

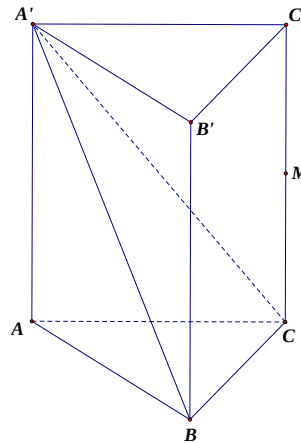


PBM-PHÂN TÍCH, BÌNH LUẬN VÀ PHÁT TRIỂN MỘT SỐ CÂU VDC

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2020

Môn: Toán – MÃ ĐỀ 101 (Câu: 43 – 50)

Câu 43. [MÃ 101 - TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



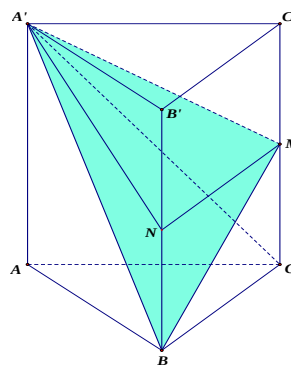
A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 1. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CC' , N là trung điểm của BB' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ N đến mặt phẳng $(A'BM)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a}{8}$.

Thực hiện Thầy Nguyễn Xuân Sơn

Câu 2. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $CC'B'$.

Khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng :

A. $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$

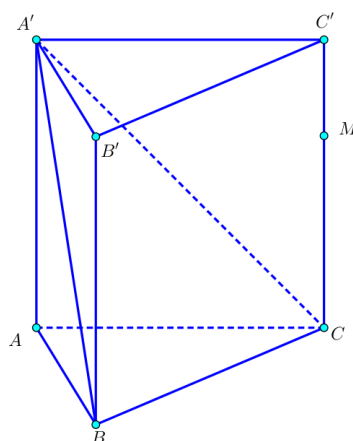
B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Thực hiện : Thầy Phong Do – Thầy Nguyễn Xuân Sơn

Câu 3. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = a$ và $AA' = 2a$. Trên cạnh CC' lấy điểm M sao cho $C'M = \frac{1}{2}CM$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{4}{9}a$.

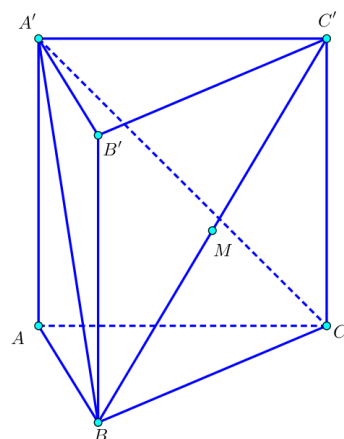
B. $\frac{2}{3}a$.

C. $\frac{3}{2}a$.

D. $\frac{9}{4}a$.

Thực hiện : Thầy Hoàng Xuân Bình -PB : Thầy Nguyễn Xuân Sơn

Câu 4. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng?



A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

C. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Thực hiện : Hoàng Xuân Bình-PB : Nguyễn Xuân Sơn

Câu 8. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến

thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Tính tổng tất cả các giá trị m để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-m)^4 [f(x)+2]^3$ bằng 3.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 6.

Thầy Kiệt Tan – Cô Trần Thu Hương

Câu 9. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có bảng biến

thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

The graph shows a cubic function $f(x)$ plotted against x . The function has a local maximum at $x=0$ with a value of $y=4$, and a local minimum at $x=2$ with a value of $y=0$. The function approaches $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. The derivative $f'(x)$ is positive for $x < 0$ and $2 < x < +\infty$, and negative for $0 < x < 2$. The derivative is zero at $x=0$ and $x=2$.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^3 [f(3x+1)]^2$ là

- A. 6. B. 4. C. 7. D. 3.

Thực hiện: Thầy Thiện Vũ – Phản biện: Thầy Võ Trọng Trí

Câu 10. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến

thiên như sau:

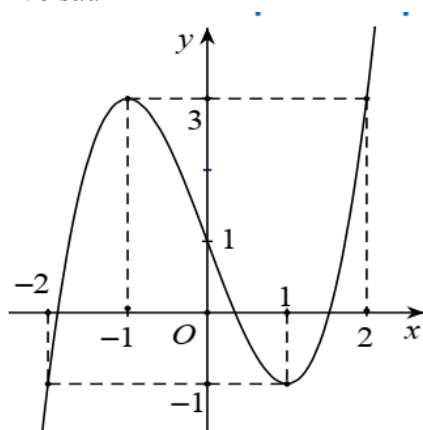
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

The graph of the function $f(x)$ is shown below the table. It is a W-shaped curve. The left branch starts at $+\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and decreases to a local minimum at $x=0, y=-9$. From there, it increases to a local maximum at $x=-2, y=7$. It then decreases to another local minimum at $x=2, y=-9$, and finally increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. Arrows indicate the direction of the curve between these key points.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x^2+1)]^2$ là

- A. 9. B. 4. C. 7. D. 5.

Câu 11. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{[f(x^2 - 1)]^4}{e^{x^2}}$ là

A. 8.

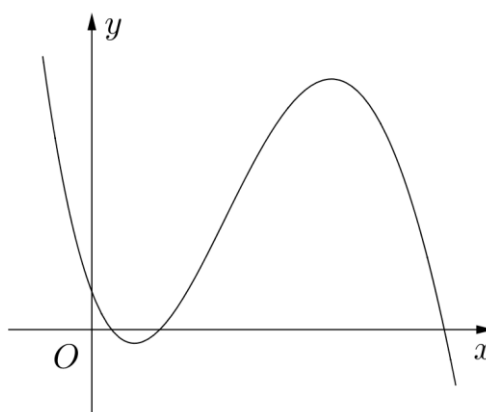
B. 5.

C. 9.

D. 7.

Thực hiện: Cô Trần Thu Hương – Phản biện: Thầy Thiện Vũ

Câu 45. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



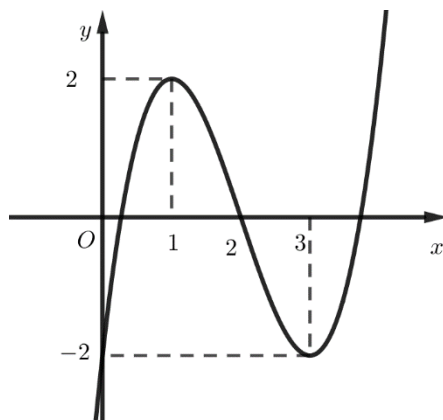
A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 12. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là

- A. b . B. d . C. a . D. c .

Câu 13. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có BBT như

hình vẽ. Trong các số a, b, c có bao nhiêu giá trị dương?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ -1

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 14. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ có

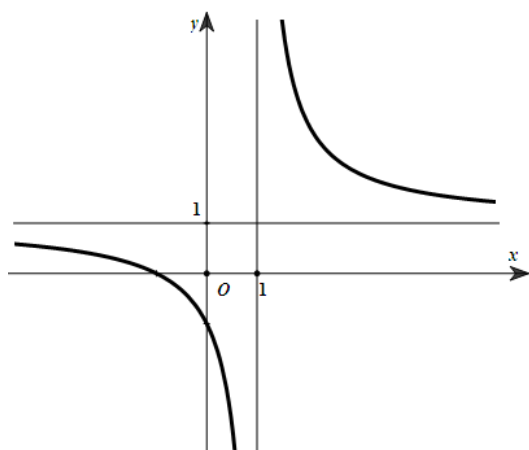
BBT như hình vẽ. Giá trị của $a-b-c$ thuộc khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

- A. $(-1; 0)$. B. $(-2; -1)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; 1)$.

Câu 15. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Có đồ thị như

hình vẽ:

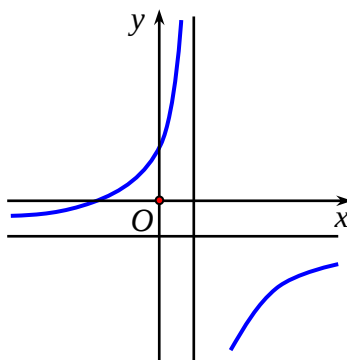


Trong các số sau: $ab; bd; bc; ad; ad - bc$ có bao nhiêu số dương

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 5 .

Câu 16. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như

hình vẽ dưới



Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số $ab; bc; ad; ad - bc$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. [MÃ 101- TN 2020] Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A. $\frac{25}{42}$. **B.** $\frac{5}{21}$. **C.** $\frac{65}{126}$. **D.** $\frac{55}{126}$.

Câu 17. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Một tổ có 4 bạn nam và 5 bạn nữ.

Cần chọn ra 4 bạn để xếp thành một hàng dài tham gia diễu hành. Tính xác suất để trong hàng không có 3 bạn nữ nào đứng liên tiếp nhau.

A. $\frac{41}{54}$. **B.** $\frac{49}{54}$. **C.** $\frac{85}{108}$. **D.** $\frac{89}{108}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Ngọc Hoá –Phản biện: Thầy Nguyễn Thanh Hải

Câu 18. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Gọi S là tập hợp tất cả các số tự

nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chia hết cho 3 bằng

- A. $\frac{9}{14}$. B. $\frac{19}{28}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $\frac{16}{21}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Ngọc Hoá –Phản biện: Thầy Nguyễn Thanh Hải

Câu 19. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2

học sinh lớp 11A và 3 học sinh lớp 11B và 5 học sinh của lớp 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh nào của cùng một lớp đứng cạnh nhau.

- A. $\frac{3}{126}$. B. $\frac{11}{630}$. C. $\frac{1}{126}$. D. $\frac{2}{63}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Thanh Hải – Phản biện: Thầy Nguyễn Khắc Thành

Câu 20. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Gọi E là tập các số tự nhiên có 5

chữ số được lập từ các chữ số 0;1;2;3;4;5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập E . Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{2}{45}$. C. $\frac{1}{45}$. D. $\frac{4}{15}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Thanh Hải – Phản biện: Thầy Nguyễn Khắc Thành

Câu 21. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E . Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 1.

- A. $\frac{12}{25}$. B. $\frac{13}{25}$. C. $\frac{144}{295}$. D. $\frac{151}{295}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Khắc Thành–Phản biện: Thầy Nguyễn Ngọc Hoá

Câu 22. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai hộp đựng bi: hộp A đựng 7

viên bi xanh, 7 viên bi đỏ; hộp B đựng 5 viên bi xanh, 9 viên bi đỏ. Bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp A bỏ vào hộp B, sau đó bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp B bỏ lại hộp A. Tính xác suất để sau khi đổi bi xong số bi xanh trong hai hộp bằng nhau.

- A. $\frac{567}{1768}$. B. $\frac{343}{352}$. C. $\frac{49}{96}$. D. $\frac{49}{264}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Khắc Thành–Phản biện: Thầy Nguyễn Ngọc Hoá

Câu 23. Viết lên bảng năm số tự nhiên có hai chữ số khác nhau theo thứ tự tăng dần được tạo thành từ

các chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 và mỗi chữ số chỉ xuất hiện 1 lần. Xác suất để 5 số đều chia hết cho 3 là

- A. $\frac{1}{21}$. B. $\frac{1}{35}$. C. $\frac{2}{105}$. D. $\frac{2}{189}$.

Thực hiện Cô Đoàn Thị Lan Oanh – Phản Biện Thầy Nguyễn Khắc Thành

Câu 47. [ĐỀ GỐC MÃ 101 – TN 2020] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. B. $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. C. $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. D. $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Câu 24. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có tâm là O , mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N, P, Q lần lượt là ảnh của O qua các phép đối xứng qua mặt phẳng SAB, SBC, SCD, SDA . Biết S' là điểm đối xứng với S qua mặt phẳng $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S'.MNPQ$.

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{16}a^3$. B. $\frac{9\sqrt{3}}{32}a^3$. C. $\frac{27\sqrt{3}}{32}a^3$. D. $\frac{27\sqrt{3}}{16}a^3$.

Thực hiện : Ngô Dung – Phản biện : Cô Thoa Nguyễn

Câu 25. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ có thể tích V . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Lấy A_1 đối xứng với A qua ED , B_1 đối xứng với B qua EA ; C_1 đối xứng với C qua EB và D_1 đối xứng với D qua EC . Tính theo V thể tích khối chóp $F.A_1B_1C_1D_1$.

- A. V . B. $\frac{3V}{2}$. C. $2V$. D. $\frac{4V}{3}$.

Thực hiện : Ngô Dung – Phản biện : Cô Thoa Nguyễn

Câu 26. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và đáy là tam giác ABC vuông tại A . Gọi D, E, F lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm S tỉ số $k = -\frac{1}{2}$. Biết thể tích khối $S.ABCD$ bằng V và thể tích khối đa diện $DEFABC$ bằng V' . Tính tỉ số $\frac{V}{V'}$.

- A. $\frac{8}{27}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{13}{27}$. D. $\frac{4}{9}$.

Thực hiện : Ngô Dung – Phản biện : Cô Thoa Nguyễn

Câu 27. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh

a . Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của đáy $ABCD, A'B'C'D'$ và của bốn mặt bên. Gọi S, I, J, H, K lần lượt là ảnh của O', M, N, P, Q qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$. Tính thể tích V của khối đa diện được tạo bởi các đỉnh $S, I, J, H, K, A', B', C', D'$.

- A. $\frac{49a^3}{2}$. B. $\frac{11a^3}{3}$. C. $\frac{49a^3}{6}$. D. $\frac{11a^3}{6}$.

Tác giả: Ngô Tú Hoa – Phản biện: Nguyễn Thị Hồng Gấm và Thoa Nguyễn.

Câu 28. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

cạnh a . Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của đáy $ABCD, A'B'C'D'$ và của bốn mặt bên. Gọi S, I, J, H, K lần lượt là ảnh của O', M, N, P, Q qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$. Tính thể tích khối đa diện được tạo bởi các đỉnh $S, I, J, H, K, A, B, C, D$.

- A. . B. . C. D. .

Ngô Tú Hoa – Nguyễn Thị Hồng Gấm

Câu 29. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng

chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30° , cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45° . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho ?

- A. $\frac{3(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. B. $\frac{(2-\sqrt{3})a^3}{32}$. C. $\frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. D. $\frac{27(2-\sqrt{3})a^3}{64}$.

Thực hiện: Thầy Nguyễn Hùng – Phản biện: Cô Nguyễn Thị Hồng Gấm

Câu 48. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020] Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$

.Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

- A. $\frac{33}{4}$. B. $\frac{65}{8}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 30. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn

$x + y + x \cdot 2^{2x+y-1} \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 5y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{8}$ bằng

- A. $\frac{3}{16}$. B. $\frac{5}{16}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{13}{8}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Câu 31. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho các số thực dương $x; y$ thỏa mãn

$x^2 + x + 5^x \geq x \log_5(4xy - x) + 4xy$. Giá trị nhỏ nhất của $P = y^2 + \frac{5^x}{4xy} + \frac{7}{y}$ là

- A. $\frac{133}{4}$. B. $\frac{113}{4}$. C. 28. D. $\frac{117}{8}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Câu 32. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn

$3\log_2 x + 32x^2 = 3y - 1 + 2^{2y+3}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{e + \ln 2}{2}$. B. $\frac{e \ln 2}{2}$. C. $\frac{e - \ln 2}{2}$. D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Câu 33. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn

$x \neq y$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. -2. D. 6.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Câu 34. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Xét các số thực x và y thỏa mãn

$2x^2 + y^2 \cdot 4^{x^2+y^2-2} \leq 5$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ là $a - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. $\frac{130}{4}$. B. $\frac{265}{2}$. C. $\frac{265}{4}$. D. $\frac{130}{2}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Câu 49. [ĐỀ GÓC-MÃ 101- TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

- A. 59. B. 58. C. 116. D. 115.

