

CHUYÊN ĐỀ 5
BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Biết công thức tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp.
- + Biết cách xác định chiều cao khối lăng trụ, khối chóp thông qua mối quan hệ về góc, khoảng cách và các hệ thức lượng trong tam giác.
- + Biết cách tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp gián tiếp: phân chia khối đa diện, tách ghép, bổ sung khối đa diện, sử dụng công thức tỉ số thể tích.
- + Biết liên hệ với bài toán thực tế thông qua giải các bài toán thực tế, bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

❖ **Kĩ năng**

- + Thành thạo công thức tính thể tích các khối đa diện.
- + Tính được khoảng cách, góc thông qua bài toán thể tích.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Công thức tính thể tích khối chóp, lăng trụ

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$.

Trong đó: $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.

h : Độ dài chiều cao khối chóp.

Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$

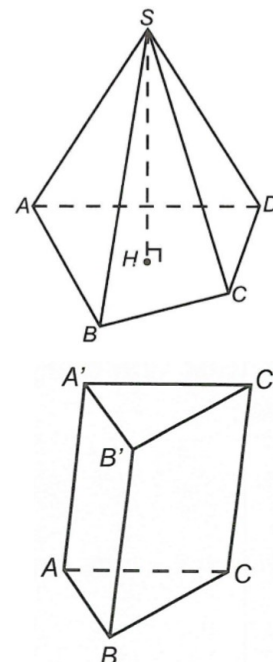
Trong đó: $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.

h : Chiều cao của khối chóp.

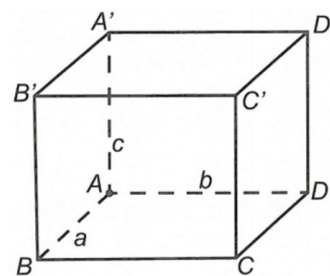
Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$

Thể tích khối lập phương: $V = a^3$

Ví dụ: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S(ABCD))} \cdot S_{ABCD}$



Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.



Chú ý:

+) Đường chéo của hình vuông cạnh a là:

$$a\sqrt{2}.$$

+) Đường chéo của hình lập phương cạnh a

$$\text{là: } a\sqrt{3}$$

+) Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba

$$\text{kích thước } a, b, c \text{ là: } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

+) Đường cao của tam giác đều cạnh a là:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Các công thức hình phẳng

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

$$+) AB^2 + AC^2 = BC^2; \quad +) AC^2 = CH \cdot BC;$$

$$+) AH \cdot BC = AB \cdot AC; \quad +) AB^2 = BH \cdot BC;$$

$$+) AH^2 = BH \cdot HC; \quad +) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2};$$

$$+) AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \cos B = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B.$$

b) Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh a, b, c ; độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c ; bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r , nửa chu vi p .

+) Định lý hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

$$+) \text{ Định lý hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

+) Độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

$$+) S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$+) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

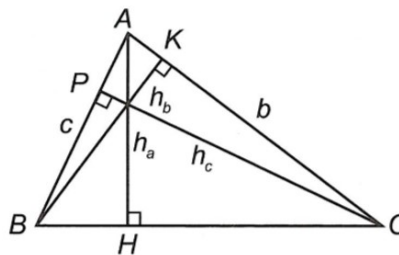
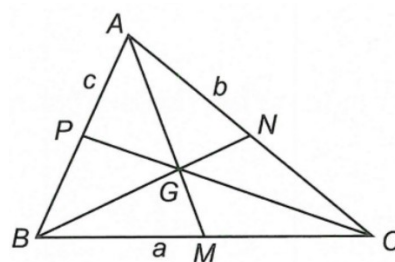
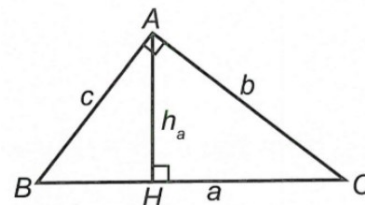
$$+) S = \frac{abc}{4R}$$

$$+) S = pr \quad (p: \text{nửa chu vi của tam giác}).$$

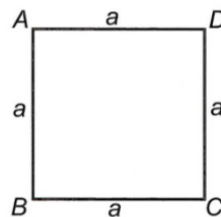
$$+) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$+) \triangle ABC \text{ vuông tại } A: S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

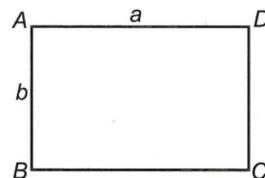
$$+) \triangle ABC \text{ đều, cạnh } a: AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



b) Hình vuông: $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

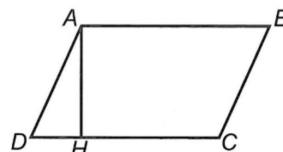


c) Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b : hai kích thước)

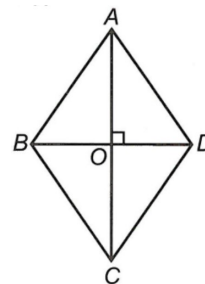


d) Hình bình hành:

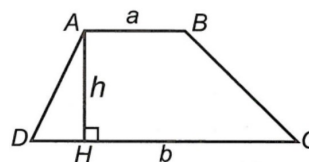
$$S = \text{đáy} \times \text{chiều cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$$



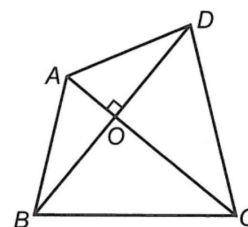
e) Hình thoi: $S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$



f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)



g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$



Một số kỹ thuật tính thể tích hay dùng

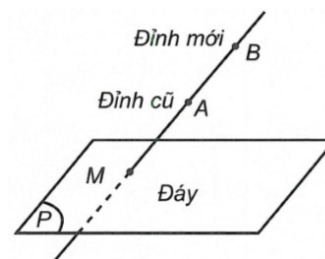
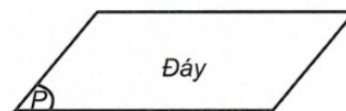
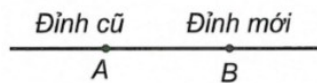
1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

Khi đáy không đổi ra có thể chuyển đỉnh để việc tính toán dễ dàng hơn.

+) Trường hợp 1: Đỉnh mới và đỉnh cũ nằm trên đường thẳng song song với đáy: $V_{\text{mới}} = V_{\text{cũ}}$

+) Trường hợp 2: Đỉnh mới và đỉnh cũ nằm trên đường thẳng cắt đáy:

$$\frac{V_{\text{mới}}}{V_{\text{cũ}}} = \frac{BM}{AM}$$

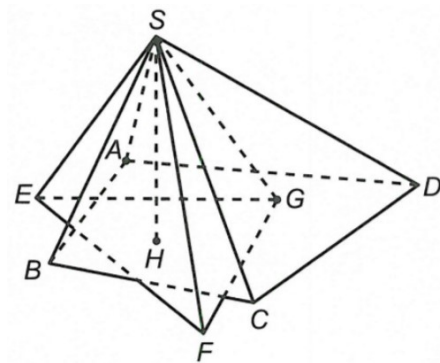


2. Kỹ thuật chuyển đáy

Khi chiều cao không đổi ta có thể chuyển đáy để việc

tính toán dễ dàng hơn:

$$\frac{V_{SABCD}}{V_{EFG}} = \frac{S_{SABCD}}{S_{EFG}}$$

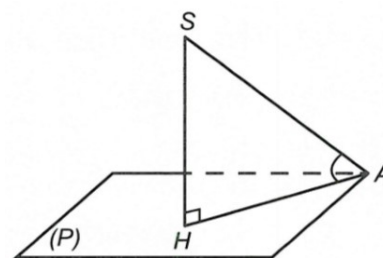


Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng.

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy

Để tính góc $(SA, (P))$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P) . Khi đó HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (P) .



$$\text{Vậy } (SA, (P)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}.$$

Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

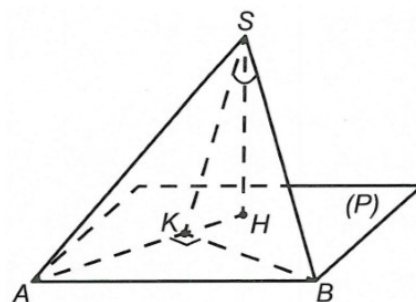
Để tính góc $(SB, (SAH))$ biết $(SAH) \perp (P)$ ta dựng

$$BK \perp AH (K \in AH). \text{ Vì } \begin{cases} BK \perp AH \\ BK \perp SH \end{cases} \text{ nên } BK \perp (SAH)$$

Khi đó K là hình chiếu vuông góc của B trên (SAH)

$\Rightarrow SK$ là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAH)

$$\text{Vậy } (SB, (SAH)) = (SB, SK) = \widehat{BSK}$$



Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến.

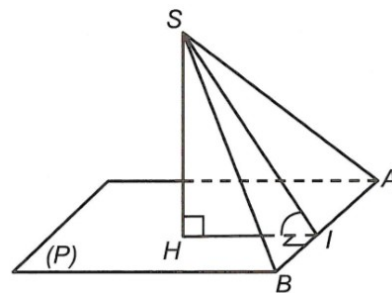
Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy

Để tính góc $\widehat{((SAB), (P))}$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P) .

Kẻ $HI \perp AB (I \in AB)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SI$$

$$\text{Vậy } \widehat{((SAB), (P))} = \widehat{(SI, HI)} = \widehat{SIH}.$$



Góc giữa mặt bên và mặt đứng

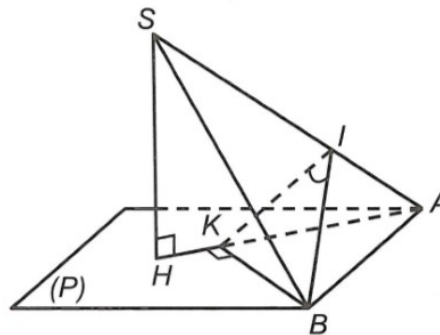
Để tính góc $\widehat{((SAB), (SAH))}$ biết $(SAH) \perp (P)$, ta kẻ

$$BK \perp HA (K \in HA) \Rightarrow \begin{cases} BK \perp HA \\ BK \perp SH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SHA).$$

Kẻ $KI \perp SA (I \in SA)$

$$\Rightarrow \begin{cases} SA \perp KI \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKI) \Rightarrow SA \perp BI$$

$$\text{Vậy } \widehat{((SAB), (SAH))} = \widehat{(KI, BI)} = \widehat{BIK}.$$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thể tích khối chóp

Bài toán 1. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

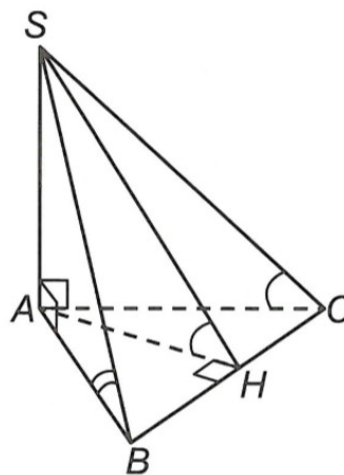
Phương pháp giải

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

MÔ HÌNH 1

Hình chóp $S.ABC$, cạnh SA vuông góc với đáy.

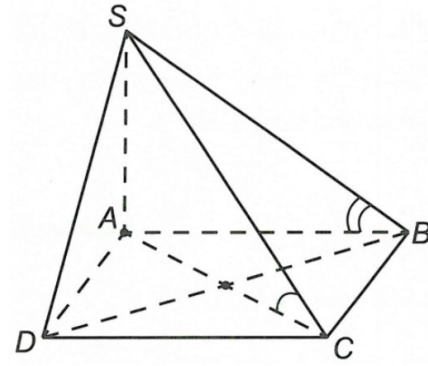
- + Đáy là tam giác ABC .
- + Đường cao SA .
- + Cạnh bên SB, SC, SA .
- + $\triangle SAB, \triangle SAC$ là các tam giác vuông tại A .
- + Góc giữa cạnh SB với đáy ABC là góc $\widehat{SBA}$.
- + Góc giữa cạnh SC với đáy ABC là góc $\widehat{SCA}$.
- + Góc giữa mặt bên SBC với đáy là góc $\widehat{SHA}$ với H là hình chiếu vuông góc của A trên BC .



MÔ HÌNH 2

Hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) và SA vuông góc với đáy.

- + Đáy là hình chữ nhật (hình vuông) $ABCD$.
- + Đường cao SA .
- + Cạnh bên SA, SB, SC, SD .
- + $\triangle SAB, \triangle SAC, \triangle SAD$ là các tam giác vuông tại A .
- + Góc giữa cạnh SB với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.
- + Góc giữa cạnh SC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SCA}$.
- + Góc giữa cạnh SD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.
- + Góc giữa mặt bên SBC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.
- + Góc giữa mặt bên SCD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $V = a^3$ B. $V = \frac{a^3}{2}$ C. $V = \frac{a^3}{3}$ D. $V = \frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

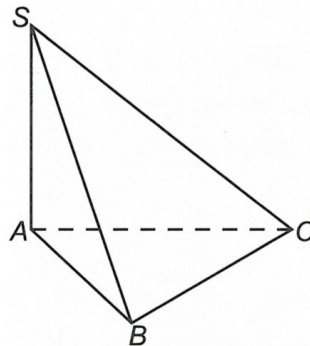
Diện tích đáy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2.$$

Chiều cao: $SA = a$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}.$$

Chọn C.



Chú ý:

Chóp tam giác $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thì thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

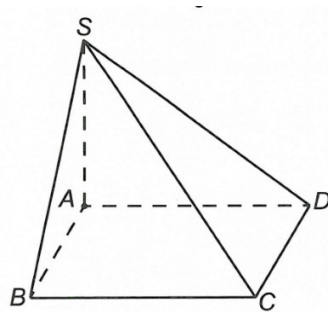
Hướng dẫn giải

Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao: $SA = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} a^2 . a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

Chọn A.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại B nên

$$BC = AB . \cot \widehat{ACB} = a . \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA . BC = \frac{1}{2} a . \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$$

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

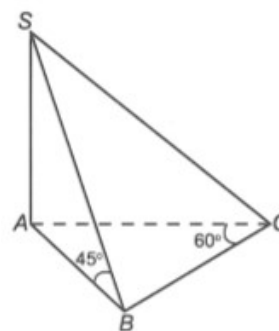
$$\Rightarrow \left(\widehat{SB, (ABC)} \right) = \left(\widehat{SB, AB} \right) = \widehat{SBA} = 45^\circ$$

$\triangle SAB$ vuông tại A nên

$$SA = AB . \tan \widehat{SBA} = AB . \tan 45^\circ = a .$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} . SA = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} . a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$$

Chọn B.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $(AD \parallel BC)$, cạnh $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Việc chia nhỏ hình thang cân $ABCD$ thành ba tam giác đều sẽ giúp ta thuận tiện trong việc tính diện tích đáy.

Chú ý: Nếu ABC là tam giác đều thì

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4}$$

Gọi M là trung điểm AD . Ta chia hình thang cân $ABCD$ thành ba tam giác ABM , BCM , CDM , ba tam giác này là các tam giác đều cạnh a .

$$\text{Do đó } S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Lại có AH là đường cao trong tam giác đều ABM nên

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AH = a\sqrt{3}.$$

ΔSAC vuông tại A nên

$$SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = AC \cdot \tan 60^\circ = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi $AC = 2a$, $BD = 3a$, $AC \perp BD$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{2a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 3a^2.$$

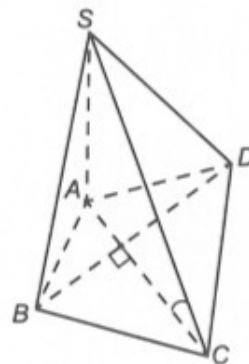
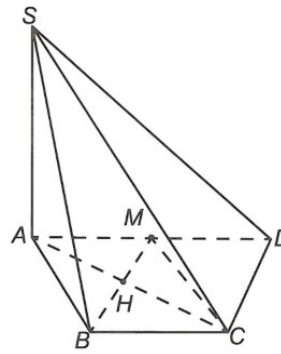
Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$ nên $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = \alpha$

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan \alpha = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{S.ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} 3a^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2a^3}{3}.$$

Chọn A.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$,



Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt

$\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $SABC$ là V . Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ là

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

$$\text{Mà } \begin{cases} (SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow \triangle ABC$, $\triangle SBC$ là các tam giác vuông tại B .

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có:

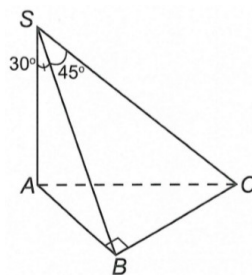
$$AB = SB \cdot \sin \widehat{ASB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = SB \cdot \cos \widehat{ASB} = \frac{3a}{2}$$

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B có: $BC = SB \cdot \tan \widehat{BSC} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8} \Rightarrow \frac{a^3}{V} = \frac{8}{3}$$

Chọn A.



phẳng (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{ASB} = \beta$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta}{12}$$

Chứng minh:

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có:

$$AB = SB \cdot \sin \alpha$$

$$SA = SB \cdot \cos \alpha$$

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B có:

$$BC = SB \cdot \tan \beta$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot SB^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA$$

$$= \frac{SB^2 \sin \alpha \tan \beta SB \cos \alpha}{6}$$

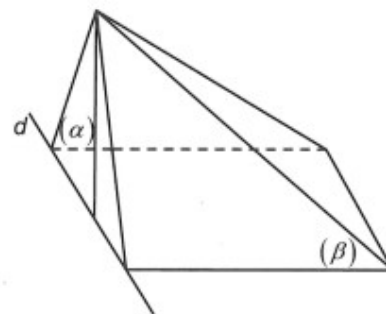
$$= \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \alpha}{12}$$

Bài toán 2. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Phương pháp giải

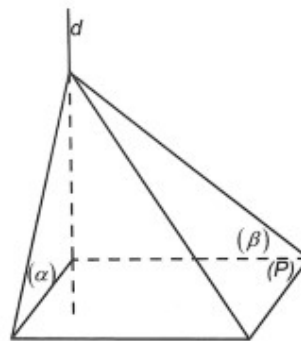
Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$



Hình chóp có hai mặt vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với đáy.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{9}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

D. $\frac{a^3}{16}$

Hướng dẫn giải

Ta có tam giác ABC đều nên $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S và có $AB = a$ nên $SH = \frac{a}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh $BA = 3a$, $BC = 4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \sqrt{3}a^3$

B. $V = a^3$

C. $V = 3\sqrt{3}a^3$

D. $V = 2\sqrt{3}a^3$

Hướng dẫn giải

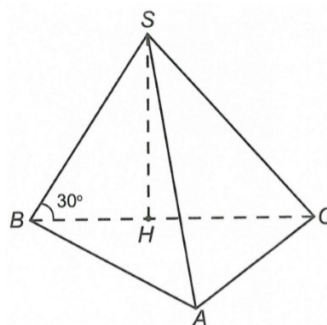
Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 6a^2$

Trong tam giác vuông SBH có:

$$SH = SB \cdot \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = 2\sqrt{3}a^3.$

Chọn D.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{17}}{9}$ B. $\frac{a^3\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{a^3\sqrt{17}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{17}}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$.

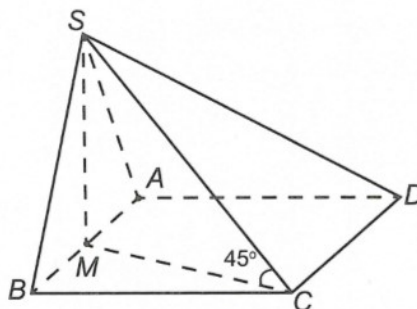
Gọi M là trung điểm của AB , khi đó

$SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Do đó $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, MC}) = \widehat{SCM} = 45^\circ$.

Khi đó $SM = MC = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$.

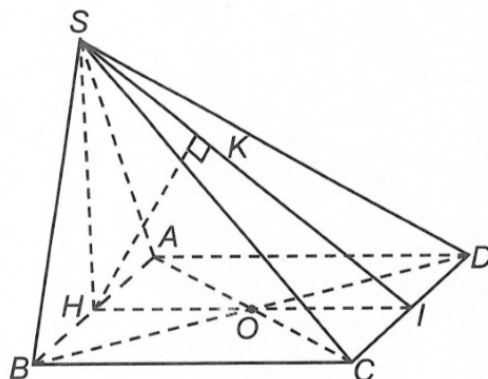


Chọn D.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3\sqrt{3}$ B. $V = 2a^3\sqrt{3}$ C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $V = 3a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, CD , kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIH) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD)$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHI \text{ ta có } SH = \sqrt{\frac{HI^2 \cdot HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} 3a \cdot a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}.$$

Chọn A.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = A\sqrt{2}$, $AC = A\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng BC . Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

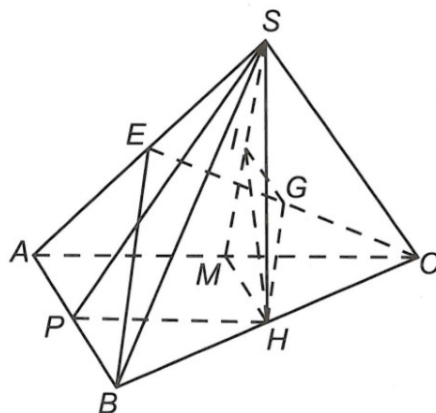
A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$

B. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$

D. $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC .

Ta có $(SAB) \cap (SAC) = SA$, kẻ $BE \perp SA$ và $GH \parallel BE$,

Suy ra $\left(\widehat{(SAC), (SAB)} \right) = \left(\widehat{GH, (SAC)} \right) = \widehat{HGI} = 60^\circ$.

