$.

Lưu ý

➤ Các phép biến đổi vector (Tổng, Hiệu)

➤ Quy tắc trung điểm (hai đỉnh đầu chung)

➤ Trọng tâm (hai đỉnh đầu chung chung).

➤ Đặc biệt nếu tỉ số bất kỳ thì ta chọn tâm tỉ cự I . Khi đó ta phải chọn đặt và chứng minh I cố định rồi chèn I vào biểu thức vector tương ứng. Nếu không có tâm tỉ cự của hệ điểm thì chọn tâm tỉ cự của bộ phận điểm.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 19. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b). $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 20. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b). $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 21. Cho tam giác ABC .

Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$.

Lời giải

.....

.....

 **Bài tập 22.** Cho đoạn $AB = a$ và số k . Tìm tập hợp các điểm sao cho $MA^2 + MB^2 = k$.

Lời giải

 **Bài tập 23.** Cho tam giác ABC và số k .
Tìm tập hợp các điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$

Lời giải

Bài tập 24. Cho hình bình hành $ABCD$ và số k .
 Tìm tập hợp các điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

Lời giải

Bài tập 25. Cho tam giác ABC và số k .
 Tìm tập hợp các điểm sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

Lời giải

Bài tập 26. Cho hai điểm A, B cố định và một số k .
 Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Lời giải

Ví dụ 27. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải (hình 2.4)

Lời giải (hình 2.5)

c). $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$ với k là số thực cho trước.

Lời giải (hình 2.5)

$$\text{a). } (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\text{b). } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$$

c). $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

[illegible]

a). $2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

b). $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$

[illegible]

Bài 11. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} IJ^2$.

Lời giải.

Bài 12. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$

Lời giải.

Bài 13. Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc BAC sao cho : $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$ trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC

Lời giải.

Bài 14. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Lời giải

Bài 15. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k \text{ với } k \text{ là số cố định cho trước khi}$$

a). $\alpha + \beta + \gamma = 0$

b). $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Lời giải.

Bài 16. Cho hai điểm A, B cố định và một số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = k$.

b). $MA^2 - MB^2 = k$.

Lời giải

Bài 17. Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm sao cho $2MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

Lời giải

Bài 18. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a .

Tìm tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.

Lời giải

Bài 19. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng Δ , H là hình chiếu của A trên Δ .

Với mỗi điểm M trên Δ , lấy điểm N trên tia AM sao cho $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = AH^2$.

Tìm tập hợp các điểm N .

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 90. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Câu 91. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Câu 92. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

Lời giải.

Câu 93. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a .

Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

Lời giải.

Câu 94. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

A. một điểm.

B. đường thẳng.

C. đoạn thẳng.

D. đường tròn.

Lời giải.

Câu 95. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 5. Chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.

1. Phương pháp.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 30. Chứng minh

a). $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. b). $(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. c). $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 31. Chứng minh $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left[(\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 \right]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 32. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 33. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (*).
 Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 34. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

Lời giải (hình 2.4)

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0.$$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 37. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

b). $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC có trực tâm H , M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2.$$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 40. Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 41. Cho tam giác ABC có ba đường cao là AA', BB', CC' . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 42. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 43. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$.

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN .

a). Chứng minh: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$.

b). Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ theo R .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 44. Cho tam giác ABC , M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC không trùng với B và C . Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB .

Chứng minh rằng: $AM^2 = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 45. Cho lục giác $ABCDEF$ có AB vuông góc với EF và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 46. Cho tam giác ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) .

M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O) . Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 47. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$.

MN là một đường kính bất kỳ của đường tròn $(O; R)$.

a). Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2$

b). Chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 + ND^4$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 48. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = \vec{0}$ khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ví dụ 49. Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I và đường tròn $(O; R)$ bất kỳ chứa I . Các tia $IA_i, i = \overline{1, 6}$ cắt $(O; R)$ tại $B_i (i = \overline{1, 6})$. Chứng minh $IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2$

Lời giải.

Ví dụ 50. Tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng

a). $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ với M là điểm bất kỳ

b). $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 51. Cho tam giác ABC có $\angle BAC < 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
 M là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường tròn đường kính BC .
 Gọi x , y , z theo thứ tự là diện tích của các tam giác MBC , MCA , MAB .

Chứng minh rằng $(x - y + z)c^2 + (x - z + y)b^2 = \left(x + y + z + \frac{2yz}{x}\right)a^2$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. Bài tập rèn Luyện

Bài tập 21. Cho tam giác ABC .
 Chứng minh rằng với điểm M tùy ý ta có $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 22. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF .

Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.

Lời giải

Bài tập 23. Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.

Lời giải

Bài tập 24. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$.

Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$.

b). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$.

Lời giải

Bài tập 25. Cho tam giác ABC . Gọi B là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh

BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$.

Lời giải

 **Bài tập 26.** Cho tam giác ABC có trọng tâm O . Chứng minh với điểm M bất kỳ thì có $MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) = \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Lời giải

DẠNG 6. Điều kiện để hai véc tơ Vuông góc .

1. Phương pháp.

- Điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Điều kiện $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- **Lưu ý** chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

2. Các ví dụ minh họa.

 **Ví dụ 52.** Cho tam giác ABC . Chứng minh góc A vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$.

Lời giải

 **Ví dụ 53.** Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Từ đó suy ra cách chứng minh định lí “Ba đường cao trong tam giác đồng quy”.

Lời giải

Ví dụ 54. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp B'C'$.

Lời giải

Ví dụ 55. Cho tam giác ABC có góc nhọn tại A . Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

Lời giải

Ví dụ 56. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh rằng BK vuông góc với AC .

Lời giải

Ví dụ 57. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi H là trung điểm của cạnh BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AC , M là trung điểm của đoạn HD . Chứng minh rằng AM vuông góc với BD .

Lời giải

Ví dụ 58. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh rằng MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Ví dụ 59. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh

a). $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b). $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Lời giải

Ví dụ 60. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Lời giải

Ví dụ 61. Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để $AM \perp PN$.

Lời giải

DẠNG 7. Giá Trị Lớn Nhất và Giá Trị Nhỏ Nhất

1. Phương pháp.

- Cho I là điểm cố định, M thay đổi thì $MI^2 \geq 0$ nên MI^2 bé nhất khi $M \equiv I$
- Cho I là điểm cố định, M thay đổi trên đường thẳng d thì MI bé nhất khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d .
- Một số bất đẳng thức được đánh giá từ các bình phương vô hướng đặc biệt:

$$(a \pm b)^2 \geq 0, (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})^2 \geq 0 \dots$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 62. Cho tam giác ABC với trọng tâm G

- Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.
- Với giá trị nào của điểm M thì tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị bé nhất và giá trị đó bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ví dụ 63. Cho đoạn $AB = 4a$. Với điểm M tùy ý, tìm giá trị bé nhất của tổng $3MA^2 + MB^2$. Nếu điểm M tùy ý thuộc đường thẳng d thì kết quả sẽ như thế nào?

Lời giải

Ví dụ 64. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$, điểm M tùy ý, tìm giá trị bé nhất của $f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

Lời giải

Ví dụ 65. Cho 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chứng minh $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Ví dụ 66. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 67.** Cho tam giác ABC . Chứng minh $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 68.** Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh với mọi điểm M thì $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq abc$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 69.** Cho tam giác ABC . Chứng minh với mọi số $x, y, z > 0$ thì $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy \cos C + yz \cos A + zx \cos B)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

 **Ví dụ 70.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	