Câu 35. [PHÁT TRIỂN CÂU 49 – MÃ 101 – TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi y có không quá 100 số nguyên x thỏa mãn $\log_5(x + y^2) - 3^{y-2x} \leq 0$.

- A. 19. B. 18. C. 20. D. 17.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Sỹ – Phản Biện : Thầy Nguyễn Tất Thành.

Câu 36. [PHÁT TRIỂN CÂU 49 – MÃ 101 – TN 2020] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m

để bất phương trình $\frac{1}{e^{x+m}} - \log_2(x+m^2) \geq 0$ có tối đa 50 nghiệm nguyên.

- A. 15. B. 16. C. 14. D. 17.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Sỹ – Phản Biện : Thầy Nguyễn Tất Thành.

Câu 37. [PHÁT TRIỂN CÂU 49 – MÃ 101 – TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với

mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\frac{1}{2^{x+y}} + \log_5(x+y^2) - \log_2(x+y) \geq 0$.

- A. 30. B. 18. C. 32. D. 17.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Sỹ – Phản Biện : Thầy Nguyễn Tất Thành.

Câu 38. [PHÁT TRIỂN CÂU 49 – MÃ 101 – TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với

mỗi x có không quá 26 số nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2+y) + \log_4(x^2-x+27) \geq \log_3(x+y)$?

- A. 211. B. 423. C. 424. D. 212.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Tất Thành – Phản Biện : Thầy Nguyễn Sỹ.

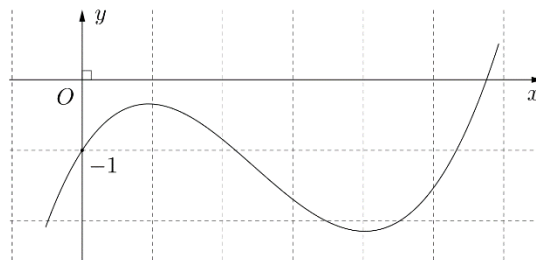
Câu 39. [PHÁT TRIỂN CÂU 49 – MÃ 101 – TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với

mỗi x có không quá 10 số nguyên y thỏa mãn $4^{x^2-7y+26} + 2^{-x-y} \geq 8192$ và $x+y > 0$?

- A. 16. B. 15. C. 17. D. 7.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Tất Thành – Phản Biện : Thầy Nguyễn Sỹ.

Câu 50. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình sau:



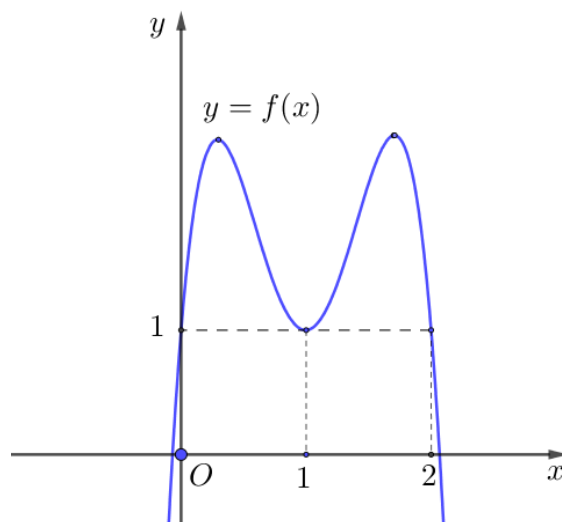
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 40. [PHÁT TRIỂN CÂU 50 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có

đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình

$$f\left(\frac{4f(x)}{\ln x^2}\right) - 1 = 0 \text{ là}$$



A. 8.

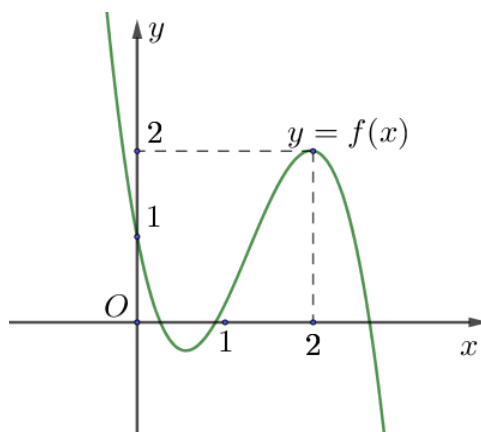
B. 5.

C. 6.

D. 4.

Thực hiện :Thầy Huỳnh Đức Vũ – Thầy Dinh An.

Câu 41. [PHÁT TRIỂN CÂU 50 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\frac{f(x)}{e^x}\right) - 1 = 0$ là



A. 8.

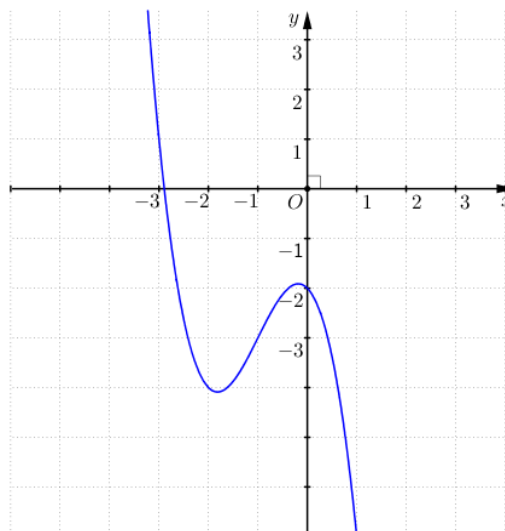
B. 5.

C. 6.

D. 4.

Thực hiện :Thầy Huỳnh Đức Vũ – Thầy Dinh An.

Câu 42. [PHÁT TRIỂN CÂU 50 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^5 f(x)) + 2 = 0$ là



A. 8.

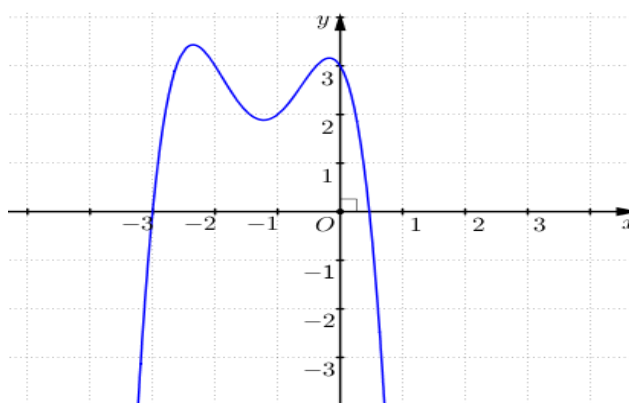
B. 5.

C. 6.

D. 4.

Thực hiện :Thầy Huỳnh Đức Vũ – Thầy Dinh An.

Câu 43. [PHÁT TRIỂN CÂU 50 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f((x+2)^2 f(x)) - 3 = 0$ là



A. 8.

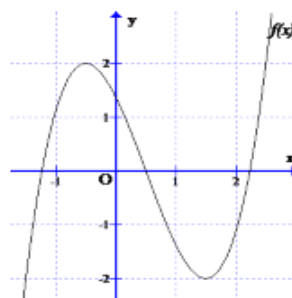
B. 6.

C. 9.

D. 12.

Thực hiện : Thầy Dinh An– Thầy Huỳnh Đức Vũ.

Câu 44. [PHÁT TRIỂN CÂU 50 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f(x)\right|\right)\right| - \left|f(x)\right| = 0$ là

A. 20.

B. 24.

C. 10.

D. 4.

Thực hiện : Thầy Dinh An– Thầy Huỳnh Đức Vũ.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

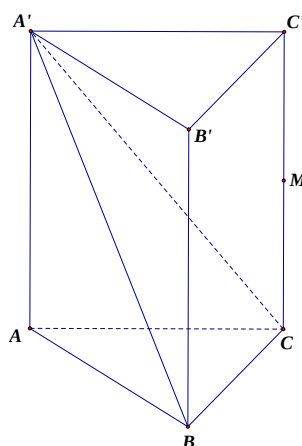
CÂU 43 – MÃ 101

CHỦ ĐỀ : KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẶNG.

Thực hiện nhóm các Thầy:

Nguyễn Xuân Sơn – Phong Do – Bình Hoang – Bình Nguyễn.

Câu 43. [MÃ 101 - TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Lời giải

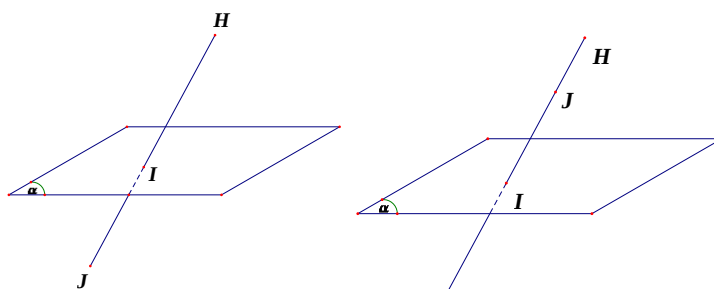
Chọn A

Phân tích: *Nguyễn Xuân Sơn*

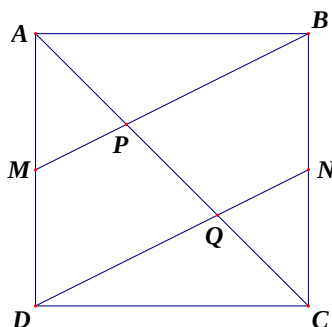
Bài toán tính khoảng cách là bài toán đặc trưng của khối 11, tuy nhiên với dạng bài toán này chúng ta có thể dùng cả ba phương pháp để giải quyết: *tính toán đơn thuần theo cách lớp 11, tính theo tọa độ và tính dựa vào thể tích và tỉ lệ thể tích.*

***) Tính toán theo cách lớp 11:** Học sinh cần nắm được 2 đơn vị kiến thức chính

+) Cho đường thẳng HJ cắt (α) tại I . Khi đó ta có $d(H, (\alpha)) = \frac{HI}{JI} \cdot d(J, (\alpha))$



+) Cho hình vuông $ABCD$ với M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Gọi $BM \cap AC = P, ND \cap AC = Q$. Ta luôn có tính chất sau: $BP = 2PM, DQ = 2QN, AP = PQ = QC$.

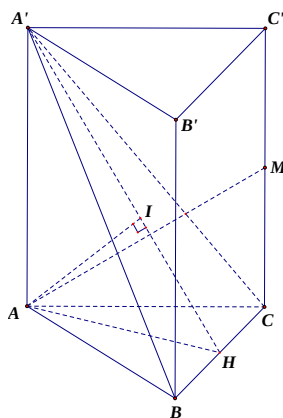


Vận dụng các tính chất trên ta có cách giải **Câu 43** như sau:

$$d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2} d(A, (A'BC)) = \frac{1}{2} AI. \text{ Mà } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$AI = \frac{AA' \cdot AH}{\sqrt{AA'^2 + AH^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$



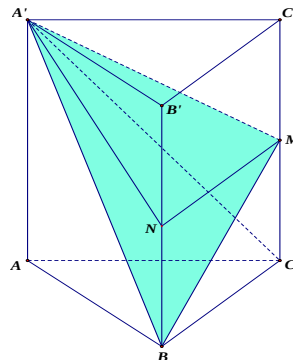
*) Tính theo thể tích và tỉ lệ thể tích:

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, cho $a=1$. Ta có tọa độ các điểm $O(0;0;0)$, $B\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;-\frac{1}{2};0\right)$, $B'\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $C'\left(0;-\frac{1}{2};1\right)$, $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$, $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'B}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-1\right)$. Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BC)$ là: $\vec{n}=[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}]=\left(-1;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Phương trình mặt phẳng $(A'BC)$: $-1(x-0)+0(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{2}(z-0)=0 \Leftrightarrow -2x+\sqrt{3}z=0$.

$$\text{Vậy } d(M,(A'BC))=\frac{\left|\frac{1}{2}\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+3}}=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Câu 1. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CC' , N là trung điểm của BB' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ N đến mặt phẳng $(A'BM)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a}{8}$.

Thực hiện Thầy Nguyễn Xuân Sơn

Lời giải

Chọn B

$$C'G \cap (A'BC) = B, \text{ suy ra } \frac{d(G, (A'BC))}{d(C', (A'BC))} = \frac{GB}{C'B} = \frac{2}{3}.$$

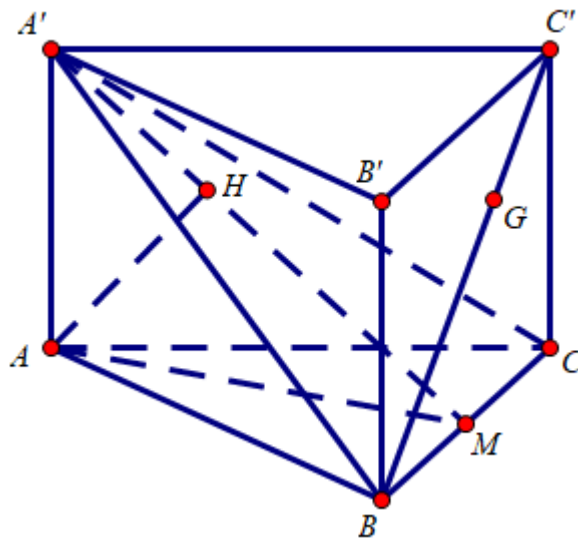
$$\text{Ta có } V_{C', A'BC} = \frac{1}{3} V_{ABC, A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot C'C \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Lại có } A'B = a\sqrt{2}, CB = a, A'C = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle A'BC} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } d(C', (A'BC)) = \frac{3V_{C', A'BC}}{S_{\triangle A'BC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2 \sqrt{7}}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(G, (A'BC)) = \frac{2}{3} d(C', (A'BC)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{2\sqrt{21}a}{21}.$$

Cách 2:



Gọi M là trung điểm BC , H là hình chiếu của A lên $A'M$

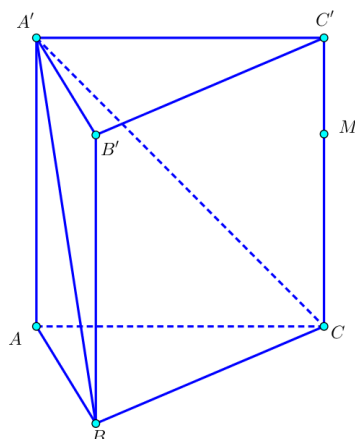
$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH, \text{ mà } AH \perp A'M \text{ nên } AH \perp (A'BC) \text{ hay } AH = d(A, (A'BC))$$

$$C'G \cap (A'BC) = B, \text{ suy ra } \frac{d(G, (A'BC))}{d(C', (A'BC))} = \frac{GB}{C'B} = \frac{2}{3}; d(C', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \sqrt{\frac{AA'^2 \cdot AM^2}{AA'^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(G, (A'BC)) = \frac{2}{3} d(C', (A'BC)) = \frac{2}{3} d(A, (A'BC)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{2\sqrt{21}a}{21}$$

Câu 3. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = a$ và $AA' = 2a$. Trên cạnh CC' lấy điểm M sao cho $C'M = \frac{1}{2}CM$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{4}{9}a$.