Đặt $SH = h$, ta tính được $SA = \sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}$ và $SP = \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}$.

$$\text{Vậy } BE = \frac{2S_{SAB}}{SA} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}} \Rightarrow HG = \frac{BE}{2}, HI = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

Tam giác GIH vuông tại I có

$$\frac{IH}{HG} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}} = \frac{h \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow h^4 + \frac{7a^2}{4}h^2 - \frac{15a^4}{8} = 0 \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{30}}{12}.$$

Chọn D.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB , SBC , SAC lần lượt là 20 cm^2 , 27 cm^2 , 30 cm^2 . Thể tích khối chóp $SABC$ là

A. $40\sqrt{3} \text{ cm}^3$

B. 40 cm^3

C. 60 cm^3

D. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Hướng dẫn giải

Ta có các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một nên $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, $SB \perp SC$.

$$S_{SAB} = 20 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA \cdot SB = 40 \text{ cm}^2$$

$$S_{SBC} = 27 \text{ cm}^2 \Rightarrow SB \cdot SC = 54 \text{ cm}^2$$

$$S_{SAC} = 30 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA \cdot SC = 60 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow (SA \cdot SB \cdot SC)^2 = 40 \cdot 54 \cdot 60 = 129600 \Rightarrow SA \cdot SB \cdot SC = 360$$

Do (SAB) , (SBC) , (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một $\Rightarrow AS \perp (SBC)$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = 60 \text{ cm}^3.$$

Chọn D.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của SB , SD , CD , BC . Thể tích của khối chóp $AMNPQ$ là

A. $\frac{a^3}{3}$

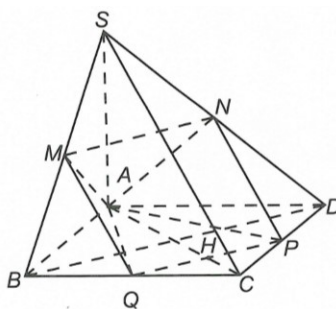
B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \\ NP \perp PQ (BD \perp SC) \end{cases}$$



$\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$\text{Suy ra } V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MQP} = 2V_{M.AQP}$$

$$\text{Ta có } d(M; (AQP)) = \frac{1}{2} SA$$

$$\text{Mà } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a \Rightarrow d(M; (AQP)) = \frac{1}{2} SA = \frac{a}{2}$$

$$S_{\Delta AQP} = \frac{1}{2} AH \cdot QP = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{3}{16} AC \cdot BD = \frac{3}{16} (a\sqrt{2})^2 = \frac{3}{8} a^2$$

$$\text{Do đó: } V_{M.AQP} = \frac{1}{3} d(M; (AQP)) \cdot S_{\Delta AQP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{8} a^2 = \frac{a^3}{16}$$

$$\text{Vậy } V_{A.MNPQ} = 2V_{M.AQP} = 2 \cdot \frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{8}$$

Chọn B.

Bài toán 3. Thể tích khối chóp đều

Phương pháp giải

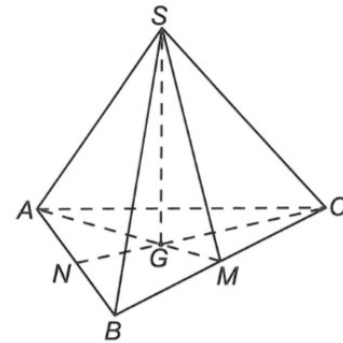
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

- +) Đáy là một đa giác đều
- +) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- +) Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau.

Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.

- +) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau
- +) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.



Chú ý:

+) Phân biệt hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Nói một cách khác, hình chóp tam giác đều là **hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại không đúng.**

+) Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

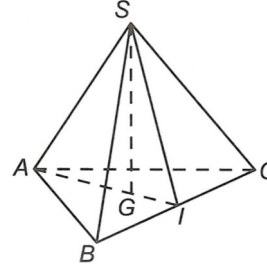
B. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$

C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$

D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SG \perp (ABC)$. Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy.



Theo định lý Pi-ta-go ta có

$$AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ và } AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác SGA vuông tại G ta có $SG = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}.$

Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SG \perp (ABC)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG = AG \cdot \tan 60^\circ = a$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

Chọn B.

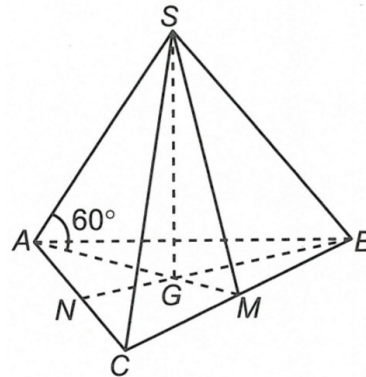
Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$



Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

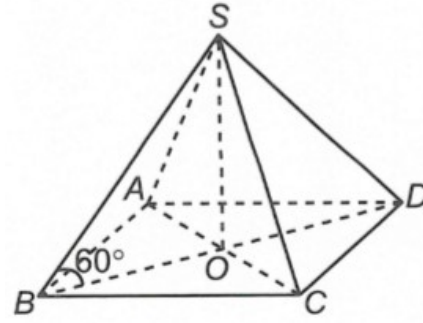
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $(\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, OB}) = \widehat{SBO}$.

Tam giác SOB vuông tại O , có

$$SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

**Chọn D.**

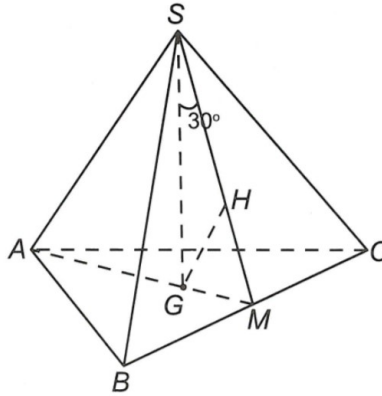
Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $GH \perp SM$ ($H \in SM$) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow (\widehat{SG, (SBC)}) = \widehat{GSM} = 30^\circ$.

$$SG = GM \cdot \cot \widehat{GSM} = \frac{1}{3} \cdot AM \cdot \cot 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Chọn D.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp đó là

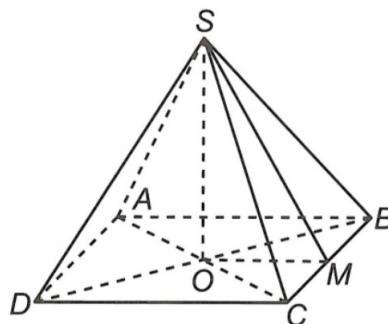
A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$

Hướng dẫn giải



Ta có $SM = a\sqrt{3}$. Do $\triangle SBC$ đều nên $SC = BC = 2a$.

$$\Rightarrow SO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp đó là } V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Bài toán 4. Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy

Phương pháp giải

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Việc tính SH ta thường dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đề bài thường cho mối quan hệ về góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc giữa hai mặt phẳng xác định độ dài đường cao.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = 2a$, gọi M là trung điểm BC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AM , tam giác SAM vuông tại S . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3}{9}$

Chú ý:

Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Hướng dẫn giải

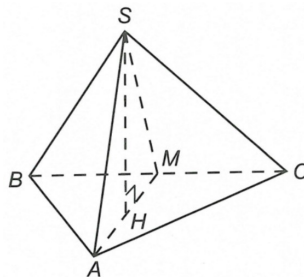
Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $BC = 2a$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = a^2$$

$$\text{Xét } \triangle SAM \text{ vuông tại } S \text{ có: } SH = \frac{AM}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$$

Chọn A.



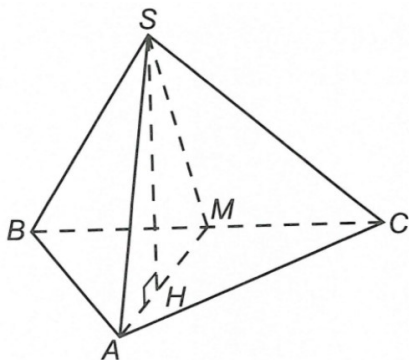
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = 19$ cm, **Chú ý:**

$BC = 20$ cm, $AC = 37$ cm, cạnh bên $SA = \sqrt{985}$ cm. Gọi M là trung điểm **Khi biết độ dài ba cạnh thì**

của BC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AM}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. 570cm^3 B. 760cm^3 C. 1520cm^3 D. 1140cm^3

Hướng dẫn giải



Ta có $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 38 \text{ cm}$.

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114 \text{ cm}^2$.

$AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = 3\sqrt{85} \text{ cm}$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{3}AM = \sqrt{85} \text{ cm}$

$\triangle SAH$ vuông tại H có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 30 \text{ cm}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 114 \cdot 30 = 1140 \text{ cm}^3$

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD . Cạnh SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

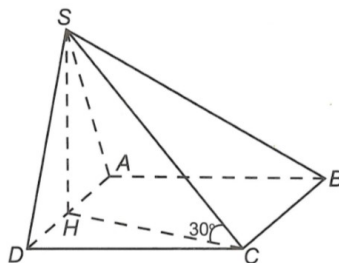
Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$.

Do HC là hình chiếu vuông góc của SC lên

$(ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCH} = 30^\circ$

+ Xét tam giác DHC vuông tại D có:



diện tích tam giác được tính theo công thức Hê-rông.

Tam giác ABC có:

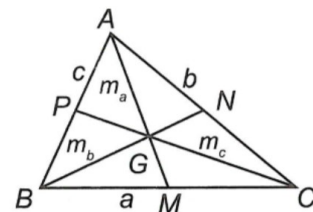
$BC = a; AC = b; AB = c$

Nửa chu vi: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Khi đó:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Công thức độ dài trung tuyến:



$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

$$HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$$

+ Xét tam giác SHC vuông tại H có:

$$SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = HC \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}.$$

Chọn B.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AO . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3}{2}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại S có:

$$SO = AO = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow HO = \frac{AO}{2} = \frac{a}{2}$$

Xét $\triangle SHO$ vuông tại H có:

$$SH = \sqrt{SO^2 - HO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

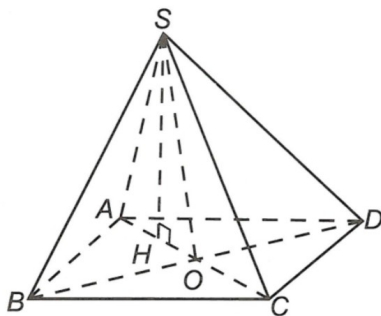
$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

Chọn B.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp SG$

$$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$$

Mặt khác $OB \perp AC$

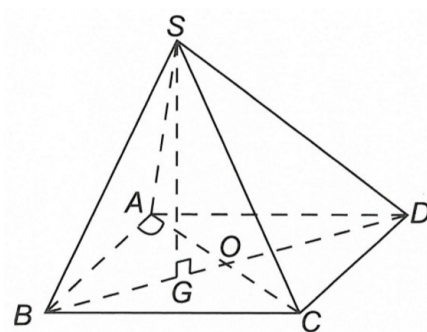
$$\Rightarrow ((SAC), (ABCD)) = \widehat{SOB} = 45^\circ$$

Xét tam giác SOG vuông tại G :

$$SG = OG \cdot \tan \widehat{SOB} = OG \cdot \tan 45^\circ = \frac{1}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{12}.$$

Chọn C.



Bài toán 5. Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau

Phương pháp giải

- Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

- Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, $AC = 14 \text{ cm}$, các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thỏa mãn $\tan \alpha = 3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

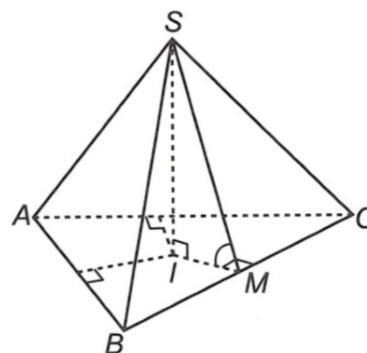
A. 228 cm^3

B. 576 cm^3

C. 192 cm^3

D. 384 cm^3

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 18(\text{cm})$$

$$S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6} (\text{cm}^2)$$

Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

$$S = p.r \Rightarrow IM = r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{3} (\text{cm})$$

ΔSIM vuông tại I có

$$SI = IM \cdot \tan \widehat{SMI} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{6} (\text{cm}).$$

Vậy

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6} = 192 (\text{cm}^3)$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ΔSGA vuông tại G có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

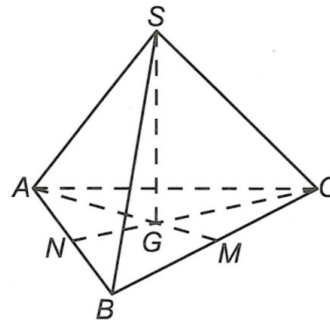
$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải



Các cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Do ΔABC đều nên hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm G

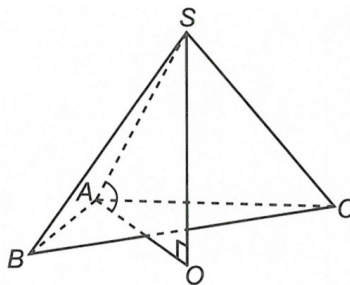
$$\Rightarrow SG \perp (ABC)$$

Cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

$$\left(\widehat{(SA), (ABC)} \right) = \widehat{SAO} = 30^\circ.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30° nên hình chiếu O của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC
 $\Rightarrow SO \perp (ABC)$
 $\Rightarrow \left((SA), (ABC) \right) = \widehat{SAO} = 30^\circ$



$$\Delta ABC \text{ có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{a \cdot a \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot OA} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA = a$$

$$\Delta SAO \text{ có } SO = AO \cdot \tan \widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

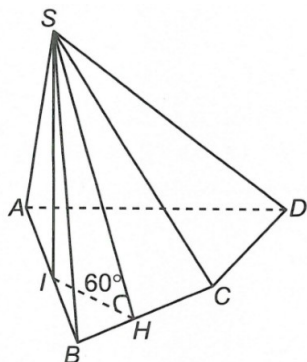
$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{12}$$

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) với mặt đáy lần lượt là 90° , 60° , 60° , 60° . Biết rằng tam giác SAB vuông cân tại S , $AB = a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ là $9a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$ B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$ C. $V = \frac{2a^3 \sqrt{3}}{9}$ D. $V = a^3 \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm AB .

Kẻ $IH \perp BC$ ($H \in BC$), ta có góc giữa $\left((SBC), (ABCD) \right) = \widehat{SHI}$

Do các mặt (SBC) , (SCD) , (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau *Kẻ $IH \perp BC$ ta có*

và bằng 60° nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD , DA bằng nhau và bằng IH .

$$\text{Ta có } SI = IH \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow IH = \frac{SI}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + CD + DA) \cdot HI = \frac{1}{2}(9a - AB) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{3}$$

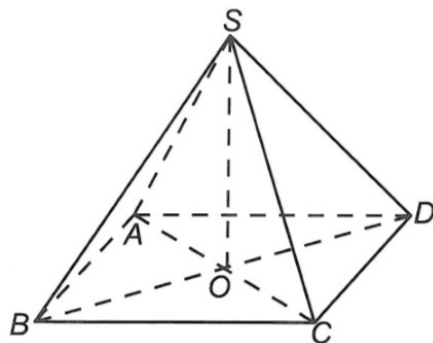
$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a^2\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$

Chọn A.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D , của mặt đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2.$$

$$AC \cap DB = \{O\}. \text{ Do } S \text{ cách đều các đỉnh } A, B, C, D \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{5} \text{ nên } \triangle SBD \text{ là tam giác đều} \Rightarrow SO = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$$

Chọn D.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc là 30° , 45° , 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) nằm trong tam giác ABC .

$$\widehat{((SBC), (ABCD))} = \widehat{SHI}.$$

Do các mặt (SBC) , (SCD) , (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD , DA bằng nhau từ đó tính được $SI = IH \cdot \tan \widehat{SIH}$

Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D nên tâm hình chữ nhật là chân đường cao hạ từ đỉnh xuống đáy.

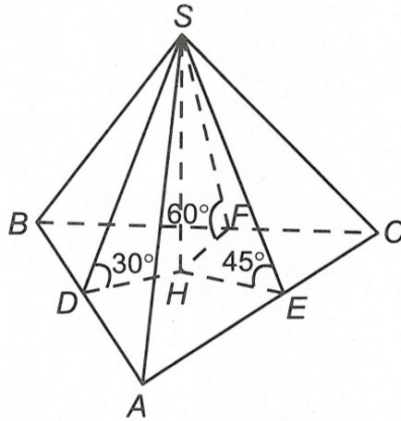
$$\text{A. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}$$

$$\text{B. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$$

$$\text{C. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4(4 + \sqrt{3})}$$

$$\text{D. } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2(4 + \sqrt{3})}$$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Kẻ $HD \perp AB (D \in AB)$, $HE \perp AC (E \in AC)$, $HF \perp BC (F \in BC)$.

Ta có $HD = SH \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}SH$, $HE = SH \cdot \cot 45^\circ = SH$,

$$HF = SH \cdot \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}SH$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ mà $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}SH \left(1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}$$

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ,

$SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. a^3

B. $2a^3$

C. $6a^3$

D. $12a^3$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 3a$, $BC = 4a$, $AC = 5a$, $AD = 6a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. $6a^3$

B. $12a^3$

C. $18a^3$

D. $36a^3$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Kẻ $HD \perp AB (D \in AB)$

$HE \perp AC (E \in AC)$

$HF \perp BC (F \in BC)$

Tam giác ABC bị chia thành 3 tam giác nhỏ do đó

$$S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}.$$

Diện tích các tam giác nhỏ biểu diễn theo cạnh SH và hệ thức lượng các tam giác vuông. Từ đó tìm được SH .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Thể tích khối chóp $S.ABMD$ là

- A. $\frac{3a^3}{4}$ B. $\frac{9a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{2}$ D. $\frac{9a^3}{2}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 45° . Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B cạnh $AB = BC = a$, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $V = \frac{a^3}{2}$ D. $V = \frac{a^3}{3}$

Câu 6: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$) và SB tạo với đáy một góc 60° . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = 9a^3$ B. $V = \frac{3a^3}{4}$ C. $V = \frac{9a^3}{2}$ D. $V = 3a^3$

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy góc 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. a^3

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{10}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = CD = 2a$, cạnh bên BC vuông góc với mặt phẳng (ACD). Thể tích khối tứ diện là

- A. $a^3\sqrt{3}$ B. $2a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SD vuông góc với đáy, cho $AB = AD = a$, $CD = 3a$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{2a^3}{3}$ B. $\frac{4a^3}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh $SD = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{2a^3}{3}$

C. $2a^3$

D. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Biết rằng $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Thể tích của khối chóp $S.BMDN$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $2a^3\sqrt{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 15: Thể tích của chóp tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp đó là

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

D. $\frac{\sqrt{2}}{9}a^3$

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Thể tích V của khối chóp đã cho là

A. $V = 4\sqrt{7}a^3$

B. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$

C. $V = \frac{4a^3}{3}$

D. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$

Câu 19: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

D. $V = \frac{3a^3}{4}$

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{8a^3}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4a^3}{3}$

D. $\frac{2a^3}{3}$

Câu 21: Một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a , các mặt bên tạo với đáy một góc α . Thể tích khối chóp đó là

- A. $\frac{a^3}{2} \sin \alpha$ B. $\frac{a^3}{2} \tan \alpha$ C. $\frac{a^3}{6} \cot \alpha$ D. $\frac{a^3}{6} \tan \alpha$

Câu 22: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích 16 cm^2 , diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ B. $V = \frac{32\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^3$ C. $V = \frac{32\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3$ D. $V = \frac{32\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3$

Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Thể tích khối chóp $M.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Câu 24: Cho một hình chóp tứ giác đều có góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $8a^2$. Tính diện tích S của mặt đáy hình chóp.

- A. $4a^2\sqrt{3}$ B. $4a^2$ C. $2a^2$ D. $2a^2\sqrt{3}$

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao h , góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{3h^3}{2}$ B. $\frac{h^3}{3}$ C. $\frac{2h^3}{3}$ D. $\frac{h^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều; mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAB vuông tại S , $SA = a\sqrt{3}$, $SB = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , có $BC = a$; mặt bên (SAC) vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp $SABC$ là

- A. $\frac{a^3}{12}$ B. a^3 C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3}{24}$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB . Biết rằng $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{24}$

C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$.
Thể tích khối $ABCD$ là.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

C. $3\sqrt{2}a^3$

D. $\sqrt{2}a^3$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng ($ABCD$) bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{13}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{7}$

Câu 33: Khối chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh CD . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng V . Thể tích khối chóp $S.ABM$ là

A. $\frac{V}{2}$

B. $\frac{V}{3}$

C. $\frac{2V}{3}$

D. $\frac{V}{6}$

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M , N , P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC , CD , DB . Thể tích của tứ diện $AMNP$ là

A. $\frac{7a^3}{2}$

B. $14a^3$

C. $\frac{28a^3}{3}$

D. $7a^3$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 18 cm. Có hai giá trị của x là x_1 ; x_2 thỏa mãn để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $972\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Tổng $x_1^2 + x_2^2$ là

A. 324

B. 486

C. 972

D. 1296

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 4a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) bằng $a\sqrt{10}$.
Thể tích khối chóp $S.HBCD$ bằng

A. $\frac{40a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{28a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $40a^3\sqrt{3}$

D. $28a^3\sqrt{3}$

Câu 37: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$, $AD = 3BC = 3a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a bằng bao nhiêu? Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $6\sqrt{6}a^3$

B. $2\sqrt{6}a^3$

C. $2\sqrt{3}a^3$

D. $6\sqrt{3}a^3$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = a\sqrt{5}$, $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm của SC . Biết SO vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Thể tích khối chóp $M.OBC$ là

A. $2\sqrt{2}a^3$

B. $\sqrt{2}a^3$

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

D. $4a^3$

Câu 39: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = 2a^3$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ D. $V = \frac{2a^3}{3}$

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AG . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $2a^3\sqrt{3}$ B. $a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 41: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 3HA$, góc giữa SB với mặt phẳng đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh $AB = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{ACB} = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC , gọi N là trung điểm của AC , góc giữa SN và mặt phẳng đáy là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3}{18}$ C. $\frac{a^3}{9}$ D. $\frac{a^3}{12}$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AO , góc giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AC = a$ và $BC = 2a$. Mặt phẳng (SAC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là điểm H thuộc AC và $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Thể tích khối tứ diện $SMBC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{BH}$. Biết cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° .

