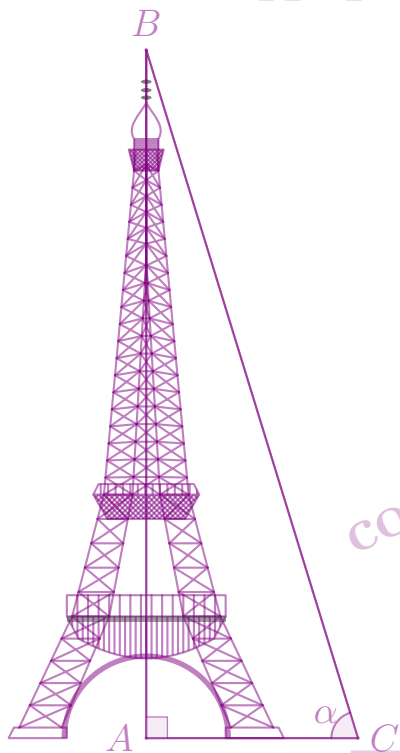


QUYỂN SỐ 1
TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH

GV: LÊ QUANG XE



TÀI LIỆU DẠY HỌC TOÁN



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Lớp
10

BÀI TẬP
THEO MỨC ĐỘ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT
VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

Năm 2021 - 2022

MỤC LỤC

PHẦN I. HÌNH HỌC 10 - HKI

CHƯƠNG 1 VEC TƠ TRANG 7

BÀI 1.	VÉC-TƠ, CÁC ĐỊNH NGHĨA	7
1.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	7
1.2.	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	8
1.3.	BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	14
BÀI 2.	TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ.	20
2.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	20
2.2.	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	21
2.3.	BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	36
BÀI 3.	TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC	46
3.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	46
3.2.	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	47
3.3.	BÀI TẬP RÈN LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	71
BÀI 4.	HỆ TRỤC TOA ĐỘ	86
4.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	86
4.2.	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	87
4.3.	BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	100

CHƯƠNG 2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ... TRANG 111

BÀI 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°	111
1.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	111
1.2.	Bài tập tự luyện	121
BÀI 2.	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ	129
2.1.	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	129
2.2.	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	130
2.3.	BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	146

BÀI 3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC.	158
3.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	158
3.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	159
3.3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN THEO MỨC ĐỘ	173

Phần I

HÌNH HỌC 10 - HKI

Chương 1

VEC TƠ

BÀI 1. VÉC-TƠ, CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

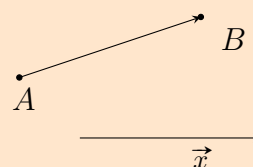
1.1.1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa 1.1.1. Cho đoạn thẳng AB . Nếu chọn điểm A làm điểm đầu, điểm B làm điểm cuối thì đoạn thẳng AB có hướng từ A đến B . Khi đó ta nói AB là một *đoạn thẳng có hướng*.

Định nghĩa 1.1.2. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý.

- ☆ Nếu chỉ rõ điểm đầu là A và điểm cuối là B , ta có "vectơ AB ", kí hiệu $\overrightarrow{AB}$.
- ☆ Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối, ta dùng các chữ cái thường để kí hiệu. Ví dụ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ...

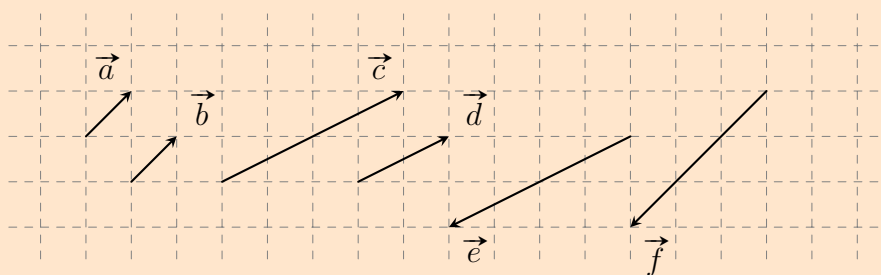


1.1.2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

Định nghĩa 1.1.3. Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ đó.

Chú ý.

- ☆ Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- ☆ Khi hai vectơ cùng phương, chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.



- Các cặp vec tơ cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{a}$ và $\vec{f}$; $\vec{d}$ và $\vec{e}$, ...
- Các cặp vec tơ cùng hướng: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{c}$ và $\vec{d}$.
- Các cặp vec tơ ngược hướng: $\vec{a}$ và $\vec{f}$; $\vec{c}$ và $\vec{e}$; $\vec{d}$ và $\vec{e}$;

1.1.3. Vectơ bằng nhau

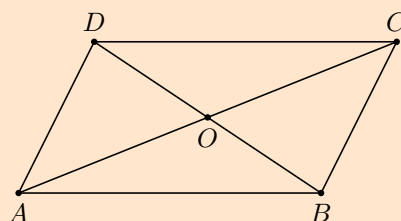
Định nghĩa 1.1.4. Độ dài vectơ là khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối của vec tơ đó.

Chú ý.

- ☆ Độ dài $\vec{a}$, kí hiệu $|\vec{a}|$; Độ dài $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$ và hiển nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$.
- ☆ Vec tơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.
- ☆ Hai vec tơ bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ lớn.

Ví dụ: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có vài kết quả sau

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$
- $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$



1.1.4. Vectơ-không

Định nghĩa 1.1.5. Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Chú ý.

- ☆ Kí hiệu $\vec{0}$, nghĩa là $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}...$;
- ☆ Độ dài vectơ-không bằng 0, nghĩa là $|\vec{0}| = 0$.
- ☆ **Qui ước:** Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

1.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1.1. Xác định một vectơ



Ví dụ 1

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có đỉnh là các điểm nói trên.

(A) 10.

(B) 12.

(C) 8.

(D) 6.

Lời giải

Các vectơ khác vectơ-không có đỉnh là các điểm A, B, C, D là

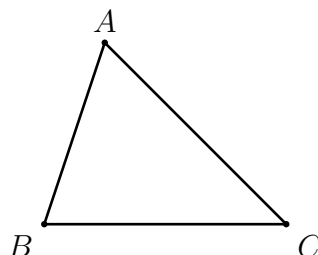
$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}.$$

Ví dụ 2

Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Có tất cả bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không và có điểm đầu, điểm cuối là hai điểm trong ba điểm A, B, C ?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải



Có các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

Vậy có 6 véc-tơ.

Dạng 1.2. Sự cùng phương và hướng của hai véc-tơ



Ví dụ 1

Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây.

- (A) $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc-tơ. (B) $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ.
(C) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. (D) $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải

Mệnh đề $|\overrightarrow{AB}| > 0$ là mệnh đề sai, vì khi $A \equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}| = 0$.

Ví dụ 2

Cho ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Điểm A nằm trong đoạn BC thì k phải thỏa mãn

- (A) $k < 0$. (B) $k = 1$. (C) $0 < k < 1$. (D) $k > 1$.

Lời giải

Điểm A nằm trong đoạn BC sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ngược hướng nên $k < 0$.

Ví dụ 3

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các véc-tơ khác $\vec{0}$ và $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$. Chọn khẳng định **sai**?

- (A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng độ dài.
 (C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

- (B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
 (D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

Ví dụ 4

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có vô số vectơ cùng phương với mọi véc-tơ.
 (B) Không có vectơ nào cùng phương với mọi véc-tơ.
 (C) Có ít nhất 2 vectơ cùng phương với mọi véc-tơ.
 (D) Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi véc-tơ.

Lời giải

Véc-tơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.

Ví dụ 5

Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác véc-tơ-không. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng ngược hướng với véc-tơ $\vec{c}$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **đúng**?

- (A) $\vec{a} = \vec{b}$.
 (B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
 (C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
 (D) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Lời giải

Hai véc-tơ cùng ngược hướng với một véc-tơ khác véc-tơ-không thì cùng hướng với nhau.

Ví dụ 6

Cho véc-tơ $\vec{MN} \neq \vec{0}$. Số véc-tơ cùng phương với véc-tơ $\vec{MN}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) vô số.

Lời giải

Có vô số véc-tơ cùng phương với một véc-tơ khác véc-tơ-không cho trước.

Dạng 1.3. Hai véc-tơ bằng nhau, độ dài của véc-tơ



Ví dụ 1

Cho $\vec{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$?

- (A) Vô số. (B) 1 điểm.
 (C) 2 điểm. (D) Không có điểm nào.

Lời giải

Ta có $|\vec{AB}| = |\vec{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$.

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB .

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Hãy chọn khẳng định đúng.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$.

Lời giải

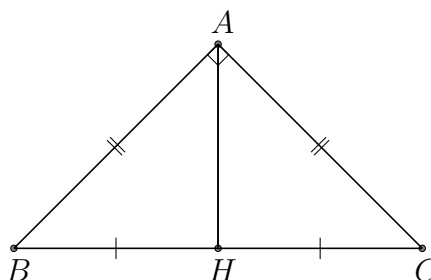
Ta có: O là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , H là trung điểm BC , đẳng thức nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CH}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AH}$. Ⓓ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải



- ☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ sai vì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng hướng.
- ☆ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CH}$ sai vì hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CH}$ ngược hướng.
- ☆ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AH}$ sai vì hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AH}$ không cùng hướng.
- ☆ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HC}$ đúng vì H là trung điểm của BC .

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC cân tại A , cạnh $AB = 5, BC = 8$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ bằng

- Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

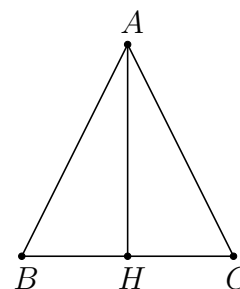
Lời giải

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC đã cho.

Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HA}$.

Tam giác AHB vuông ở H nên $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Do đó $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{HA}| = 6$.



Ví dụ 5

Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau hãy tìm khẳng định **sai**?

Ⓐ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

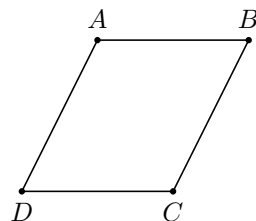
Ⓑ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$.

Ⓓ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Lời giải

Khẳng định $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ sai vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



Ví dụ 6

Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Ⓑ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Ⓓ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ví dụ 7

Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $AB = CD$ và $AB \parallel CD$.

Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành.

Ⓒ AD và BC có cùng trung điểm.

Ⓓ $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Xét từng phương án, ta có

☆ Phương án “ $AB = CD$ và $AB \parallel CD$ ” sai vì khi $AB = CD$ và $AB \parallel CD$ thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có thể không cùng hướng. Chẳng hạn, trong hình bình hành $ABCD$.

☆ Các phương án “ $ABDC$ là hình bình hành”, “ $ABCD$ là hình bình hành” đều sai vì khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì bốn điểm A, B, C, D có thể thẳng hàng.

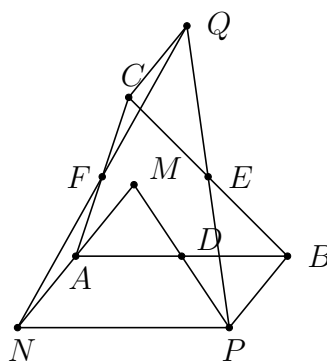
Vậy phương án “ AD và BC có cùng trung điểm” là đúng. Thật vậy, gọi I là trung điểm của AD và K là trung điểm của BC ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow I \equiv K \end{aligned}$$

Ví dụ 8

Cho tam giác ABC và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vẽ điểm P đối xứng với M qua D , điểm Q đối xứng với P qua E , điểm N đối xứng với Q qua F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có tứ giác $ANCQ$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{QC}$. (1)

Theo giả thiết ta có tứ giác $AMBP$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BP}$. (2)

Theo giả thiết ta có tứ giác $PBQC$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$.

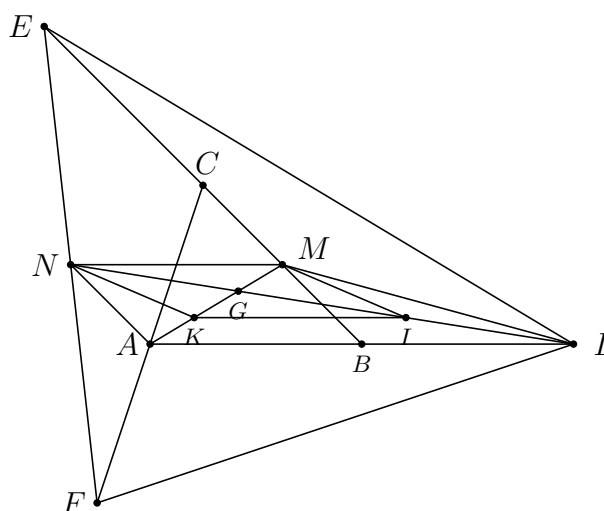
Ví dụ 9

Cho tam giác ABC . Vẽ D đối xứng với A qua B , E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A . Gọi G là giao điểm giữa trung tuyến AM của tam giác ABC với trung tuyến DN của tam giác DEF . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GD và GA . Chứng minh

a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$.

b $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MI}$.