B. $\frac{2}{3}a$.

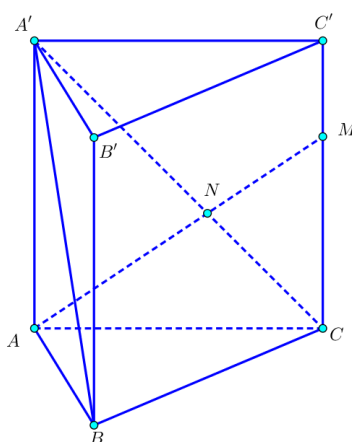
C. $\frac{3}{2}a$.

D. $\frac{9}{4}a$.

Thực hiện : Thầy Hoàng Xuân Bình -PB : Thầy Nguyễn Xuân Sơn

Lời giải

Chọn A



Gọi $MA \cap A'C = N$ thì $\frac{MC}{AA'} = \frac{MN}{NA} = \frac{2}{3}$ do đó: $MN = \frac{2}{3}NA$

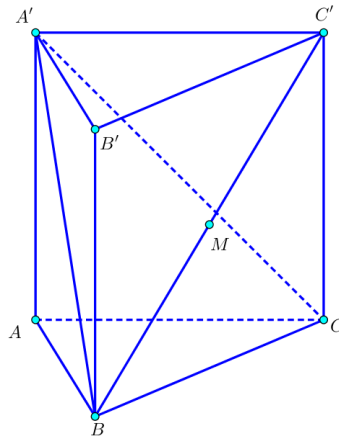
$\Rightarrow d(M; (A'BC)) = \frac{2}{3}d(A; (A'BC)) = \frac{2}{3}h$ với $d(A; (A'BC)) = h$.

Vì AA', AB, AC đôi một vuông góc tại A nên ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{9}{4a^2}$ hay $h = \frac{2}{3}a \Rightarrow d(M; (A'BC)) = \frac{4}{9}a$.

Câu 4. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ tam giác đều

$ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng?



A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

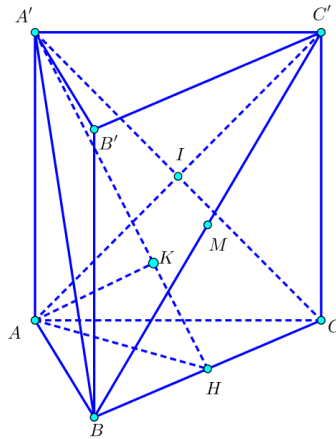
C. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Thực hiện : Hoàng Xuân Bình-PB : Nguyễn Xuân Sơn

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm của mặt bên $ACC'A'$. Khi đó ta có M là trung điểm của BC' nên

$$d(M; (A'BC)) = \frac{1}{2} d(C'; (A'BC)) = \frac{1}{2} d(A; (A'BC)).$$

Gọi H là trung điểm BC , hạ $AK \perp A'H$ thì $A'H = d(A; (A'BC))$.

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AK = \frac{AA' \cdot AH}{\sqrt{AA'^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy: } d(M; (A'BC)) = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

Câu 5. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lăng trụ đứng tam giác

$ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{5}$. Gọi K là điểm thỏa mãn hệ thức $5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ K đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{55}}{44}$.

B. $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.

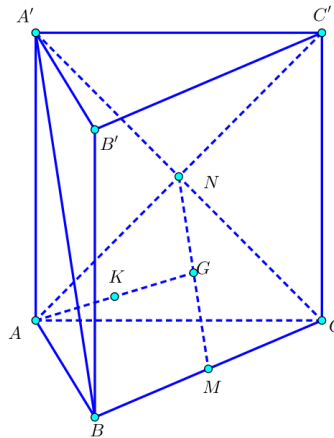
C. $\frac{a\sqrt{55}}{22}$.

D. $\frac{2a\sqrt{55}}{11}$.

Thực hiện : Hoàng Xuân Bính - Phản biện : Nguyễn Xuân Sơn

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCC'$ thì ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'} = 4\overrightarrow{KG}$.

Theo giả thiết: $5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA} + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KG} = \vec{0} \Rightarrow K$ là trung điểm AG .

Mặt khác: gọi M, N là trung điểm của BC và AC' thì G là trọng tâm tứ diện $ABCC'$ nên sẽ là trung điểm $MN \Rightarrow G \in (A'BC)$.

Khi đó: $d(K; (A'BC)) = \frac{1}{2}d(A; (A'BC)) = \frac{1}{2}h$ với $h = d(A; (A'BC))$.

Vì AA', AB, AC đôi một vuông góc tại A nên ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{5a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}$

Câu 6. [PHÁT TRIỂN CÂU 43 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi

cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và P là giao điểm của (HMN) với CD . Khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng SP đến mặt phẳng (HMN) bằng

A. $\frac{a\sqrt{15}}{30}$.

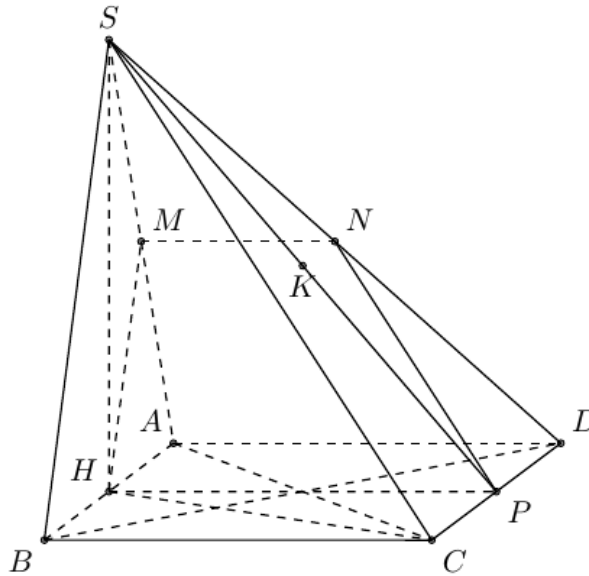
B. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

C. $\frac{a\sqrt{15}}{15}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải

Chọn B



Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có

$$H(0;0;0), A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$$

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(-a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right).$$

Có $MN \parallel AD$ nên suy ra P là trung điểm của CD .

Theo công thức trung điểm, ta suy ra

$$M\left(-\frac{a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), N\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), P\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), K\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right), \overrightarrow{HM} = \left(-\frac{a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$\text{Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (HMN) \text{ là } \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{HM}] = \left(\frac{3a^2}{16}; \frac{a^2\sqrt{3}}{16}; \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right).$$

Phương trình mặt phẳng (HMN) là

$$\frac{3a^2}{16}(x-0) + \frac{a^2\sqrt{3}}{16}(y-0) + \frac{a^2\sqrt{3}}{16}(z-0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y + z = 0.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $d[K, (HMN)] = \frac{\left| -\frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4} \right|}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{a\sqrt{15}}{20}$

CÂU 44 – MÃ 101
CHỦ ĐỀ : CỰC TRỊ HÀM SỐ
Thực hiện : Võ Trọng Trí – Trần Thu Hương – Thiện Vũ – Kiệt Tan.

Câu 44. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			3			-2		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

PHÂN TÍCH

Bài này dựa vào tính chất sau của đa thức:

Cho đa thức $f(x)$ bậc k có k nghiệm (nghiệm có thể trùng nhau) trong đó có m nghiệm bội chẵn và n nghiệm bội lẻ. Khi đó số cực trị của hàm số $f(x)$ bằng $2m+n-1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét đa thức $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là đa thức bậc 12.

Ta có

$$g(x) = x^4 [f(x+1)]^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \\ f(x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = a (a < -1) \\ x+1 = b (-1 < b < 0) \\ x+1 = c (0 < c < 1) \\ x+1 = d (d > 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a-1 (a < -1) \\ x = b-1 (-1 < b < 0) \\ x = c-1 (0 < c < 1) \\ x = d-1 (d > 1) \end{cases}$$

Như vậy đa thức có nghiệm bội 4 là $x=0$, và các nghiệm kép $x=a-1, b-1, c-1, d-1$ (tất cả là 12 nghiệm)

Vậy số cực trị hàm số là $5.2-1=9$.

Cách 2: Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + 2x^4 f(x+1) f'(x+1) = 2x^3 f(x+1) [2f(x+1) + xf'(x+1)].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases}.$$

$$+) f(x+1) = 0 (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4 - 10(x+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \approx 1,278 \\ x+1 \approx 0,606 \\ x+1 \approx -0,606 \\ x+1 \approx -1,278 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

$$+) 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \Rightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,199 \\ t \approx 0,731 \\ t \approx -0,218 \\ t \approx -1,045 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (*).

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

CÂU HỎI TƯƠNG TỰ, PHÁT TRIỂN

Câu 7. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			3			-2		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-1)^4 [f(x-1)-3]^3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 5.

Thầy Kiệt Tan – Thầy Võ Trọng Trí

Lời giải

Chọn B

Xét đa thức $g(x) = (x-1)^4 [f(x-1)-3]^3$ là đa thức bậc 17.

$$\text{Ta có } g(x) = (x-1)^4 [f(x-1)-3]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^4 = 0 \\ f(x-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x-1=0 \\ x-1=a < -1 \\ x-1=b > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+1 < 0 \\ x=1 \\ x=b+1 > 2 \end{cases}$$

Như vậy đa thức có 17 nghiệm, trong đó nghiệm $x=a+1$ và $x=b+1$ bội 3, nghiệm $x=1$ bội 10.

Vậy số cực trị hàm số là $1+2-1=3$.

Câu 8. **[PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020]** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Tính tổng tất cả các giá trị m để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-m)^4 [f(x)+2]^3$ bằng 3.

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 6.

Thầy Kiệt Tan – Cô Trần Thu Hương

Lời giải

Chọn B

Xét đa thức $g(x) = (x-m)^4 [f(x)+2]^3$ là đa thức bậc 12.

$$\text{Ta có } g(x) = (x-m)^4 [f(x)+2]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Như vậy đa thức có 12 nghiệm, trong đó nghiệm $x=m$ là nghiệm bội 4 và $x=-1, x=1$ là các nghiệm bội 6.

Nếu $m=-1$ hoặc $m=1$ thì số cực trị hàm số đã cho là $2+2-1=3$.

Nếu $m \neq \pm 1$ thì số cực trị hàm số đã cho là $3+2-1=5$.

Vậy tổng các giá trị m để hàm số đã cho có 3 cực trị là 0

Câu 9. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^3 [f(3x+1)]^2$ là

A. 6.

B. 4.

C. 7.

D. 3.

Thực hiện: Thầy Thiện Vũ – Phản biện: Thầy Võ Trọng Trí

Lời giải

Chọn B.

Ta chọn hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 3x^2 [f(3x+1)]^2 + 6x^3 f(3x+1) f'(3x+1) = 3x^2 f(3x+1) [f(3x+1) + 2xf'(3x+1)].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ f(3x+1) = 0 \\ f(3x+1) + 2xf'(3x+1) = 0 \end{cases}.$$

+) $3x^2 = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x = 0$.

$$\text{+) } f(3x+1) = 0 \Leftrightarrow (3x+1)^3 - 3(3x+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 2 \\ 3x+1 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép $x = \frac{1}{3}$ và nghiệm đơn $x = -\frac{2}{3}$.

$$\text{+) } f(3x+1) + 2xf'(3x+1) = 0 \xrightarrow{t=3x+1} t^3 - 3t^2 + 4 + \frac{2}{3}(t-1)(3t^2 - 6t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^3 - 9t^2 + 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx -0,457 \\ t \approx 1,457 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 \approx -0,457 \\ 3x+1 \approx 1,457 \\ 3x+1 = 2 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \approx -0,486$; $x \approx 0,152$; $x = \frac{1}{3}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 4.

Câu 10. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-9	7	-9	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x^2 + 1)]^2$ là

A. 9.

B. 4.

C. 7.

D. 5.

Thực hiện: Thầy Thiện Vũ – Phản biện: Thầy Võ Trọng Trí

Lời giải

Chọn D.

Ta chọn hàm $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 4x^3 [f(x^2 + 1)]^2 + 4x^5 f(x^2 + 1) f'(x^2 + 1) = 4x^3 f(x^2 + 1) [f(x^2 + 1) + x^2 f'(x^2 + 1)].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ f(x^2 + 1) = 0 \\ f(x^2 + 1) + x^2 f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases}.$$

+) $4x^3 = 0$: Phương trình có nghiệm bội lẻ $x = 0$.

$$\text{+) } f(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^4 - 8(x^2 + 1)^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \pm 1 \\ x^2 + 1 = \pm \sqrt{7} \end{cases}.$$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên phương trình có ba nghiệm $x = 0$; $x = \pm \sqrt{\sqrt{7} - 1}$.

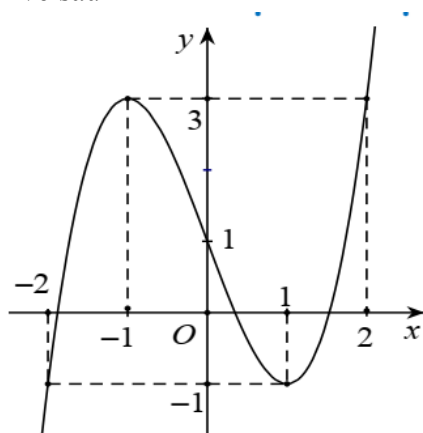
$$\text{+) } f(x^2 + 1) + x^2 f'(x^2 + 1) = 0 \xrightarrow{t=x^2+1} t^4 - 8t^2 + 7 + (t-1)(4t^3 - 16t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 16t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 2,191 \\ t = 1 \\ t \approx -0,307 \\ t \approx -2,085 \end{cases}.$$

Do $t = x^2 + 1 \geq 1$ nên phương trình có ba nghiệm $x = 0$; $x \approx \pm 1,091$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 5.