A. $\frac{a^3}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ biết rằng hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thỏa mãn điều kiện hai điểm A và H nằm về hai phía so với đường thẳng BC đồng thời ba mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCA) cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Biết rằng tam giác ABC vuông tại A thỏa mãn điều kiện $AB = 3$, $AC = 4$ và khoảng cách từ H tới (SBC) bằng $\frac{12\sqrt{13}}{13}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $V = 8$ B. $V = 24$ C. $V = 12$ D. $V = 4$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 10cm , các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{9}{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. 600cm^3 B. 300cm^3 C. 900cm^3 D. 1200cm^3

Câu 49: Chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, $CA = 7\text{ cm}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC . Các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCA) đều tạo với đáy một góc 60° . Gọi AD , BE , CF là các đường phân giác của tam giác ABC với $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Thể tích khối chóp $S.DEF$ là

- A. $\frac{280\sqrt{6}}{143}\text{cm}^3$ B. $\frac{280\sqrt{2}}{143}\text{cm}^3$ C. $\frac{280\sqrt{3}}{143}\text{cm}^3$ D. $\frac{140\sqrt{3}}{143}\text{cm}^3$

ĐÁP ÁN

1 - A	2 - B	3 - A	4 - B	5 - C	6 - D	7 - C	8 - A	9 - D	10 - D
11 - A	12 - A	13 - B	14 - B	15 - A	16 - A	17 - D	18 - D	19 - D	20 - C
21 - D	22 - C	23 - A	24 - B	25 - C	26 - B	27 - B	28 - A	29 - C	30 - C
31 - A	32 - A	33 - A	34 - D	35 - C	36 - B	37 - B	38 - C	39 - C	40 - C
41 - D	42 - B	43 - C	44 - A	45 - D	46 - D	47 - A	48 - B	49 - A	50 - C

Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ

Bài toán 1. Thể tích lăng trụ đứng

Phương pháp giải

Hình lăng trụ đứng: Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

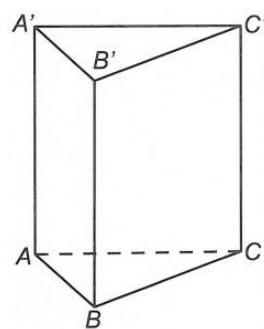
Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy.

Hình lăng trụ đều: Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC

vuông tại A , $AB = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$ cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 60° .

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{2}$.
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

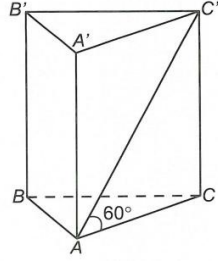
Hướng dẫn giải

$\triangle ABC$ vuông tại A có:

$$AC = AB \cdot \tan \widehat{ABC}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Ta có $\left(\widehat{C'A(ABC)} \right) = \widehat{C'AC}$



$$= 60^\circ$$

từ đó dựa vào hệ thức lượng trong $\Delta ACC'$ vuông tại C tính được

$$CC' = AC \cdot \tan \widehat{C'AC}.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ có } AC = AB \cdot \tan \widehat{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ta có } \left(\widehat{C'A(ABC)} \right) = \widehat{C'AC} = 60^\circ.$$

$$\Delta ACC' \text{ vuông tại } C \text{ có } CC' = AC \cdot \tan \widehat{C'AC} = a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh BC' hợp với mặt bên $(ACC'A)$ góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

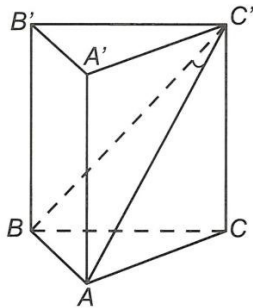
A. $a^3 \sqrt{6}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$.

C. $2a^3 \sqrt{3}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } BA \perp (ACC'A') \Rightarrow \left(\widehat{BC', (ACC'A')} \right) = \widehat{BC'A} = 30^\circ.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ có } AB = AC \cdot \cot \widehat{ABC} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\Delta ABC' \text{ vuông tại } A \text{ có}$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ có:}$$

$$AB = AC \cdot \cot \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$$

dựa vào hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A tính được

$$AC' = AB \cdot \cot \widehat{AC'B}.$$

$\Delta ACC'$ vuông tại C tính được chiều cao lăng trụ

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$$

$$AC' = AB \cdot \cot \widehat{AC'B} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a.$$

$$\Delta ACC' \text{ vuông tại } C \text{ có } CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 2a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}.$$

Chọn A.

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

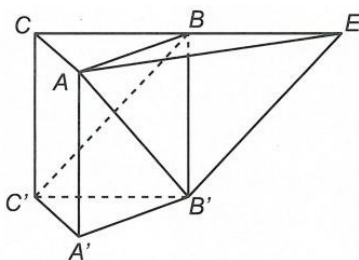
A. $V = \frac{7a^3}{8}.$

B. $V = a^3\sqrt{6}.$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$

Hướng dẫn giải



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm $B \Rightarrow AB = \frac{1}{2}CE = a.$

Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' \parallel B'E$.

Do $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp B'E$.

Mặt khác, ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'

$$\Rightarrow AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A'

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$$

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Ta lấy điểm E là điểm đối xứng với C qua B .

Khi đó tam giác ACE vuông tại A .

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' \parallel B'E$.

Do $AB' \perp BC'$

$\Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B' .

Nên tính được $AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}}.$

Dựa vào định lý Py-ta-go trong tam giác $AA'B'$ vuông tại A tính được

$$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2}.$$

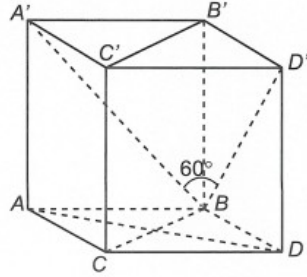
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Lấy D, D' sao cho $ABDC.A'B'D'C$ là hình hộp

$\Rightarrow BD' \parallel AC' \Rightarrow \widehat{A'BD'} = (\widehat{AC', BA'}) = 60^\circ$

Mà $AB = AC \Rightarrow A'B = BD' \Rightarrow \triangle A'BD'$ đều.

Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật,

$A'D' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2} = AA' = a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng

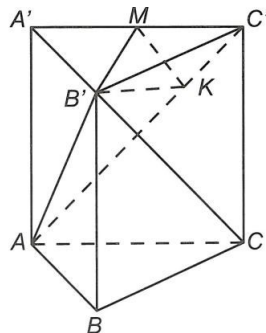
A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C'$

$\Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3} B'M.AA'.AC$.

Ta có $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$. Do $MB' \perp (AA'C'C) \Rightarrow MB' \perp AC'$.

Kẻ $MK \perp AC' \Rightarrow B'K \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là $\widehat{MKB'} \Rightarrow \widehat{MKB'} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông MKB' ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MB'}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong tam giác vuông MKC' ta có

$$\tan \widehat{MC'K} = \frac{MK}{\sqrt{MC'^2 - MK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C$ ta có

$$AA' = A'C'. \tan \widehat{MC'K} = \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} B'M.AA'.AC = \frac{1}{3} a. \frac{a\sqrt{2}}{2}. a\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}.$$

Bài toán 2. Thể tích lăng trụ xiên

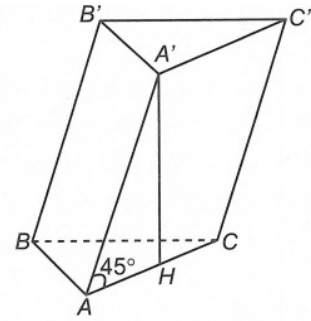
Phương pháp giải

Lăng trụ xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy. Chiều cao là khoảng cách từ một đỉnh bất kì của mặt đáy này đến mặt đáy đối diện. Để tính chiều cao ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $AA' = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AC , góc tạo bởi AA' với (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| A. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. | B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. |
| C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. | D. $a^3\sqrt{6}$. |

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$;

$$\widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{A'AH} = 45^\circ.$$

Xét tam giác $A'HA$ vuông cân tại H có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2},$$

$$\Rightarrow AH = A'H = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = AC = 2AH = a\sqrt{6}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 3a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 3a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đây là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC , góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

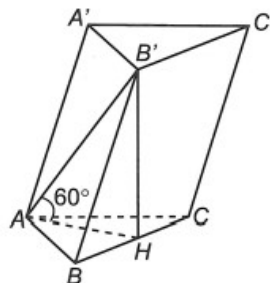
A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$. D. a^3 .

Hướng dẫn giải

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $B'H \perp (ABC)$



$$\text{Ta có } \widehat{(AB', (ABC))} = \widehat{B'AH} = 60^\circ$$

Tam giác ABC vuông tại A có

$$\text{nên: } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHB' vuông tại H

$$\Rightarrow (\widehat{AB', (ABC)}) = \widehat{B'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét tam giác AHB' vuông tại H có

$$B'H = AH \cdot \tan \widehat{B'AH} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot B'H = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^3$$

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC \perp BD$, $AC = 2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$.
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

$ABCD$ là hình thang cân

$$\Rightarrow AC = BD = 2a$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2a^2$$

$$AH = \frac{1}{3}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{2}$$

$$(\widehat{AA', (ABCD)}) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có

$$A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc A lên mặt phẳng

ta tính được chiều cao:

$$B'H = AH \cdot \tan \widehat{B'AH}$$

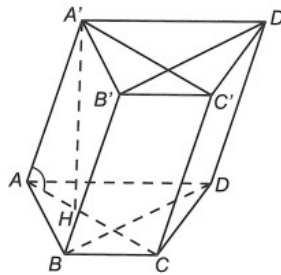
Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo $AC \perp BD$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

$$(\widehat{AA', (ABCD)}) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'HA$ vuông tại H ta tính được chiều cao:

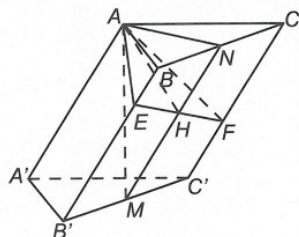
$$A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH}$$



$(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 1.
C. 2. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi N là trung điểm BC , $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E , $AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H là trung điểm EF .

Lại có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$, $d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$, $d(C, BB') = EF = 2$

Ta có $AE^2 + AF^2 = EF^2 \Rightarrow \triangle AEF$ vuông tại $A \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Mặt khác $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN \parallel AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH$.

Xét $\triangle AMN$ vuông tại A có $AM = \frac{AH \cdot AN}{\sqrt{AN^2 - AH^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow ((ABC), (AEF)) = \widehat{HAN}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{AH}{AN} \xrightarrow{\frac{AH}{AN} = \frac{1}{2}} S_{\triangle ABC} = AE \cdot AF = \sqrt{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AM = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2$.

Chọn C.

Bài toán 3. Thể tích hình hộp

 Phương pháp giải

Gọi N là trung điểm BC .

$AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E ,

$AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H

là trung điểm EF .

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases}$

$\Rightarrow AA' \perp (AEF)$

$\Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$,

$d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$,

$d(C, BB') = EF = 2$.

$\triangle AMN$ vuông tại A ta tính được chiều cao AM .

Diện tích tam giác AEF tính theo công thức

$$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \widehat{HAN}$$

Tổng quát các dạng bài này:

$$V = \frac{d_{(A, BB')} \cdot d_{(A, CC')} \cdot A'M^2}{\sqrt{4A'M^2 - d_{(C, BB')}^2}}$$

Hình hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.

Hình hộp đứng: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật: Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sau mặt của hình hộp chữ nhật đều là các hình chữ nhật.

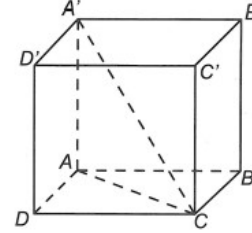
Hình lập phương: Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 4\sqrt{3}$.

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $2\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$.
C. 64. D. 125.

Hướng dẫn giải



Đặt $AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$.

$\Delta A'AC$ vuông tại A có

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3};$$

$$A'C = 4\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4^3 = 64$.

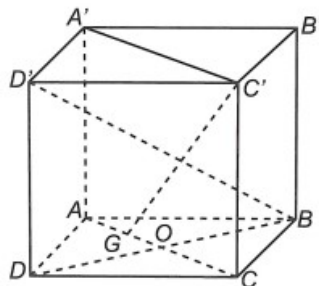
Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy bằng 30° . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$.
C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải



$$S_{ABCD} = AD \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$$

Góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy

$$\left(\widehat{C'G, (ABCD)} \right) = \widehat{C'GC}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta C'CG$ vuông tại C tính được

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

$$CC' = CG \cdot \tan \widehat{C'GC}.$$

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \Delta ACD$ đều $\Rightarrow AC = a$ và

$$CG = CO + OG = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{3}.$$

Lại có $\left(\widehat{C'G, (ABCD)} \right) = \widehat{C'GC} = 30^\circ$

Xét $\Delta C'CG$ vuông tại C có $CC' = CG \cdot \tan \widehat{C'GC} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$

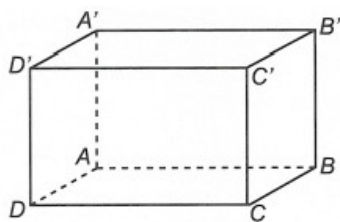
$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot CC' = \frac{a^3}{3}$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

- A. 5184 cm^3 . B. 8704 cm^3 .
C. 4608 cm^3 . D. 18496 cm^3 .

Hướng dẫn giải



Khi cắt bỏ một góc tấm bìa một hình vuông cạnh 16cm thì cạnh đáy còn lại là $50 - 2 \cdot 16 = 18(cm)$, chiều cao là 16cm.

$AA' = BB' = CC' = DD' = 16cm$ nên $ABCD$ là hình vuông có

$$AB = 50 - 2 \cdot 16 = 18(cm).$$

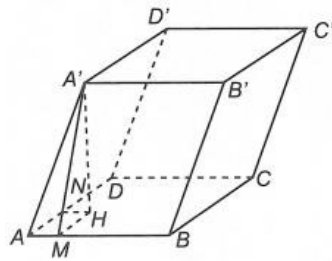
$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AC \cdot AD = 18 \cdot 18 \cdot 16 = 5184(cm^3).$$

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = \sqrt{15}$, $AD = 5$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc 30° và 60° , cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. 21. B. $\frac{15\sqrt{65}}{12}$.
C. $\frac{15\sqrt{65}}{13}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5\sqrt{15}$

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $MH \perp AB$, $NH \perp AD$ ($M \in AB$; $N \in AD$)

$$\Rightarrow \left(\widehat{(ABB'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'MH} = 30^\circ;$$

$$\left(\widehat{(ADD'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'NH} = 60^\circ$$

Đặt $A'H = x$, khi đó $A'N = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$,

$$AM = NH = \frac{x\sqrt{3}}{3}, A'M = 2x.$$

Xét $\triangle A'M$ vuông tại M có

$$A'A^2 = AM^2 + A'M^2 \Rightarrow 1 = 4x^2 + \frac{x^2}{3} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{39}}{39}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 5\sqrt{15} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{39} = \frac{15\sqrt{65}}{13}.$$

Chọn B.

Ta có

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5\sqrt{15}$$

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$,

$MH \perp AB$, $NH \perp AD$

$$\Rightarrow \left(\widehat{(ABB'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'MH}$$

$$\left(\widehat{(ADD'A'), (ABCD)} \right) = \widehat{A'NH}$$

Xét $\triangle A'AM$ vuông tại M có

$$A'A^2 = AM^2 + A'M^2$$

$$\text{Mà } A'N = \frac{A'H}{\sin 60^\circ},$$

$$AM = NH, A'M = 2A'H$$

Từ đó suy ra $A'H$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 2a$, $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. a^3 . C. $3a^3$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Đường thẳng AB' hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có $AB = 26\text{cm}$, $BC = 60\text{cm}$, $AC = 74\text{cm}$, diện tích xung quanh bằng 2880cm^2 . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. 4320 cm^3 . B. 3840 cm^3 . C. 12960 cm^3 . D. 11520 cm^3 .

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AA' = 2a$, $A'B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $5a^3$.

B. $13a^3$.

C. $\frac{5a^3}{2}$.

D. $\frac{13a^3}{2}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 30° . Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V . Tỷ số $\frac{a^3}{V}$ có giá trị là

A. $\frac{8}{3}$.

B. 8.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 7: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Thể tích khối tứ diện $AA'BC'$ là

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCCB')$ bằng 60° . Thể tích của khối đa diện $AB'CA'C'$ là

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh a . Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC . Thể tích khối đa diện $ABA'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng 45° . Thể tích của khối đa diện $ABCA'B'$ là

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{3a^3}{4}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 12: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AC = 6a, BC = 8a$, hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC , góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AC)$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $128a^3\sqrt{3}$.

B. $64a^3\sqrt{3}$.

C. $96a^3\sqrt{3}$.

D. $32a^3\sqrt{3}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 14: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ là

- A. $\frac{13a^3}{108}$. B. $\frac{7a^3}{106}$. C. $\frac{15a^3}{108}$. D. $\frac{9a^3}{208}$.

Câu 15: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 4 và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt bằng 1 và 2. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $4\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 16: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A có $AB = 1; BC = 2$. Góc $\widehat{CBB'} = 90^\circ; \widehat{ABB'} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17: Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh dài 20cm. Hình chiếu của A' xuống mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $1000\sqrt{3}m^3$. B. $2000m^3$. C. $2000\sqrt{3}m^3$. D. $1000m^3$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc AB thỏa mãn $AH = \frac{BH}{2}$, $\widehat{A'AH} = 30^\circ$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 120^\circ, AA' = \sqrt{3}a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABD . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. C. $a^3\sqrt{15}$. D. $2a^3\sqrt{5}$.

Câu 20: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 8cm$, cạnh $A'C = 10cm$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $144\sqrt{2}cm^3$. B. $192\sqrt{2}cm^3$. C. $144cm^3$. D. $192cm^3$.

Câu 21: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $AC = 6a, BD = 8a$. Chu vi của một đáy bằng 4 lần chiều cao khối hộp. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $40a^3$. B. $80a^3$. C. $240a^3$. D. $120a^3$.

Câu 22: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AC = BD' = 2\sqrt{3}$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $2\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{6}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 23: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên $AA' = 3a$ và đường chéo $AC' = 5a$. Thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $V = a^3$. B. $V = 16^3$. C. $V = 8a^3$. D. $V = 24a^3$.

Câu 24: Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a , góc nhọn 60° và đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Thể tích của khối hộp đó là

- A. a^3 . B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 25: Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 15cm và đường chéo BD' với đáy $ABCD$ một góc 30° . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 1949 cm^3 . B. 1125 cm^3 . C. 1591 cm^3 . D. 2756 cm^3 .

Câu 26: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $V = a^3\sqrt{3}$, B. $V = \frac{a^3\sqrt{21}}{7}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $V = 3\sqrt{3}a^3$. B. $V = 2\sqrt{6}a^3$. C. $V = 8a^3$. D. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt tại M , N , P , Q . Biết $AM = \frac{1}{3}a, CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{11}{30}a^3$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{11}{15}a^3$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{2}$.

Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = 3\sqrt{3}a^3$. C. $V = 8\sqrt{3}a^3$. D. $V = 216a^2$.

Câu 30: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2AB, BD' = \sqrt{10}a$, cạnh $A'C$ hợp với đáy một góc 45° . Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $\frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{10}}{3}$. D. $2\sqrt{5}a^3$.

ĐÁP ÁN

1-B	2-C	3-C	4-A	5-D	6-B	7-D	8-D	9-B	10-C
11-D	12-C	13-B	14-D	15-D	16-A	17-B	18-A	19-C	20-D
21-D	22-C	21-D	22-D	23-D	24-A	25-D	26-A	27-A	30-D

Dạng 3. Tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp gián tiếp

Bài toán 1. Tỷ số thể tích

Bài toán 1.1. Tỷ số thể tích khối chóp

Phương pháp giải

So sánh thể tích khối chóp cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích.

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của các bài toán sau

Kết quả 1.

Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy A', B', C' tương ứng trên các cạnh SA, SB, SC

Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$

Thông thường, đối với bài toán này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu...

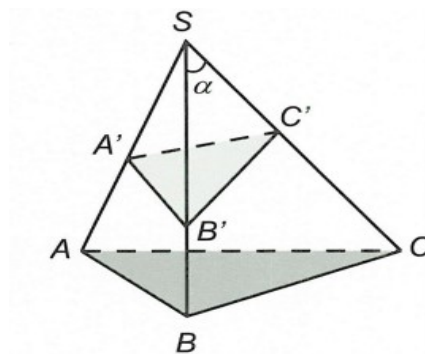
Công thức chỉ đúng khi đáy là tam giác. Nếu đáy là tứ giác, ngũ giác... ta phải phân chia đáy thành các tam giác và tính tổng thể tích các khối có đáy là tam giác.

Kết quả 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD lần lượt

Chứng minh



Đặt $\alpha = \widehat{B'SC'} = \widehat{BSC}$

Ta có $\frac{d(A', (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{SA'}{SA}$

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} &= \frac{V_{A'.SBC'}}{V_{A.SBC}} = \frac{\frac{1}{3} d(A', (SBC')) \cdot S_{\Delta SBC'}}{\frac{1}{3} d(A, (SBC)) \cdot S_{\Delta SBC}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} d(A', (SBC)) \cdot \frac{1}{2} SB' \cdot SC' \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{3} d(A, (SBC)) \cdot \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \alpha} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \end{aligned}$$

(điều phải chứng minh)

Chứng minh

1. Chứng minh $a + c = b + d$

tại A', B', C', D' với $\frac{SA}{SA'} = a; \frac{SB}{SB'} = b; \frac{SC}{SC'} = c; \frac{SD}{SD'} = d$

$(a; b; c; d > 0)$

Khi đó ta có hai công thức quan trọng sau

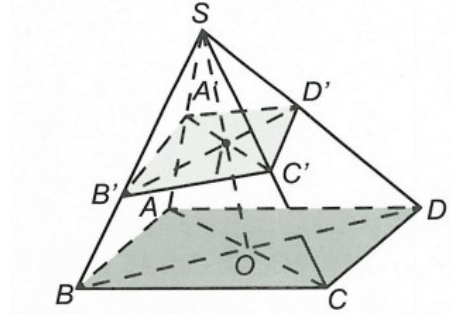
1.

$$a + c = b + d$$

2.

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd}$$

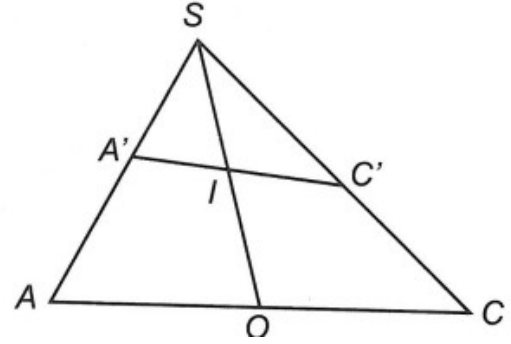
Chú ý: Các công thức 1, 2 chỉ áp dụng cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Các công thức này được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện nên tận dụng khi làm trắc nghiệm để không phải làm theo phương pháp chia nhỏ đáy thành các tam giác.