Lời giải



- (a) Xét tam giác FCE có N , A lần lượt là trung điểm của FE và FC nên

$$NA = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BC = MB.$$

Hơn nữa $NA \parallel EC$, mà $EC \equiv MB$ nên $NA \parallel MB$.

Suy ra tứ giác $ABMN$ là hình bình hành.

Vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$.

- (b) Xét tam giác GAD có I , K lần lượt là trung điểm GD , GA nên $IK = \frac{1}{2}AD = AB$.

Lại có $AB = NM$. Suy ra $IK = MN$.

Do $ABMN$ là hình bình hành nên $AB \parallel MN$.

Mà $IK \parallel AB$ nên $IK \parallel MN$.

Do đó tứ giác $IKNM$ là hình bình hành.

Vậy $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MI}$.

1.3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

1.3.1. Nhận biết

Câu 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Có tất cả bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ – không có điểm đầu, điểm cuối là hai điểm trong ba điểm A, B, C ?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Hướng dẫn: Các véc-tơ cần tìm là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$, có 6 véc-tơ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

Câu 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác đó.

- (A) 5. (B) 15. (C) 20. (D) 10.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 3. Chọn khẳng định đúng.

- (A) Véc-tơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.
 (B) Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
 (C) Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
 (D) Véc-tơ là một đoạn thẳng.

Hướng dẫn:

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong số bốn đỉnh của tứ giác?

- (A) 16. (B) 4. (C) 12. (D) 6.

Hướng dẫn: Có 12 véc-tơ, gồm: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 5. Điền từ thích hợp vào dấu (...) để được mệnh đề đúng.

Hai véc-tơ ngược hướng thì

(A) Bằng nhau.

(B) Cùng độ dài.

(C) Cùng phương.

(D) Cùng điểm đầu.

Hướng dẫn:

Chọn đáp án **C**

Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ khác véc-tơ không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

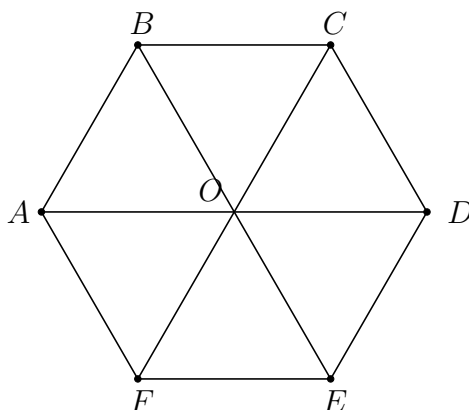
(A) 4.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 9.

Hướng dẫn:



Các véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 7. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

(B) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.

(C) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

(D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Hướng dẫn:



Từ hình vẽ trên ta thấy $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là hai véc-tơ cùng hướng.

Chọn đáp án **A**

Câu 8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là

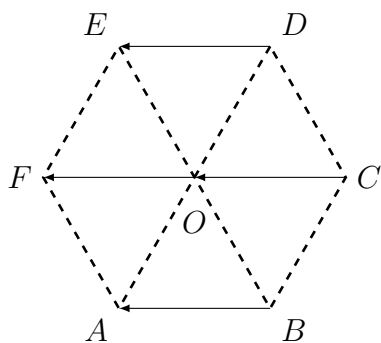
(A) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$.

(B) $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$.

(C) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$.

(D) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$.

Hướng dẫn:



Dựa vào hình vẽ ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 9. Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- (A) Vô số.
(C) 2 điểm.

- (B) 1 điểm.
(D) Không có điểm nào.

Hướng dẫn: Ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$.

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB .

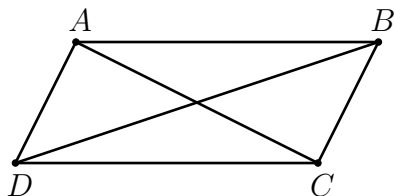
Chọn đáp án **A**

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai** ?

- (A) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.
(C) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

- (B) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$.
(D) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Hướng dẫn:



Ta có $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

Chọn đáp án **A**

Câu 11. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu

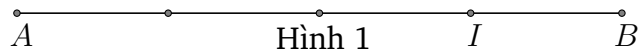
- (A) Chúng có độ dài bằng nhau và ngược hướng.
(B) Chúng có độ dài bằng nhau.
(C) Chúng có độ dài bằng nhau và cùng phương.
(D) Chúng có độ dài bằng nhau và cùng hướng.

Hướng dẫn: Theo lý thuyết giáo khoa ta có “Hai véc-tơ bằng nhau khi chúng cùng hướng và cùng độ dài”.

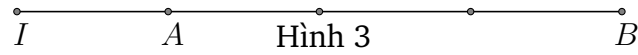
Chọn đáp án **D**

1.3.2. Thông hiểu

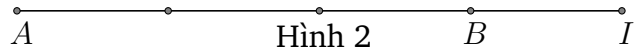
Câu 12. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Hình nào dưới đây mô tả đúng giả thiết này?



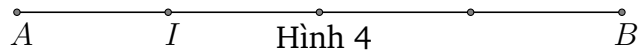
Hình 1



Hình 3



Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 3. (B) Hình 2. (C) Hình 1. (D) Hình 4.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}$ ngược hướng và $IA = 3IB$.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Hướng dẫn: Ta có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Khi đó $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
Do đó $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

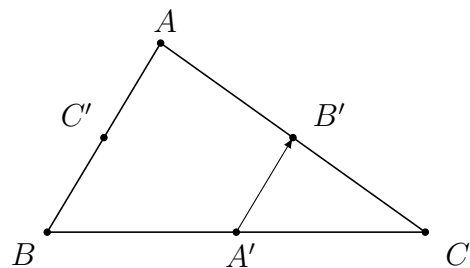
Chọn đáp án (D)

Câu 14. Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với véc-tơ nào sau đây?

- (A) $\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{C'B}$. (C) $\overrightarrow{BA}$. (D) $\overrightarrow{AC'}$.

Hướng dẫn:

Ta có $A'B'$ là đường trung bình của $\triangle ABC$
 $\Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
Vậy $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BA}$.



Chọn đáp án (C)

Câu 15. Cho véc-tơ $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$. Số véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) vô số.

Hướng dẫn: Có vô số véc-tơ cùng hướng với một véc-tơ khác véc-tơ-không cho trước.

Chọn đáp án (D)

Câu 16. Cho ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đều khác véc-tơ không. Trong đó hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng, hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{c}$ đối nhau. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ bằng nhau.
 (B) Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.
 (C) Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đối nhau.
 (D) Hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.

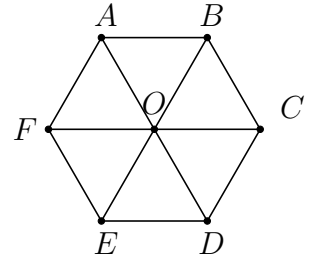
Hướng dẫn: Do $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng mà $\vec{a}$, $\vec{c}$ đối nhau suy ra $\vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng nhau.

Chọn đáp án (B)

Câu 17.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O (như hình vẽ). Đẳng thức nào sau đây là sai?

- (A) $|\vec{AB}| = |\vec{AF}|$.
 (B) $\vec{OD} = \vec{BC}$.
 (C) $\vec{OB} = \vec{OE}$.
 (D) $\vec{AB} = \vec{ED}$.



Hướng dẫn:

Ta có tứ giác $ABCDEF$ là lục giác đều có độ dài hai cạnh kề bằng nhau.

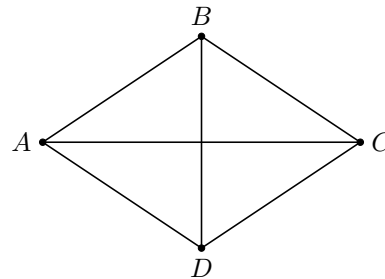
Ta có $\vec{OD} = \vec{BC}$ và $\vec{AB} = \vec{ED}$ vì hai véc-tơ cùng hướng và cùng độ dài.

Vì $\vec{OB}$ và $\vec{OE}$ là hai véc-tơ đối nhau nên hai véc-tơ này không bằng nhau.

Chọn đáp án (C)

Câu 18. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ (như hình vẽ). Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{AB} = \vec{AD}$.
 (B) $|\vec{BD}| = a$.
 (C) $\vec{BD} = \vec{AC}$.
 (D) $\vec{BC} = \vec{DA}$.



Hướng dẫn: Các hệ thức $\vec{AB} = \vec{AD}$, $\vec{BD} = \vec{AC}$, $\vec{BC} = \vec{DA}$ đều sai, vì các cặp véc-tơ tương ứng không cùng hướng.

Hệ thức $|\vec{BD}| = a$ đúng. Do $AB = AD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều.

Vì thế $|\vec{BD}| = BD = AD = a$.

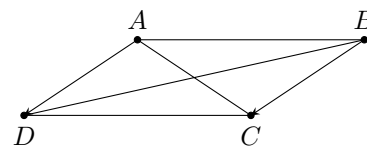
Chọn đáp án (B)

Câu 19. Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AD} = \vec{BC}$, mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai?

- (A) $ABCD$ là hình bình hành.
 (B) $BADC$ là hình bình hành.
 (C) $\vec{AC} = \vec{BD}$.
 (D) $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Hướng dẫn:

Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $BADC$ là hình bình hành, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Chọn đáp án **C**

Câu 20. Cho hình bình hành $MNPQ$, khi đó

A $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

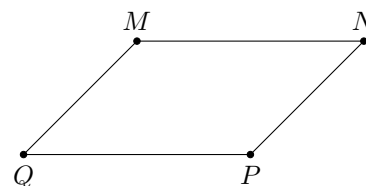
B $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{QM}$.

C $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{QM}$.

D $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Hướng dẫn:

Do $MNPQ$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.



Chọn đáp án **D**

ĐÁP ÁN BÀI 1

1.D

2.C

3.B

4.C

5.C

6.B

7.A

8.C

9.A

10.A

11.D

12.C

13.D

14.C

15.D

16.B

17.C

18.B

19.C

20.D

BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO

2.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

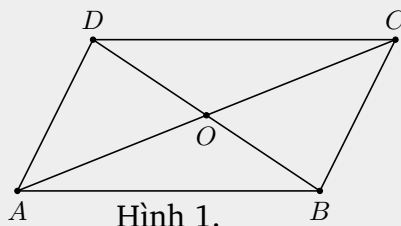
2.1.1. Vectơ bằng nhau, vectơ đối nhau

Định nghĩa 1.2.1.

- ☆ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** và **cùng hướng**.
- ☆ Hai vectơ đối nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** nhưng **ngược hướng**.

Ví dụ: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có vài kết quả sau

- Các vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$,...
- Các vectơ đối nhau: $\overrightarrow{AB}$ đối $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}$ đối $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{OA}$ đối $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB}$ đối $\overrightarrow{OD}$,...



Hình 1.

2.1.2. Phép toán cộng hai vectơ

Định nghĩa 1.2.2. Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

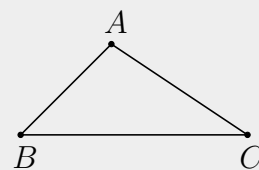
☆ **Quy tắc 3 điểm:**

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- Dấu hiệu nhận biết là "điểm liên tiếp nhau".
- Các hệ thức tương tự

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}, \dots$$



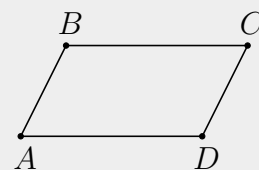
☆ **Quy tắc hình bình hành:**

Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

- Dấu hiệu nhận biết là "cùng gốc".
- Các hệ thức tương tự

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}, \dots$$



☆ **Quy tắc cộng vectơ đối:**

- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Trong Hình 1 ở trên, ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,...

2.1.3. Phép toán hiệu hai vectơ

Định nghĩa 1.2.3.

- ☆ Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước

vecto).

☆ Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

2.1.4. Công thức trung điểm, trọng tâm

Định nghĩa 1.2.4.