Câu 11. [PHÁT TRIỂN CÂU 44 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{[f(x^2 - 1)]^4}{e^{x^2}}$ là

A. 8.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Thực hiện: Cô Trần Thu Hương – Phản biện: Thầy Thiện Vũ

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị tìm được hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$\text{Ta có } y = \frac{[f(x^2 - 1)]^4}{e^{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{4 \cdot [f(x^2 - 1)]^3 \cdot f'(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot e^{x^2} - [f(x^2 - 1)]^4 \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot [f(x^2 - 1)]^3 \cdot f'(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot e^{x^2} - [f(x^2 - 1)]^4 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x^2 - 1)]^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2} \cdot [4f'(x^2 - 1) - f(x^2 - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \cdot e^{x^2} = 0 & (1) \\ f(x^2 - 1) = 0 & (2) \\ 4f'(x^2 - 1) - f(x^2 - 1) = 0 & (3) \end{cases}$$

+) (1) $\Leftrightarrow x = 0$.

$$\text{+) (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \approx -1,88 \\ x^2 - 1 \approx 1,53 \\ x^2 - 1 \approx 0,35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx \pm \sqrt{2,53} \\ x \approx \pm \sqrt{1,35} \end{cases}$$

+) Giải (3): Đặt $x^2 - 1 = t$

$$(2) \Leftrightarrow 4f'(t) - f(t) = 0 \Leftrightarrow 4(3t^2 - 3) - (t^3 - 3t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -t^3 + 12t^2 + 3t - 13 = 0$$

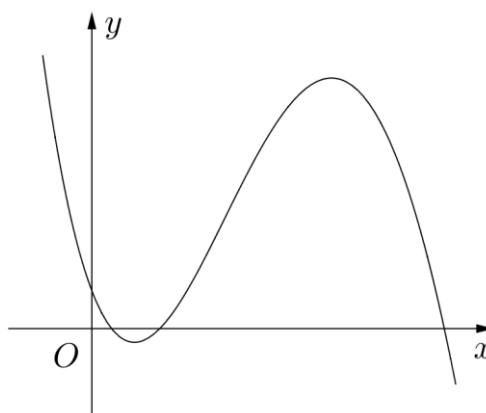
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 12,12 \\ t \approx 0,96 \\ t \approx -1,17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx \pm\sqrt{13,12} \\ x \approx \pm\sqrt{1,96} \end{cases}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ có 9 nghiệm đơn phân biệt do đó hàm số $y = \frac{[f(x^2 - 1)]^4}{e^{x^2}}$ có 9

điểm cực trị.

CÂU 45 – MÃ 101
CHỦ ĐỀ : TÌM HỆ SỐ TRONG HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC
Thực hiện : Ngô Tú Hoa

Câu 45. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

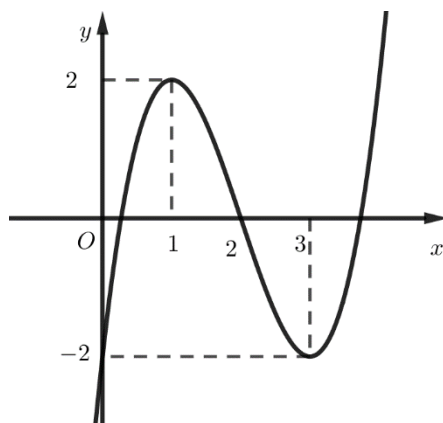
$$+) \text{ Tổng hai nghiệm } x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0.$$

+) Tích hai nghiệm $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 12. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là

- A. b . B. d . C. a . **D. c .**

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

+) Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng $-2 \Rightarrow d = -2 < 0$.

+) Hàm số có hai điểm cực trị $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$ nên
$$\begin{cases} -\frac{2b}{3a} = x_1 + x_2 = 4 \\ \frac{c}{3a} = x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases}.$$

Suy ra $y = ax^3 - 6ax^2 + 9ax - 2$.

+) Lại có $y(1) = 2 \Rightarrow 4a - 2 = 2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 9 \end{cases}.$

Vậy $b < d < a < c$.

Câu 13. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có BBT như hình vẽ. Trong các số a, b, c có bao nhiêu giá trị dương?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

A. 1 .

B. 0 .

C. 2 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn A

TCN: $y = \frac{a}{b} = -1 < 0$; TCD: $x = -\frac{c}{b} = 2 > 0$; Hàm Số nghịch biến

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -2b \\ ac - b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac = 2b^2 \\ ac < b \end{cases} \Rightarrow 2b^2 < b \Rightarrow b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Câu 14. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ có

BBT như hình vẽ. Giá trị của $a-b-c$ thuộc khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

A. $(-1; 0)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

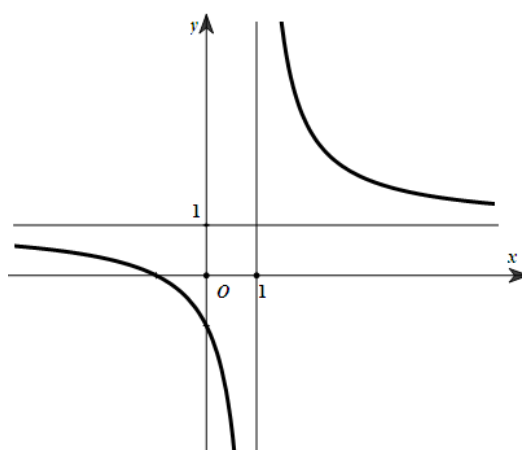
Từ BBT ta có tiệm cận đứng $x = -\frac{c}{b} = -2 \Leftrightarrow 2b = c$

Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x) = \frac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0 \Leftrightarrow ac+b < 0$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + b < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < b < 0 \Rightarrow P = a - b - c = -2b \text{ thì } 0 < P < 1$$

Câu 15. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Có đồ thị như hình vẽ:



Trong các số sau: $ab; bd; bc; ad; ad - bc$ có bao nhiêu số dương
A.3 .B.2 .C.4 .D.5 .

Lời giải

Chọn A

Hàm số nghịch biến nên $ad - bc < 0$.

Đồ thị giao trục hoành tại hoành độ $x = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị giao trục tung tại tung độ $y = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$

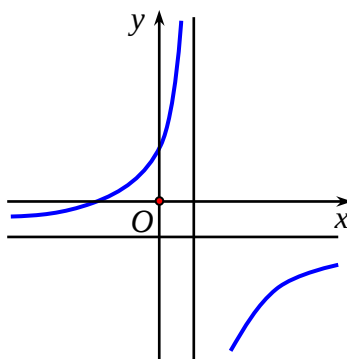
Ta có : $\begin{cases} ab > 0 \\ bd < 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 ad < 0 \Rightarrow ad < 0$.

TCD : $x = -\frac{d}{c} = 1 > 0 \Rightarrow cd < 0$; TCN : $y = \frac{a}{c} = 1 > 0 \Rightarrow ac > 0$

Và có $\begin{cases} ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 bc > 0 \Rightarrow bc > 0$.

Vậy có 3 số dương thuộc ab, ad, bc

Câu 16. [PHÁT TRIỂN CÂU 45 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số $ab; bc; ad; ad - bc$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

HS đồng biến nên $ad - bc > 0$.

Giao với trục hoành Ox tại $x = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$.

TCĐ : $x = -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$ và TCN : $y = \frac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$.

Ta có $\begin{cases} cd < 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Rightarrow c^2 ad > 0 \Rightarrow ad > 0$.

Và có $\begin{cases} ab > 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 bc < 0 \Rightarrow bc < 0$

Vậy có 3 số dương.

CÂU 46 – MÃ 101

CHỦ ĐỀ : BÀI TOÁN XÁC SUẤT CHỌN SỐ TN THOẢ MÃN ĐK

Thực hiện : Nhóm các thầy

Nguyễn Khắc Thành – Nguyễn Ngọc Hoá – Nguyễn Thanh Hải.

Câu 46. [MÃ 101- TN 2020] Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

- A. $\frac{25}{42}$. B. $\frac{5}{21}$. C. $\frac{65}{126}$. D. $\frac{55}{126}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Có A_9^4 cách tạo ra số có 4 chữ số phân biệt từ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$\Rightarrow |S| = A_9^4 = 3024.$$

$$\Rightarrow |\Omega| = 3024.$$

Gọi biến cố A: "chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn".

Nhận thấy không thể có 3 chữ số chẵn hoặc 4 chữ số chẵn vì lúc đó luôn tồn tại hai chữ số chẵn nằm cạnh nhau.

□ **Trường hợp 1:** Cả 4 chữ số đều lẻ.

Chọn 4 số lẻ từ X và xếp thứ tự có A_5^4 số.

□ **Trường hợp 2:** Có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn.

Chọn 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn từ X và xếp thứ tự có $C_5^3.C_4^1.4!$ số.

□ **Trường hợp 3:** Có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn từ X có $C_5^2.C_4^2$ cách.

Xếp thứ tự 2 chữ số lẻ có $2!$ cách.

Hai chữ số lẻ tạo thành 3 khoảng trống, xếp hai chữ số chẵn vào 3 khoảng trống và sắp thứ tự có $3!$ cách.

⇒ trường hợp này có $C_5^2.C_4^2.2!.3!$ số.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{A_5^4 + C_5^3.C_4^1.4! + C_5^2.C_4^2.2!.3!}{3024} = \frac{25}{42}.$$

Cách 2:

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_5^4 = 3024$.

Gọi A: "Lấy được số không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn"

⇒ $\bar{A}$: "Lấy được số có hai chữ số chẵn liên tiếp"

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Có đúng hai chữ số liên tiếp cùng chẵn.

- Chọn 2 chữ số chẵn và sắp xếp có A_4^2 cách

- Xếp 2 chữ số chẵn trên vào 2 trong 4 vị trí có 3 cách

- Chọn 2 chữ số lẻ và xếp vào 2 vị trí còn lại có A_5^2 cách

⇒ Trường hợp này có: $A_4^2.3.A_5^2 = 720$ số

TH2: Có 3 chữ số chẵn trong đó có ít nhất 2 chữ số chẵn liên tiếp

- Chọn 3 chữ số chẵn và sắp xếp có A_4^3 cách

- Chọn một chữ số lẻ có 5 cách

- Xếp chữ số lẻ này vào một trong 4 vị trí đầu, giữa, cuối trong dãy 3 chữ số chẵn có 4 cách.

$$\Rightarrow \text{Trường hợp này có } A_4^3 \cdot 5 \cdot 4 = 480$$

TH3: Có 4 chữ số chẵn. Trường hợp này có $4! = 24$ cách

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = 720 + 480 + 24 = 1224$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1224}{3024} = \frac{25}{42}.$$

PHÂN TÍCH

Đây là bài toán xác suất liên quan đến các số tự nhiên.

Bài toán hỏi về tính chất một số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau trong đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn.

Ta có hai cách giải quyết trực tiếp và gián tiếp thông qua biến cố đối. Cách giải quyết nào cũng cần sự phân tích xem có những trường hợp thuận lợi nào để xảy ra biến cố và sử dụng các kiến thức về hai quy tắc đếm cũng như các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Ta có thể phát triển bài toán theo một số hướng sau đây:

Hướng 1: Thay vì hỏi về số chẵn ta hỏi số lẻ.

Hướng 2: Tăng số lượng các chữ số liên tiếp cùng chẵn.

Hướng 3: Hỏi sang biến cố đối.

Hướng 4: Thay đổi tượng các chữ số chẵn và lẻ thành đối tượng là các bạn nam và nữ.

Hướng 5: Thay đổi sang một tính chất tương tự khác của các số tự nhiên.

Câu 17. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Một tổ có 4 bạn nam và 5 bạn nữ.

Cần chọn ra 4 bạn để xếp thành một hàng dài tham gia điều hành. Tính xác suất để trong hàng không có 3 bạn nữ nào đứng liên tiếp nhau.

A. $\frac{41}{54}$.

B. $\frac{49}{54}$.

C. $\frac{85}{108}$.

D. $\frac{89}{108}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Ngọc Hoá –Phản biện: Thầy Nguyễn Thanh Hải

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_9^4 = 3024$.

Gọi A: “Trong hàng không có 3 bạn nữ nào đứng liên tiếp nhau”

$\Rightarrow \bar{A}$: “Trong hàng có ít nhất 3 bạn nữ đứng liên tiếp nhau”

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Có 3 bạn nữ liên tiếp nhau

- Chọn 3 bạn nữ và sắp xếp có A_3^3 cách.

- Chọn 1 bạn nam có 4 cách
- Xếp bạn nam vào hàng có 2 cách.

$$\Rightarrow \text{TH này có } A_5^3 \cdot 4 \cdot 2 = 160.$$

TH2: Có 4 bạn nữ liên tiếp nhau.

$$\Rightarrow \text{TH này có } A_5^4 = 120 \text{ cách}$$

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = 160 + 120 = 280$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{280}{3024} = \frac{49}{54}.$$

Câu 18. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Gọi S là tập hợp tất cả các số tự

nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{9}{14}$.

B. $\frac{19}{28}$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $\frac{16}{21}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Ngọc Hoà –Phản biện: Thầy Nguyễn Thanh Hải

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu bằng $A_8^4 = 1680$.

Gọi A : “chọn được số **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chia hết cho 3”.

$\Rightarrow \bar{A}$: “Chọn được số có ít nhất hai chữ số liên tiếp cùng chia hết cho 3”

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Có hai chữ số liên tiếp chia hết cho 3

- Chọn 2 chữ số chia hết cho 3 và sắp xếp có A_3^2 cách
 - Xếp 2 chữ số này vào 2 vị trí liên tiếp trong 4 vị trí có 3 cách
 - Chọn 2 chữ số trong 5 chữ số không chia hết cho 3 và xếp vào 2 vị trí còn lại có A_5^2 cách
- $\Rightarrow \text{TH này có: } A_3^2 \cdot 3 \cdot A_5^2 = 360 \text{ số.}$

TH2: Có 3 chữ số trong đó ít nhất 2 chữ số liên tiếp chia hết cho 3

- Chọn 3 chữ số cùng chia hết cho 3 và sắp xếp có $3!$ cách

- Chọn 1 chữ số không chia hết cho 3 có 5 cách

- Điền chữ số này vào 1 trong 4 vị trí đầu, giữa, cuối 3 chữ số trên có 4 cách

$\Rightarrow$ TH này có $3! \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = 360 + 120 = 480 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{480}{1680} = \frac{5}{7}.$$

Câu 19. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2

học sinh lớp 11A và 3 học sinh lớp 11B và 5 học sinh của lớp 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh nào của cùng một lớp đứng cạnh nhau.

A. $\frac{3}{126}$.

B. $\frac{11}{630}$.

C. $\frac{1}{126}$.

D. $\frac{2}{63}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Thanh Hải – Phản biện: Thầy Nguyễn Khắc Thành

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$

Gọi A là biến cố thỏa yêu cầu bài toán.

- Xếp 5 học sinh lớp 11C vào hàng có 5! cách

(Sau khi xếp sẽ có 6 vị trí trống (4 giữa và 2 ở hai đầu), chẳng hạn **1C2C3C4C5C6**)

- Nếu xếp xen kẽ 5 học sinh lớp A và B từ phía tận cùng bên trái (**12345**) có 5! cách xếp, tương tự xếp từ phía bên phải (**23456**) cũng sẽ có 5! Cách xếp

- Nếu xếp 5 học sinh lớp A và B vào các vị trí **2345** trong đó có 1 vị trí xếp 2 học sinh có $A_4^3 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 3$ cách

Suy ra $n(A) = 5! \cdot (2 \cdot 5! + A_4^3 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 3) = 63360$

Vậy $P(A) = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}$.

Câu 20. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Gọi E là tập các số tự nhiên có 5

chữ số được lập từ các chữ số 0;1;2;3;4;5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập E. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

A. $\frac{2}{15}$.

B. $\frac{2}{45}$.

C. $\frac{1}{45}$.

D. $\frac{4}{15}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Thanh Hải – Phản biện: Thầy Nguyễn Khắc Thành

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$ (a_5 chẵn; đúng 2 chữ số 0, không cạnh nhau).

TH1: $a_5 = 0$

+ Chọn vị trí xếp số 0 còn lại có 2 cách (loại a_1, a_4).

+ Còn 3 vị trí xếp bởi 5 chữ số có A_5^3 cách.