Gọi

O là

tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và



$(A'B'C'D')$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{SAO} &= S_{SOC} \Rightarrow \frac{S_{SAI}}{S_{SAO}} + \frac{S_{SCI}}{S_{SCO}} = \frac{2S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \\ &\Leftrightarrow \frac{SA' \cdot SI \cdot \sin \widehat{A'SI}}{SA \cdot SO \cdot \sin \widehat{ASO}} + \frac{SC' \cdot SI \cdot \sin \widehat{C'SI}}{SC \cdot SO \cdot \sin \widehat{CSO}} \\ &= 2 \cdot \frac{SA' \cdot SC' \cdot \sin \widehat{A'SC'}}{SA \cdot SC \cdot \sin \widehat{ASC}} \\ &\Leftrightarrow \frac{SA' \cdot SI}{SA \cdot SO} + \frac{SC' \cdot SI}{SC \cdot SO} = 2 \cdot \frac{SA' \cdot SC'}{SA \cdot SC} \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với $\frac{SA \cdot SC \cdot SO}{SA' \cdot SC' \cdot SI}$

$$\text{ta được } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} \quad (1)$$

$$\text{Chúng minh tương tự } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

Hay $a + c = b + d$ (điều phải chứng minh)

$$\text{2. Chứng minh } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A'D'C'}}{2V_{S.ADC}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} \right) = \frac{d+b}{2abcd}
\end{aligned}$$

$$\text{Do } a+c=b+d \text{ suy ra } b+d = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

(điều phải chứng minh)

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện AMND và khối tứ diện ABCD là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

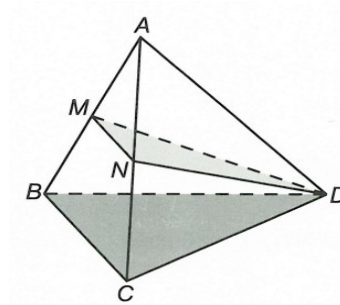
C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{V_{AMND}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AD}{AD} = \frac{1}{4}$$

Chọn B



Ví dụ 2. Cho hình chóp SABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2MB, BN = 4NC, SP = PC$. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.BMN và A.CPN là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. 1.

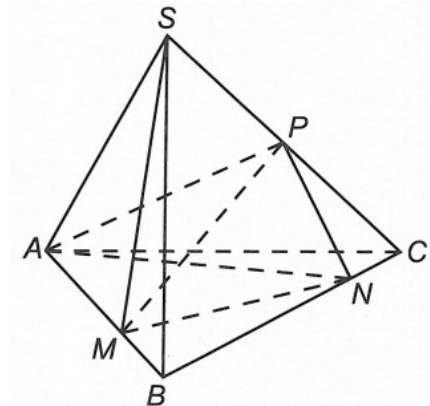
Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{B.MNS}}{V_{B.ACS}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BS}{BS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{C.ANP}}{V_{C.ABS}} = \frac{CA}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CS} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}} = \frac{4}{15} : \frac{1}{10} = \frac{8}{3}$$

Chọn B



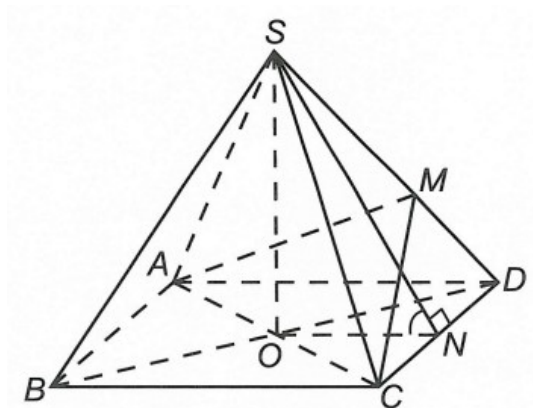
Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối

chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$ gần nhất với giá trị nào

trong các giá trị sau?

- A. 0,11. B. 0,13. C. 0,7. D. 0,9.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SNO} = \alpha$$

Kẻ $CM \perp SD$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$$

$$\Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD) \text{ nên mặt phẳng } (P) \text{ là } (ACM)$$

$$\text{Xét tam giác SON vuông tại O có } SN = \frac{ON}{\cos \widehat{SNO}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3a}{2}$$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SOD vuông tại O có

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD \Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$$

Xét tam giác MCD vuông tại M có

$$DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2 \cdot V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{DC}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow V_{MACD} = \frac{1}{10} V_{SABCD}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành 2 khối MACD và SABCM

$$V_{SABCD} = V_{MACD} + V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM} = \frac{9}{10} V_{SABCD}$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \frac{1}{9} \approx 0,11$$

Chọn A

Tổng quát: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α . Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp S.ABCD thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện là

$$\frac{V_1}{V_2} = \cos^2 \alpha$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } SD &= \sqrt{SN^2 + ND^2} = \sqrt{ON^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \widehat{SNO}} + ND^2} \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{a}{2 \cdot \cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD$$

$$\Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{a}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot a}{\frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

$$\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2 \cdot V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DA} \cdot \frac{DC}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}}{\frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$$

$$V_{MACD} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCM} = \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}\right) V_{SABCD} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} V_{SABCD}$$

Do vậy $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \cos^2 \alpha$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a$; $SC = 2a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V . Tỉ số $\frac{6V}{a^3}$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm SC.

Ta có $SM = a \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại S.

Gọi H là trung điểm của AM.

Ta có $AM^2 = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow SH = \frac{1}{2} AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $SM = SB = a$ và $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên $\triangle BSM$ đều

$$\Rightarrow BM = a$$

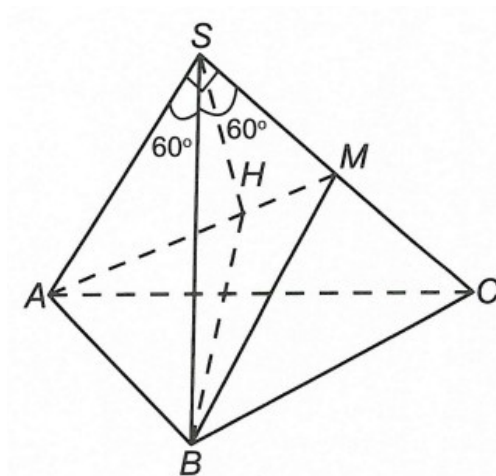
$\triangle SAB$ có $SA = SB = a$; $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều

$$\Rightarrow AB = SA = a$$

Suy ra $AB = BM = a \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại B.

Mặt khác $AB^2 + BM^2 = 2a^2$ và $AM^2 = 2a^2 \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2$

$$\Rightarrow \triangle ABM \text{ vuông cân tại B (định lý Py-ta-go đảo)} \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{Ta có } SH^2 + BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2$$

$\Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H (định lý py-ta-go đảo).

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$.

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2}$$

Chọn B.

Tổng quát: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{ASC} = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA'; SB = 3SB'; SC = 4SC'$, mặt phẳng $(A'B'C')$ cắt cạnh SD tại D' .

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

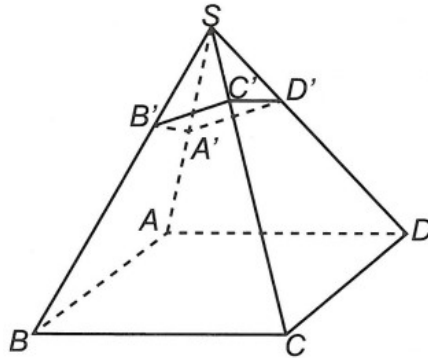
A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{26}$.

C. $\frac{7}{12}$.

D. $\frac{7}{24}$.

Hướng dẫn giải



Cách 1. Phân chia đáy thành 2 tam giác

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow 2 + 4 = 3 + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow \frac{SD}{SD'} = 3 \Rightarrow SD = 3SD'$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{24} S_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{24} S_{S.ACD}$$

$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{V_{S.ABC} + V_{S.ACD}}{24} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{24}$$

Cách 2. Áp dụng trực tiếp công thức

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'}}{4 \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}} = \frac{2+4+3+3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{24}$$

Chọn A.

Bài toán 1.2. Tỷ số thể tích khối lăng trụ

 **Phương pháp giải**

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán

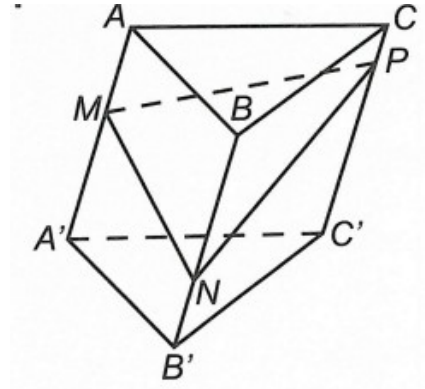
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các điểm **Chứng minh**
M, N, P lần lượt thuộc các cạnh

AA', BB', CC' sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = a, \frac{BN}{BB'} = b, \frac{CP}{CC'} = c$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\text{Đặc biệt: } \frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a}{3}, \frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{b+c}{3}$$



Ta có

$$\begin{aligned} V_{A.BCC'B'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} \\ &= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} &= \frac{\frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{ABC}}{d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{d(M; (ABC))}{d(A'; (ABC))} = \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3} a \end{aligned}$$

Suy ra

$$V_{M.ABC} = \frac{a}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

Ta có

$$AM \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(M; BCPN) = d(A; BCPN)$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A.BCPN}$$

$$\begin{aligned}
\text{Suy ra } \frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} &= \frac{V_{A.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(BN+CP).d(C;BB')}{BB'.d(C;BB')} = \frac{BN+CP}{2BB'} \\
&= \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2BB'} = \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2CC'} = \frac{b+c}{2} \\
\Rightarrow V_{M.BCPN} &= \frac{b+c}{2} V_{A.BCC'B'} \\
\Rightarrow V_{M.BCPN} &= \frac{b+c}{2} \cdot \frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3} \\
\Rightarrow V_{M.BCPN} &= \frac{b+c}{3} V_{ABC.A'B'C'}
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
V_{ABCMNP} &= V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \frac{a+b+c}{3} V_{ABC.A'B'C'} \\
\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} &= \frac{a+b+c}{3} \text{ (điều phải chứng minh).}
\end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = MA', BN = 3NB', CP = 3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP$, V_2 là thể tích

khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

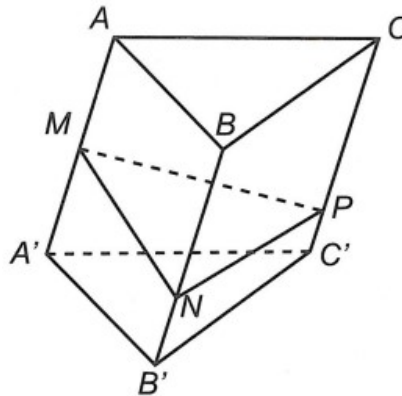
A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải



Ta có

$$MA = MA' \Rightarrow \frac{MA}{AA'} = \frac{1}{2}; BN = 3NB' \Rightarrow \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{4}; CP = 3PC' \Rightarrow \frac{CP}{CC'} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Đặt } V = V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA' = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2, BN = x, CP = y$ với x, y là các số dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{1}{2}V$. Giá trị của $x^2 + y^2$ bằng

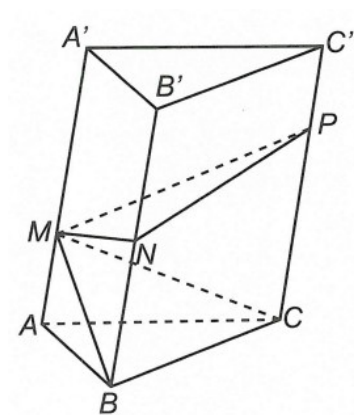
A. 24.

B. 25.

C. 10.

D. 17.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}; \frac{BN}{BB'} = \frac{x}{6}; \frac{CP}{CC'} = \frac{y}{6}; \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } x + y = 7 \Rightarrow (x + y)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Chọn B.

Bài toán 1.3. Tỷ số thể tích khối hộp

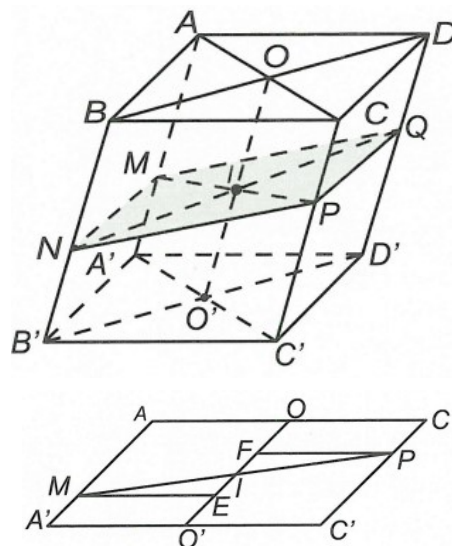
 **Phương pháp giải**

Cho hình khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = a, \frac{BN}{BB'} = b, \frac{CP}{CC'} = c, \frac{DQ}{DD'} = d$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ &= \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \end{aligned}$$



Chứng minh

Xét mặt phẳng $ACC'A'$

Từ M, P ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt OO' theo thứ tự E, F

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} &= \frac{OE}{OO'} + \frac{OF}{OO'} \\ &= \frac{OI + IE}{OO'} + \frac{OI - IF}{OO'} = \frac{2OI}{OO'} \end{aligned}$$

Tương tự xét mặt phẳng $BDD'B'$

$$\text{Ta cũng có } \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{2OI}{OO'}$$

Do đó

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \Rightarrow a + c = b + d$$

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối $ABC.A'B'C'$ và $ACD.A'C'D'$

Áp dụng tỉ số thể tích của khối lăng trụ tam giác ta được

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ &= \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \end{aligned}$$

📌 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC' . Mặt phẳng (α) đi qua AN cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại M, P. (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. 2.

C. 3.

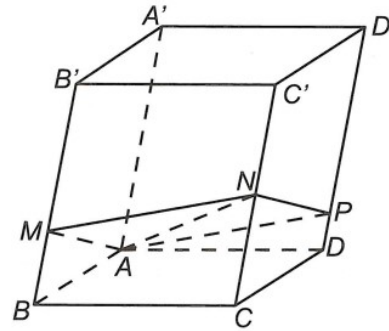
D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có

$$\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AA'}{2} + \frac{CN}{2}}{AA'} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNPA'B'C'D'}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 3$$



Chọn C

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $36cm^3$. Gọi hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AA', CC' sao cho $AM = 2A'M, CN = 3C'N$. Một mặt phẳng đi qua M, N lần lượt cắt cạnh BB', DD' tại P và Q. Thể tích khối $ABCDMPNQ$ bằng

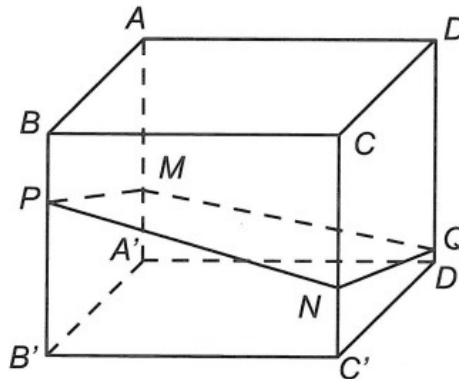
A. $18cm^3$.

B. $22cm^3$.

C. $10,5cm^3$.

D. $25,5cm^3$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \frac{V_{ABCDMPNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AM}{3} + \frac{CN}{4}}{AA'} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1} = \frac{17}{24}$$

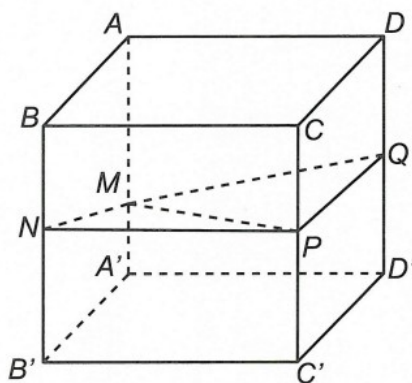
$$V_{ABCDMPNQ} = \frac{17}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{17}{24} \cdot 36 = 25,5cm^3$$

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho $AM = 2A'M, 2BN = 3B'N; 3CP = 4C'P; 4DQ = 5D'Q$. Thể tích khối $ABCDMNPQ$ bằng

- A. $\frac{572V}{945}$. B. $\frac{13V}{21}$. C. $\frac{26V}{45}$. D. $\frac{559V}{945}$.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{26}{21}; \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{52}{45}$$

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} > \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$$

Cạnh MP sẽ lách trên. Khối đa diện lồi $ABCDMNPQ$ được chia thành hai khối đa diện theo cạnh MP là BACNMP và DACQMP.

$$\text{Ta có } \frac{V_{BACNMP}}{V_{BACB'A'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{193}{315}$$

$$\Rightarrow V_{BACNMP} = \frac{193}{315} V_{BACB'A'C'} = \frac{193V}{630}$$

$$\frac{V_{DACQMP}}{V_{DACD'A'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{DQ}{DD'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{113}{189}$$

$$\Rightarrow V_{DACQMP} = \frac{113}{189} V_{DACD'A'C'} = \frac{113V}{378}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCDMNPQ} = V_{BACNMP} + V_{DACQMP} = \frac{193V}{630} + \frac{113V}{378} = \frac{572V}{945}$$

Chọn A.

Bài toán 1.3. Tỷ số thể tích khối hộp

Phương pháp giải

Để tính thể tích các khối đa diện phức tạp ta không tính trực tiếp mà tính gián tiếp thông qua việc tính thể tích các khối đơn giản (khối chóp, khối lăng trụ).

Ví dụ: Cắt khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bởi các mặt phẳng $(AB'D')$, $(CB'D')$, $(B'AC)$, $(D'AC)$ ta được

+ Khối đa diện A được tạo bởi các khối đơn khối đa diện có thể tích lớn nhất là

giản $A_1, A_2, \dots, A_n$. Khi đó

$$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + \dots + V_{A_n}.$$

+ Khối đa diện A được bổ sung thêm các khối cơ

bản $A_1, A_2, \dots, A_n$ để tạo thành khối cơ bản B

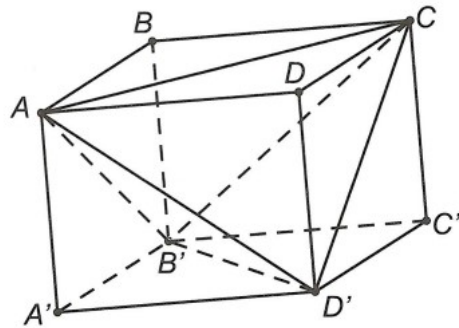
Khi đó $V_A = V_B - (V_{A_1} + V_{A_2} + \dots + V_{A_n})$.

+ Ta có thể sử dụng khôi phục lại hình ảnh ban đầu để tính toán dễ dàng hơn.

+ Sử dụng phương pháp trải hình trên mặt phẳng để dễ hình dung và tính toán thuận tiện hơn.

- A. $A'AB'D'$. B. $D'ADC$.
C. $ACB'D'$. D. $CC'B'D'$.

Hướng dẫn giải



Cắt khối hộp bởi các mặt phẳng

$(AB'D')$, $(CB'D')$, $(B'AC)$, $(D'AC)$ ta được 5

khối tứ diện $AA'B'D'$, $B'ABC$,

$CC'B'D'$, $D'DAC$, $AB'D'C$.

Gọi V là thể tích của khối hộp.

$$V_{AA'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = \frac{1}{6}V$$

Suy ra $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V$ nên tứ diện $ACB'D'$ có thể

tích lớn nhất

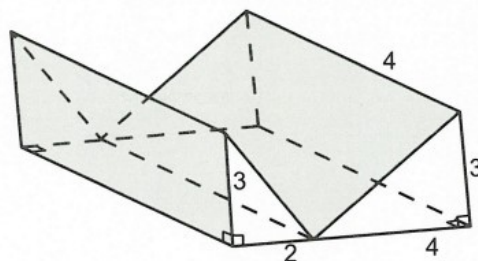
Chọn C.

🌈 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Một khúc gỗ có dạng và độ dài các cạnh được cho như hình vẽ. Thể tích khúc gỗ là

- A. $V = 12$. B. $V = 96$. C. $V = 36$. D. $V = 24$.

Hướng dẫn giải



Khúc gỗ được chia thành 2 phần, mỗi phần là một lăng trụ tam giác có đáy là các tam giác vuông, chiều cao khối lăng trụ bằng 4.

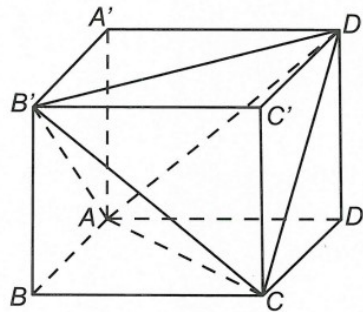
$$\text{Thể tích khối gỗ là } V = V_1 + V_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 36.$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Thể tích của khối tứ diện $A.CB'D'$ bằng

- A. $8cm^3$. B. $12cm^3$. C. $16cm^3$. D. $4cm^3$.