☆ Công thức trung điểm:

- Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- Tương tự $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

☆ Công thức trọng tâm:

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Tương tự $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

2.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 2.1. Tổng của hai véc-tơ, tổng của nhiều véc-tơ



Ví dụ 1

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

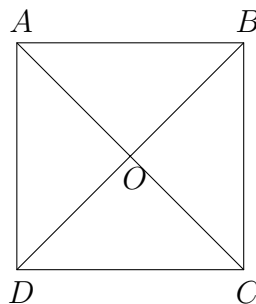
(A) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

(B) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CD}$.

(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(D) $|\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{DO}| = AC$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$.

Ví dụ 2

Nếu N là trung điểm của AB thì

(A) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

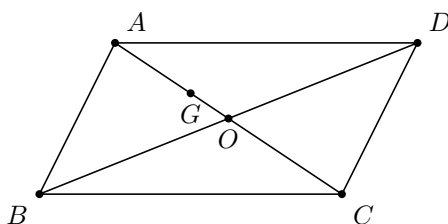
Theo tính chất trung điểm của đoạn thẳng thì ta có $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

Ví dụ 3

Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O , gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Tìm mệnh đề sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BO}$.
 Ⓓ $3\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OB} \text{ (sai).}$$

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

Ví dụ 5

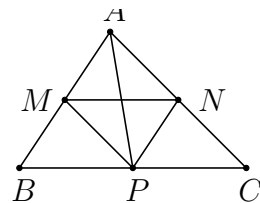
Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vec-tơ nào?

- Ⓐ $\overrightarrow{PA}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AM}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{PB}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AP}$.

Lời giải

Ta có tứ giác $MANP$ là hình bình hành.

$$\text{Mà } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = -(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = -\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP}.$$



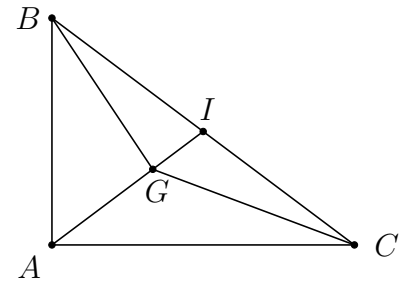
Ví dụ 6

Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 45$. Tính $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

- Ⓐ 45.
 Ⓑ $3\sqrt{5}$.
 Ⓒ 15.
 Ⓓ 30.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC . Có
 $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |2\overrightarrow{GI}| = \left| \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \right| = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC}{3} = 15.$



Ví dụ 7

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và G là trọng tâm của tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$

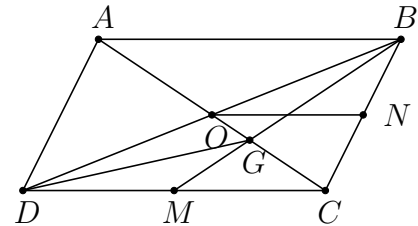
(B) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}.$

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA}.$

(D) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}.$

Lời giải

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GC}$ mà $\overrightarrow{GA} \neq -\overrightarrow{GC}.$
 Do đó phương án $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA}$ sai.



Ví dụ 8

Cho tam giác MNP và một điểm A tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

(A) $\overrightarrow{AN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AM} = 2020\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP}.$

(B) $\overrightarrow{AN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AM} = 2020\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}.$

(C) $\overrightarrow{AN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AM} = 2020\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MP}.$

(D) $\overrightarrow{AN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AM} = 2019\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}.$

Lời giải

Ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} - 2020\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{AP} + 2019\overrightarrow{PM} \\ &= 2019\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$

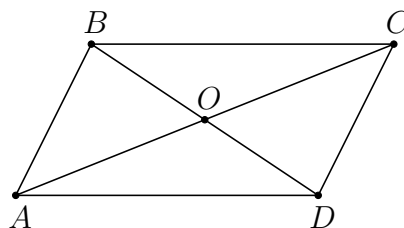
(B) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.$

(C) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}.$

(D) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}.$

Lời giải

Rõ ràng đẳng thức $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ là sai vì:
 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$ mà $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$.



Dạng 2.2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ



Ví dụ 1

Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB (A khác B). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$.

(B) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải

Điểm I là trung điểm của đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Phát biểu nào **sai**?

(A) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

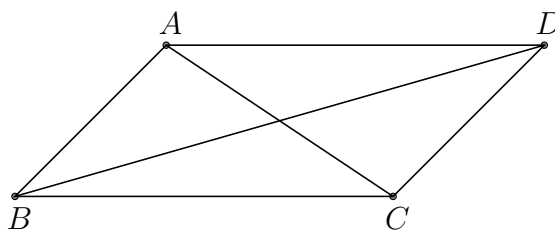
(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$.

(D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Suy ra khẳng định $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ **sai**.



Ví dụ 3

Câu 39 Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm tam giác ABC .
 Đẳng thức nào dưới đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

★ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

★ Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- ★ Theo tính chất trung điểm, ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- ★ Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$.

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $|\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{DO}| = AC$. (B) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.
- (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CD}$.

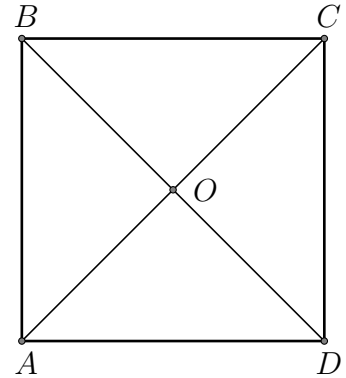
Lời giải

Ta có: $|\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{DO}| = |\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = AC$ suy ra đáp án A đúng.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$ suy ra đáp án B đúng.

$\begin{cases} AB = DC \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra đáp án C đúng.

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra đáp án D sai.



Ví dụ 5

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'}$. (B) $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.
- (C) $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{B'D}$. (D) $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

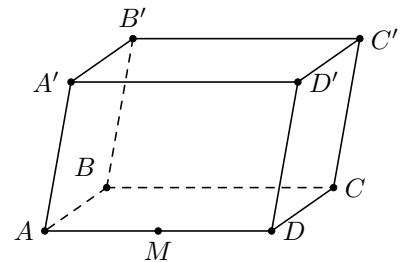
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'B'}$.

Mà $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'B'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.



Ví dụ 6

Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$.
- (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 7

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là sai

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
 Ⓑ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}|$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Xét khẳng định $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Có $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$, mà $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CA} \Rightarrow$ khẳng định A sai.

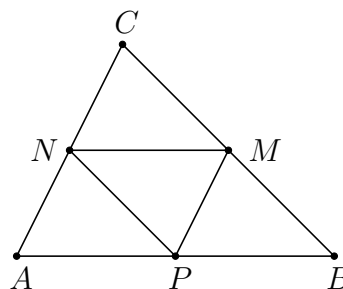
Ví dụ 8

Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính tổng $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$.

Lời giải

Dễ dàng có $BPNM$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$ vì N là trung điểm của CA . Do đó

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}.$$



Ví dụ 9

Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G . Chứng minh rằng

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Lời giải

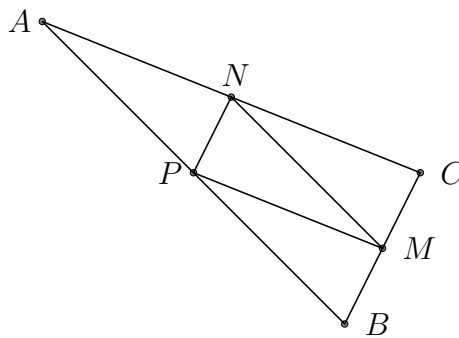
- Ⓐ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EA} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.
 Ⓑ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}) + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$.
 Ⓒ Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FD} = \vec{0}$.

Ví dụ 10

Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. | e) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. |
| b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. | f) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. |
| c) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. | g) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$. |
| d) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$. | h) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$. |

Lời giải



- a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- c) Vì N là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$.
 Từ giả thiết suy ra tứ giác $NPBM$ là hình bình hành, suy ra $-\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN}$.
 Khi đó $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NN} = \vec{0}$.
- d) Vì P là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.
 Khi đó $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$.
- e) Vì P là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.
 M, P lần lượt là trung điểm của BC và AB nên MP là đường trung bình của tam giác ABC nên $PM \parallel AC$ và $PM = \frac{1}{2}AC$ hay $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
 Khi đó $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

- f) Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

g Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Cộng theo về các đẳng thức trên, ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

h Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$.

Khi đó $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BP}) + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC}$.

Dạng 2.3. Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức véc-tơ



Ví dụ 1

Xác định vị trí của ba điểm A, B, C thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.

- Ⓐ A là trung điểm của BC . Ⓑ Tam giác ABC cân.
Ⓒ Ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ⓓ Điểm C trùng với điểm B .

Lời giải

Hệ thức đã cho tương đương với $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi A là trung điểm của BC .

Ví dụ 2

Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để điểm I là trung điểm của đoạn AB là

- Ⓐ $IA = IB$. Ⓑ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. Ⓒ $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. Ⓓ $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Lời giải

$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ ngược hướng và $IA = IB \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Ví dụ 3

Điều kiện cần và đủ để O là trung điểm đoạn AB là

- Ⓐ $OA = OB$. Ⓑ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Lời giải

Ta có O là trung điểm đoạn $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) M là trọng tâm của tam giác ABC . (B) M trùng B .
(C) M trùng C . (D) M trùng A .

Lời giải

Ta biến đổi $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Đẳng thức này chứng tỏ điểm M là trọng tâm của tam giác ABC .

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC và I là trung điểm của cạnh BC . Điểm G có tính chất nào sau đây là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là

- (A) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$. (B) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
(C) $AI = 3GI$. (D) $GA = 2GI$.

Lời giải

Theo tính chất G là trọng tâm của tam giác ABC thì: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.

Ví dụ 6

Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $ABCD$ là hình bình hành. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.
(C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. (D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

Lời giải

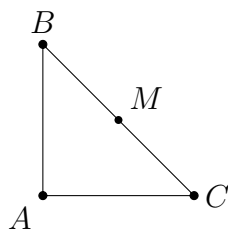
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ suy ra 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng hoặc $ABCD$ là hình bình hành.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$, mà $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ suy ra $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow D \equiv C$.
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với M là trung điểm của BC . Câu nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
(C) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của $BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

Ví dụ 8

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ là

- (A) đường tròn đường kính AB . (B) đường tròn bán kính AB .
(C) đường trung trực của đoạn AB . (D) Không có điểm M nào thỏa mãn.

Lời giải

Ta có $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC . Nếu điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$. Tìm vị trí điểm M

Lời giải

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$
 $\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm A .

Ví dụ 10

Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Suy ra M là trung điểm AC .

Dạng 2.4. Tìm véc-tơ đối, hiệu của hai véc-tơ



Ví dụ 1

Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- (A) hai véc-tơ bằng nhau. (B) hai véc-tơ đối nhau.
(C) hai véc-tơ cùng hướng. (D) hai véc-tơ không cùng phương.

Lời giải

Hai véc-tơ cùng độ dài và ngược hướng là hai véc-tơ đối nhau.

Ví dụ 2

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hai véc-tơ bằng nhau thì cùng phương.
- (B) Hai véc-tơ đối nhau thì cùng độ dài.
- (C) Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.
- (D) Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.

Lời giải

Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 3

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các véc-tơ khác $\vec{0}$ và $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$. Chọn khẳng định **sai**?

- (A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng độ dài.
- (B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- (C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
- (D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 4

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- (A) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.
- (B) $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$.
- (C) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{AD}$.
- (D) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{CB}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm AB , ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM} = \vec{DA}$.

Ví dụ 5

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\vec{OB} - \vec{OC}$.

- (A) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BC}$.
- (B) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$.
- (C) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$.
- (D) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AB}$.

Lời giải

Ta có $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} = \vec{DA}$.

Ví dụ 6

Cho hình bình hành $MNPQ$. Tìm đẳng thức đúng

- (A) $\vec{MN} + \vec{MP} = \vec{MQ}$.
- (B) $\vec{PN} + \vec{PQ} = \vec{PM}$.
- (C) $\vec{PN} - \vec{PM} = \vec{NM}$.
- (D) $\vec{NM} + \vec{QN} = \vec{MQ}$.

Lời giải

Theo công thức hình bình hành ta có $\vec{PN} + \vec{PQ} = \vec{PM}$.

Ví dụ 7

Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

- (A) $IA = IB$. (B) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
(C) $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$. (D) $\vec{IA} = \vec{IB}$.

Lời giải

Với đoạn thẳng AB cho trước, ta có
 I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} = \vec{BI} \Leftrightarrow \vec{IA} - \vec{BI} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 8

Rút gọn biểu thức véc-tơ $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC}$ ta được kết quả đúng là

- (A) $\vec{MB}$. (B) $\vec{BC}$. (C) $\vec{CB}$. (D) $\vec{AB}$.