Trường hợp này có $2.A_5^3$ số.

TH2: $a_5 \neq 0$ suy ra a_5 có 2 cách chọn

+ Chọn ra 2 vị trí không cạnh nhau từ $\overline{a_2 a_3 a_4}$ để xếp số 0 có 1 cách (vào a_2 và a_4).

+ Còn 4 chữ số xếp vào 2 vị trí có A_4^2 cách.

Trường hợp này có: $2.A_4^2$ số.

Do đó xác suất cần tìm là: $P = \frac{2.A_5^3 + 2.A_4^2}{5.6^4} = \frac{144}{6480} = \frac{1}{45}$.

Câu 21. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E .
Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 1.

A. $\frac{12}{25}$.

B. $\frac{13}{25}$.

C. $\frac{144}{295}$.

D. $\frac{151}{295}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Khắc Thành – Phản biện: Thầy Nguyễn Ngọc Hoá

Lời giải

Chọn C

Từ tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có thể lập được $A_5^3 = 60$ số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

Trong 60 số đó có: $A_4^3 = 24$ số không có mặt chữ số 1 và có $60 - 24 = 36$ số có mặt chữ số 1.

Gọi A là tập các số không có mặt chữ số 1 $\Rightarrow n(A) = A_4^3 = 24$

Gọi B là tập các số luôn có mặt chữ số 1 $\Rightarrow n(B) = 60 - 24 = 36$

Để trong hai số được viết lên bảng có đúng một số có mặt chữ số 1 thì ta lấy 1 số thuộc tập A và lấy một số thuộc tập B để viết lên bảng.

Vậy xác suất cần tính là: $p = \frac{C_{24}^1 \cdot C_{36}^1}{C_{60}^2} = \frac{144}{295}$.

Câu 22. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai hộp đựng bi: hộp A đựng 7

viên bi xanh, 7 viên bi đỏ; hộp B đựng 5 viên bi xanh, 9 viên bi đỏ. Bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp A bỏ vào hộp B, sau đó bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp B bỏ lại hộp A. Tính xác suất để sau khi đổi bi xong số bi xanh trong hai hộp bằng nhau.

A. $\frac{567}{1768}$.

B. $\frac{343}{352}$.

C. $\frac{49}{96}$.

D. $\frac{49}{264}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Khắc Thành – Phản biện: Thầy Nguyễn Ngọc Hoá

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{14}^3 C_{17}^3$

Trường hợp 1: Lần thứ nhất lấy được cả 3 viên bi xanh, sau đó trả lại phải bốc 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, số cách bốc là: $C_7^3 \cdot C_7^0 \cdot C_8^2 \cdot C_9^1$

Trường hợp 2: Lần thứ nhất lấy được cả 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, sau đó trả lại phải bốc 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ, số cách bốc là: $C_7^2 \cdot C_7^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{10}^2$

Trường hợp 3: Lần thứ nhất lấy được cả 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ, sau đó trả lại 3 viên bi đỏ, số cách bốc là: $C_7^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^0 \cdot C_{11}^3$

Gọi X là biến cố sau khi đổi bi xong số bi xanh trong hai hộp bằng nhau

$$n(A) = C_7^3 \cdot C_7^0 \cdot C_8^2 \cdot C_9^1 + C_7^2 \cdot C_7^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{10}^2 + C_7^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^0 \cdot C_{11}^3$$

Vậy xác suất cần tính là

$$p(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{C_7^3 \cdot C_7^0 \cdot C_8^2 \cdot C_9^1 + C_7^2 \cdot C_7^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{10}^2 + C_7^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^0 \cdot C_{11}^3}{C_{14}^3 C_{17}^3} = \frac{8820 + 46305 + 24255}{C_{14}^3 C_{17}^3} = \frac{567}{1768}.$$

Câu 23. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Viết lên bảng năm số tự nhiên có hai chữ số khác nhau theo thứ tự tăng dần được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 và mỗi chữ số chỉ xuất hiện 1 lần. Xác suất để 5 số đều chia hết cho 3 là

A. $\frac{1}{21}$.

B. $\frac{1}{35}$.

C. $\frac{2}{105}$.

D. $\frac{2}{189}$.

Thực hiện Cô Đoàn Thị Lan Oanh – Phản Biện Thầy Nguyễn Khắc Thành

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu:

5 chữ số đứng đầu của 5 số có hai chữ số có C_9^5 cách chọn (chọn 5 chữ số trong 9 chữ số khác 0).

5 chữ số còn lại thay phiên đứng cùng 5 chữ số đứng đầu vừa chọn, có $5!$ cách.

Mỗi cách chọn 5 số cho duy nhất một cách viết theo thứ tự tăng dần, nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5! \cdot C_9^5 = 15120$.

Đếm số phần tử của biến cố $A = \text{“5 số đó đều chia hết cho 3”}$.

Một số có hai chữ số mà chia hết cho 3 thì có 2 trường hợp: cả hai chữ số đều chia hết cho 3 hoặc một chữ số chia 3 dư 1, 1 chữ số chia 3 dư 2.

Ta chia 10 chữ số thành 3 nhóm như sau:

Nhóm 1 (chia hết cho 3): 0; 3; 6; 9.

Nhóm 2 (chia 3 dư 1): 1; 4; 7.

Nhóm 3 (chia 3 dư 2): 2; 5; 8.

Xét nhóm 1: Ta cần chọn ra 2 số dạng $\overline{a0}; \overline{bc}$. Các chữ số a, b, c là hoán vị của 3 chữ số 3; 6; 9, do đó có $3! = 6$ số được lập.

Xét nhóm 2 và 3: Để lập được số có hai chữ số chia hết cho 3, ta cần chọn 1 chữ số trong nhóm 2 và 1 chữ số trong nhóm 3. Ta xét các cặp số $(1, d), (4, e), (7, f)$ với d, e, f được chọn từ nhóm 3. Số cách chọn d, e, f là $3! = 6$, do đó có 6 cách chọn 3 cặp số $(1, d), (4, e), (7, f)$. Mỗi cặp số sẽ tạo thành 2 số có hai chữ số khác nhau chia hết cho 3, nên có $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ cách chọn 3 số có hai chữ số từ nhóm 2 và 3.

Vậy số phần tử của biến cố A là $n(A) = 6 \cdot 48 = 288$.

Xác suất của biến cố A là $P_A = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{288}{15120} = \frac{2}{105}$.

CÂU 47 – MÃ 101

CHỦ ĐỀ : THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thực hiện : Nhóm các Thầy Cô giáo

Ngô Dung – Thoa Nguyễn – Ngô Tú Hoa – Nguyễn Thị Hồng Gấm – Nguyễn Hùng.

I. BÀI TOÁN GỐC:

Câu 47. [ĐỀ GÓC MÃ 101 – TN 2020] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O . Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$.

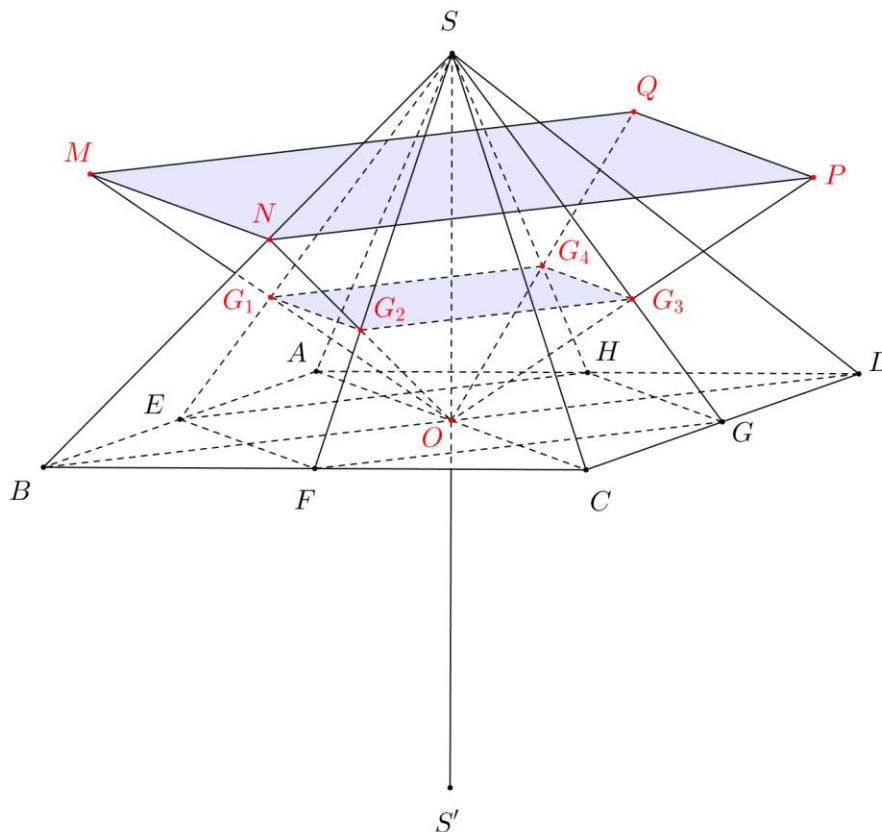
B. $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$.

C. $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$.

D. $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SCD, \triangle SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4 \cdot \frac{4}{9} S_{EFGH} = 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} EG \cdot HF = \frac{8a^2}{9}.$$

$$\begin{aligned} d(S', (MNPQ)) &= d(S', (ABCD)) + d(O, (MNPQ)) \\ &= d(S, (ABCD)) + 2d(O, (G_1G_2G_3G_4)) \\ &= d(S, (ABCD)) + \frac{2}{3}d(S, (ABCD)) \\ &= \frac{5}{3}d(S, (ABCD)) = \frac{5a\sqrt{14}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a\sqrt{14}}{6} \cdot \frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}.$$

II. PHÂN TÍCH Ý TƯỞNG :

TỶ SỐ ĐOẠN THẲNG TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỢC THỂ HIỆN TRONG BÀI TOÁN THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN.

Ngô Dung

Ta đã biết : Bài toán thể tích khối đa diện chương trình HÌNH HỌC KHÔNG GIAN của THPT thường đưa về tính thể tích các khối quen biết có công thức tính : Đó là khối lăng trụ và khối chóp. Thì hai khối quen biết này để tính được cần 2 yếu tố : ĐƯỜNG CAO VÀ DIỆN TÍCH ĐÁY. Cả 2 yếu tố này trong câu 47 – Mã 101 đều đưa về : **cách tìm tỷ số đoạn thẳng qua phép biến hình**. Và bài toán được thực hiện qua khối chóp tứ giác đều đã cho cạnh đáy và cạnh bên. Chính vì vậy các tỷ lệ trong bài toán dễ dàng thực hiện vì tính đối xứng của khối chóp dạng này.

• TỶ SỐ ĐOẠN THẲNG TRONG TÍNH ĐƯỜNG CAO CỦA BÀI TOÁN THỂ TÍCH :

Độ dài đường cao là khoảng cách từ S' đến mặt phẳng $MNPQ$: Được tính nhờ đường cao của khối chóp đã biết qua tỉ lệ của phép đối xứng tâm.

• TỶ SỐ ĐOẠN THẲNG TRONG TÍNH DIỆN TÍCH ĐÁY CỦA BÀI TOÁN THỂ TÍCH :

Đáy $MNPQ$ của chóp cần tìm được tạo từ các điểm M, N, P, Q là ảnh của tâm O qua phép đối xứng tâm mà tâm là trọng tâm các mặt bên. Do tính đều của chóp nên rõ ràng tỷ số các cạnh này dễ dàng tìm được bằng cách lần lượt sử dụng tính chất trọng tâm và giả thiết ảnh qua phép đối xứng tâm.

• *Như vậy sử dụng phép biến hình ta có thể mở rộng nhiều bài toán tính thể tích khối đa diện mà thực tế chỉ cần đưa về là BÀI TOÁN THỂ TÍCH CƠ BẢN.*

III. CÁC VÍ DỤ PHÁT TRIỂN.

PHÁT TRIỂN 1:

Theo ý tưởng đỉnh và đáy là ảnh qua phép đối xứng qua mặt phẳng.

Câu 24. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có tâm là O , mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N, P, Q lần lượt là ảnh của O qua các phép đối xứng qua mặt phẳng SAB , SBC , SCD , SDA . Biết S' là điểm đối xứng với S qua mặt phẳng $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S'.MNPQ$.

A. $\frac{9\sqrt{3}}{16}a^3$.

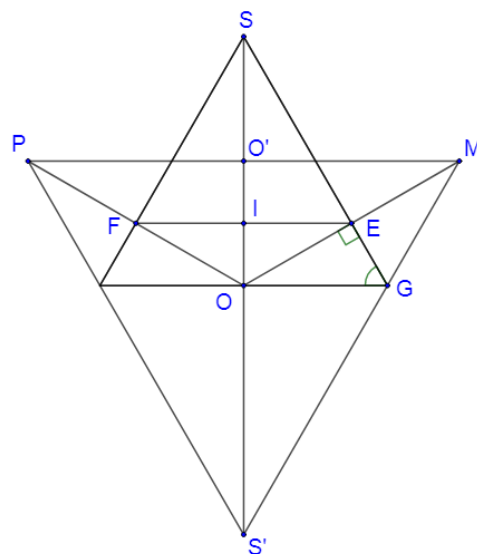
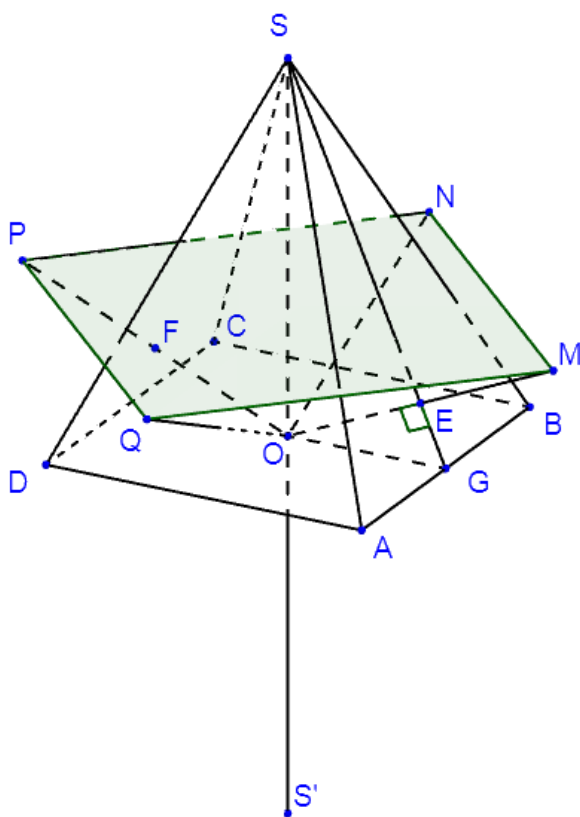
B. $\frac{9\sqrt{3}}{32}a^3$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{32}a^3$.

D. $\frac{27\sqrt{3}}{16}a^3$.

Lời giải

Chọn B.



Ta lấy các điểm $OM \cap SAB = E, OP \cap SCD = F$ và kéo dài SE cắt AB tại G

Khi đó do $SOE \perp AB \Rightarrow SG \perp AB$

Mà $\triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow G$ là trung điểm AB và đồng thời cũng có $SGO = 60^\circ$

* Tính S_{MNPQ} :

- Xét mặt phẳng α đi qua trục SS' chứa các điểm G và trung điểm của đoạn DC , khi đó các điểm $E, F, M, P \in \alpha$

Gọi $I = FE \cap SO, O' = PM \cap SO$.