Hướng dẫn giải



Khối hộp được tạo thành từ 5 khối $B.AB'C$; $D.ACD'$; $A'.B'AD'$; $C.B'C'D'$; $A.CB'D'$.

$$\text{Ta có } V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'} \Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$$

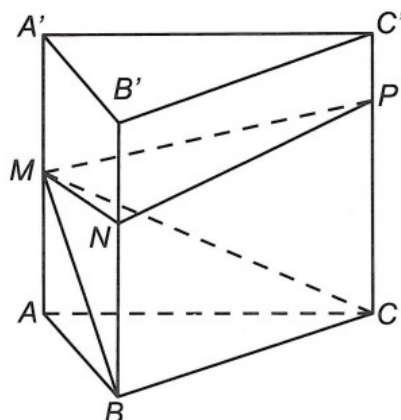
$$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12cm^3.$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = \frac{1}{2}AA'$; $BN = \frac{2}{3}BB'$; $CP = \frac{3}{4}CC'$. Thể tích khối chóp $M.BCPN$ là

- A. $\frac{7V}{36}$. B. $\frac{17V}{36}$. C. $\frac{7V}{18}$. D. $\frac{11V}{18}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC}$

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}MA.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AA'.S_{ABC} = \frac{V}{6}.$$

Mặt khác $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{1}{3} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{B'N}{BB'} + \frac{C'P}{CC'} \right)$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) V_{A'B'C'.ABC} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{13}{36} V.$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{M.ABC} - V_{A'B'C'.MNP} = V - \frac{V}{6} - \frac{13}{36} V = \frac{17V}{36}.$$

Chọn B.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Hai cạnh AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp S.ABCD tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là $V_1; V_2 (V_1 < V_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{5}{11}.$

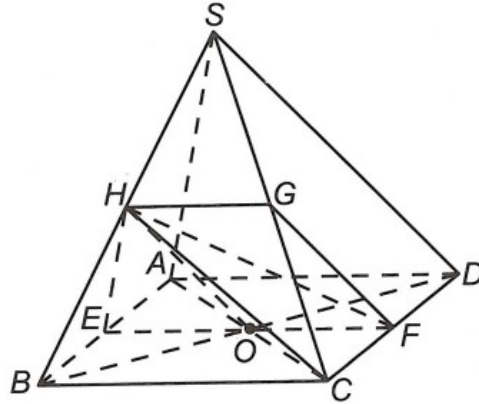
B. $\frac{3}{5}.$

C. $\frac{7}{13}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1:



Gọi h, V, S_{ABCD} lần lượt là chiều cao, thể tích và diện tích đáy của hình chóp S.ABCD. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp S.ABCD tạo thành thiết diện như hình vẽ. Khi đó $V_{HGFCBE} = V_1$ và thể tích phần còn lại là $V_2 (V_1 < V_2)$.

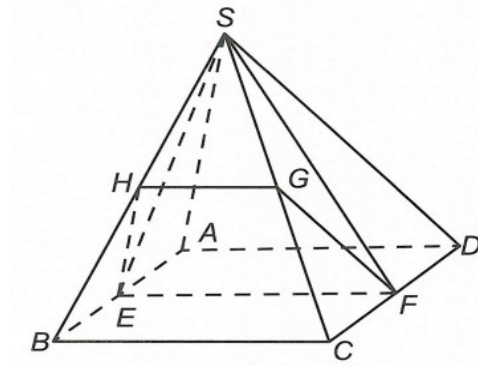
$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{HGFCBE} &= V_{H.BEO} + V_{H.BOC} + V_{H.OCF} + V_{G.HCF} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle BEO} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle BOC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} S_{\triangle OCF} + \frac{1}{2} V_{B.GCF} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} (S_{\triangle BEO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle OCF}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{\triangle BCF} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{BEFC} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{S_{ABCD}}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} h \cdot S_{ABCD} \right) = \frac{1}{4} V + \frac{1}{16} V = \frac{5}{16} V.
\end{aligned}$$

Suy ra $V_1 = \frac{5}{16} V$. Do đó $V_2 = V - V_1 = V - \frac{5}{16} V = \frac{11}{16} V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Cách 2:



Ta có $V_{S.ADFE} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ADFE} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{S}{2} = \frac{V}{2}$.

Lại có $\frac{V_{S.EFGH}}{V_{S.EFCB}} = \frac{\frac{SE}{SE} + \frac{SF}{SF} + \frac{SB}{SH} + \frac{SC}{SG}}{4 \cdot \frac{SE}{SE} \cdot \frac{SF}{SF} \cdot \frac{SB}{SH} \cdot \frac{SC}{SG}} = \frac{1+1+2+2}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{S.EFGH} = \frac{3}{8} V_{S.EFCB} = \frac{3V}{16}$.

Do đó $V_{S.ADFGHE} = V_{S.ADFE} + V_{S.EFGH} = \frac{V}{2} + \frac{3V}{16} = \frac{11V}{16} = V_2$ suy ra $V_1 = \frac{5}{16} V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh 2a, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4} DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N. Thể tích khối đa diện AMNPBCD bằng

A. $V = 2a^3$.

B. $V = 3a^3$.

C. $V = \frac{9a^3}{4}$.

D. $V = \frac{11a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Thể tích khối lập phương ABCD.A'B'C'D' là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Cách 1: Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông ABCD và A'B'C'D', gọi $K = OO' \cap MP$, khi đó $N = AK \cap CC'$.

$$\text{Ta có } OK = \frac{1}{2}(DP + BM)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4} \Rightarrow CN = 2OK = \frac{3a}{2}.$$

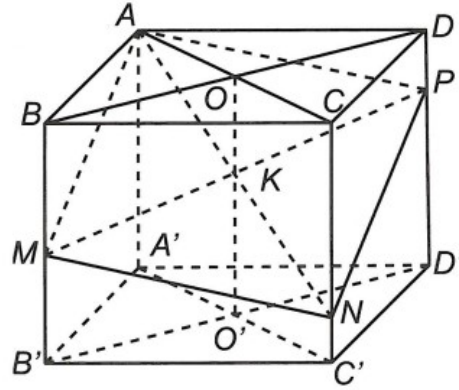
$$S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BM + CN) \cdot BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right) \cdot 2a = \frac{5a^2}{2}.$$

$$V_{A.BMNC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BMNC} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2}{2} \cdot 2a = \frac{5a^3}{3}.$$

$$S_{DPNC} = \frac{1}{2}(DP + CN) \cdot CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right) \cdot 2a = 2a^2.$$

$$V_{A.DPNC} = \frac{1}{3} \cdot S_{DPNC} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 2a = \frac{4a^3}{3}.$$

$$V = V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3.$$



Cách 2:

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích khối hộp, ta có

$$\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) \Rightarrow \frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow V_{AMNPBCD} = \frac{3}{8} \cdot 8a^3 = 3a^3.$$

Chọn B.

Ví dụ 6. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện BMNPQD bằng

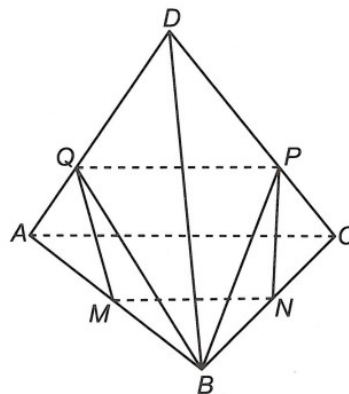
A. $\frac{\sqrt{2}}{16}.$

B. $\frac{25\sqrt{2}}{432}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{48}.$

D. $\frac{13\sqrt{2}}{432}.$

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } MN \parallel AC \text{ và } PQ = (MNP) \cap (ACD) \Rightarrow PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{2}{3}.$$

Thể tích khối tứ diện đều ABCD là $V = V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Chia khối đa diện cần tính thành các khối tứ diện D.PQB; B.MNQ; B.PQN.

Ta có $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

Trong đó $V_{D.PQB} = \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} \cdot \frac{DP}{DC} \cdot V = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V = \frac{4}{9}V$.

$V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot V_{B.ACQ} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} \cdot V = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot V = \frac{1}{12}V$.

$V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ACD}} \cdot V = \frac{1}{6}V$.

Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right)V = \frac{25\sqrt{2}}{432}$.

Chọn B.

Ví dụ 7. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh AA'=2a và tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối tứ diện ACA'B' là

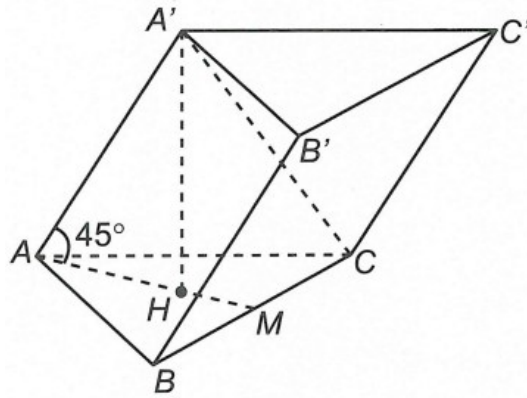
A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC).

$\triangle ABC$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $(\widehat{AA'}, (\widehat{ABC})) = \widehat{A'AH} = 45^\circ$.

$\triangle A'AH$ vuông tại H có $A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a\sqrt{2}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp C.A'B'C', B'.ABC và A.CA'B'.

Ta có $V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

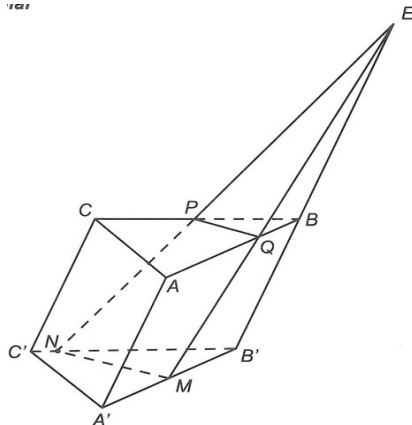
$$\Rightarrow V_{ACA'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Chọn A.

Ví dụ 8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 15. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh $A'B'$, $B'C'$, BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{4}{5} B'C'$ và $BP = \frac{3}{5} BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

- A. $\frac{23}{64}$. B. $\frac{49}{16}$. C. $\frac{83}{8}$. D. $\frac{45}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{d(E, (A'B'C'))}{d(B, (A'B'C'))} = \frac{EB'}{BB'} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(E, (A'B'C')) = \frac{3}{4} d(B, (A'B'C'))$$

Lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'M}{B'A'} \cdot \frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{E.MB'N} &= \frac{1}{3} d(E, (MB'N)) \cdot S_{MB'N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} d(B, (A'B'C')) \cdot \frac{2}{5} S_{A'B'C'} \\ &= \frac{8}{15} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8}{15} \cdot 15 = 8. \end{aligned}$$

$$\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EB}{EB'} = \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{E.QPB} = \frac{27}{64} V_{E.MB'N}.$$

Suy ra $V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{E.BQP} = V_{E.MB'N} - \frac{27}{64} V_{E.MB'N} = \frac{37}{64} V_{E.MB'N} = \frac{37}{64} \cdot 8 = \frac{37}{8}$.

Vậy $V_{AQPCA'MNC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 15 - \frac{37}{8} = \frac{83}{8}$.

Chọn C.

Ví dụ 9. Cho tứ diện ABCD có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$; $AB=a$; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30° . Thể tích của tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$;

$\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB=a$, $\widehat{ABH} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle HAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow AH=AB=a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC=a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA (E \in AD) \\ HF \perp DB (F \in BD) \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB) \text{ và } HF \perp (DBC)$.

Suy ra $(\widehat{DBA}, \widehat{DBC}) = (\widehat{HE}, \widehat{HF}) = \widehat{EHF}$

Đặt $DH=x$, khi đó $HE = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $HF = \frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$.

Suy ra $\cos \widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{6}$.

Chọn D.

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$; $AC = BD = 5$; $AD = BC = 6$.

Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$

B. $\frac{15\sqrt{6}}{2}$

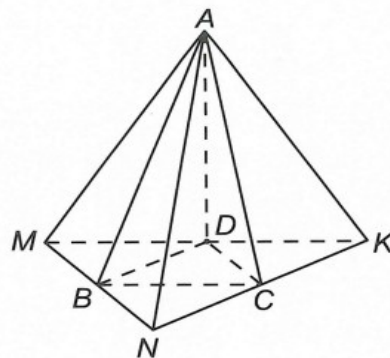
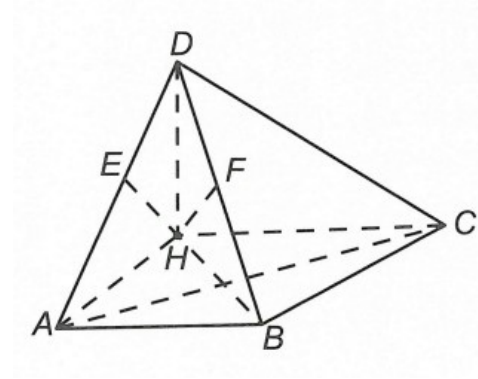
C. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{45\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải

Dựng tứ diện AMNK sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM.

Tứ diện AMNK có AM, AN, AK đôi vuông góc.



Chú ý: Cho khối tứ diện gần đều có độ dài các cạnh

$$\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = a^2 + b^2 - c^2 \\ y = b^2 + c^2 - a^2 \\ z = a^2 + c^2 - b^2 \end{cases}$

Khi đó

một $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{xyz}$

$$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}$$

$$V_{AMNK} = \frac{1}{6} AM \cdot AN \cdot AK = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 15\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{V_{AMNK}}{4} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$$

Chọn A

Ví dụ 11. Một con kiến đang ở vị trí M là trung điểm

cạnh $A'D'$ của một chiếc hộp hình lập phương

$ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 5cm.

Con kiến muốn bò qua sáu mặt của chiếc hộp

rồi quay trở lại M. Quãng đường bò đi ngắn

nhất của con kiến là

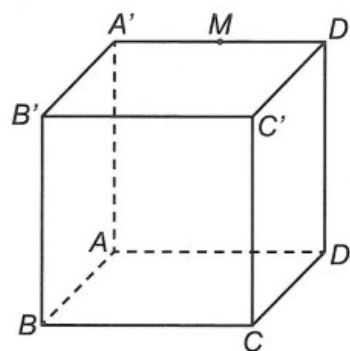
A. $16\sqrt{2}cm$.

B. $15\sqrt{2}cm$.

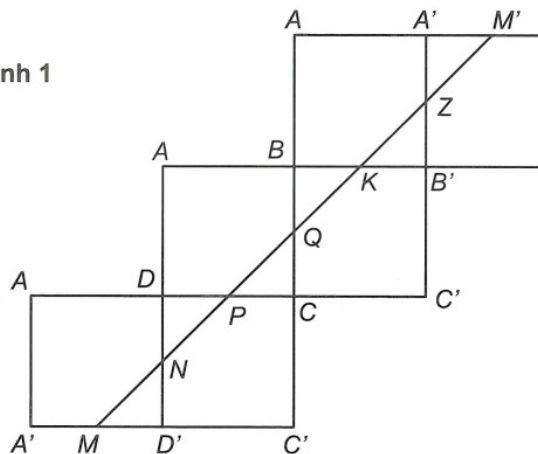
C. $12\sqrt{2}cm$.

D. $13\sqrt{2}cm$.

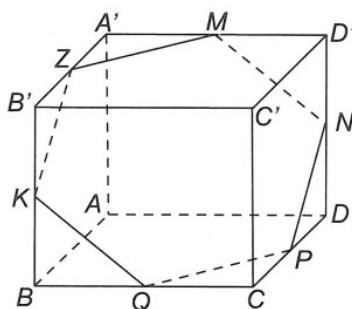
Hướng dẫn giải



Hình 1



Hình 2



Trải sáu mặt phẳng của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ 1. Để đi đường ngắn nhất từ M đến M' ($M \equiv M'$ hay M' là trung điểm $A'D'$ trên mặt khai triển) thì con kiến cần bò theo đoạn MM' . Trên chiếc hộp, đường đi ngắn nhất của con kiến là đường $MNPQKZM$ như hình 2 với N, P, Q, K, Z lần lượt là trung điểm của $DD', CD, BC, BB', A'B'$.

Quãng đường ngắn nhất con kiến bò là đoạn $MNPQKZM$.

Ta có $MNPQKZM = MN + NP + PQ + QK + KZ + ZM$.

Các đoạn thẳng con kiến bò trên các mặt hình lập phương đều có độ dài bằng nửa độ dài đường chéo hình vuông.

Do đó quãng đường con kiến bò ngắn nhất là $6 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$

Chọn B.

Ví dụ 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ một con kiến bò từ đỉnh A của đáy để đi tất cả các mặt xung quanh rồi trở về vị trí A . Biết cạnh bên bằng 6cm, cạnh đáy bằng 4cm. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi là

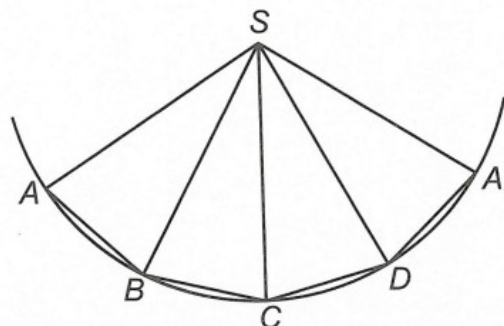
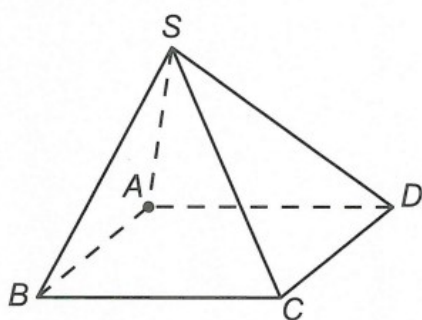
A. 13,48cm .

B. 10,25cm .

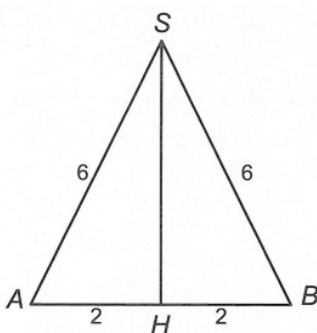
C. 12,05cm .

D. 11,73cm .

Hướng dẫn giải



Trải hình chóp thành hình như hình vẽ trên. Khi đó quãng đường ngắn nhất con kiến phải bò là AA_1



Ta có $\sin \widehat{ASH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{ASH} = 19^0 28' \Rightarrow \widehat{ASA_1} = 8.19^0 28' = 155^0 46'$

$\Rightarrow AA_1 = \sqrt{SA^2 + SA_1^2 - 2SA.SA_1 \cos \widehat{ASA_1}} = 11,73cm$

Chọn D.

Ví dụ 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $\widehat{SAB} = \frac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm cạnh SA .

Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a là

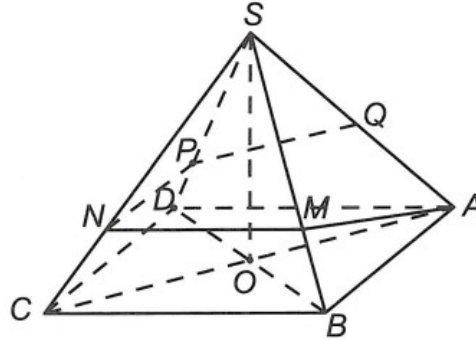
A. $\frac{a\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{24}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

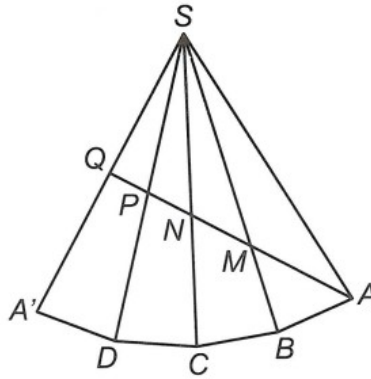
C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3} \sin \frac{11\pi}{12}}{3}$

Hướng dẫn giải



Trải phẳng



Do hình chóp tứ giác đều nên mỗi mặt bên đều là các tam giác cân, theo giả thiết $\widehat{SAB} = \frac{11\pi}{24}$ nên

$$\widehat{ASB} = \pi - \frac{22\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải các mặt bên thành một mặt phẳng ta được hình vẽ như trên sao cho khi ghép lại thì $A \equiv A'$. Khi đó, tổng $AM + MN + NP + PQ$ là tổng các đường gấp khúc nên tổng này nhỏ nhất nếu xảy ra các điểm A, Q, M, N, P thẳng hàng và Q là hình chiếu của A trên SA' .

$$\text{Đồng thời theo (1) ta có } \widehat{ASA'} = 4 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

Suy ra $\triangle ASA'$ là tam giác đều.

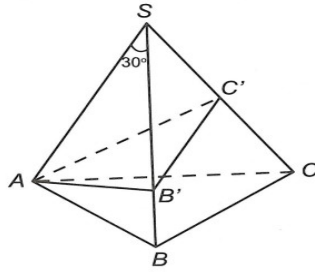
$$\text{Vậy } AQ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ hay GTNN của tổng } AM + MN + NP + PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn B.

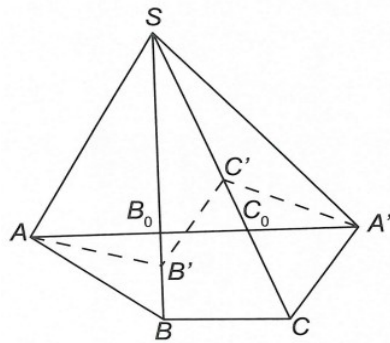
Ví dụ 14. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 30^\circ$, $SA = 1$. Lấy B', C' lần lượt thuộc cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tỉ số $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

- A. 0,55. B. 0,65. C. 0,45. D. 0,75.

Hướng dẫn giải



Trái phằng



Cắt tứ diện theo các cạnh

SA, AC, AB rồi trải lên mặt (SBC) .

Tam giác SBC giữ nguyên; tam giác SAB lật thành tam giác $\triangle SAB$; tam giác SAC thành tam giác $\triangle SCA'$

Do đó $AC' = A'C', SA' = SA = 1$

$\widehat{ASA'} = \widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA'} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$ và $SA' = SA = 1$ nên $\triangle SAA'$ là tam giác vuông cân tại S.

$C_{AB'C'} = AB' + B'C' + AC' = AB' + B'C' + A'C' \geq AA' = \sqrt{2}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, B', C', A' thẳng hàng tức là khi $B' = B_0, C' = C_0$.

Ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SB_0}{SB} = \frac{SB_0}{SA} = \frac{\sin \widehat{SAB_0}}{\sin \widehat{SB_0A}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = -1 + \sqrt{3}$

Vậy $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \left(\frac{SB'}{SB}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$.

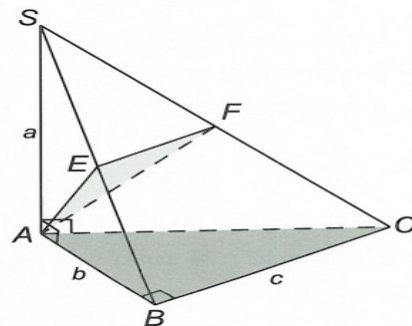
Chọn A

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hình vẽ bên với E, F lần lượt là trung điểm các cạnh bên SB và SC.

Khối chóp S.AEF có thể tích là

- A. $\frac{1}{24}abc$. B. $\frac{1}{12}abc$.
C. $\frac{1}{8}abc$. D. $\frac{11}{12}abc$.



Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Thể tích của khối chóp S.AMN là

- A. $\frac{2a^3}{27}$. B. $\frac{2a^3}{9}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau $AB = a$; $AC = 2a$ và $AD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BD, CD. Thể tích của tứ diện ADMN là

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc SC tại H và cắt SB tại K. Thể tích khối chóp S.AHK là

- A. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{20}$. B. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{30}$. C. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{60}$. D. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{90}$.

Câu 5: Cho tứ diện ABCD có $DA = 1$, $DA \perp (ABC)$. $\triangle ABC$ là tam giác đều, có cạnh bằng 1. Trên ba cạnh DA, DB, DC lần lượt lấy ba điểm M, N, P mà $\frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}$, $\frac{DN}{DB} = \frac{1}{3}$, $\frac{DP}{DC} = \frac{3}{4}$. Thể tích của tứ diện MNPD là

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{96}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{96}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều S.ABCD. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tỉ số $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}$ có giá trị là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB và SC. Thể tích của khối chóp A.BCKH là V. Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ gần nào nhất giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác S.ABC có M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh SC sao cho $NS = 2NC$, P là điểm trên cạnh SA sao cho $PA = 2PS$. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện BMNP và SABC. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{9}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 9: Cho tứ diện S.ABC, M và N là các điểm lần lượt thuộc SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia

khối tứ diện S.ABC bởi mặt phẳng (α) , trong đó (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2) . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 10: Hình chóp S.ABC có M, N, P theo thứ tự là trung điểm SA, SB, SC. Giá trị $\frac{V_{MNPABC}}{V_{S.ABC}}$ là

- A. $\frac{8}{7}$. B. $\frac{7}{8}$. C. 8. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Thể tích khối chóp S.AMN là

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM=2MB$, $BN=4NC$, $SP=PC$. Tỉ lệ thể tích hai khối chóp S.BMN và A.CPN là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{5}{6}$. D. 1.

Câu 13: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp S.ABC thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABC có $SA=2\text{cm}$, $SB=3\text{cm}$, $SC=4\text{cm}$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Thể tích của khối chóp S.ABC là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm BC. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB, SC lần lượt tại E, F. Biết

$V_{S.AEF} = \frac{1}{4}V_{S.ABC}$. Thể tích V của khối chóp S.ABC là

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{8}$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hai mặt bên (SAB), (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp S.AHK và S.ACD với H, K lần lượt là trung điểm SC, SD. Tính độ dài đường cao h của khối chóp S.ABCD và tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

- A. $h = a; k = \frac{1}{4}$. B. $h = a; k = \frac{1}{6}$. C. $h = 2a; k = \frac{1}{8}$. D. $h = 2a; k = \frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 20cm, cạnh $SA=30\text{cm}$ và vuông góc với đáy. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Thể tích khối chóp S.AB'C'D' gần nhất giá trị nào dưới đây?

A. $2120cm^3$.

B. $2770cm^3$.

C. $1440cm^3$.

D. $1470cm^3$.

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$.

Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Khi đó thể tích chóp S.A'B'C'D' bằng

A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{V}{9}$.

C. $\frac{V}{27}$.

D. $\frac{V}{81}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SB, SD. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{AOHK}}$ bằng

A. 12.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi H là trung điểm của OB và SH vuông góc với (ABCD). Góc giữa SC và (ABCD) bằng 45° . Thể tích của khối chóp S.AHCD là

A. $\frac{\sqrt{35}}{32}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{39}}{24}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{35}}{24}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{39}}{32}a^3$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC, CD. Thể tích của CMNP theo a bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Một mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, I, K. Thể tích khối chóp S.AHIK là

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{35}$.

B. $\frac{34a^3\sqrt{3}}{105}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{7}$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{21}$.

Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Thể tích khối chóp S.AEMF là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{6}$.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Thể tích khối chóp S.BCNM bằng

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng

A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{7}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=b$. Cạnh $SA=2a$ của hình chóp vuông góc với đáy. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh SA sao cho $AM=x$ ($0 < x < 2a$). Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp trên ra hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $x = a(4 - \sqrt{5})$.

B. $x = a(3 - \sqrt{5})$.

C. $x = a(3 - \sqrt{2})$.

D. $x = 2a(3 - \sqrt{5})$.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CD và SA. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Biết rằng $V_1 \leq V_2$, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 28: Cho hình tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 3. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện ABCD. Tính thể tích V của khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$.

C. $V = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 29: Cho khối tứ diện có thể tích V. Gọi V' là thể tích khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Câu 30: Cho khối chóp S.ABCD, trong đó ABCD là hình thang có các cạnh đáy AB, CD sao cho $CD=4.AB$, một mặt phẳng qua CD cắt SA, SB lần lượt tại các điểm M, N. Đặt $\frac{SM}{SA} = x, 0 < x < 1$. Tìm x sao cho thiết diện MNCD chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.

B. $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

C. $x = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}$.

D. $x = \frac{-3 + \sqrt{19}}{2}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm cạnh BB', điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN=2C'N$. Tính thể tích khối chóp A.BCNM theo V.

A. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{12}$.

B. $V_{A.BCNM} = \frac{7V}{18}$.

C. $V_{A.BCNM} = \frac{5V}{18}$.

D. $V_{A.BCNM} = \frac{V}{3}$.

Câu 32: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và B'C'. Mặt phẳng (A'NM) cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện MBP.A'B'N bằng

A. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{32}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

C. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{68}$.

D. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

Câu 33: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E$, $BB' = kB'F$. Mặt phẳng (C'EF) chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp C'.A'B'FE có thể tích V_1 và khối đa diện ABCEFC' có thể tích V_2 .

Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. Giá trị k là

A. $k = 4$.

B. $k = 3$.

C. $k = 1$.

D. $k = 2$.

Câu 34: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60cm^3 , các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA' , BB' , CC' sao cho $AM = 2MA'$, $BN = 3NB'$, $CP = 4PC'$. Thể tích của khối đa diện $BC.MNP$.

A. $\frac{93}{2}\text{cm}^3$.

B. 25cm^3 .

C. 31cm^3 .

D. $\frac{65}{3}\text{cm}^3$.

Câu 35: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3 . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC' , BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'.MNP$.

A. 8cm^3 .

B. 12cm^3 .

C. 24cm^3 .

D. $\frac{16}{3}\text{cm}^3$.

Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $A'C'BD$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 38: Một khúc gỗ có dạng với độ dài các cạnh cho như hình vẽ bên.

được

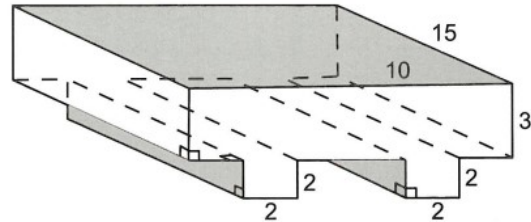
Thể tích khối đa diện tương ứng là

A. $V = 570$.

B. $V = 190$.

C. $V = 360$.

D. $V = 540$.



Câu 39: Một khúc gỗ có dạng với độ dài các cạnh được cho như vẽ bên. Thể tích khối đa diện tương ứng là

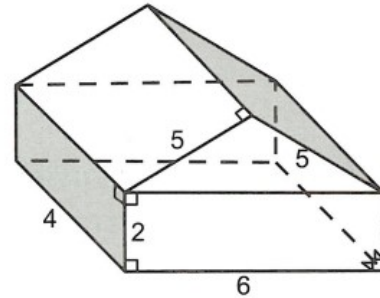
hình

A. $V = 24$.

B. $V = 96$.

C. $V = 126$.

D. $V = 102$.



Câu 40: Một khúc gỗ có dạng với độ dài các cạnh được cho như hình vẽ bên dưới.

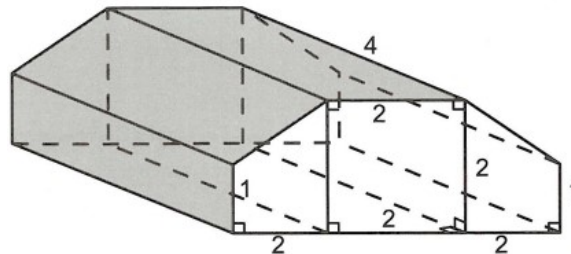
Thể tích khối đa diện tương ứng là

A. $V = \frac{40}{3}$.

B. $V = 32$.

C. $V = 40$.

D. $V = 20$.



Câu 41: Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a, AC = 9a, AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

- A. $4a^3$. B. a^3 . C. $108a^3$. D. $36a^3$.

Câu 42: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng (ABCD). Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp S.ABCD và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp S.ABCD. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{7}{9}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a . Gọi A', B', C' lần lượt là trọng tâm của tam giác SBC, SCA và SAB. Tính thể tích khối $ABC.A'B'C'$

- A. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{108}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{81}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{96}$.

Câu 44: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Lấy M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB', BC', CA' . Thể tích khối đa diện $MNPABC$ bằng

- A. $\frac{1}{2}V$. B. $\frac{2}{3}V$. C. $\frac{3}{4}V$. D. $\frac{3}{8}V$.

Câu 45: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và góc giữa $(AB'C')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm tứ diện $AA'B'C'$ và song song với mặt phẳng $(AB'C')$, lần lượt cắt các cạnh $AA', A'B', A'C'$ tại P, Q, R. Thể tích khối đa diện $PQRB'C'CAB$ là

- A. $\frac{165a^3\sqrt{3}}{512}$. B. $\frac{55a^3\sqrt{3}}{512}$. C. $\frac{27a^3\sqrt{3}}{64}$. D. $\frac{27a^3\sqrt{3}}{512}$.

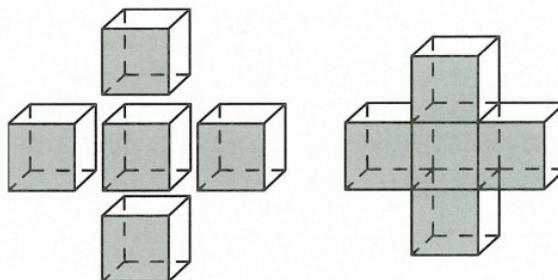
Câu 46: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành có thể tích là V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA sao cho $\frac{IA}{IS} = \frac{2}{3}$. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần. Khi đó thể tích của phần đa diện không chứa đỉnh S tính thông qua V được kết quả là

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{11}{20}$. C. $\frac{16}{21}$. D. $\frac{13}{20}$.

Câu 47: Người ta ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối hộp chữ thập như hình dưới.

Tính diện tích toàn phần của khối hộp chữ thập đó.

- A. $S_{tp} = 20a^2$. B. $S_{tp} = 12a^2$.
C. $S_{tp} = 30a^2$. D. $S_{tp} = 22a^2$.



Câu 48: Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=b$, SA vuông góc với đáy, $SA=2a$. Điểm M thuộc đoạn SA, $AM=x$. Giá trị của x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp S.ABCD thành hai khối có thể tích bằng nhau là

- A. $x = (2 + \sqrt{5})a$. B. $x = (3 + \sqrt{5})a$. C. $x = (2 - \sqrt{5})a$. D. $x = (3 - \sqrt{5})a$.

Câu 49: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=a$, $BC=b$, $AA'=c$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của A'B' và B'C'. Tỉ số giữa thể tích khối chóp D'.DMN và thể tích khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy bằng a, chiều cao 3a. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với A'C chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{47}$. B. $\frac{1}{107}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{1}{108}$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, A'C', BB'. Thể tích của khối tứ diện CMNP bằng:

- A. $\frac{5}{24}V$. B. $\frac{1}{4}V$. C. $\frac{7}{24}V$. D. $\frac{1}{3}V$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và B'C'. Mặt phẳng (A'MN) cắt cạnh BC tại P. Thể tích của khối đa diện MBP.A'B'N là

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. D. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Câu 53: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng 2a. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với A'C chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{47}$. B. $\frac{1}{23}$. C. $\frac{1}{11}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 54: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng 2cm. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp AMNP.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}}{162}cm^3$. B. $V = \frac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$. C. $V = \frac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{144}cm^3$.

Câu 55: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=2MA'$, $NB'=2NB$, $PC=PC'$. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện ABCMNP và A'B'C'MNP. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Câu 56: Cho tứ diện ABCD có $AB=CD=11m$, $BC=AD=20m$, $BD=AC=21m$. Thể tích khối chóp tứ diện ABCD bằng

- A. $360m^3$. B. $720m^3$. C. $770m^3$. D. $340m^3$.

Câu 57: Cho hình chóp S.ABC có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB>2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

- A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 58: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABD đều cạnh a, tam giác ABC vuông tại B, $BC=\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích của khối tứ diện ABCD bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác cân tại A, $AB=a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Gọi φ là góc giữa SB và (SAC) thỏa mãn $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy nhỏ hơn 2a. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 60: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF có cạnh bằng a và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Lấy lần lượt hai điểm H, S sao cho: $\overrightarrow{DH} + 3\overrightarrow{EH} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{BH} = \vec{0}$. Tính theo a thể tích khối đa diện ABCDSEF.

- A. $\frac{7}{6}a^3$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{2}{3}a^3$. D. $\frac{5}{6}a^3$.

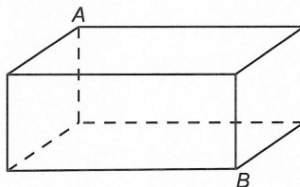
Câu 61: Một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 4cm, 6cm, 9cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi x cm là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x \in (15;16)$. B. $x \in (13;14)$. C. $x \in (12;13)$. D. $x \in (14;15)$.

Câu 62: Tứ diện SABC có các mặt SAB, SBC, SCA, có diện tích bằng nhau và $\widehat{ASB} + \widehat{ASC} + \widehat{CSB} = 180^\circ$. Biết rằng $SA = a = 4$, $SB = b = 5$, $SC = c = 6$. Thể tích khối tứ diện SABC là

- A. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{7\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{15\sqrt{6}}{2}$.

Câu 63: Một khối hộp đựng giấy ăn hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng, chiều cao lần lượt là 25cm; 14cm; 8cm (như hình vẽ). Một con kiến xuất phát từ A muốn đến điểm B thì quãng đường đi ngắn nhất là bao nhiêu?



A. 41,12cm.

B. 39,82cm.

C. 40,19cm.

D. 38,12cm.

Câu 64: Cho tứ diện ABCD có $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = \widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác ABC bằng 3. Giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần của tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

ĐÁP ÁN

1-A	2-A	3-D	4-C	5-C	6-B	7-C	8-A	9-A	10-B
11-B	12-B	13-A	14-A	15-D	16-A	17-D	18-C	19-C	20-D
21-C	22-A	23-A	24-B	25-A	26-B	27-A	28-D	29-D	30-B
31-B	32-D	33-B	34-C	35-A	36-A	37-C	38-A	39-B	40-C
41-A	42-C	43-C	44-D	45-A	46-D	47-D	48-D	49-C	50-B
51-A	52-C	53-D	54-C	55-C	56-A	57-C	58-D	59-C	60-D
61-B	62-D	63-B	64-A						

Dạng 4.

Bài toán cực trị liên quan đến thể tích khối đa diện

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $SC = a$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc α . Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

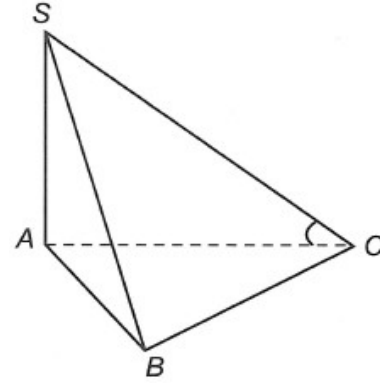
A. $\frac{a^3}{16}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = \alpha$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có

$$\begin{cases} SA = SC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha \\ AC = SC \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} AC^2 \right) \cdot SA \\ &= \frac{1}{6} \cdot (a \cos \alpha)^2 \cdot a \sin \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P = \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Bước 1: Chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

Bước 2: Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta xem đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích V của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

Bước 3: Ta có một hàm số $f(x), \forall x \in D$ mà cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó.

Cách 1:

Đặt $t = \sin \alpha$. Vì $0 < \alpha < 90^\circ$ nên $0 < \sin \alpha < 1$
 $\Rightarrow 0 < t < 1$

Ta có $P = f(t) = (1 - t^2)t = -t^3 + t$ xác định và liên tục trên $(0; 1)$.

$$f'(t) = -3t^2 + 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$+\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\infty$
$f'(t)$		0	+	0	-	
$f(t)$				$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{(0;1)} f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Dùng bất đẳng thức cổ điển

(Cô-si hay Bunhiacopxki) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1. Bất đẳng thức Cô-si.

a) Cho $a \geq 0, b \geq 0$ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ta có $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

c) Cho $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$

Ta có $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6} \cdot P_{\max} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27}$ khi và

chỉ khi $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn B.

Cách 2:

Vì $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$

$$\Rightarrow P^2 = (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha)}{2}.$$

Áp dụng Cô-si cho 3 số dương $1 - \sin^2 \alpha, 1 - \sin^2 \alpha$ và $2 \sin^2 \alpha$, ta được:

$$\begin{aligned} & (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha) \\ & \leq \left[\frac{(1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) + (2 \sin^2 \alpha)}{3} \right]^3 = \frac{8}{27} \\ & \Rightarrow \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha)}{2} \leq \frac{4}{27} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{\max}^2 = \frac{4}{27} \Rightarrow P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$1 - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6} \cdot P_{\max} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27}.$$

Chọn B.

Các bất đẳng thức cơ bản.

Các dạng hay sử dụng.

$$+) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2};$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$$

$$\begin{aligned}
&+) \quad 4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \\
&+) \quad 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2). \\
&+) \quad (a_1+a_2+\dots+a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\dots+a_n}.
\end{aligned}$$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a. Dạng đa thức Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho 2 bộ số $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2): a_1, a_2, \dots, a_n$ và

$(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$\begin{aligned}
&(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\
&\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

b. Dạng phân thức

Cho 2 bộ số $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2): a_1, a_2, \dots, a_n$ và

$(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $\forall b_1, b_2, \dots, b_n > 0$.

$$\text{Ta có } \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA = x$, $x \in (0; \sqrt{3})$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{16}$

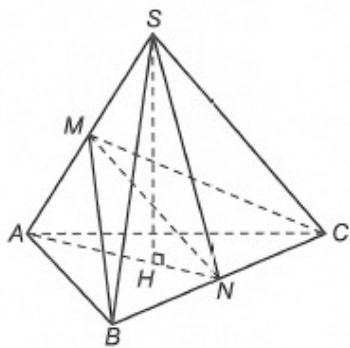
C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA = x$, các cạnh còn lại đều



bằng a (a là hằng số) với

$$x \in (0; a\sqrt{3}).$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

$$V_{S.ABC} = \frac{a^3}{8}.$$

Ta có tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC .

Ta có ΔSAB và ΔSAC là hai tam giác cân tại B và C nên $\begin{cases} SA \perp BM \\ SA \perp CM \end{cases}$

$$\Rightarrow SA \perp (BCM) \Rightarrow SA \perp BC.$$

Mặt khác $BM = CM = \sqrt{AB^2 - (AM)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M .

Suy ra $MN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAN)$.

Kẻ $SH \perp AN$. Do $BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SH \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $MN = \sqrt{SN^2 - SM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$.

$$S_{\Delta SAN} = \frac{1}{2} SA \cdot NM = \frac{1}{2} SH \cdot AN \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot NM}{AN} \Rightarrow SH = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta SAN} \cdot SH = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{12} \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{8}.$$

Vậy $\max V_{S.ABC} = \frac{1}{8}$ đạt được khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) , với $\alpha < 45^\circ$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $4a^3$

B. $\frac{8a^3}{3}$

C. $\frac{4a^3}{3}$

D. $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

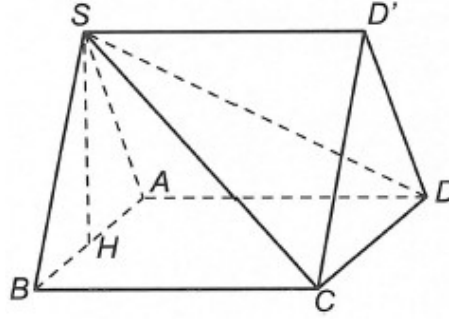
Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD' \parallel SA$ mà $SA \perp (SBC)$

Nên $DD' \perp (SBC)$

Ta có $\widehat{(SD, (SBC))} = \alpha = \widehat{DSD'} = \widehat{SDA}$,

Do đó $SA = AD \cdot \tan \alpha = 2a \tan \alpha$.



Đặt $\tan \alpha = x$, $x \in (0;1)$

Gọi H là hình chiếu của S lên AB , ta có

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{4a^2}{3} \cdot SH.$$

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất.

Vì $\triangle SAB$ vuông tại S nên

$$SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{SA \sqrt{AB^2 - SA^2}}{AB} = \frac{2ax \sqrt{4a^2 - 4a^2 x^2}}{2a} = 2ax \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\Rightarrow SH \leq 2a \cdot \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = a.$$

Từ đó $\max SH = a$ khi $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot 4a^2 = \frac{4a^3}{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 3. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$, cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$

B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{3a^3}{8}$

D. $\frac{a^3}{4}$

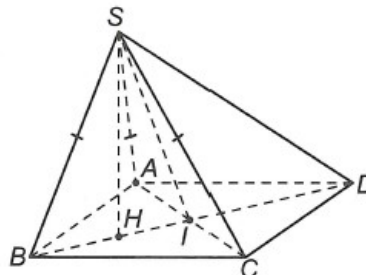
Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$,

suy ra $H \in BI$.

Ta có $SI^2 = SA^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$,

$IB^2 = AB^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$ suy ra $SI = IB$.



Khi đó tam giác SBD vuông tại S .

Đặt $SD = x$.

$$\text{Ta có } SB \cdot SD = SH \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot x = SH \cdot BD \Leftrightarrow SH = \frac{a \cdot x}{BD}$$

$$\text{Ta có } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{ax}{BD} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{6} ax \cdot AC.$$

$$\text{Lại có } BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + x^2 \text{ suy ra } IB^2 = \frac{a^2 + x^2}{4}$$

$$\Rightarrow IA^2 = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } AC = 2IA = 2\sqrt{\frac{3a^2 - x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{6} ax \cdot \sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Chọn D.