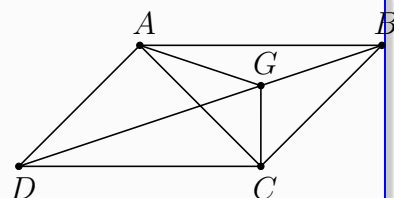
Lời giải

Ta có $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

Ví dụ 9

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{BD}$. (B) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{CD}$.
(C) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. (D) $\vec{GA} + \vec{GD} + \vec{GC} = \vec{CD}$.



Lời giải

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GC} = -\vec{GB}$.
Do đó $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = -\vec{GB} + \vec{GD} = \vec{GD} - \vec{GB} = \vec{BD}$.

Ví dụ 10

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó $\vec{AB} - \vec{AC}$ bằng

- (A) $\vec{BD}$. (B) $\vec{CB}$. (C) $\vec{0}$. (D) $\vec{BC}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

Dạng 2.5. Tính độ dài tổng và hiệu các véc-tơ



Ví dụ 1

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Giá trị $|\vec{AB} - \vec{CA}|$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) a . (C) $a\sqrt{3}$. (D) $2a$.

Lời giải

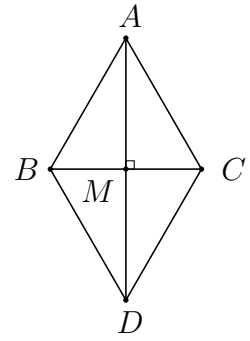
Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua M .

Ta có $ABDC$ là hình bình hành.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AM.$$

Do tam giác ABC đều cạnh a nên

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = a\sqrt{3}.$$



Ví dụ 2

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M , N là trung điểm của AD và BC . Khi đó $|\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CN}|$ bằng:

(A) $\frac{3a}{2}$.

(B) $3a$.

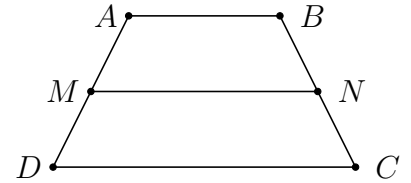
(C) a .

(D) $2a$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CN}| &= |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}| \\ &= |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$



Ví dụ 3

Cho tam giác đều ABC có cạnh a . Độ dài của tổng hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

(A) $2a$.

(B) $a\sqrt{3}$.

(C) a .

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a.$$

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $OA = a$. Tính $|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}|$.

(A) $2a\sqrt{2}$.

(B) a .

(C) $(1 + \sqrt{2})a$.

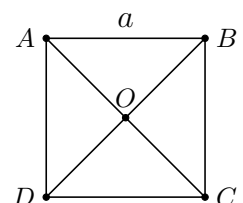
(D) $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Vì là $ABCD$ hình vuông nên ta có $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{OA}$.

$$\text{Suy ra } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}.$$

$$\text{Do đó: } |2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}| = BA = a.$$



Ví dụ 5

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 60 N và tam giác MAB vuông tại M . Tìm cường độ lực $\vec{F}_3$.

Ⓐ 84,58 N.

Ⓑ 84,86 N.

Ⓒ 84,85 N.

Ⓓ 120 N.

Lời giải

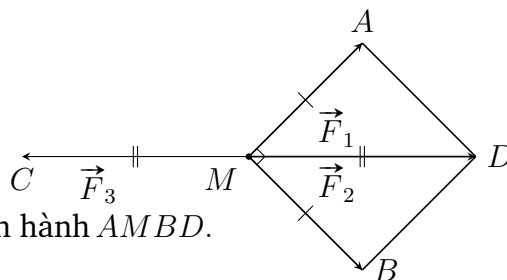
Để vật đứng yên thì

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MD} + \vec{MC} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow MD = MC, \quad D \text{ là đỉnh thứ tư của hình bình hành } AMBD.$$



Do $MA = MB = 60$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$, suy ra $AMBD$ là hình vuông, suy ra $MD = 60\sqrt{2}$. Vậy cường độ lực $\vec{F}_3$ bằng $60\sqrt{2} \approx 84,85$ N.

Ví dụ 6

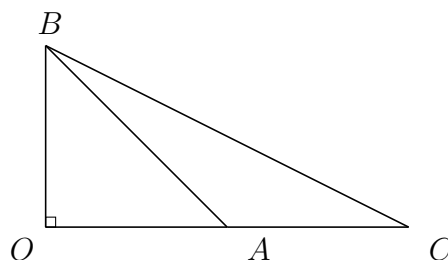
Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\vec{OA} - \vec{OB}|$.

Ⓐ $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4$.Ⓑ $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 2$.Ⓒ $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 12$.Ⓓ $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

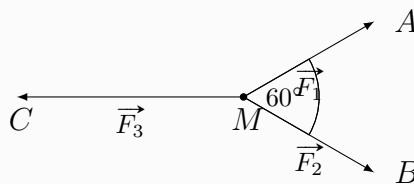
Trên tia OA lấy điểm C sao cho A là trung điểm OC .

Ta có $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = |\vec{OC} - \vec{OB}| = |\vec{BC}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$.

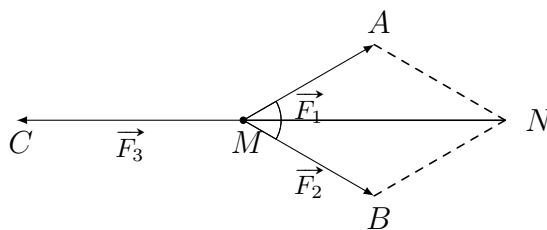


Ví dụ 7

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 25 N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là

Ⓐ $25\sqrt{3}$ N.Ⓑ $50\sqrt{3}$ N.Ⓒ $50\sqrt{2}$ N.Ⓓ $100\sqrt{3}$ N.

Lời giải



Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.

Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$.

Suy ra $|\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}$.

Ví dụ 8

Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài của véc-tơ hiệu $\vec{CA} - \vec{CB}$ là

Lời giải

Ta có $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA} \Rightarrow |\vec{CA} - \vec{CB}| = |\vec{BA}| = BA = 4a$.

Ví dụ 9

Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng

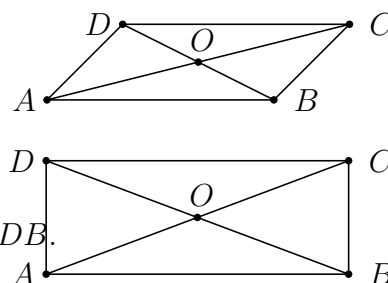
- a) $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$, $|\vec{AB} + \vec{AD}| = AC$.
- b) Nếu $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{CB} - \vec{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải

- a) Ta có $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{DB}$.
 Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.
 Do đó $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC$.

- a) Hình bình hành $ABCD$ có

$|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{CB} - \vec{CD}| \Leftrightarrow |\vec{AC}| = |\vec{DB}| \Leftrightarrow AC = DB$.
 Do đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Ví dụ 10

Cho tam giác đều ABC có cạnh a , I là trung điểm của BC , độ dài của $\vec{AB} + \vec{AI}$ là .

Lời giải

Lấy điểm D sao cho $ABDI$ là hình bình hành.

Gọi K là giao điểm của AD và BI .

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AK}| = 2 \cdot AK$.

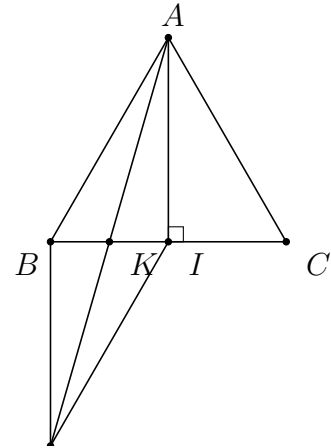
Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle AIK$ vuông tại I ta có

$$AK = \sqrt{AI^2 + KI^2} = \sqrt{AI^2 + \left(\frac{BC}{4}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



2.3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

2.3.1. Nhận biết

Câu 1. Cho $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ với 4 điểm bất kì A, B, C, D . Chọn khẳng định **đúng** ?

- (A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = 2\overrightarrow{DC}$. (C) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$. (D) $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn: $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Chọn đáp án (C)

Câu 2. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- (A) $AO = BO$. (B) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.
(C) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$. (D) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn: Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là hai véc-tơ đối nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (D)

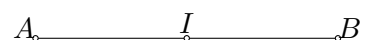
Câu 3. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào đúng?

- (A) $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn:

Ta có: $+\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ nên D đúng
 $+2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ nên A sai
 $+\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ nên B sai
 $+\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{IB}$ nên C sai

Chọn đáp án (D)

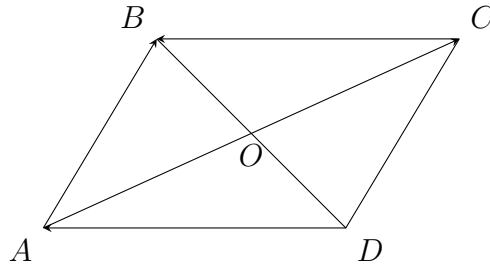


Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- (A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.
 (C) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$.

- (B) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.
 (D) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn:



Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

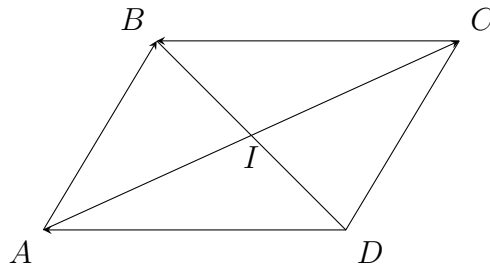
Chọn đáp án (A)

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai ?

- (A) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
 (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
 (D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn:



$ABCD$ là hình bình hành với I là giao điểm của hai đường chéo nên I là trung điểm của AC và BD nên ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ khác phương nên không bằng nhau.

Chọn đáp án (D)

Câu 6. Cho ba điểm A, B, C . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

- (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
 (D) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn: Ta có

- ☆ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.
- ☆ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- ☆ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$.
- ☆ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 7. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(B) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$.
 (D) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn:

- ☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$: quy tắc trừ.
- ☆ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$: quy tắc cộng.
- ☆ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: quy tắc hình bình hành.
- ☆ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$: sai.

Chọn đáp án (D)

Câu 8. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.
 (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.
 (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
 (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Mặt khác

- ☆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CB}$.
- ☆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.
- ☆ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hai véc-tơ đối nhau thì cùng phương.
- (B) Hai véc-tơ cùng phương thì đối nhau.
- (C) Hai véc-tơ có cùng độ dài thì bằng nhau.
- (D) Hai véc-tơ cùng hướng thì bằng nhau.

Hướng dẫn: Hai véc-tơ đối nhau là hai véc-tơ ngược hướng và có cùng độ dài nên hai véc-tơ đó cùng phương.

Chọn đáp án (A)

Câu 10. Cho ba điểm A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.
 (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
 (D) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn: Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 11. Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào đúng?

- (A) Hai véc-tơ không bằng nhau thì có độ dài không bằng nhau.
- (B) Hiệu của hai véc-tơ có độ dài bằng nhau là véc-tơ-không.
- (C) Tổng của hai véc-tơ khác véc-tơ-không là một véc-tơ khác véc-tơ-không.
- (D) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ khác véc-tơ không thì chúng cùng phương.

Hướng dẫn:

Chọn đáp án **D**

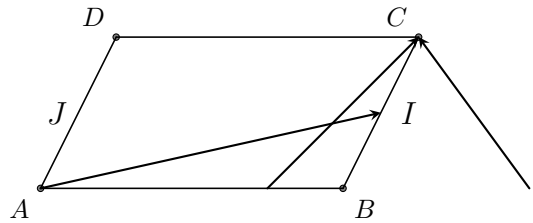
2.3.2. Thông hiểu

Câu 12. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD . Tính $\vec{JC} - \vec{IC}$ không bằng

- (A) $\vec{DC}$. (B) $\vec{JI}$. (C) $\vec{AB}$. (D) $\vec{AC}$.

Hướng dẫn:

Ta có $\vec{JC} - \vec{IC} = \vec{JC} + \vec{CI} = \vec{JC} + \vec{DJ} = \vec{DC} = \vec{JI} = \vec{AB}$.