Ta có $\triangle SAB$ cân tại S nên $FE // OG \Rightarrow IE // OG$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{IE}{OG} = \frac{SE}{SG} = \frac{SO^2}{SG^2} = \sin^2 SGO = \frac{3}{4} \Rightarrow IE = \frac{3}{8}a \Rightarrow EF = \frac{3}{4}a$$

Do P, M là ảnh của O qua phép đối xứng qua mặt SAB , SCD hay P, M là ảnh của O qua

$$\text{phép đối xứng qua tâm } E, F \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EM} \\ \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{FN} \end{cases} \Rightarrow FE // PM, PM = 2EF = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Hay có } PM // AD, PM = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Cũng tương tự vậy ta sẽ chứng minh được } NQ // AB, NQ = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Khi đó } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP \cdot NQ = \frac{9}{8}a^2$$

* Tính đường cao hình chóp $S'.MNPQ$

$S'O' \perp MP, S'O' \perp NQ \Rightarrow S'O'$ chính là đường cao cần tìm,

$$S'O' = S'O + OO' = SO + 2.OI = SO + 2 \cdot \frac{1}{4}SO = \frac{3}{2}SO = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

$$\text{* Tính thể tích khối chóp } S'.MNPQ: V_{S'.MNPQ} = \frac{9\sqrt{3}}{32}a^3$$

PHÁT TRIỂN 2:

Theo ý tưởng đây là ảnh qua phép đối xứng trục.

Câu 25. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ có thể tích V . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Lấy A_1 đối xứng với A qua ED , B_1 đối xứng với B qua EA ; C_1 đối xứng với C qua EB và D_1 đối xứng với D qua EC . Tính theo V thể tích khối chóp $F.A_1B_1C_1D_1$.

A. V .

B. $\frac{3V}{2}$.

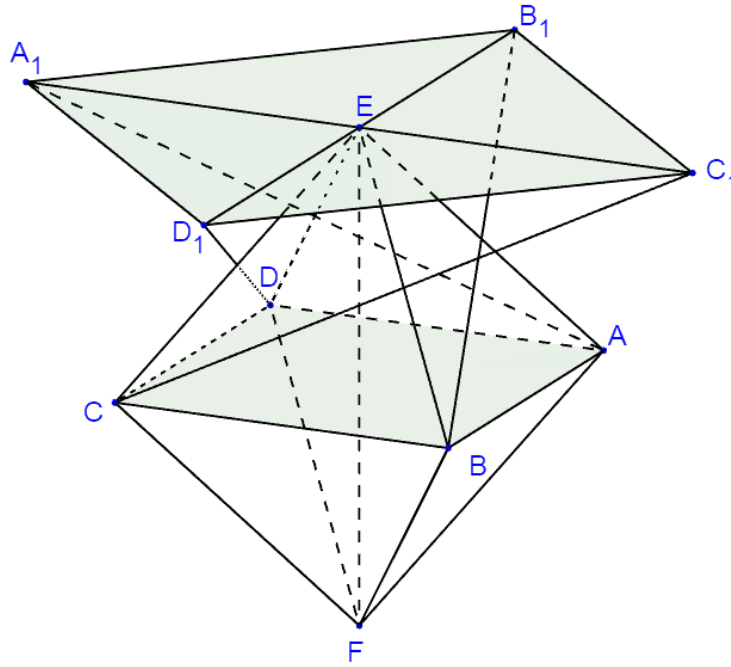
C. $2V$.

D. $\frac{4V}{3}$.

Thực hiện : Ngô Dung – Phản biện : Cô Thoa Nguyễn

Lời giải

Chọn C.



Ta có các tam giác đều ABE, BCE, CDE, DAE nên $A_1 = D_{ED} A$, $B_1 = D_{EA} B$, $C_1 = D_{EB} C$, $D_1 = D_{EC} D$

Có tam giác EBC là tam giác đều nên phép đối xứng qua trục EB biến C thành C_1 sẽ là phép đối xứng tâm với tâm đối xứng là trung điểm EB , do đó CBC_1E là hình bình hành. Hay $EC_1 // CB, EC_1 = CB$.

Tương tự ta có $EA_1 // AD, EA_1 = AD \Rightarrow A_1C_1 // AD, A_1C_1 = 2AD$.

Tương tự ta được $B_1D_1 // CD, B_1D_1 = 2CD$.

$$B_1D_1 \perp A_1C_1, B_1D_1 = A_1C_1 \Rightarrow S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} B_1D_1 \cdot A_1C_1 = 2AD \cdot CD = 2S_{ABCD}$$

$$\text{Lại có: } V = V_{ABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot EF \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot EF \cdot 2S_{ABCD} = \frac{1}{2} V_{F.A_1B_1C_1D_1}$$

$$\text{Nên } V_{F.A_1B_1C_1D_1} = 2V.$$

PHÁT TRIỂN 3,4,5 :

Theo ý tưởng đỉnh và đáy là ảnh qua phép Vị Tự của một số điểm đặc biệt.

Câu 26. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và đáy là tam giác ABC vuông tại A . Gọi D, E, F lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm S tỉ số $k = -\frac{1}{2}$. Biết thể tích khối $S.ABCD$ bằng V và thể tích khối đa diện $DEFABC$ bằng V' . Tính tỉ số $\frac{V}{V'}$.

A. $\frac{8}{27}$.

B. $\frac{2}{3}$.

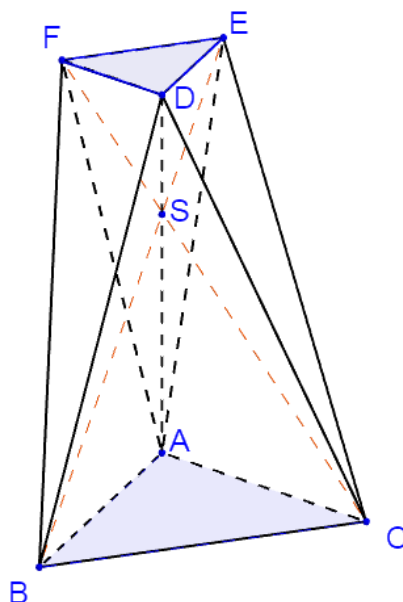
C. $\frac{13}{27}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Thực hiện : Ngô Dung – Phản biện : Cô Thoa Nguyễn

Lời giải

Chọn A



Ta có: $D = V_{\left(S; -\frac{1}{2}\right)} A \Rightarrow -\frac{1}{2} \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SD} \Rightarrow SA = 2SD$

Và $E = V_{\left(S; -\frac{1}{2}\right)} B, F = V_{\left(S; -\frac{1}{2}\right)} C$ nên ta có $DE = \frac{1}{2} AB, DF = \frac{1}{2} AC, EF = \frac{1}{2} BC$

Khối $DEF.ABC$ được chia thành 4 khối: $D.ABC, A.DEF, F.DAB$ và $E.DAC$.

• Thể tích $D.ABC : V_{D.ABC} = \frac{1}{3} DA.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} SA.S_{ABC} = \frac{3}{2} V$

• Thể tích $A.DEF : V_{A.DEF} = \frac{1}{3} AD.S_{DEF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} SA \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3}{8} V$

• Thể tích $F.DAB$: Do $AC \perp SAB \Rightarrow DF \perp SAB$

Khi đó $V_{F.DAB} = \frac{1}{3} FD.S_{DAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} DA.AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} SA.AB = \frac{3}{4} V$

• Thể tích $D.ABC$ tương tự tính thể tích $F.DAB : V_{E.DAC} = \frac{3}{4} V$

Vậy $V' = \frac{3}{2} V + \frac{3}{8} V + \frac{3}{4} V + \frac{3}{4} V = \frac{27}{8} V \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{8}{27}$.

Câu 27. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của đáy $ABCD, A'B'C'D'$ và của bốn mặt bên. Gọi S, I, J, H, K lần lượt là ảnh của O', M, N, P, Q qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$. Tính thể tích V của khối đa diện được tạo bởi các đỉnh $S, I, J, H, K, A', B', C', D'$.

A. $\frac{49a^3}{2}$.

B. $\frac{11a^3}{3}$.

C. $\frac{49a^3}{6}$.

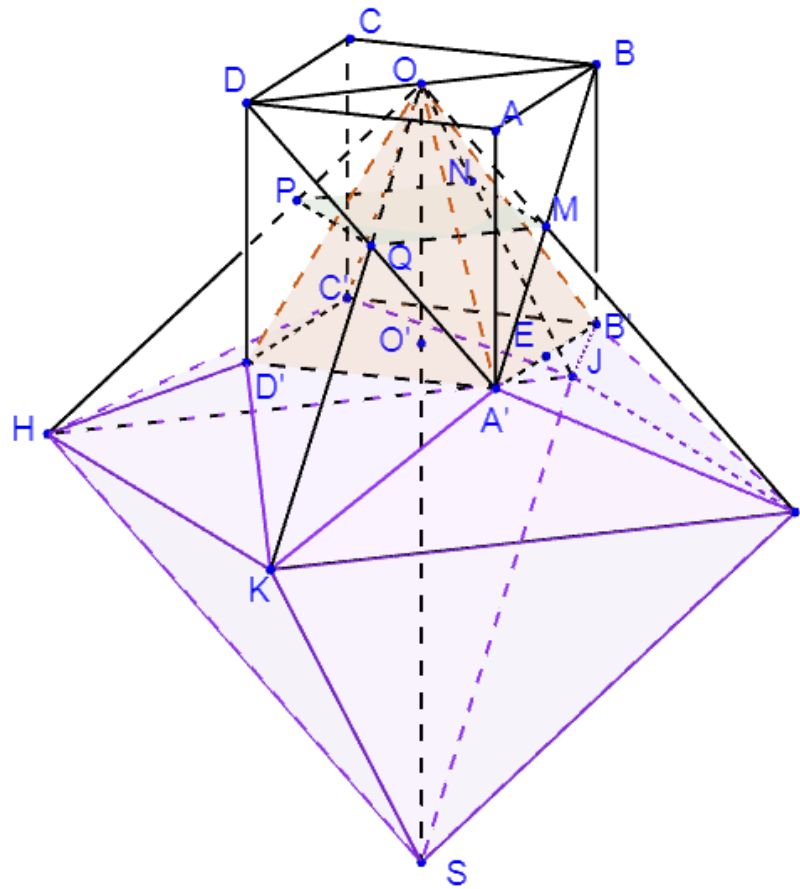
D. $\frac{11a^3}{6}$.

Tác giả: Ngô Tú Hoa – Phản biện: Nguyễn Thị Hồng Gấm và Thoa Nguyễn.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: *Thực hiện: Cô Ngô Tú Hoa – Phản biện: Cô Thoa Nguyễn*



- Tính thể tích khối chóp $S.IJHK$:

$$\text{Ta có } S = V_{O,3} \quad O' \Leftrightarrow \overrightarrow{OS'} = 3\overrightarrow{OO'} \Rightarrow OS' = 3a$$

$$\text{Và có : } V_{O,3} : MP \rightarrow IH \Rightarrow IH = 3MP = 3a, \text{ tương tự } JK = 3a, JK \perp IH$$

$$\Rightarrow S_{IJHK} = \frac{1}{2} \cdot IH \cdot JK = \frac{9a^2}{2} \Rightarrow V_{S.IJHK} = \frac{1}{3} \times \frac{3a}{2} \times \frac{9a^2}{2} = \frac{9a^3}{4}.$$

- Tính thể tích khối tứ diện $OIA'B'$

$$I = V_{O,3} \quad M \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OM}, \text{ ta có } OM = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow OI = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm } A'B' \text{ thì } OE^2 = OO'^2 + O'E^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos MOE = \frac{OM^2 + OE^2 - ME^2}{2OM.OE} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin MOE = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow S_{OEI} = \frac{1}{2} OE.OI.\sin MOE = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} a^2 = \frac{3a^2}{8}$$

$$\text{Và có } A'B' \perp OEI \text{ nên } V_{OIA'B'} = \frac{1}{3} S_{OEI}.A'B' = \frac{1}{3} \times \frac{3a^2}{8} \times a = \frac{a^3}{8}$$

- Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $O.A'B'C'D'$: $V_{O.A'B'C'D'} = \frac{a^3}{3}$.

- Tính thể tích V cần tìm.

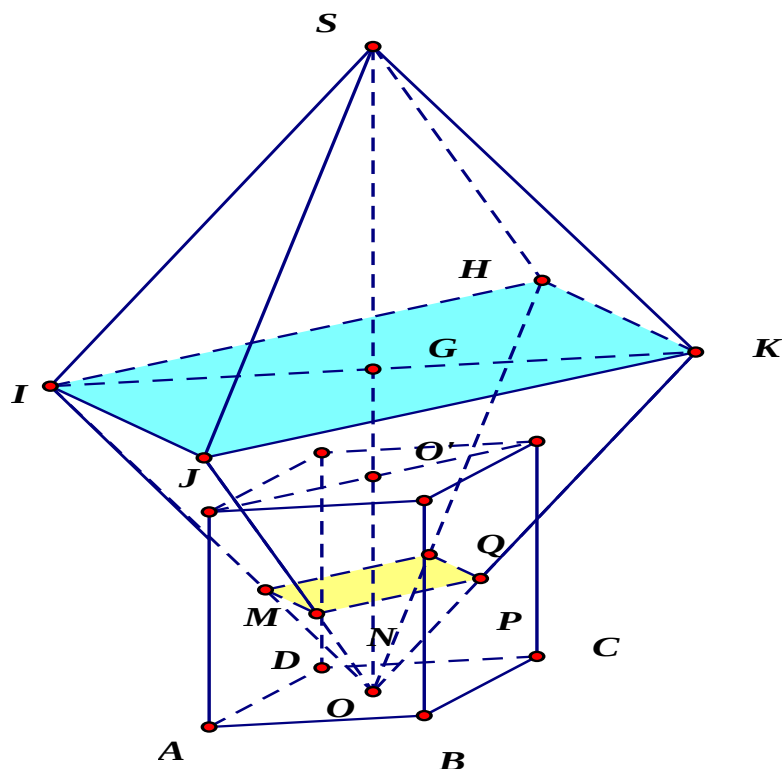
Để ý có M, Q lần lượt là trung điểm $A'B, A'D$, nên các điểm M, Q, A', B, D đều nằm trong mặt phẳng $A'BD$, tương tự như vậy với các điểm còn lại.