Ví dụ 4 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng

$$T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} \text{ khi thể tích khối chóp } S.AMCN \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

A. $T = 2$.

B. $T = \frac{5}{4}$.

C. $T = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

D. $T = \frac{13}{9}$.

Hướng dẫn giải

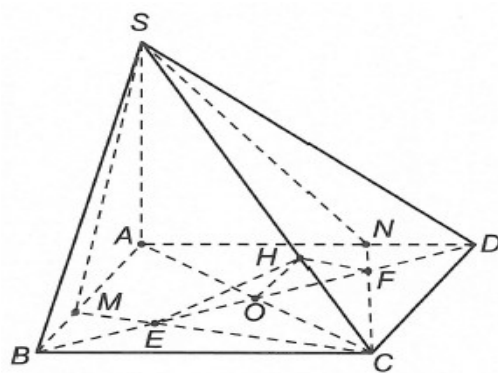
Đặt $AM = x, AN = y$.

Gọi $\{O\} = AC \cap DB$; $\{E\} = BD \cap CM$;

$\{F\} = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của

O trên SC , khi đó: $HO = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



$$\text{Ta có } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$$

Ta có $x > 0, y > 0$ và nếu $x \neq 2, y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

$$\text{Tương tự } OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y} \text{ mà } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\text{Nếu } x = 2 \text{ hoặc } y = 2 \text{ thì ta có } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } V_{S.AMCN} &= \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}[(x+2) + (y+2) - 4] \\ &= \frac{2}{3} \left[(x+2) + \frac{12}{x+2} - 4 \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là điểm H sao cho các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với SH góc 30° và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V_{\max} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$

B. $V_{\max} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$

C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$

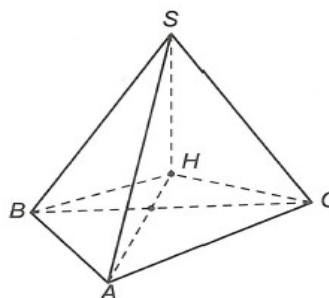
D. $V_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\widehat{(SH, (SAB))} = \widehat{(SH, (SAC))} = 30^\circ$ nên hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) sẽ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .

$$\text{Suy ra } d(H, AB) = d(H, AC) = d(H, BC)$$

tức H hoặc là tâm nội tiếp hoặc là tâm bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác.



Ta có $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $p = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ còn các cạnh $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$.

Khi đó $r = \frac{S}{p} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$;

$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Chiều cao chóp lớn nhất khi $SH_{\max} = r_a \sqrt{3} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

Chọn D.

Ví dụ 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a , góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{4a^3\sqrt{7}}{49}$.

B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{75}$.

Hướng dẫn giải

$$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

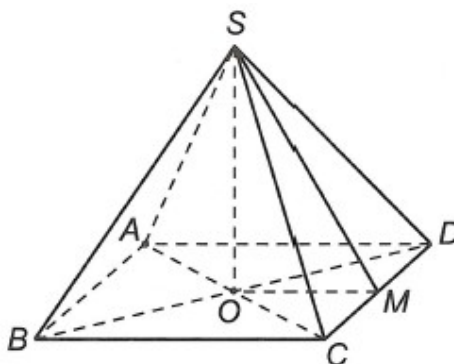
Gọi M là trung điểm của CD

$$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD), (ABCD)} \right) = \widehat{SMO} = \alpha.$$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x .

Tam giác SMC vuông tại M có

$$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$



Tam giác SOM vuông tại O có:

$$OM = SM \cdot \cos \widehat{SMO} = \cos \alpha \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \cos \alpha \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \left(a^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{4a^2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha}.$$

$$\text{Ta có: } SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = \frac{x}{2} \cdot \tan \alpha = \frac{a \cdot \tan \alpha}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{a \cdot \tan \alpha}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4a^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}.$$

$$\text{Do } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan \alpha > 0. \text{ Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất khi } \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}.$$

đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta xét } f(\alpha) = \frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương } \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}; \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}; \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}.$$

$$\text{Ta có } f(\alpha) = \frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3} = \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}$$

$$\leq \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \right) \right]^3 = \frac{1}{27}.$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } \max V_{SABCD} = \frac{4a^3}{3\sqrt{(2+1)^3}} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}.$$

Chọn B.

Ví dụ 7. Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là S . Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là

A. $\frac{S\sqrt{S}}{3}.$

B. $\frac{S\sqrt{S}}{36}.$

C. $\frac{S\sqrt{6S}}{36}.$

D. $\frac{S\sqrt{3S}}{9}.$

Hướng dẫn giải

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c với $a, b, c > 0$.

$$\text{Ta có } S = 2ab + 2ac + 2bc$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \geq 3\sqrt{2ab \cdot 2ac \cdot 2bc} = 6\sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

Trong các

$$6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq S \Rightarrow a^2b^2c^2 \leq \frac{S^3}{216} \Rightarrow abc \leq \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \frac{S\sqrt{6S}}{36}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương.

Chọn C.

Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A . Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ và khoảng cách từ C đến (ABC') đều bằng x không đổi, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Để thể tích khối lăng trụ

$ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất thì góc α có giá trị gần nhất giá trị nào sau đây?

A. 25°

B. 35°

C. 45°

D. 55°

Hướng dẫn giải

Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$),

$CK \perp AC'$ ($K \in AC'$)

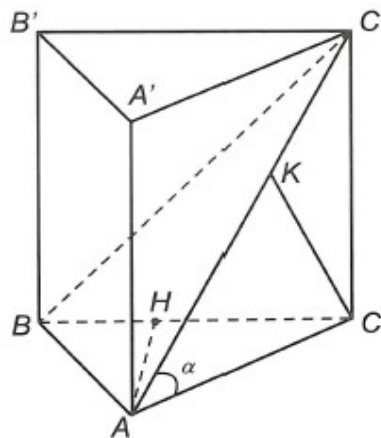
Ta có $d(AA'; (BCC'B')) = AH = x$ và

$d(C; (ABC')) = CK = x$

$\widehat{((ABC'); (ABC))} = \widehat{CAC'} = \alpha$.

Xét tam giác ACK vuông tại K có

$$AC = \frac{CK}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$



Xét tam giác ACC' vuông tại C có $CC' = AC \cdot \tan \alpha = \frac{x}{\sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{x}{\cos \alpha}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot AC}{\sqrt{AH^2 - AC^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2(1 - \sin^2 \alpha)}} = \frac{x}{\cos \alpha}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot CC' = \frac{x^3}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là nhỏ nhất thì $\sin \alpha \cos^2 \alpha$ lớn nhất.

Ta có $\sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{3} \right) = \frac{8}{54} \Rightarrow \sin \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \geq \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{\min} = \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$$

hình hộp chữ nhật có cùng diện tích toàn phần thì hình lập phương thì có thể tích lớn nhất.

Đẳng thức xảy ra khi $2\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 35^\circ$.

Chọn B.

Ví dụ 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB < BC$ và $BD = 3\text{cm}$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau một góc $\alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Đường chéo

$B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Hai góc α, β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

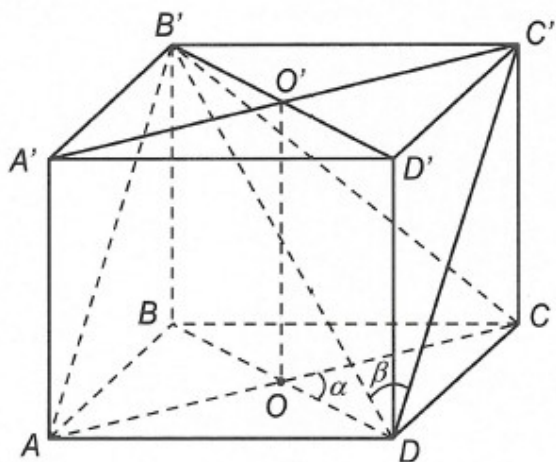
A. $\sqrt{3} \text{ cm}^3$

B. $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$

C. $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$

D. $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Hướng dẫn giải



Ta có $\left(\widehat{(ACC'A');(BDD'B')}\right) = \widehat{COD} = \alpha$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BC = BD \cdot \cos \widehat{CBD} = 3 \cos \frac{\alpha}{2}$$

Lại có $CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} = 3 \sin \frac{\alpha}{2}$

Ta có $\left(\widehat{B'D';(CDD'C')}\right) = \widehat{B'DC'} = \beta$

Do $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều nên $BC = CC'$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = BC \cdot CD \cdot CC' = 27 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Xét } \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \leq 6\sqrt{3}.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $3\sqrt{2}a^3$ B. $2a^3$ C. a^3 D. $\frac{4}{3}a^3$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA thay đổi và tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a . Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất khi SA đạt giá trị nào dưới đây?

- A. $SA = a\sqrt{2}$. B. $SA = a$. C. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Trên 3 tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi, lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$. Giả sử A cố định còn B, C thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn $OA = OB + OC$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị lớn nhất là

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^3}{24}$. D. $\frac{a^3}{32}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$. B. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$, biết $x^2 + y^2 = a^2$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCM$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 6: Cho tứ diện $SABC$, có SA, AB, AC đôi một vuông góc với nhau, độ dài các cạnh $BC = a, SB = b, SC = c$. Thể tích khối tứ diện $SABC$ đạt giá trị lớn nhất là

- A. $\frac{abc\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{abc\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{abc\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{abc\sqrt{2}}{24}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{3a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{8}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 8: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$.

B. $x = \sqrt{14}$.

C. $x = 3\sqrt{2}$.

D. $x = 2\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho khối hộp chữ nhật có thể tích bằng 64. Tổng độ dài ba cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh đạt giá trị nhỏ nhất là

A. 8

B. 10

C. 12

D. 16

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD = 6$, khoảng cách giữa AB và CD là 8, góc giữa AB và CD là α . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. 48

B. 52

C. 64

D. 36

Câu 11: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất là

A. $AB = 3a\sqrt{5}$.

B. $AB = a\sqrt{3}$.

C. $AB = 2a$.

D. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 12: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$, cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{8}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 13: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều có $d = \sqrt{3}$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng còn lại chứa một cạnh bên hình chóp. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp là

A. 3.

B. 9.

C. $9\sqrt{3}$.

D. 27.

Câu 14: Cho x, y là các số thực dương. Xét các hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng 1; SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 1$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Câu 16: Trên đường thẳng A và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC cạnh bằng 2, lấy các điểm M và N không trùng với A sao cho (MBC) vuông góc với (NBC) . Giá trị nhỏ nhất thể tích tứ diện $BMNC$ là

A. 2.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 6.

Câu 17: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của

S lên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD , thể tích khối chóp $S.ABH$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Câu 18: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Lấy các điểm M, N nằm trên cạnh BC , gọi P, Q lần lượt nằm trên cạnh AC, AB sao cho $MNPQ$ là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ nội tiếp trong lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có thể tích lớn nhất là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3}{8}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = 3a, AC = a$. Mặt phẳng $(DBC), (DAC), (DAB)$ lần lượt tạo với mặt phẳng (ABC) các góc $90^\circ, \alpha, \beta$ trong đó $\alpha + \beta = 90^\circ$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a^3}{13}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. D. $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 20: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và mặt đáy của khối chóp thì thể tích khối chóp nhỏ nhất?

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1, SA \perp (ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

- A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD = a\sqrt{3}, \widehat{ABD} = \alpha, \widehat{CBD} = \beta$, tam giác $A'AC$ đều. Hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AC . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đạt giá trị lớn nhất là

- A. $\frac{3a^3}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{9a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi độ dài đoạn MN đạt giá trị nhỏ nhất thì thể tích của khối chóp $S.AMN$ là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}$. B. $V = \frac{5a^3\sqrt{2}}{72}$. C. $V = \frac{5a^3\sqrt{2}}{432}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{432}$.

Câu 24: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K . Thể tích lớn nhất của tứ diện $ACHK$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36, độ dài đường chéo bằng 6. Thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật đã cho là

A. $V_{\max} = 8$.

B. $V_{\max} = 12$.

C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}$.

D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Câu 26: Cho hai đường thẳng cố định a và b chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b ($A \in a; B \in b$). Trên a lấy điểm M (khác A), trên b lấy điểm N (khác B) sao cho $AM = x, BN = y, x + y = 8$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 60° . Khi thể tích khối tứ diện $ABNM$ đạt giá trị lớn nhất thì độ dài đoạn MN (biết $MN > 8$) là

A. 13.

B. 12.

C. $2\sqrt{39}$.

D. $2\sqrt{21}$.

Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật có kích thước $m \times n \times p$ (với m, n, p là các số nguyên dương và $m \leq n \leq p$).

Biết rằng thể tích hình hộp chữ nhật đã cho bằng $\frac{1}{2}$ thể tích hình hộp chữ nhật có kích thước $(m+2) \times (n+2) \times (p+2)$. Giá trị lớn nhất có thể có của p là

A. 30.

B. 6.

C. 130.

D. 120.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-B	3-C	4-D	5-C	6-D	7-D	8-C	9-C	10-A
11-B	12-D	13-B	14-A	15-D	16-A	17-C	18-C	19-A	20-A
21-C	22-C	23-C	24-C	25-B	26-D	27-D	28-C		

Dạng 5:

Sử dụng thể tích để tính khoảng cách

Phương pháp giải

- Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sử dụng phương pháp đổi đỉnh và áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}h.S \Rightarrow h = \frac{3V}{S}$.
- Trong đó V là thể tích khối đa diện, S là diện tích đáy và h là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.
- Để tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau ta áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{6}AB.CD.\sin(\widehat{AB,CD})d(AB;CD) \Rightarrow d(AB;CD) = \frac{6V}{AB.CD.\sin(\widehat{AB,CD})}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B . Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a, AB = b$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng chiều cao của hình

là

A. $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$

B. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

D. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}.$

Ta có:

$$V_{A.SBC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC.$$

Mặt khác $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà ΔABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.

Suy ra $BC \perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B

$$\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot BS.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} SB \cdot BC} = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều cạnh bằng 1 và điểm I nằm trong tứ diện.

Tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện là

A. $\sqrt{6}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{6}}{9}.$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}.$

Hướng dẫn giải

Xét tứ diện đều $ABCD$ có diện tích

đáy là $\frac{\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $\frac{\sqrt{2}}{3}$ nên

thể tích tứ diện đều $ABCD$ là

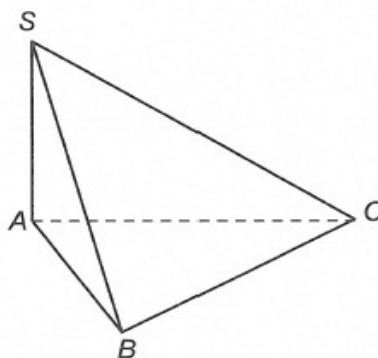
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng

chóp $A.SBC$.

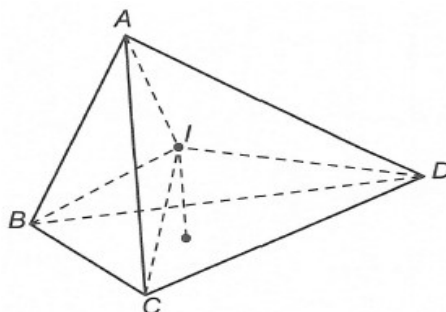
Do đó:

$$d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}.$$



Cách trắc nghiệm: Chọn đặc biệt $I \equiv A$. Khi đó tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện bằng khoảng cách từ A đến (BCD) và

$$\text{bằng } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



cách từ I đến các mặt

$(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$.

Đặt $V_1 = V_{IBCD}, V_2 = V_{IACD}, V_3 = V_{IABD}, V_4 = V_{IABC}$.

Ta có $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

$$V_1 = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_{BCD} \Rightarrow h_1 = \frac{3V_1}{S_{BCD}}.$$

$$\text{Tương tự } h_2 = \frac{3V_2}{S_{ACD}}, h_3 = \frac{3V_3}{S_{ABD}}, h_4 = \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Vậy } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_1}{S_{BCD}} + \frac{3V_2}{S_{ACD}} + \frac{3V_3}{S_{ABD}} + \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Tứ diện } ABCD \text{ là tứ diện đều nên } S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

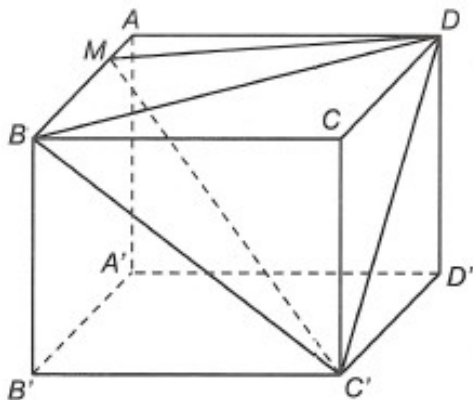
$$\text{Suy ra } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3V}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $BM = 4AM$. Khoảng cách từ C' đến BD bằng 4. Khoảng cách từ điểm M đến $(BC'D)$ là

- A. 2
B. $\frac{12}{5}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
D. $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } BM = 4AM \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{M.BC'D} = \frac{4}{5} V_{A.BC'D}$$

$$\text{Mà } V_{A.BC'D} = V_{C'.ABD} = \frac{1}{3}CC'.S_{ABD} = \frac{1}{6}CC'.AB.AD = 10 \Rightarrow V_{M.BC'D} = 8.$$

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5, S_{C'BD} = \frac{1}{2}d_{(C',BD)}.BD = 10.$$

$$\text{Ta có } V_{M.BC'D} = \frac{1}{3}d_{(M,(BC'D))}.S_{BC'D} \Rightarrow d_{(M,(BC'D))} = \frac{3V_{M.BC'D}}{S_{BC'D}} = \frac{12}{5}.$$

Chọn B.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 6$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là

A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện gần đều, ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-4^2 + 5^2 + 6^2)(4^2 - 5^2 + 6^2)(4^2 + 5^2 - 6^2)} = \frac{15\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } p = \frac{BC + CD + DB}{2} = \frac{4 + 5 + 6}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta BCD} = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-6)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Ta có } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{3 \cdot \frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Góc

$\widehat{ASB} = 45^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

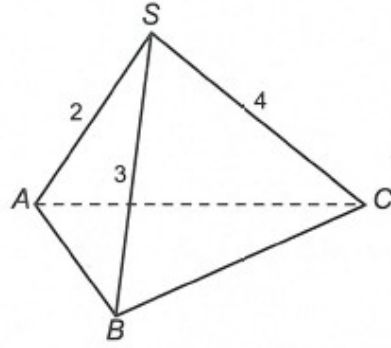
A. $\frac{6\sqrt{34}}{17}$.

B. $\frac{4\sqrt{34}}{17}$.

C. $\frac{7\sqrt{34}}{17}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}$.

Hướng dẫn giải



Hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma} \Rightarrow V_{S.ABC} = 2.$$

Ta có: $AC = \sqrt{20}$; $BC = \sqrt{13}$.

$$\cos(SA, BC) = \left| \frac{SB^2 - SC^2 + AC^2 - AB^2}{2SA \cdot BC} \right| = \left| \frac{3^2 - 4^2 + 20 - 13 + 6\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{13}} \right| = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(SA, BC) = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Suy ra } d(SA, BC) = \frac{6V}{SA \cdot BC \cdot \sin(SA, BC)} = \frac{6\sqrt{34}}{17}. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 6. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Trên AB lấy hai điểm M, N trên

CD lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $2 \frac{MN}{CD} + 3 \frac{PQ}{AB} = 1$. Thể tích khối MNPQ đạt giá trị

lớn nhất bằng

A. $\frac{V}{8}$.

B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{24}$.

D. $\frac{V}{32}$.

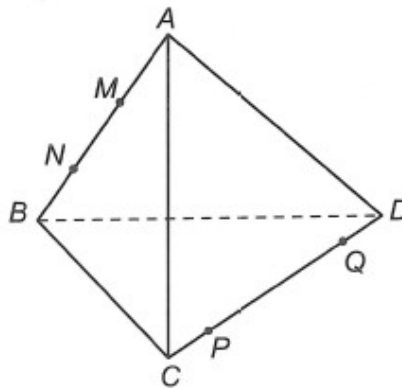
Hướng dẫn giải

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD);$$

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN \cdot PQ \cdot d(MN, PQ) \cdot \sin(MN, PQ).$$

Do $d(AB, CD) = d(MN, PQ)$ và

$\sin(AB, CD) = \sin(MN, PQ)$ nên



$$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD}.$$

$$\text{Ta có } 2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} \geq 2\sqrt{2\frac{MN}{CD} \cdot 3\frac{PQ}{AB}} = 2\sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}} \leq \frac{1}{2} \text{ do } 2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB} \leq \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{24}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} \leq \frac{V}{24} \Rightarrow \text{Max} V_{MNPQ} = \frac{V}{24}.$$

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , H là giao điểm của CN với MD . Biết $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa DM và SC là

- A. $\frac{3a\sqrt{57}}{38}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{3a\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{2a\sqrt{57}}{27}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60° , M là trung điểm BC . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 24cm^3 , $SB = BC = 5\text{cm}$, $SC = 8\text{cm}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

- A. 3 cm. B. 4 cm. C. 6 cm. D. 12 cm.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích $V = 6a^3$, đáy $ABCD$ là hình thang với hai đáy AD và BC thỏa mãn $AD = 2BC$, diện tích tam giác SCD bằng $\sqrt{34}a^2$. Khoảng cách từ B đến (SCD) là

- A. $\frac{3\sqrt{34}}{34}a$. B. $\frac{9\sqrt{34}}{17}a$. C. $\frac{\sqrt{34}}{17}a$. D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}a$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB' . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'BK)$ là

A. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

C. $a\sqrt{15}$

D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Khoảng cách giữa đường thẳng A_1B và B_1D là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có hình chiếu vuông góc của điểm S nằm trong tam giác ABC . Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r=3$, $BC=5$ và diện tích tam giác ABC là $S=10$. Các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ đều tạo với đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $h=2\sqrt{3}$.

B. $h=\sqrt{3}$.

C. $h=3\sqrt{3}$.

D. $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=3a$, $AC=2a$, $AD=5a$; $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^\circ$. Khoảng cách từ C đến (ABD) là

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$.

Khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) là

A. $h=\frac{2}{3}a$.

B. $h=\frac{4}{3}a$.

C. $h=\frac{8}{3}a$.

D. $h=\frac{3}{4}a$.

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài đường cao từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy (ABC) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Góc tạo bởi mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, MN là

A. $\frac{9a\sqrt{3}}{42}$.

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{42}$.

C. $\frac{6a\sqrt{3}}{42}$.

D. $\frac{12a\sqrt{3}}{42}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên đáy (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là

A. $\frac{3a}{2}$

B. $\frac{4a}{3}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{2a}{3}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60° .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{42}}{24}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

D. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 13: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V = \frac{1}{6}$, góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$.

Độ dài cạnh CD là

A. $2\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = SB = SC = 2a$.

Khoảng cách giữa AB và SC là

A. $\frac{a\sqrt{11}}{12}$.

B. $\frac{a\sqrt{22}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{22}}{12}$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-B	2-C	3-C	4-D	5-A	6-C	7-A	8-A	9-A	10-A
11-C	12-D	13-B	14-C						

Dạng 6.

Bài toán thực tế về khối đa diện



Phương pháp giải

- Phân tích bài toán, chuyển các dữ kiện thực tế về các hình cơ bản.
- Áp dụng bất đẳng thức, đạo hàm để giải quyết các bài toán tối ưu.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp đều) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài 230m. Các lối đi và phòng bên trong chiếm 30%, khối lượng riêng của đá bằng $2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Khối lượng đá tạo nên kim tự tháp là 4 443 600 tấn.



Chiều cao kim tự tháp là:

A. 148m

B. 144m

C. 154m

D. 156m

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính khối lượng riêng để tính thể tích của đá.

Chú ý:

Công thức tính khối lượng

$$\text{riêng: } D = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{D}$$

Trong đó D là khối lượng riêng, m là khối lượng và V là thể tích.

Ta có: $D = \frac{m}{V_1} \Rightarrow V_1 = \frac{m}{D}$.

Thể tích của cả khối kim tự tháp là $V = V_1 \cdot \frac{100}{70} = \frac{10m}{7D}$ (do các lối đi và phòng bên trong chiếm 30%)

Diện tích đáy $S = 230^2 \text{ (m}^2\text{)}$

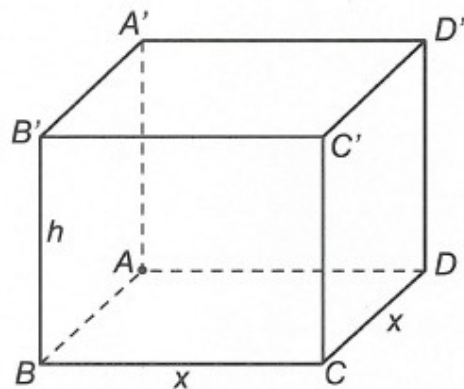
Chiều cao $h = \frac{3V}{S} = \frac{3.4443600.10}{2.5.230^2.7} = 144m$

Chọn B.

Ví dụ 2. Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là 180ml. Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{180^2}$ (cm) B. $\sqrt[3]{360}$ (cm)
C. $\sqrt[3]{720}$ (cm) D. $\sqrt[3]{180}$ (cm)

Hướng dẫn giải



Gọi x là độ dài cạnh đáy, h là chiều cao của hình hộp.

Theo bài ra ta có: $x^2 h = 180 \Rightarrow h = \frac{180}{x^2}$

Nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất khi diện tích toàn phần S nhỏ nhất.

Ta có $S = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x \cdot \frac{180}{x^2} = 2x^2 + \frac{720}{x} = 2x^2 + \frac{360}{x} + \frac{360}{x}$

Ta có $S \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \left(\frac{360}{x}\right) \left(\frac{360}{x}\right)} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 360^2}$

Dấu bằng xảy ra khi $2x^2 = \frac{360}{x} \Leftrightarrow x^3 = 180 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{180}$

Khi đó $h = \sqrt[3]{180}$

Hướng tư duy:

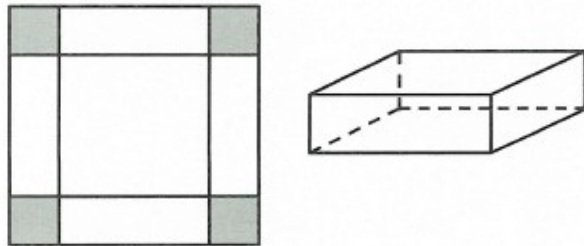
Gọi x là độ dài cạnh đáy, h là chiều cao của hình hộp. Ta rút được h theo x .

Nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất khi diện tích toàn phần S nhỏ nhất. Thay h theo x vào công thức S thì S còn 1 ẩn x ta có thể sử dụng bất đẳng thức hoặc công cụ đạo hàm để tìm $\min S$.

Chọn D.

Ví dụ 3 : Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 6$
 B. $x = 3$
 C. $x = 2$
 D. $x = 4$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $h = x$ (cm) là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gập lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là :

$$12 - 2x \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy diện tích đáy hình hộp } S = (12 - 2x)^2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

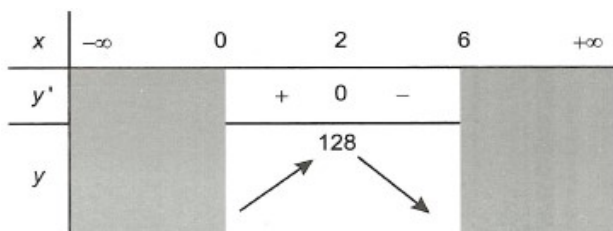
$$\text{Ta có : } \begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6).$$

$$\text{Thể tích của hình hộp là : } V = S.h = x.(12 - 2x)^2$$

$$\text{Xét hàm số } y = x.(12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$$

$$\text{Ta có: } y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 6 \text{ (loại)}$$



Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là

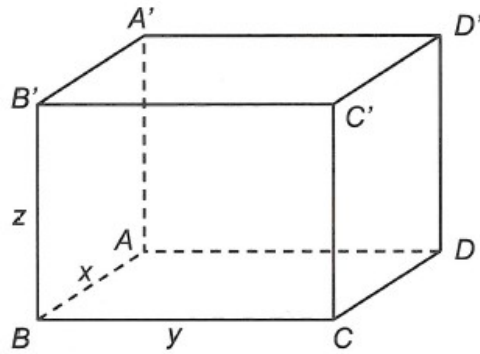
$$y(2) = 128.$$

Chọn C.

Ví dụ 4. Một xưởng sản xuất những thùng bằng nhôm hình hộp chữ nhật không nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$, thể tích khối hộp bằng 18dm^3 . Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x + y + z$ bằng:

- A. 10 dm B. $\frac{19}{2}$ dm C. 26 dm D. $\frac{26}{3}$ dm

Hướng dẫn giải



Ta có: $x : y = 1 : 3 \Rightarrow y = 3x$

Theo giả thiết, ta có $xyz = 18 \Rightarrow z = \frac{6}{x^2}$

Tổng diện tích vật liệu không nắp cần dùng là :

$$xy + 2(xz + yz) = x \cdot 3x + 2\left(x \cdot \frac{6}{x^2} + 3x \cdot \frac{6}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{48}{x}$$

Xét hàm $f(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 2$

Khi $x = 2 \Rightarrow y = 6, z = \frac{3}{2} \Rightarrow x + y + z = \frac{19}{2}(\text{dm})$

Chọn B.

Chú ý:

Ta biểu diễn ẩn y, z theo x còn 1 ẩn x ta có thể sử dụng bất đẳng thức hoặc công cụ đạo hàm để tìm min S .

Cách khác:

Áp dụng Cô-si

$$3x^2 + \frac{48}{x} = 3\left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 36$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{x} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 2$$

Bài tập tự luyện dạng 6

Câu 1: Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu dung tích của cái hộp đó là 4800 cm^3 thì cạnh của tấm bìa có độ dài là

- A. 38cm B. 42cm C. 36cm D. 44cm

Câu 2: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 50 m, chiều rộng 30 m. Biết rằng trong hồ bơi có 3 000 000 lít nước. Độ sâu của hồ bơi lúc này là

- A. 3m B. 2,5m C. 2m D. 3m

Câu 3: Một hộp sữa tươi dạng hình hộp chữ nhật có thể tích thực của sữa là 180ml, người ta để khoảng không gian trống cho không khí vào bằng 10% thể tích của sữa. Đáy hộp là hình chữ nhật có diện tích $16,5 \text{ cm}^2$.

Biết độ dày hộp giấy không đáng kể. Hỏi chiều cao hộp sữa bằng bao nhiêu?



- A. $\frac{108}{11} \text{ cm}$ B. 10 cm C. $\frac{400}{33} \text{ cm}$ D. 12cm

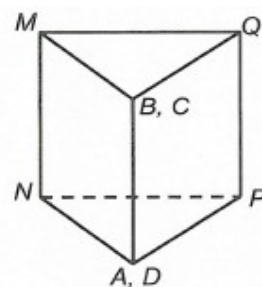
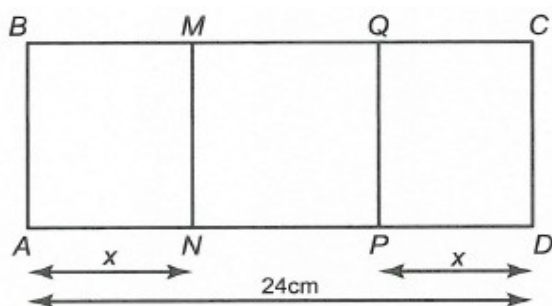
Câu 4: Tháp Eiffel ở Pháp cao 300m, được làm hoàn toàn bằng sắt và nặng khoảng 8 000 000 kg.



Người ta làm một mô hình thu nhỏ của tháp với cùng chất liệu và cân nặng 1kg. Hỏi chiều cao của mô hình là bao nhiêu?

- A. 1,5m B. 2m C. 3m D. 0,5m

Câu 5: Một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 24$ cm. Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và QP vào phía trong đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



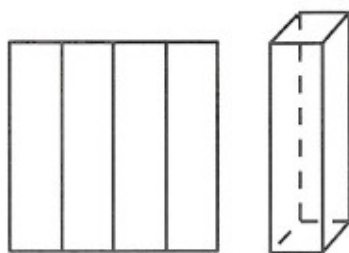
Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

- A. $x = 9$ B. $x = 8$ C. $x = 10$ D. $x = 6$

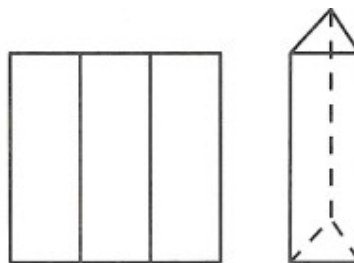
Câu 6: Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh a , người ta gấp thành hình lăng trụ theo hai cách sau.

+) Cách 1. Gấp thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V_1 (Hình 1)

+) Cách 2. Gấp thành 3 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tam giác đều có thể tích là V_2 (Hình 2)



Hình 1



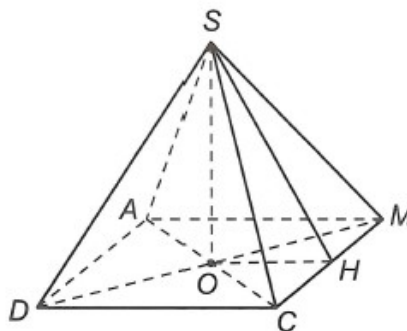
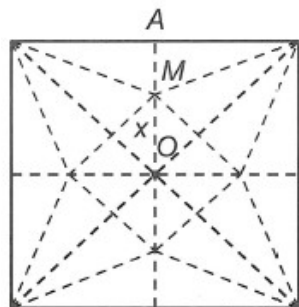
Hình 2

Tính tỷ số $k = \frac{V_1}{V_2}$

- A. $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $k = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ C. $k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $k = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Câu 7: Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2.

Biết cạnh hình vuông bằng 20 cm, $OM = x$ (cm).



Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.

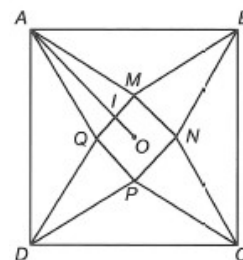
A. $x = 6$ cm

B. $x = 8$ cm

C. $x = 7$ cm

D. $x = 9$ cm

Câu 8: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5dm, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB, BNC, CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Hỏi cạnh đáy của khối chóp bằng bao nhiêu để thể tích của nó là lớn nhất?



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm

B. $\frac{5}{2}$ dm

C. $2\sqrt{2}$ dm

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ dm

Câu 9: Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a . Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. (Giả thuyết rằng tổng thể tích của hai khối đá sau vẫn bằng thể tích của khối đá đầu).

A. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

C. $\frac{a^2}{4}$

D. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$

Câu 10: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

A. 75 triệu đồng

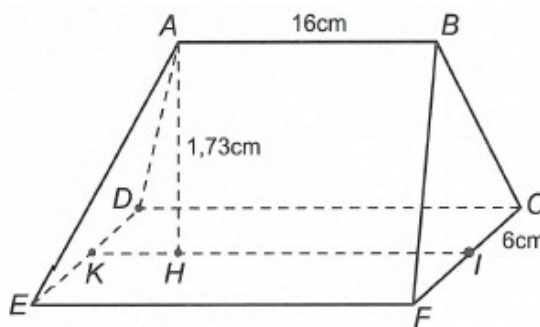
B. 51 triệu đồng

C. 36 triệu đồng

D. 46 triệu đồng

Câu 11: Người ta cần lợp tôn cho mái nhà như hình vẽ. Biết mái trước, mái sau là các hình thang cân $ABCD, ABEF$; hai đầu hồi là hai tam giác cân ADE, BCF tại A và B . Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(CDEF)$ là H . Biết

$AB = 16\text{m}, CD = FE = 20\text{m}, AH = 1,73\text{m}, ED = CF = 6\text{m}$
 Tính tổng diện tích S của mái nhà (diện tích của hai mái trước, sau và hai đầu hồi).



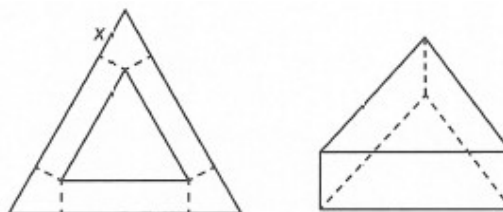
A. $S \approx 141 \text{ m}^2$

B. $S \approx 281 \text{ m}^2$

C. $S \approx 261 \text{ m}^2$

D. $S \approx 78 \text{ m}^2$

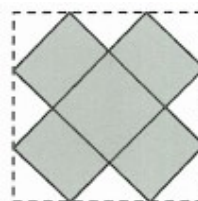
Câu 12: Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $0 < x < \frac{a}{2}$; phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ.



Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

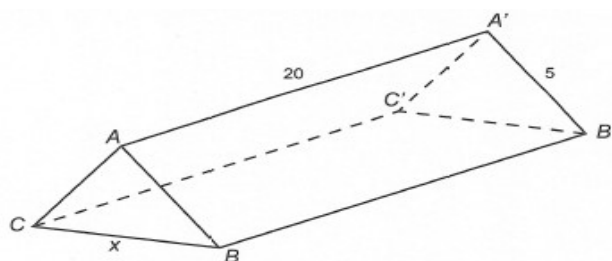
- A. $\frac{a}{3}$ B. $\frac{a}{4}$ C. $\frac{a}{5}$ D. $\frac{a}{6}$

Câu 13: Từ hình vuông có cạnh bằng 6, người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp là



- A. $8\sqrt{2}$ B. $10\sqrt{2}$ C. $9\sqrt{2}$ D. $11\sqrt{2}$

Câu 14: Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng như hình vẽ. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 (m) và rộng 5 (m). Gọi x (mét) là độ dài của cạnh BC . Tìm x để khoảng không gian của hành lang (kể cả hai tấm kính) là lớn nhất?

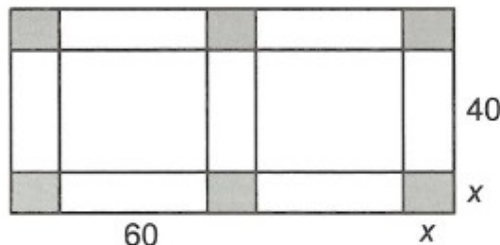


- A. $x = 5(m)$ B. $x = 5\sqrt{2}(m)$ C. $x = 5\sqrt{17}(m)$ D. $x = 25(m)$

Câu 15: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không có nắp có chiều cao là 60 cm, thể tích 96000 cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70 000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100 000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

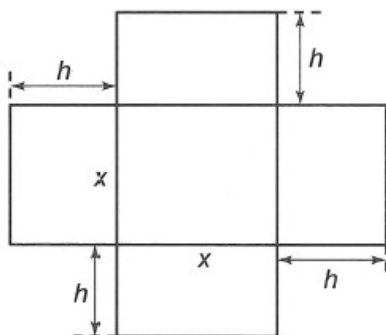
- A. 320 000 đồng B. 32 000 đồng C. 83 200 đồng D. 68 800 đồng

Câu 16: Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 60 cm x 40 cm. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm bìa lại để được một hộp có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = \frac{20}{3} \text{ cm}$ B. $x = 4 \text{ cm}$ C. $x = 5 \text{ cm}$ D. $x = \frac{10}{3} \text{ cm}$

Câu 17: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao là h cm và thể tích là 500 cm^3 . Tìm độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



A. $x = 2 \text{ cm}$

B. $x = 3 \text{ cm}$

C. $x = 5 \text{ cm}$

D. $x = 10 \text{ cm}$

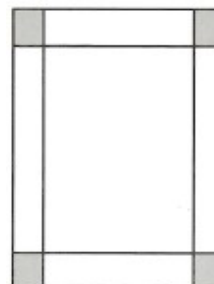
Câu 18 : Một trang chữ của cuốn sách giáo khoa cần diện tích 384 cm^2 . Lề trên và dưới là 3 cm , lề trái và phải là 2 cm . Kích thước tối ưu của trang giấy là

A. Dài 24 cm ; rộng 16 cm

B. Dài 24 cm ; rộng 17 cm

C. Dài 25 cm ; rộng $15,36 \text{ cm}$

D. Dài $25,6 \text{ cm}$; rộng 15 cm



Câu 19: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12 m^3 để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (không tính đến bề dày của thành bể). Ta có kích thước (dài ; rộng – tính theo đơn vị m, làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy) phù hợp yêu cầu là

A. Dài $2,42 \text{ m}$ và rộng $1,82 \text{ m}$

B. Dài $2,74 \text{ m}$ và rộng $1,71 \text{ m}$

C. Dài $2,26 \text{ m}$ và rộng $1,88 \text{ m}$

D. Dài $2,19 \text{ m}$ và rộng $1,91 \text{ m}$

Câu 20: Một công ty sản xuất gỗ muốn thiết kế các thùng đựng hàng bên trong dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp có thể tích là $62,5 \text{ dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Khi đó tổng diện tích S bằng

A. $106,25 \text{ dm}^2$

B. 75 dm^2

C. $50\sqrt{5} \text{ dm}^2$

D. 125 dm^2

Câu 21: Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài d (m) và chiều rộng r (m) với $d = 2r$. Chiều cao bể nước là h (m) và thể tích bể là 2 m^3 . Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(m)$

B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(m)$

C. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(m)$

D. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m)$

Câu 22: Bác An cần xây một bể đựng nước mưa có thể tích $V = 6(\text{m}^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép ; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 1 triệu đồng/ m^2 và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Chi phí thấp nhất mà bác An phải trả là

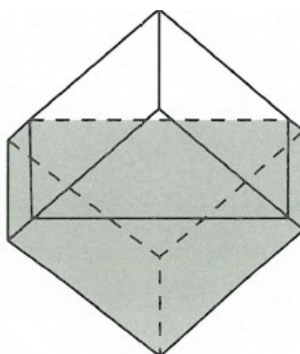
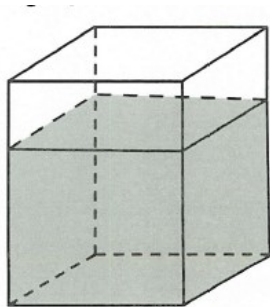
A. 20 triệu đồng

B. $20,5$ triệu đồng

C. 21 triệu đồng

D. 22 triệu đồng

Câu 23: Cho một khối lập phương có cạnh bằng 1m. Biết rằng chiều cao mực nước trong khối lập phương là 0,6m. Hỏi khi đặt khối lập phương đứng ở vị trí đứng cân bằng trên một cạnh như hình vẽ thì chiều cao h mực nước tính từ mặt phẳng đặt là bao nhiêu ?



A. $h = \frac{2\sqrt{7} + 25\sqrt{2}}{50}m$

B. $h = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{5}m$

C. $h = \frac{4}{5}m$

D. $h = \frac{5\sqrt{2} - 3}{5}m$

Câu 24: Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là $1152m^2$ và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



A. $16m \times 24m$

B. $8m \times 48m$

C. $12m \times 32m$

D. $24m \times 32m$

Câu 25: Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin\alpha$

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

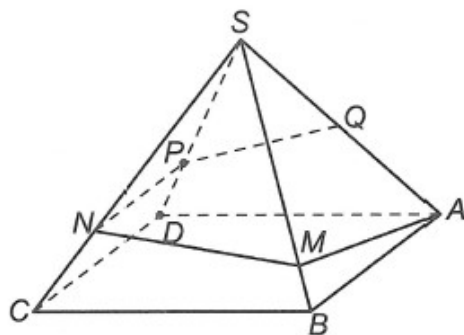
B. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 26: Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một tháp đèn lồng lầy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA = 600$ mét, $\widehat{ASB} = 15^\circ$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng, AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất.

Tính tỷ số $k = \frac{AM + MN}{NP + PQ}$



A. $k = \frac{5}{3}$

B. $k = \frac{3}{2}$

C. $k = \frac{4}{3}$

D. $k = 2$

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB . Một con kiến đi từ điểm M thẳng tới điểm N thuộc cạnh BC , từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC' , từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (điểm N, P thay đổi tùy theo hướng đi của con kiến). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ M đến D' là

A. $\frac{5}{2}$

B. $\sqrt{2} + 1$

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-D	2-C	3-D	4-A	5-B	6-C	7-B	8-C	9-D	10-B
11-A	12-D	13-A	14-C	15-C	16-A	17-D	18-B	19-C	20-B
21-D	22-C	23-B	24-A	25-B	26-D	27-A			