Chọn đáp án **D**

Câu 13. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{0}$.
 (B) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AE}$.
 (C) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AF}$.
 (D) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{FA} + \vec{BC} + \vec{EF} + \vec{DE} = \vec{AD}$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{VT} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} + \vec{DE}) + (\vec{EF} + \vec{FA}) = \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{AE} + \vec{EA} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 14. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{0}$. (B) $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$.
 (C) $\vec{OA} = \vec{CA} + \vec{CO}$. (D) $\vec{BA} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 15. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau

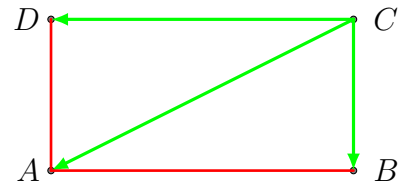
- (A) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$. (B) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC} = \vec{AD}$.
 (C) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$. (D) $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{DC} = \vec{DA}$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\vec{CA}$?

- (A) $-\vec{OA} + \vec{OC}$. (B) $\vec{DC} - \vec{CB}$.
 (C) $\vec{BC} + \vec{AB}$. (D) $\vec{CB} + \vec{CD}$.

*Hướng dẫn:*Áp dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.Chọn đáp án **(D)****Câu 17.** Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

(C) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.

(D) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn: Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm O, A, B bất kì:Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.Chọn đáp án **(C)****Câu 18.** Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

(A) Vô số.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 0.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.Với các điểm A, B, C cho trước thì tồn tại duy nhất một điểm D thỏa mãn đẳng thức trên. (Theo SGK Hình học 10 ban cơ bản trang 6 mục chú ý: Khi cho trước véc-tơ $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$).Chọn đáp án **(B)****Câu 19.** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) M là trọng tâm tam giác ABC .

(B) M là trung điểm của AC .

(C) $ABCM$ là hình bình hành.

(D) $ABMC$ là hình bình hành.

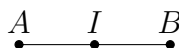
Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow ABCM$ là hình bình hành.Chọn đáp án **(C)****Câu 20.** Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

(A) $IA = IB$.

(B) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

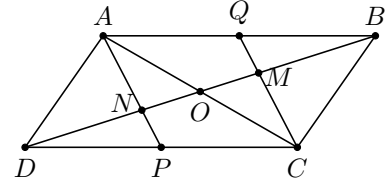
(D) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Hướng dẫn:Ta có I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.Chọn đáp án **(B)****Câu 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , $ABCD$ không là hình thoi. Trên đường chéo BD lấy 2 điểm M, N sao cho $BM = MN = ND$. Gọi P, Q là giao điểm của AN và CD ; CM và AB . Tìm mệnh đề sai.

- (A) M là trọng tâm tam giác ABC .
- (B) P và Q đối xứng qua O .
- (C) M và N đối xứng qua O .
- (D) M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Hướng dẫn:

Vì nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác suy ra $MA = MC$ nên tam giác MAC cân tại M suy ra MO vuông góc AC suy ra $ABCD$ là hình thoi (vô lý).



Chọn đáp án (D)

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Véc-tơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- (A) $\overrightarrow{DB}$.
- (B) $\overrightarrow{BD}$.
- (C) $\overrightarrow{AC}$.
- (D) $\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 23. Cho tam giác ABC . Vị trí của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

- (A) M trùng C .
- (B) M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.
- (C) M trùng B .
- (D) M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$.

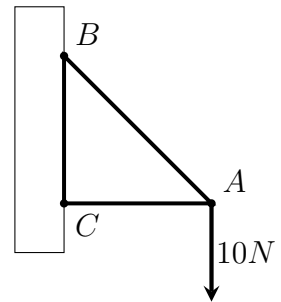
Vậy M thỏa mãn $CBAM$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (D)

Câu 24.

Một giá đỡ dựa vào bức tường như hình vẽ, tam giác ABC vuông cân ở đỉnh C . Người ta treo vào điểm A một vật có trọng lượng $10N$. Khi đó lực tác động vào bức tường tại hai điểm B và C có cường độ lần lượt là

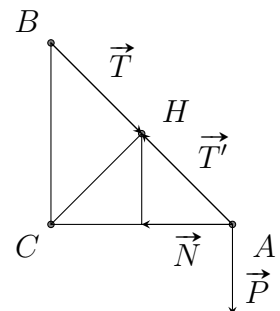
- (A) $10\sqrt{2}N$ và $10N$.
- (B) $10N$ và $10N$.
- (C) $10N$ và $10\sqrt{2}N$.
- (D) $10\sqrt{2}N$ và $10\sqrt{2}N$.



Hướng dẫn:

Lực tác dụng lên B là $T = \frac{CA}{CH} \cdot P = 10\sqrt{2}N$.

Lực tác dụng lên C là $N = P = 10N$.



Chọn đáp án (A)

Câu 25. Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

(A) 3.

(B) $\sqrt{10}$.

(C) $\sqrt{12}$.

(D) 2.

Hướng dẫn: Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= 4 \\ \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 4 + 2\vec{a}\vec{b} + 9 &= 16 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} &= 3. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 2^2 - 3 + 3^2 = 10 \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 26. Với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

(B) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

(C) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

(D) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Hướng dẫn: Chọn $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$.

Theo bất đẳng thức tam giác thì $AC \leq AB + BC \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Chọn đáp án (D)

Câu 27. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ bằng

(A) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$.

(B) Một đáp án khác.

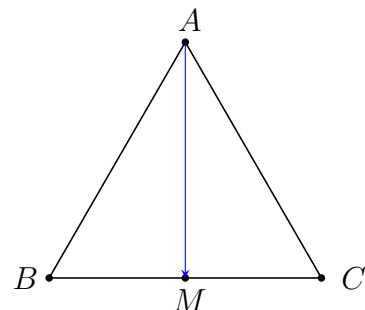
(C) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$.

(D) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AM}| = 2AM = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C)

2.3.3. Vận dụng thấp

Câu 28. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}$.

(A) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

(B) $3\overrightarrow{AC}$.

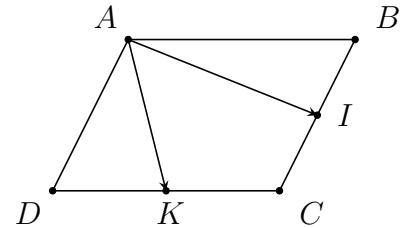
(C) $2\overrightarrow{AC}$.

(D) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



Chọn đáp án (D)

Câu 29. Cho hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là sai?

(A) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm của 2 tam giác ABC và DEF .

Suy ra $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

Xét phương án " $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$ " ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{0} + (-\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \vec{0} \Leftrightarrow D \equiv E. \text{ (vô lý)}\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{GD}$)

Chọn đáp án (D)

Câu 30. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

(B) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

(D) $MABC$ là hình bình hành.

Hướng dẫn: Theo giả thiết: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$.

Xét phương án A: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$ (đúng).

Xét phương án B: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$ (đúng).

Xét phương án C: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ (sai).

Xét phương án D: $MABC$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$ (đúng).

Chọn đáp án (C)

Câu 31. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tìm tập hợp

các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

- (A) Đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$.
 (B) Đường tròn đường kính AB .
 (C) Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
 (D) Đường trung trực của đoạn thẳng IA .

Hướng dẫn: Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI = AB \Leftrightarrow IM = \frac{AB}{2}$.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 32. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CG}$ là

- (A) $8a\sqrt{3}$. (B) $4a + \frac{4a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn:

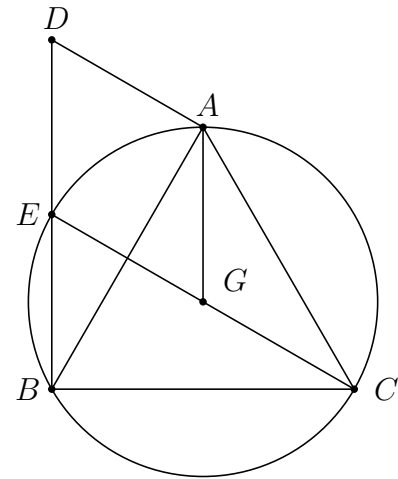
Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CG}$. Gọi E là giao điểm của CG và BD .

Ta có $AG = BE = ED \Rightarrow BD = 2AG$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $AG = \frac{\frac{AB}{2}}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Mà $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = 2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (D)

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3. Khi đó $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}|$ bằng

- (A) $3\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn: Gọi E là điểm đối xứng với C qua D .

Ta có $ABDE$ là hình bình hành tâm I với I là trung điểm của AD .

Khi đó $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{BE}| = 2BI = 2\sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 34. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật M đặt cố định. Biết lực $\vec{F}_1$ có cường độ là $40N$, lực $\vec{F}_2$ có cường độ là $30N$ và hai lực hợp với nhau một góc 90° . Tìm cường độ của lực tổng hợp của chúng tác động vào M .

- (A) $35N$. (B) $50N$. (C) $70N$. (D) $10N$.

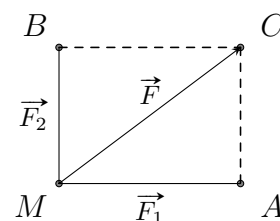
Hướng dẫn:

Đặt $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, hợp lực $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$.

Vì $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ nên tứ giác $MACB$ là hình chữ nhật.

Suy ra $MC = \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$.

Vậy cường độ lực tổng hợp là 50N.



Chọn đáp án **B**

ĐÁP ÁN BÀI 2

1. C	2. D	3. D	4. A	5. D	6. D	7. D	8. A	9. A	10. A
11. D	12. D	13. A	14. A	15. B	16. D	17. C	18. B	19. C	20. B
21. D	22. B	23. D	24. A	25. B	26. D	27. C	28. D	29. D	30. C
31. B	32. D	33. A	34. B						

BÀI 3. TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ THỰC

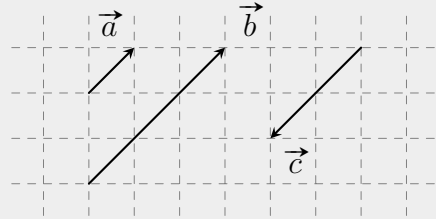
3.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

3.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.3.1. Cho số thực $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số thực k là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$.

- ☆ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- ☆ $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- ☆ Độ dài vec tơ $k\vec{a}$ là $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Theo hình vẽ bên, thì $\vec{b} = 3\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{a}$;
 $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$;



Chú ý. Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

3.1.2. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Định nghĩa 1.3.2.

- ☆ **Trung điểm của đoạn thẳng:**

- Nếu I là trung điểm của đoạn AB với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

- ☆ **Trọng tâm của tam giác:**

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG}$.

3.1.3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Định nghĩa 1.3.3.

- ☆ Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ☆ Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

3.1.4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

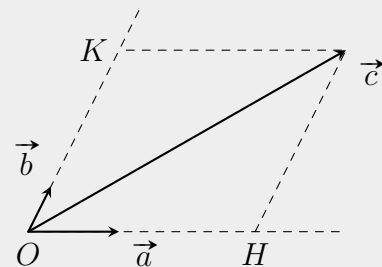
Định nghĩa 1.3.4.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

- Giả sử $\vec{OH} = h\vec{a}$ và $\vec{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



3.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 3.1. Xác định véc-tơ $k\vec{a}$, tính độ dài véc-tơ



Ví dụ 1

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$.

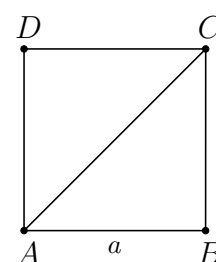
- (A) $3a$. (B) $(2 + \sqrt{2})a$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Ta có $AC = a\sqrt{2}$. Suy ra

$$|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}a.$$

Vậy $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2\sqrt{2}a$.



Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**?

- (A) $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = IA$. (B) $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$.
(C) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI$. (D) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 3GA$.

Lời giải

Vì I là trung điểm của BC nên $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ và $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$.

Từ tính chất của trọng tâm G ta có $2AI = 3GA$.

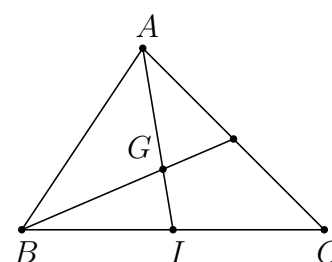
Như thế, các khẳng định đúng là

★ $|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = |\vec{0} + \vec{IA}| = |\vec{IA}| = IA$.

★ $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AI}| = 2AI$.

★ $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI = 3GA$.

Ta có $|\vec{IB} + \vec{IC}| = |\vec{0}| = 0$ nên khẳng định $|\vec{IB} + \vec{IC}| = BC$ là sai.