Nên do tính chất đối xứng của hình ta có :

$$V = V_{S.IJHK} + V_{O.IJHK} - V_{O.A'B'C'D'} - 4V_{OIA'B'} = 2V_{S.IJHK} - V_{O.A'B'C'D'} - 4V_{OIA'B'}$$

$$\Rightarrow V = \left(2 \times \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - 4 \times \frac{1}{8} \right) a^3 = \frac{11a^3}{3}.$$

Cách 2: Cô Nguyễn Thị Hồng Gấm – Phản biện: Cô Thoa Nguyễn



- Ta có thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2$

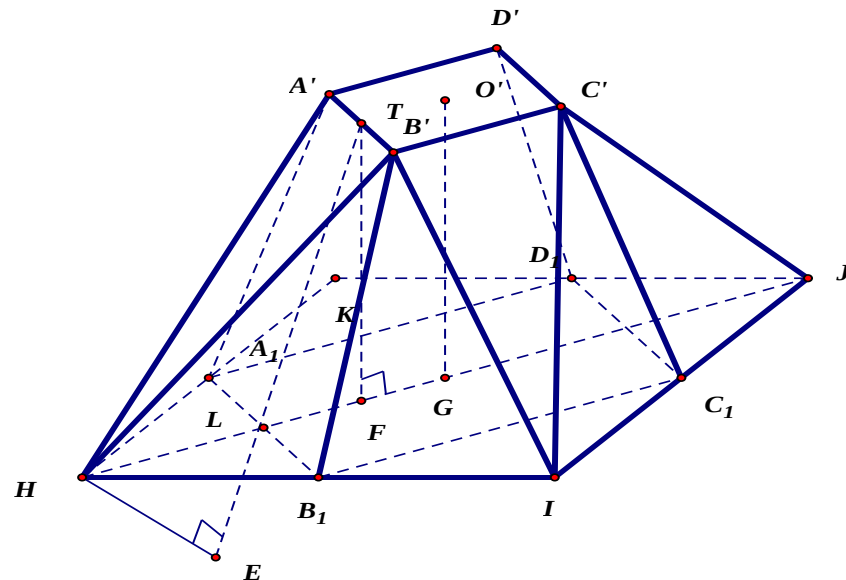
V_1 : thể tích khối chóp đều $S.IJHK$

V_2 : Khối đa diện tạo bởi $A', B', C', D', I, J, H, K$.

- Tính V_1 :

Vì $V_{(O,3)}: O'.MNPQ \mapsto S.IJHK$ nên $V_1 = 27 \cdot V_{O'.MNPQ} = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{9a^3}{4}$.

- Tính V_2 : Khối đa diện tạo bởi $A', B', C', D', I, J, H, K$.



$$V_2 = V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} + 4V_{H.A_1B_1A'B'}.$$

Theo tính chất của phép vị tự ta có $IJHK$ là hình vuông có đường chéo $IK = 3MP = 3a$.

$A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'$ là chóp cắt có chiều cao $O'G = \frac{1}{2}O'O = \frac{a}{2}$.

(A_1, B_1, C_1, D_1 là các trung điểm các cạnh của hình vuông $IJHK$, có $A_1B_1 = \frac{3a}{2}$).

$$\text{Vậy } V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \left(a^2 + \frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} \right) = \frac{19}{24}a^3.$$

$$HL = LG = \frac{1}{4}HJ = \frac{3a}{4}, FG = \frac{a}{2} \Rightarrow LF = \frac{a}{4}.$$

$$TL = \frac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \sin TLF = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vì } A_1B_1 \perp HJ, A_1B_1 \perp O'G \Rightarrow (A_1B_1A'B') \perp (HTL) \Rightarrow HE \perp (A_1B_1A'B').$$

$$HE = HL \sin TLF = \frac{6\sqrt{5}a}{20}, S_{A_1B_1A'B'} = \frac{1}{2}TL(A_1B_1 + A'B') = \frac{5\sqrt{5}a^2}{16}.$$

$$\text{Do vậy } V_{H.A_1B_1A'B'} = \frac{5a^3}{32} \Rightarrow V_2 = \frac{17}{12}a^3.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{11}{3}a^3.$$

Bình Luận : Ta có thể mở rộng bài toán tương tự tính :

Tính thể tích V của khối đa diện được tạo bởi các đỉnh $S, I, J, H, K, A, B, C, D$.

Câu 28. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của đáy $ABCD, A'B'C'D'$ và của bốn mặt bên. Gọi S, I, J, H, K lần lượt là ảnh của O', M, N, P, Q qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$. Tính thể tích khối đa diện được tạo bởi các đỉnh $S, I, J, H, K, A, B, C, D$.

A. .

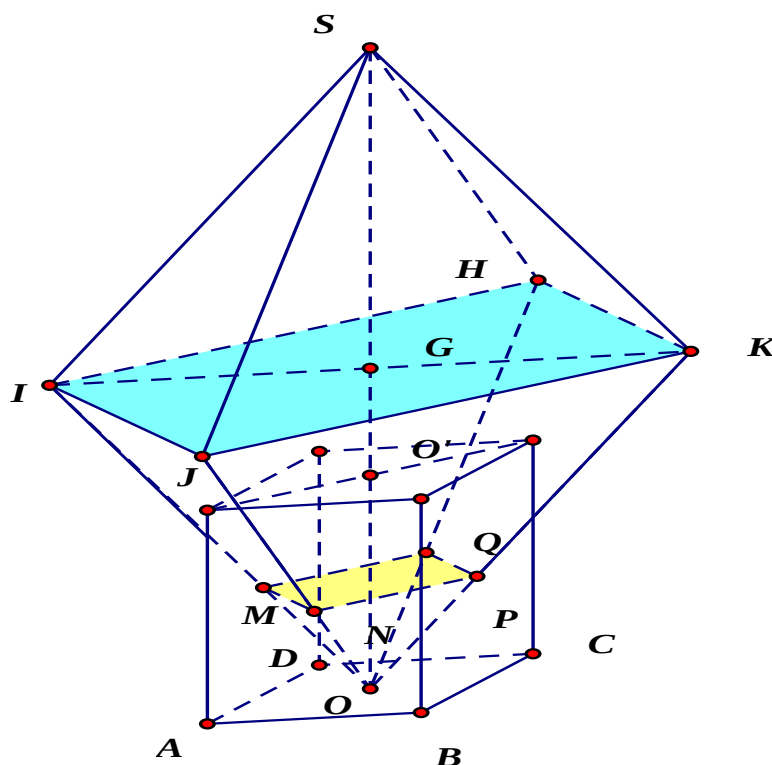
B. .

C. D. .

Ngô Tú Hoa – Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải

Chọn B.



Ta có thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2$

V_1 : thể tích khối chóp đều $S.IJHK$

V_2 : Khối đa diện tạo bởi A, B, C, D, I, J, H, K .

Vì $V_{(O,3)}: O'.MNPQ \mapsto S.IJHK$ nên $V_1 = 27 \cdot V_{O'.MNPQ} = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{9a^3}{4}$.

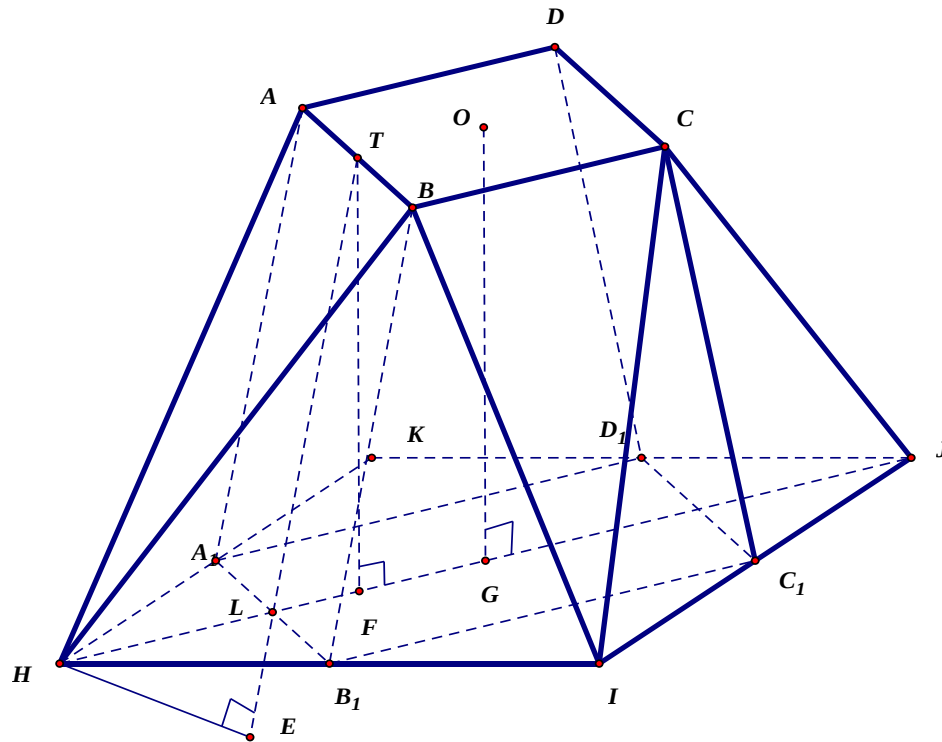
$V_2 = V_{A_1B_1C_1D_1.ABCD} + 4V_{H.A_1B_1AB}$.

Theo tính chất của phép vị tự ta có $IJHK$ là hình vuông có đường chéo $IK = 3MP = 3a$.

$A_1B_1C_1D_1.ABCD$ là chóp cụt có chiều cao $OG = \frac{3}{2}O'O = \frac{3a}{2}$. (A_1, B_1, C_1, D_1 là các trung điểm các cạnh của hình vuông $IJHK$, có $A_1B_1 = \frac{3a}{2}$).

$$\text{Vậy } V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \left(a^2 + \frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} \right) = \frac{19}{8}a^3.$$

$$HL = LG = \frac{1}{4}HJ = \frac{3a}{4}, FG = \frac{a}{2} \Rightarrow LF = \frac{a}{4}.$$



$$TL = \frac{a\sqrt{37}}{4} \Rightarrow \sin TLF = \frac{6\sqrt{37}}{37}.$$

$$\text{Vì } A_1B_1 \perp HJ, A_1B_1 \perp OG \Rightarrow (A_1B_1AB) \perp (HTL) \Rightarrow HE \perp (A_1B_1AB).$$

$$HE = HL \sin TLF = \frac{9\sqrt{37}a}{74}, S_{A_1B_1AB} = \frac{1}{2}TL(A_1B_1 + AB) = \frac{5\sqrt{37}a^2}{16}.$$

$$\text{Do vậy } V_{H.A_1B_1AB} = \frac{5a^3}{96} \Rightarrow V_2 = \frac{31}{12}a^3. \text{ Vậy } V = \frac{29}{6}a^3$$

PHÁT TRIỂN 6 :

Theo ý tưởng Thể Tích khối đa diện có kết hợp góc

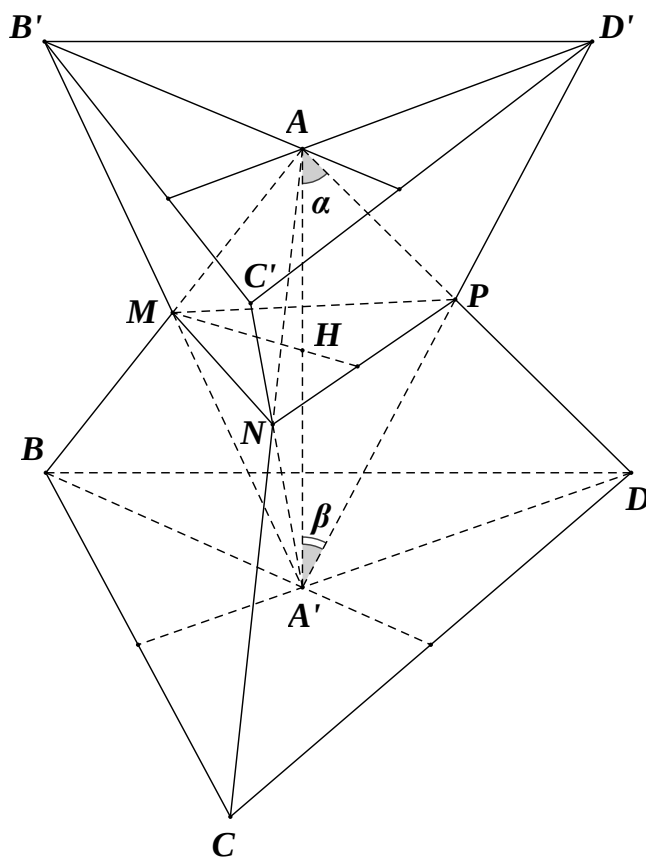
Câu 29. [PHÁT TRIỂN CÂU 46 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30° , cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45° . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho ?

- A. $\frac{3(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. B. $\frac{(2-\sqrt{3})a^3}{32}$. C. $\frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. D. $\frac{27(2-\sqrt{3})a^3}{64}$.

Thực hiện : Thầy Nguyễn Hùng – Phản biện: Cô Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải

Chọn C



Hai hình chóp $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hai hình chóp đều, có chung đường cao AA' , A là tâm của tam giác $B'C'D'$ và A' là tâm của tam giác BCD .

Ta có: $(BCD) \parallel (B'C'D')$; $AB = AC = AD = a$; $BAA' = \alpha$; $AA'B' = \beta$.

Do AB cắt $A'B'$ tại M nên $AB' \parallel A'B$.

Gọi N là giao điểm của AC và $A'C'$; P là giao điểm của AD và $A'D'$.

Tương tự ta có: $AC' \parallel A'C$, $AD' \parallel A'D$.

Từ đó suy ra các cạnh của $\triangle ABCD$ và $\triangle B'C'D'$ song song với nhau từng đôi một.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{MB}{MA} = \frac{A'B}{AB'} \\ \frac{NC}{NA} = \frac{A'C}{AC'} \\ AB' = AC'; A'B = A'C \end{cases} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \Rightarrow MN \parallel BC.$$

Tương tự ta có: $NP \parallel CD$ và $MP \parallel BD$.

Suy ra: $\triangle MNP$ là tam giác đều. Gọi H là giao điểm của OO' và (MNP) , H là tâm của tam giác MNP .

Trong tam giác $AA'D$ có: $AA' = AD \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha$ (1).

Đặt $x = MH$. Hai tam giác AHM và tam giác $A'HM$ vuông tại H cho:

$$\begin{cases} AH = MH \cdot \cot \alpha = x \cdot \cot \alpha \\ A'H = MH \cdot \cot \beta = x \cdot \cot \beta \end{cases} \Rightarrow AA' = x(\cot \alpha + \cot \beta) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a \cdot \cos \alpha = x(\cot \alpha + \cot \beta) \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}$.

Tam giác MNP đều có cạnh $MN = x\sqrt{3}$ nên:

$$S_{\triangle MNP} = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{(\cot \alpha + \cot \beta)^2}$$

Phần chung của hai hình chóp $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hai hình chóp đỉnh A và A' có chung nhau mặt đáy là tam giác MNP . Do đó thể tích của nó là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MNP} \cdot (AH + A'H) = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MNP} \cdot AA' = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos^3 \alpha}{4(\cot \alpha + \cot \beta)^2}$$

$$\text{Với } \alpha = 30^\circ \text{ và } \beta = 45^\circ \text{ thì } V = \frac{9a^3}{32(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}.$$

CÂU 48 – MÃ 101**CHỦ ĐỀ : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT***Thực hiện : Nhóm các Thầy Cô**Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.***Câu 48. [ĐỀ GỐC-MÃ 101- TN 2020]** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$.Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$.