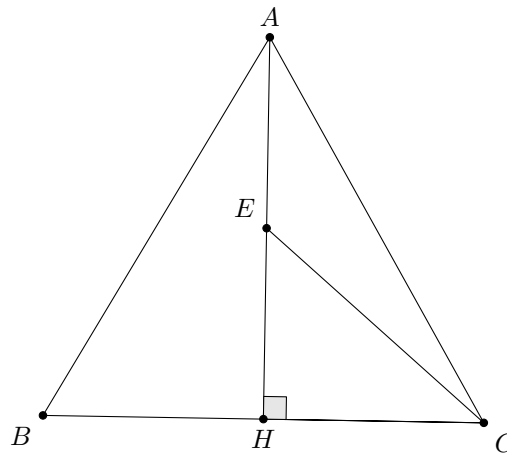


Ví dụ 3

Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

- (A) $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. (B) $|\vec{CA} - \vec{HC}| = 5$.
(C) $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. (D) $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải



Ta có: $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |2\overrightarrow{CE}| = 2CE$ (với E là trung điểm của AH).

Ta lại có: $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle ABC$ đều, AH là đường cao).

Trong tam giác HEC vuông tại H , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Ví dụ 4

Cho $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

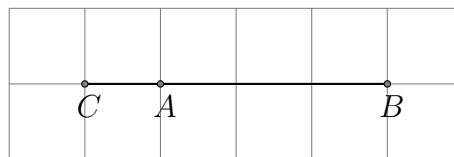
(A) $\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

(B) A, B, C thẳng hàng.

(C) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

(D) $2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{BA} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Vậy mệnh đề sai là " $2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ".

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AN . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NA}$.

(D) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

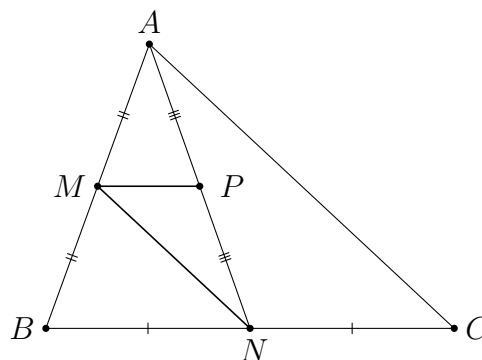
Lời giải

☆ $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ đúng.

☆ $\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ sai.

☆ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}$ nên $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NA}$ sai.

☆ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ sai.



Ví dụ 6

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

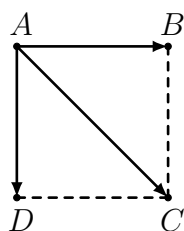
(A) $4a\sqrt{2}$.

(B) $4a$.

(C) $2a\sqrt{2}$.

(D) $2a$.

Lời giải



Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2AC$.

Đường chéo AC của hình vuông có độ dài là $AC = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2 \cdot 2a\sqrt{2} = 4a\sqrt{2}$.

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

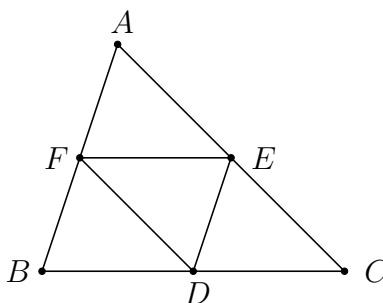
(A) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.

(B) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{EF}$.

(C) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BD}$.

(D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải



Khẳng định đúng là $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{EF}$.

Ví dụ 8

Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\vec{OA} - \vec{OB}|$.

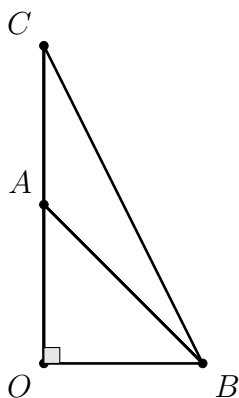
(A) $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4$.

(B) $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4\sqrt{2}$.

(C) $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 12$.

(D) $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải



Dựng $\vec{OC} = 2\vec{OA} \Rightarrow |2\vec{OA} - \vec{OB}| = |\vec{OC} - \vec{OB}| = |\vec{BC}| = BC$.
 $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

Ví dụ 9

Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Biết $\vec{MN} = a.\vec{AB} + b.\vec{AD}$. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 1$.

(B) $a + b = \frac{1}{2}$.

(C) $a + b = \frac{3}{4}$.

(D) $a + b = \frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MO} + \vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } a + b = 1.$$

Dạng 3.2. Chứng minh các đẳng thức véc-tơ, thu gọn biểu thức



Ví dụ 1

Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt có trọng tâm là G và G' . Đẳng thức nào sau đây là sai?

(A) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$.

(B) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

(C) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}$.

(D) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C}$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC} \neq 3\overrightarrow{GG'}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC . Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Hệ thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

(B) $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 3

Gọi CM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của CM . Đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$.

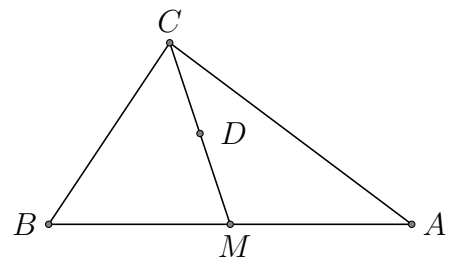
(B) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD}$.

(C) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{DB}$.

(D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM} = 4\overrightarrow{CD}$.



Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$.

(B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$.

(D) $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GA}$.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (2; 3)$, $\vec{c} = (-6; -10)$. Hãy chọn đẳng thức đúng.

- (A) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. (B) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.
(C) $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. (D) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Lời giải

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3; 5) \Rightarrow \vec{c} = -2(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Ví dụ 6

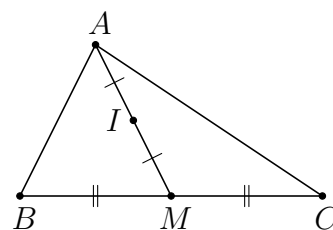
Cho tam giác ABC , có M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AM . Tìm khẳng định đúng dưới đây.

- (A) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$. (B) $\vec{IA} - \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$.
(C) $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 4\vec{IA}$. (D) $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

Vì M là trung điểm của BC nên $\vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$.
Do đó,

$$\begin{aligned} 2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} &= 2\vec{IA} + 2\vec{IM} \\ &= 2(\vec{IA} + \vec{IM}) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

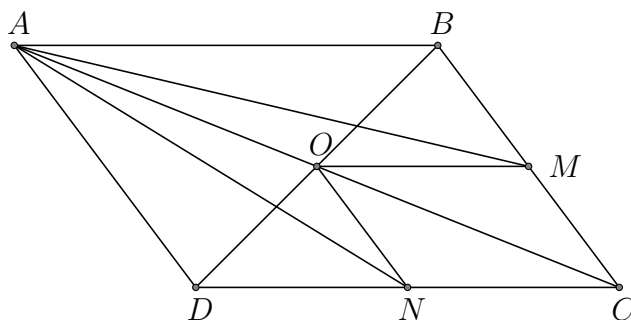


Ví dụ 7

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DC . Chứng minh rằng

- (a) $\vec{OA} + \vec{OM} + \vec{ON} = \vec{0}$. (b) $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + 2\vec{AB})$. (c) $\vec{AM} + \vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AC}$.

Lời giải



- (a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OC}$. Do đó
 $\vec{OA} + \vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$.

- (b) Vì M là trung điểm của BC nên

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}).$$

- (c) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ nên

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2} (2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 8

Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB , D là trung điểm BC , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. Gọi K là trung điểm của MN . Chứng minh rằng:

(a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}.$

(b) $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$

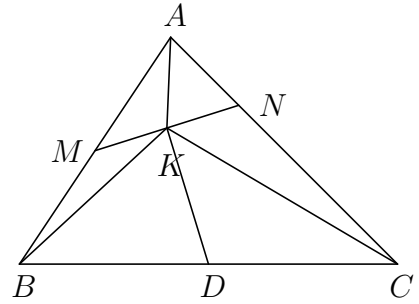
Lời giải

- (a) M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$

$$\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA} \text{ nên } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



- (b) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KD} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC , gọi O, G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác và I là tâm đường tròn đi qua các trung điểm của ba cạnh. Chứng minh rằng

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$

(b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}.$

(c) $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI}.$

Lời giải



- TÀI LIỆU DẠY HỌC TOÁN 10

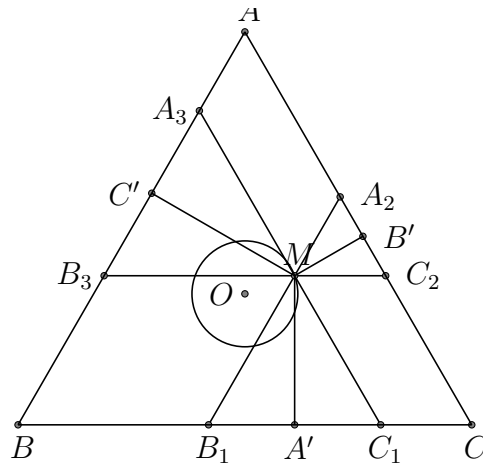
Mặt khác, ta có $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (theo câu a).
 Vậy $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI}$.

Ví dụ 10

Cho $\triangle ABC$ đều, tâm O , M là điểm di động trên đường tròn cố định $(O; b)$ (nằm trong tam giác). Gọi A', B', C' tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ M đến các cạnh BC, CA, AB của tam giác và G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

- a Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.
- b Chứng minh rằng G' di động trên đường tròn cố định.

Lời giải



- a Từ M vẽ các đường thẳng song song với các cạnh tam giác và cắt các cạnh tại các điểm như hình vẽ. Khi đó các tam giác MB_1C_1 , MC_2A_2 và MA_3B_3 là tam giác đều mà có MA' , MB' , MC' lần lượt là các đường cao và là đường trung tuyến.
 Ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$; $\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MC_2})$; $\overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_3} + \overrightarrow{MA_3})$.
 Suy ra $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MB_3} + \overrightarrow{MA_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.
- b Ta có $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = 3\overrightarrow{MG'}$.
 Suy ra $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MG'} \Rightarrow G'$ là trung điểm của OM . Do đó G' thuộc đường tròn tâm O bán kính $\frac{b}{2}$.

Dạng 3.3. Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức véc-tơ



Ví dụ 1

Điều kiện nào dưới đây là cần và đủ để điểm M là trung điểm của đoạn AB ?

- A $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
- B $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.
- C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- D $MA = MB$.

Lời giải

Điều kiện cần và đủ để điểm M là trung điểm của đoạn AB là $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó

(A) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Cách 2: Ta có $MB = 2MC \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ (vì $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng)
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$, tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

(A) Đường trung trực đoạn BC .

(B) Đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$ với I là đỉnh hình bình hành $ABIC$.

(C) Đường thẳng song song với BC .

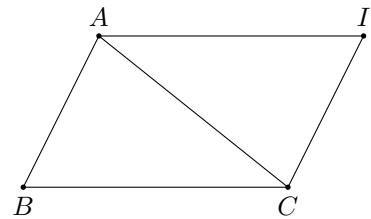
(D) Đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$ với I là đỉnh hình bình hành $ABCI$.

Lời giải

Vẽ hình bình hành $ABCI \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}$.

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{1}{2}AB.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AB}{2}$.



Ví dụ 4

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC ; BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.

(B) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$.

(C) $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BO}$.

(D) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{BO} \neq 2\overrightarrow{BO}.$$

Ví dụ 5

Câu 6 Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

(B) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$.

(D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.

Ví dụ 6

Gọi M là trung điểm đoạn AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

(B) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$.

(C) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải

Khẳng định sai là $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, vì khi đó hai điểm A và B sẽ trùng nhau, điều này là vô lý.

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có trọng tâm G và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm G' .

(a) Chứng minh hệ thức $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

(b) Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Lời giải

(a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

(b) Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Ví dụ 8

Cho điểm A, B . Xác định điểm M biết: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải



Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Khi đó điểm M được xác định như sau:

★ M nằm trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB , gần B . Hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng.

★ Độ dài $AM = 3AB$, nghĩa là điểm B chia AM ra 3 đoạn bằng nhau.

Ví dụ 9

Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC , sao cho $NC = 2NA$.
Hãy xác định K và D khi

a $3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 12\vec{AK} = \vec{0}$.

b $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\vec{KD} = \vec{0}$.

Lời giải

a **Xác định điểm K thỏa:** $3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 12\vec{AK} = \vec{0}$ (1)

Theo giả thiết thì: $\begin{cases} AB = 2AM \\ \vec{AB} \uparrow \vec{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{AB} = 2\vec{AM}$ (2)

và $\begin{cases} AC = 3AN \\ \vec{AC} \uparrow \vec{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{AC} = 3\vec{AN}$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $6\vec{AM} + 6\vec{AN} - 12\vec{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{AN})$.

Suy ra K là trung điểm của MN .

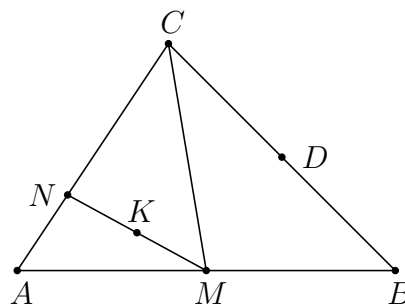
b **Xác định điểm D thỏa:** $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\vec{KD} = \vec{0}$ (4)

Ta có $\vec{KD} = \vec{AD} - \vec{AK}$ (5). Mà theo (4) suy ra $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ (6)

Thay (6) vào (5) ta được: $\vec{KD} = \vec{AD} - \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$ (7)

Thay (7) vào (4) ta được $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\left(\vec{AD} - \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Suy ra D là trung điểm của BC .



Dạng 3.4. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương



Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

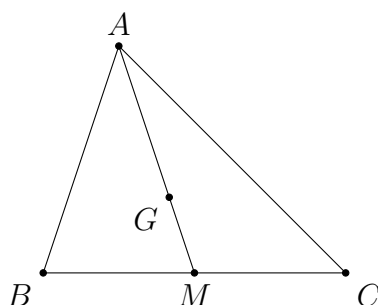
A $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

B $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.

C $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.

D $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm cạnh BC . Có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 2

Điều kiện nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm tam giác ABC (với M là trung điểm của BC)

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. Ⓓ $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG}$. Do đó $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA}$ sai.

Ví dụ 3

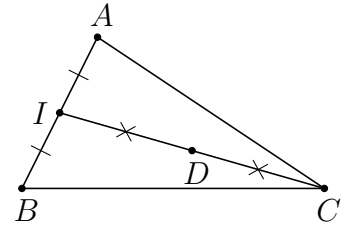
Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm AB, CI . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Vì I, D lần lượt là trung điểm AB, CI nên ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Ví dụ 4

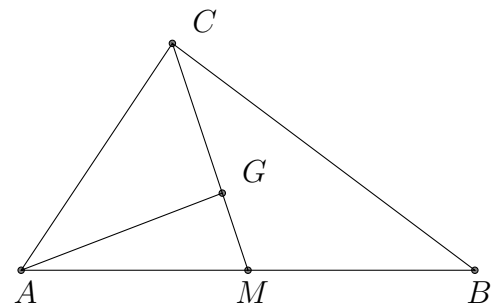
Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

- Ⓐ $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$. Ⓑ $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$. Ⓒ $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$. Ⓓ $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CA} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}.\end{aligned}$$



Ví dụ 5

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Trên đoạn AM , xác định các điểm I, J sao cho $AI = IJ = JM$. Đặt $\overrightarrow{BC} = x \cdot \overrightarrow{BI} + y \cdot \overrightarrow{CJ}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2x + y$.

(A) $T = -3$.

(B) $T = 0$.

(C) $T = \frac{5}{2}$.

(D) $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải

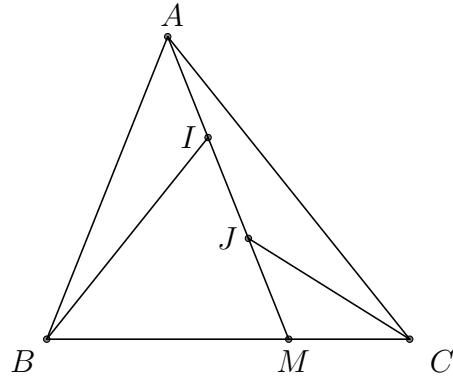
Ta có $M \in BC$ sao cho $BM = 2MC$ nên $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có I, J lần lượt là trung điểm của AJ, IM . Khi đó ta suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} \\ 2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI} - 2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CJ} \quad (1)$$



Lại có $\overrightarrow{BC} = x \cdot \overrightarrow{BI} + y \cdot \overrightarrow{CJ} \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Do đó $T = 2x + y = 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = 0$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP}$. Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

(A) $k = \frac{2}{3}$.

(B) $k = \frac{3}{5}$.

(C) $k = \frac{1}{3}$.

(D) $k = 3$.

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu $k = 0$ thì $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ vô lý.

Trường hợp 2: Xét $k \neq 0$.

$$* \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

$$* 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}.$$

$$* \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{1}{k}\overrightarrow{BC}$$

$$* \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{10}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \rightarrow 10\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{k}\overrightarrow{BC} \rightarrow 2k\overrightarrow{MP} = -k\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}.$$

* Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng phương, hay $10\overrightarrow{MN}$ và $2k\overrightarrow{MP}$ cùng phương. Suy ra $\frac{-k}{-1} = \frac{2}{6} \rightarrow k = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi D là điểm đối xứng với A qua B . Phân tích $\overrightarrow{DG}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{DG} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}$.

(D) $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có D đối xứng với A qua $B \Rightarrow B$ là trung điểm của $AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.
 G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 Suy ra $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 8

Cho tứ giác $ABCD$, trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

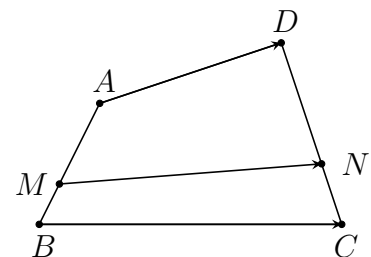
(C) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(D) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$
 $= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
 $= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$
 $= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
 Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

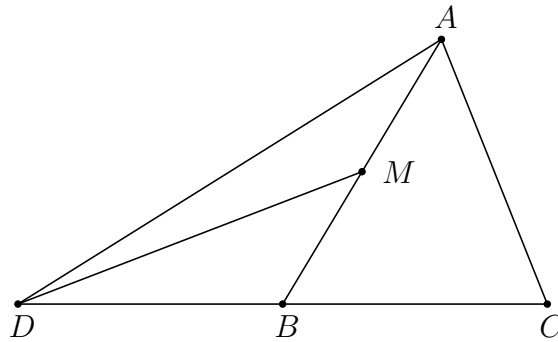


Ví dụ 9

Cho tam giác ABC . Gọi D và I là hai điểm thỏa mãn : $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

- (a) Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- (b) Chứng minh rằng ba điểm A, I, D thẳng hàng.
- (c) Gọi M là trung điểm của AB , N thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để ba đường thẳng AD, MN, BC đồng quy.

Lời giải



- a) Ta có $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$. (1)
- b) Theo giả thiết $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB})$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Do đó hai véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương, suy ra A, I, D thẳng hàng.
- c) Ta có $D = AD \cap BC$.

Nên suy ra AD, MN, BC đồng quy khi và chỉ khi D, M, N là thẳng hàng.

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ (3).

Thay (1) vào (3), ta được

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Mặt khác $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AB} + (k+2)\overrightarrow{AC}.$$

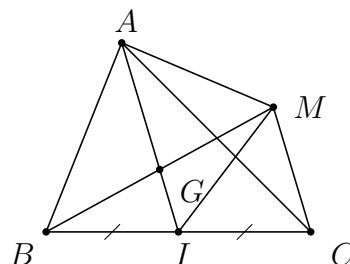
$$D, M, N \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{2}{3}(k+2) \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 10

Cho tam giác ABC, gọi G là trọng tâm, M là điểm đối xứng của B qua G.

- a) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CM}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



- a) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CM}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

☆ Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \quad (\text{với } I \text{ là trung điểm của } BC) \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

☆ Ta có

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

- b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Dạng 3.5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau



Ví dụ 1

Cho ba điểm A , B , C phân biệt. Tìm khẳng định **sai** khi nêu điều kiện cần và đủ để ba điểm A , B , C thẳng hàng.

- (A) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. (B) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
(C) $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (D) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

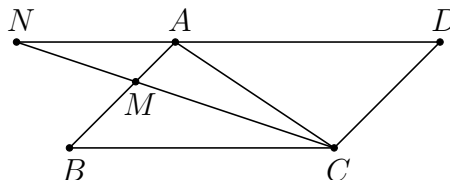
Đó là khẳng định $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hai điểm M , N lần lượt nằm trên hai đường thẳng AB và AD . Giả sử $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AD}$ với $x, y \neq 0$. Khi M , N , C thẳng hàng, tìm phát biểu đúng trong các phát biểu dưới đây?

- (A) $x + y = xy$. (B) $x + y = 2xy$.
(C) $x + y = 3xy$. (D) $x + y = 4xy$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (x-1)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Và $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{AD}$.

Để C, M, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}$ cùng phương, do đó ta có $\frac{x-1}{-1} = \frac{-1}{y-1} \Leftrightarrow x+y=xy$.

Ví dụ 3

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AB \perp BD$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD, AD . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}$ là

(A) $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

(B) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

(C) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

(D) $2a$.

Lời giải

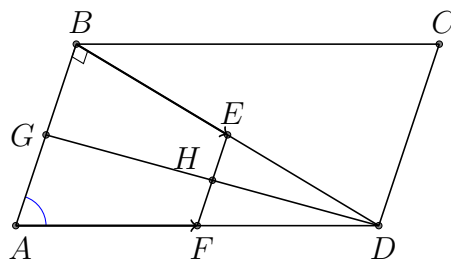
Ta có:

$$BD = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$GD = \sqrt{BD^2 + BG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 3a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF} = -(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) = -2\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{DG}.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}| = DG = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



Ví dụ 4

Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP}$. Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

(A) $k = \frac{1}{3}$.

(B) $k = 3$.

(C) $k = \frac{2}{3}$.

(D) $k = \frac{3}{5}$.

Lời giải

Cách tự luận.

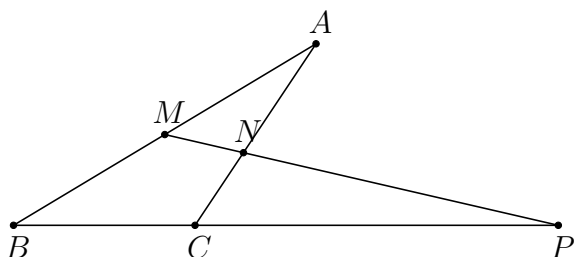
Ta có

$$\star \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\begin{aligned} \star \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Để ba điểm M, N, P thẳng hàng thì $\exists m \in \mathbb{R}: \overrightarrow{NP} = m\overrightarrow{MN}$ hay

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{3m}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{m}{2}\overrightarrow{AB}.$$



$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{k} - \frac{3}{5} = \frac{3m}{5} \\ -\left(\frac{1}{k} - 1\right) = -\frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Cách trắc nghiệm.

Ta có

$$\star \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -1.$$

$$\star \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = (1-k)\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = 1-k.$$

$$\star 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA} = -3\overrightarrow{NC} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{3}{2}.$$

Theo định lí Menelaus, ba điểm M, N, P thẳng hàng khi

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = 1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (1-k) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(m-1; 2)$, $B(2; 5-2m)$ và $C(m-3; 4)$. Tìm giá trị m để A, B và C thẳng hàng.

Ⓐ $m = -2$.

Ⓑ $m = 2$.

Ⓒ $m = 1$.

Ⓓ $m = 3$.

Lời giải

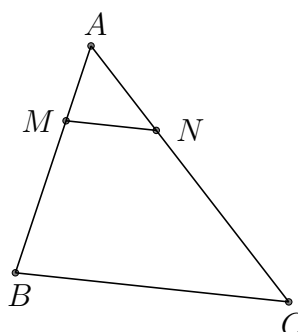
Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-m; 3-2m)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 2)$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m = -2k \\ 3-2m = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC . Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $MN \parallel BC$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $DE \parallel AM$.

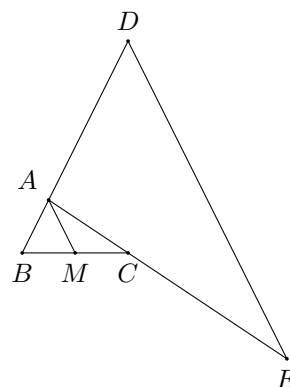
Lời giải

Ta có M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

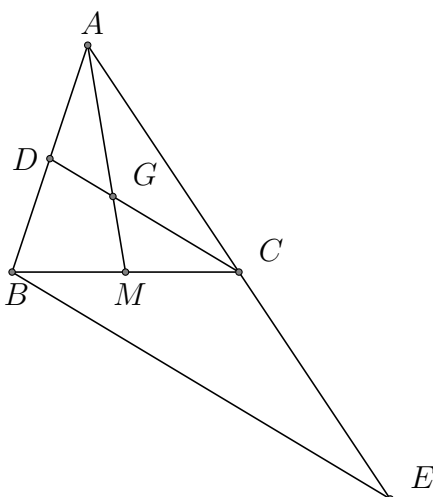
Vì $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$. Do đó

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AM}.$$

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. Vậy $DE \parallel AM$.