B. $\frac{65}{8}$.

C. $\frac{49}{8}$.

D. $\frac{57}{8}$.

PHÂN TÍCH VÀ BÌNH LUẬN**Dạng toán:** Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số với giả thiết các biến ràng buộc bởi một đẳng thức hay bất đẳng thức liên qua tới mũ hay logarit.**Hướng giải:****Bước 1:** Tìm mối liên hệ giữa các biến ta có 2 hướng như sau:**Hướng 1:** Từ giả thiết của bài toán ta sử dụng biến đổi phù hợp để đưa về dạng $f(u) \geq f(v)$ sử dụng tính đơn điệu của hàm $f(x)$ để đưa ra mối liên hệ giữa các biến.**Hướng 2:** Từ giả thiết ta đưa về $k[f(u) - f(v)] + l[g(u) - g(v)] \geq 0$ từ đó dựa vào tính đơn điệu của hàm $f(x), g(x)$ sử dụng các đánh giá phù hợp để đưa ra mối liên hệ giữa các biến.**Bước 2:** Từ mối liên hệ giữa các biến ta thay vào biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất để đánh giá. Đến đây ta có các hướng để giải quyết bài toán như sau:**Hướng 1:** Đưa về hàm 1 biến để khảo sát**Hướng 2:** Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá.**Hướng 3:** Sử dụng vị trí tương đối của các đối tượng hình học cơ bản để đánh giá.**Lời giải****Chọn B****Cách 1:** Biến đổi giả thiết

$$y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 3-2x \Leftrightarrow y \cdot 2^{2y+1} \geq (3-2x)2^{3-2x} \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x} (*)$$

Nếu $3-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ khi đó do $y \geq 0$ nên $(*)$ luôn đúng.

Ta có $P \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot 0 \geq \frac{33}{4} \quad (1).$

Nếu $3-2x > 0$ khi đó $(*)$ có dạng $f(2y) \geq f(3-2x)$ với $f(t) = t \cdot 2^t$

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$. Có $f'(t) = 2^t + t.2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Từ đó suy ra $2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$ mà $\frac{3}{2} - x > 0$ nên

$$P \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 4x + 6\left(\frac{3}{2} - x\right) \Rightarrow P \geq 2x^2 - 5x + \frac{45}{4} \geq 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{65}{8} \geq \frac{65}{8} \quad (2), \text{ đẳng thức}$$

xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$. Từ (1) và (2) **chọn B**.

Cách 2:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow x + y.4^{x+y-\frac{3}{2}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) < 0 + y.(4^0 - 1) = 0$ (vô lí)

Nếu $x + y - \frac{3}{2} \geq 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 + y.(4^0 - 1) = 0$ (luôn đúng)

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow x + y - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ta có } P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+2)^2 + (y+3)^2 - 13.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được } P \geq \frac{1}{2}(x+y+5)^2 - 13 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x + 3 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } \min P = \frac{65}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Cách 3:

$$\text{Ta có } y.2^{2x+2y-2} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y.2^{2y+1} \geq (3 - 2x)2^{3-2x} \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \geq (3 - 2x)2^{3-2x} \quad (*)$$

Nếu $3 - 2x > 0$ khi đó $(*)$ có dạng $f(2y) \geq f(3 - 2x)$ với $f(t) = t.2^t$

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$. Có $f'(t) = 2^t + t.2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$
 $\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Từ đó suy ra $(*) \Leftrightarrow 2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 \geq 0$.

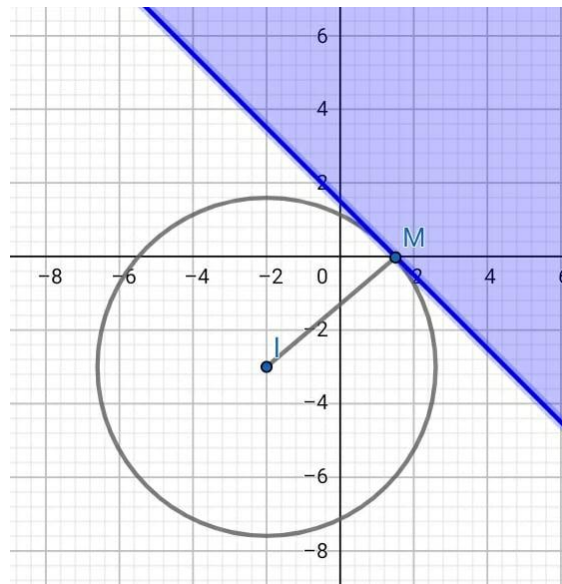
Nếu $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ khi đó do $y \geq 0$ nên $(*)$ luôn đúng. Suy ra $2y \geq 3 - 2x$.

Tóm lại ta được $(*) \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 \geq 0$ (1).

Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+2)^2 + (y+3)^2 - 13$ hay $\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = P + 13$ (2).

Ta thấy tập hợp các giá trị x, y thỏa mãn giả thiết (1) là các điểm $M(x, y)$ nửa mặt phẳng Oxy bờ là đường thẳng $\Delta: 2x + 2y - 3 = 0$ không chứa $I(-2; -3)$ và cả các điểm nằm trên Δ .

Đẳng thức (2) là đường tròn tâm $I(-2; -3), R = \sqrt{P+13}$.



Dễ thấy P nhỏ nhất khi đường thẳng Δ và đường tròn (C) tiếp xúc nhau do đó

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-13|}{\sqrt{8}} = \sqrt{P+13} \Leftrightarrow P = \frac{65}{8}.$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{65}{8}.$$

CÂU HỎI TƯƠNG TỰ, PHÁT TRIỂN

Câu 30. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn

$$x + y + x.2^{2x+y-1} \geq 1. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = x^2 + 5y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{8} \text{ bằng}$$

A. $\frac{3}{16}$.

B. $\frac{5}{16}$.

C. $\frac{5}{8}$.

D. $\frac{13}{8}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(y) = x + y + x \cdot 2^{2x+y-1}$ là hàm số đối với biến y , liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(y) = 1 + x \cdot 2^{2x+y-1} \ln 2 \geq 0, \forall x \geq 0$. Do đó, $f(y)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, $x + y + x \cdot 2^{2x+y-1} \geq 1 \Leftrightarrow f(y) \geq f(1-2x) \Leftrightarrow y \geq 1-2x \Leftrightarrow 2x + y \geq 1$.

Ta có:

$$P = x^2 + 5y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{8} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + (2y-1)^2 \geq \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

Theo bất đẳng thức Bunhyakovski, ta có:

$$(4+1) \left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \right] \geq \left(2x + \frac{1}{2} + y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(2x + y + \frac{1}{4}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{5}{16} \Rightarrow P \geq \frac{5}{16}.$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 2x + y = 1 \\ \frac{x + \frac{1}{4}}{2} = y - \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Vậy} \min P = \frac{5}{16}.$$

Câu 31. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho các số thực dương x, y thỏa mãn

$$x^2 + x + 5^x \geq x \log_5(4xy - x) + 4xy. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } P = y^2 + \frac{5^x}{4xy} + \frac{7}{y} \text{ là}$$

A. $\frac{133}{4}$.

B. $\frac{113}{4}$.

C. 28.

D. $\frac{117}{8}$.

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Lời giải

Chọn C

x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + x + 10^x \geq x \log(xy - x) + xy$ nên suy ra $\begin{cases} x > 0 \\ y > \frac{1}{4} \end{cases}$.

$$x^2 + x + 5^x \geq x \log_5(4xy - x) + 4xy \Leftrightarrow x + 1 + \frac{5^x}{x} \geq \log_5 x + \log_5(4y - 1) + 4y$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{5^x}{x} - \log_5 x \geq \log_5(4y - 1) + 4y - 1 \Leftrightarrow \log_5 \frac{5^x}{x} + \frac{5^x}{x} \geq \log_5(4y - 1) + 4y - 1.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$. Có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Từ đó suy ra $\frac{5^x}{x} \geq 4y - 1$ nên

$$P = y^2 + \frac{5^x}{4xy} + \frac{7}{y} \geq y^2 + \frac{4y-1}{4y} + \frac{7}{y} \geq y^2 + \frac{27}{4y} + 1 \geq y^2 + \frac{27}{8y} + \frac{27}{8y} + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^2 \cdot \frac{27}{y} \cdot \frac{27}{y}} + 1 \Rightarrow P \geq 28$$

Khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ thì đẳng thức xảy ra.

Câu 32. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn

$$3\log_2 x + 32x^2 = 3y - 1 + 2^{2y+3}. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x}{y} \text{ bằng}$$

A. $\frac{e + \ln 2}{2}.$

B. $\frac{e \ln 2}{2}.$

C. $\frac{e - \ln 2}{2}.$

D. $\frac{e}{2 \ln 2}.$

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } 3\log_2 x + 32x^2 = 3y - 1 + 2^{2y+3} \Leftrightarrow 3\log_2 x + 1 + 32x^2 = 3y + 8.2^{2y}$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2 2x + 32x^2 = 3y + 8.2^{2y} \quad 2$$

Đặt $t = \log_2 2x \Rightarrow x = \frac{2^t}{2}$. Thay vào phương trình 2 ta được phương trình:

$$3t + 32\left(\frac{2^t}{2}\right)^2 = 3y + 8.2^{2y} \Leftrightarrow 3t + 8.2^{2t} = 3y + 8.2^{2y} \quad 3$$

Xét hàm số $f(x) = 3x + 8.2^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Có $f'(x) = 3 + 16.2^{2x} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó ta có: $3 \Leftrightarrow t = y$, nên ta có: $\log_2 2x = y \Leftrightarrow x = \frac{2^y}{2}$. Vậy $P = \frac{2^{2y}}{2y}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2^x}{2x}, x > 0$. Ta có $g'(x) = \frac{2^x \times \ln 2 \times x - 2^x}{2x^2} = \frac{2^x (x \ln 2 - 1)}{2x^2}$

suy ra: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$			

$$\Rightarrow \min_{0; +\infty} g(x) = g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{e \ln 2}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{\min} = \frac{e \ln 2}{2}$

Câu 33. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 – MÃ 101 – TN 2020] Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn

$x \neq y$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. -2 . D. **6.**

Trương Đức Thịnh – Phạm Ninh – Đạt Lâm Huy – Thơm Chu.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow (4^x + 1)^y < (4^y + 1)^x$

$\Leftrightarrow y \ln(4^x + 1) < x \ln(4^y + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(4^x + 1)}{x} < \frac{\ln(4^y + 1)}{y}$ (vì $x, y > 0$).

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln(4^t + 1)}{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{4^t \cdot \ln 4}{4^t + 1} \cdot t - \ln(4^t + 1) = \frac{4^t \ln 4^t - (4^t + 1) \ln(4^t + 1)}{(4^t + 1)t^2} < 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lại có $f(x) < f(y) \Rightarrow x > y$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $t \in (1; +\infty) \Rightarrow P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$.

Cách 1: Xét $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$ với $t \in (1; +\infty)$, ta có $P' = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t - 1)^2}$; $P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	1	3	$+\infty$
P'		-	0
P		6	

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Cách 2: Ta có $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1} = t - 1 + \frac{4}{t - 1} + 2 \geq 2\sqrt{4} + 2 = 6$ (AM - GM).

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Câu 34. [PHÁT TRIỂN CÂU 48 - MÃ 101 - TN 2020] Xét các số thực x và y thỏa mãn

$2x^2 + y^2 \cdot 4^{x^2 + y^2 - 2} \leq 5$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ là $a - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. $\frac{130}{4}$. B. $\frac{265}{2}$. C. $\frac{265}{4}$. D. $\frac{130}{2}$.

Trương Đức Thịnh - Phạm Ninh - Đạt Lâm Huy - Thơm Chu.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y^2 \cdot 2^{2x^2 + 2y^2 - 4} \leq 5 - 2x^2 \Leftrightarrow y^2 \cdot 2^{2y^2 + 1} \leq (5 - 2x^2) 2^{5 - 2x^2} \Leftrightarrow 2y^2 \cdot 2^{2y^2} \leq (5 - 2x^2) 2^{5 - 2x^2} (*)$.

Nếu $5 - 2x^2 < 0$ khi đó do $VT \geq 0; VP < 0$ nên $(*)$ không xảy ra.

Nếu $5 - 2x^2 \geq 0$ khi đó (*) có dạng $f(2y^2) \leq f(5 - 2x^2)$ với $f(t) = t.2^t$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$. Có $f'(t) = 2^t + t.2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$

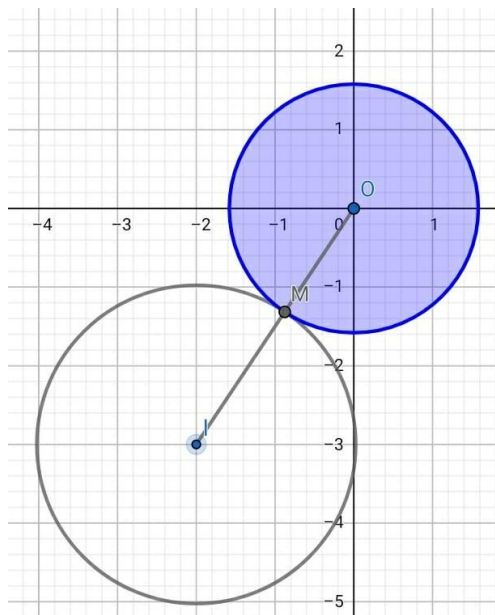
$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Từ đó suy ra (*) $\Leftrightarrow 2y^2 \leq 5 - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}$ (1).

Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+2)^2 + (y+3)^2 - 13$ hay $\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = P+13$ (2).

Ta thấy tập hợp các giá trị x, y thỏa mãn giả thiết (1) là các điểm $M(x, y)$ trên mặt phẳng

Oxy là hình tròn (C) tâm O, $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Đẳng thức (2) là đường tròn (C') tâm I(-2; -3), $R = \sqrt{P+13}$.



Để thấy P nhỏ nhất khi đó đường tròn (C) và đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với nhau

$$\sqrt{P+13} + \sqrt{\frac{5}{2}} = OI \Leftrightarrow P = \frac{5}{2} - \sqrt{130}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = -2\sqrt{\frac{5}{26}} \\ y = -3\sqrt{\frac{5}{26}} \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{2} - \sqrt{130}$ suy ra $a+b = \frac{265}{2}$.

CÂU 49 – MÃ 101

CHỦ ĐỀ : TÌM NGHIỆM NGUYÊN CỦA PT

Thực hiện : Thầy Nguyễn Sỹ – Thầy Nguyễn Tất Thành.

Câu 49. [ĐỀ GÓC-MÃ 101- TN 2020] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59.

B. 58.

C. 116.

D. 115.

PHÂN TÍCH VÀ BÌNH LUẬN

Thầy Nguyễn Sỹ

Đây là bài toán khó đòi hỏi khả năng tư duy cao.

*) Ta có thể phát biểu lại bài toán thành quen thuộc: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để BPT $\log_4(m^2 + x) \geq \log_3(m + x)$ có không quá 728 nghiệm nguyên.

*) Coi x như tham số ta xét BPT theo ẩn y .

Ứng với mỗi giá trị của x ta xét hàm số theo biến y . Trên miền xác định $D = (-x; +\infty)$, hàm số $f(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$ là hàm số đồng biến và ta thấy BPT $f(y) \leq 0$ luôn có ít nhất một nghiệm là $y = -x + 1$. Do đó để BPT có **tối đa** 728 nghiệm nguyên thì chỉ cần $f(-x + 729) > 0$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y$