**Ví dụ 8**

Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, G được xác định bởi các hệ thức $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}$, $2\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GC}$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $BE \parallel CD$ và ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Lời giải**Cách 1:**

Từ cách xác định các điểm ta có ngay D là trung điểm của AB , C là trung điểm của AE còn G là trọng tâm tam giác ABC .

Do đó CD là đường trung bình của tam giác $ABE \Rightarrow CD \parallel BE$.

Lại có M là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác ABC nên A, G, M thẳng hàng.

Cách 2:

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} \\ &= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow BE \parallel CD.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GC} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

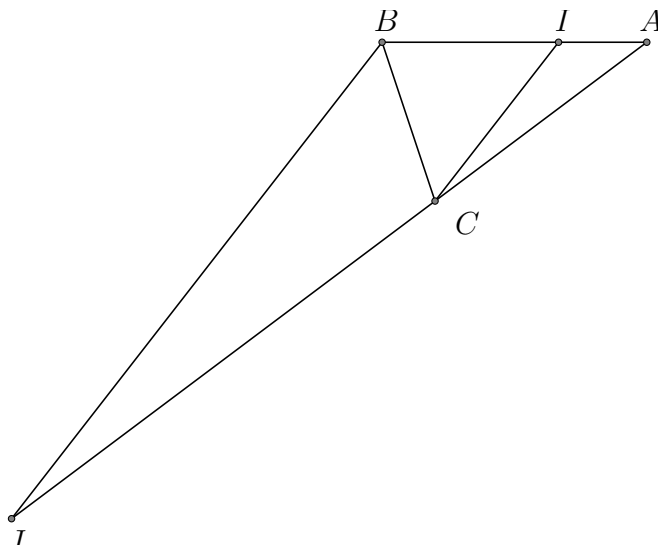
Suy ra ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC . Đặt các điểm I, J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng $IC \parallel BJ$.

Lời giải

Từ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Mặt khác, từ $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ hay $IC \parallel BJ$.



Dạng 3.6. Tập hợp điểm



Ví dụ 1

Cho hai điểm cố định A, B , gọi I là trung điểm AB . Tập hợp các điểm M thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- (A) đường tròn đường kính AB . (B) đường trung trực của AB .
 (C) đường tròn tâm I , bán kính AB . (D) nửa đường tròn đường kính AB .

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB .

Ta có $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 2|\vec{MI}| = |\vec{BA}| \Leftrightarrow 2MI = BA \Leftrightarrow IM = \frac{AB}{2}$ nên tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Ví dụ 2

Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}| = k$.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một đường tròn.
(C) Một điểm. (D) Một đoạn thẳng.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, khi đó

$$\begin{aligned} |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}| &= k \\ \Leftrightarrow |4\vec{MO} + (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD})| &= k \\ \Leftrightarrow 4|\vec{MO}| &= k \\ \Leftrightarrow OM &= \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{k}{4}$.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có trọng tâm G , tập hợp các điểm M sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$ là

- (A) Đường thẳng qua G song song với AB .
(B) Đường tròn tâm G bán kính 2.
(C) Đường tròn tâm G bán kính 6.
(D) Đường trung tuyến AG .

Lời giải

Ta có $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6 \Leftrightarrow 3|\vec{MG}| = 6 \Leftrightarrow MG = 2$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính 2.

Ví dụ 4

Cho hai điểm cố định A, B . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

(a) $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$; (b) $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$.

Lời giải

- (a) Gọi I là trung điểm AB ta có $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow |2\vec{MI}| = |\vec{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$.
Suy ra M thuộc đường tròn đường kính AB .

- b) Gọi I, J là hai điểm thỏa mãn $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ và $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$.

Khi đó ta có $|\vec{2MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}| \Leftrightarrow |\vec{3MI}| = |\vec{3MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$.

Suy ra M thuộc đường trung trực của IJ .

Mặt khác, do $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ và $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$ nên $\frac{AJ}{AB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{AI}{AB} = \frac{2}{3}$ nên trung điểm của IJ cũng là trung điểm của AB . Do đó, trung trực của IJ chính là trung trực của AB .

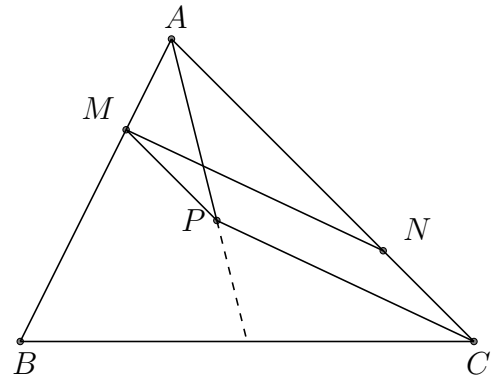
Ví dụ 5

Cho $\triangle ABC$. Lấy hai điểm M, N di động trên các cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA}$.
Dựng hình bình hành $MNCP$. Tìm tập hợp các điểm P .

Lời giải

Đặt $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA} = k \Rightarrow \vec{AM} = k\vec{AB}$ và $\vec{CN} = k\vec{CA}$. Gọi I là trung điểm BC ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$
Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \vec{AM} + \vec{MP} \\ &= k\vec{AB} + \vec{NC} \\ &= k\vec{AB} - k\vec{CA} \\ &= k(\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= 2k\vec{AI}.\end{aligned}$$



Vậy P nằm trên đường thẳng chứa trung tuyến AI .

Dạng 3.7. Cực trị



Ví dụ 1

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$, $B(1; -3)$, $C(-2; 2)$. Điểm M thuộc trục tung sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ nhỏ nhất có tung độ là

(A) 1.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi G là điểm thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ta có $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC}| = 3|\vec{MG}| = 3MG$.

Để $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ nhỏ nhất thì MG nhỏ nhất.

Do điểm M thuộc trục tung nên M là hình chiếu của điểm G lên trục tung.

Vậy $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$ nên $y_M = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất.

(A) $\frac{6}{5}$.

(B) $\frac{5}{4}$.

(C) $\frac{5}{6}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Gọi E, D lần lượt là trung điểm AC, BC . Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BG}.\end{aligned}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BG}|$.

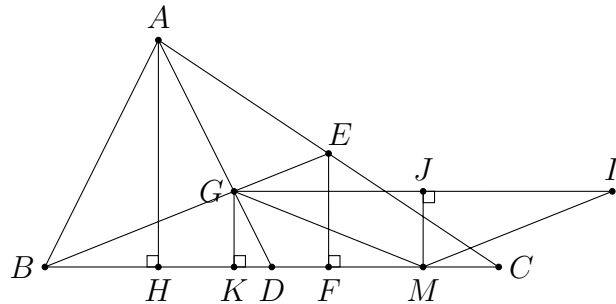
Gọi $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{BG}$ và J là trung điểm GI . Khi đó tứ giác $BGIM$ là hình bình hành, suy ra

$$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MJ} \Rightarrow |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{MJ}| = 2MJ.$$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi MJ nhỏ nhất. Mà MJ nhỏ nhất khi $MJ = d(BC, GI)$ (do $BC \parallel GI$) $\Rightarrow MJ$ vuông góc $GI \Rightarrow \triangle MGI$ cân tại $M \Rightarrow \triangle BGM$ cân tại G . Gọi K là chân đường cao kẻ từ G trong $\triangle BGM$. Ta có

$$BM = 2BK = 2(BH + HK) = 2BH + 2HK = 2 \cdot \frac{1}{4}BC + 2 \cdot \frac{2}{3}HD = \frac{1}{2}BC + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}BC = \frac{5}{6}BC.$$

Vậy $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$.



Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(-3; 2)$, $C(3; 1)$. Tìm M thuộc Oy sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

(A) $M(0; 1)$.

(B) $M(0; 2)$.

(C) $M(0; -1)$.

(D) $M(0; -2)$.

Lời giải

Gọi $M(0; a)$ thuộc Oy . Khi đó $\overrightarrow{MA} = (1; 4 - a)$; $\overrightarrow{MB} = (-3; 2 - a)$; $\overrightarrow{MC} = (3; 1 - a) \Rightarrow 2\overrightarrow{MC} = (6; 2 - 2a)$.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (4; 8 - 4a) \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = \sqrt{16 + (8 - 4a)^2} \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $8 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $M(0; 2)$.

Ví dụ 4

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất.

(A) $\frac{5}{4}$.

(B) $\frac{6}{5}$.

(C) $\frac{5}{6}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

Lời giải

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BG}| = 2|\overrightarrow{GI}|,$$

với I là trung điểm BM .

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi GI nhỏ nhất hay I là hình chiếu của G trên BC .

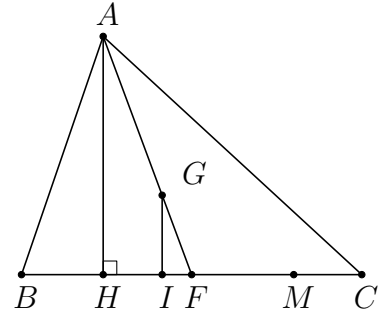
Gọi F là trung điểm BC .

Ta có $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ suy ra: H là trung điểm của BF (1).

Vì G là trọng tâm nên $HI = \frac{2}{3}FH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BI = \frac{5}{6}BF \Leftrightarrow BM = \frac{5}{6}BC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Vậy $x = \frac{5}{6}$.



Ví dụ 5

Cho tứ giác $ABCD$ và một đường thẳng d . Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có

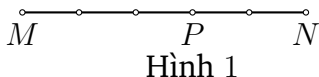
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} \text{ (với } I, J \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD) \\ &= 4\overrightarrow{MH} \text{ (với } H \text{ là trung điểm của } IJ). \end{aligned}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MH}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của H trên đường thẳng d .

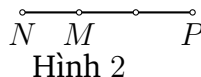
3.3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

3.3.1. Nhận biết

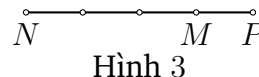
Câu 1. Điểm P được xác định $\overrightarrow{NP} = 4\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây?



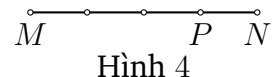
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình 4.

(B) Hình 1.

(C) Hình 3.

(D) Hình 2.

*Hướng dẫn:*Chọn đáp án **C****Câu 2.** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và M là một điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

(A) $3\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

(B) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

(D) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn: Vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.Chọn đáp án **A****Câu 3.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Tìm khẳng định **sai** khi nêu điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng.

(A) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

(B) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

(C) $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

(D) $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn: Do A, B, C phân biệt nên các véc-tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ khác véc-tơ-không. Do đó các khẳng định

★ $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

★ $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

★ $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$.

là các khẳng định đúng.

Nếu A, B, C thẳng hàng và A không là trung điểm của BC . Với $M \equiv A$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$$

Vậy khẳng định $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là sai.Chọn đáp án **C****3.3.2. Thông hiểu****Câu 4.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

(A) $3a$.

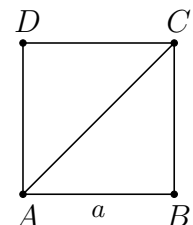
(B) $(2 + \sqrt{2})a$.

(C) $a\sqrt{2}$.

(D) $2\sqrt{2}a$.

*Hướng dẫn:*Ta có $AC = a\sqrt{2}$. Suy ra

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}a.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{2}a$.Chọn đáp án **D****Câu 5.** Cho C nằm giữa A và B sao cho $AC = 3CB$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

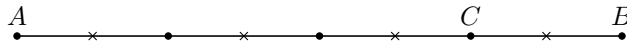
(A) $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.

(C) $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{BC}$.

(D) $\overrightarrow{AC} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn:



☆ $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{BC}$ nên đáp án A và B sai.

☆ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ đáp án D sai.

Chọn đáp án **C**

Câu 6. Câu 39 Cho tam giác ABC đều cạnh a có G là trọng tâm. Khi đó $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$ có giá trị bằng

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

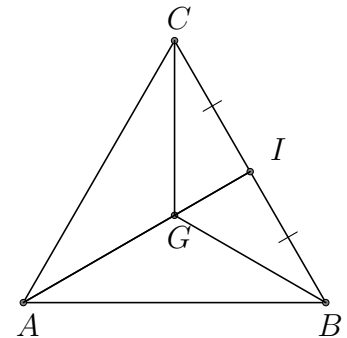
(C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn:

Gọi I là trung điểm của BC . Ta có:

$$|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 2|\overrightarrow{GI}| = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot AI = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án **C**

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Khi đó

(A) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$.

(B) $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{FM}$.

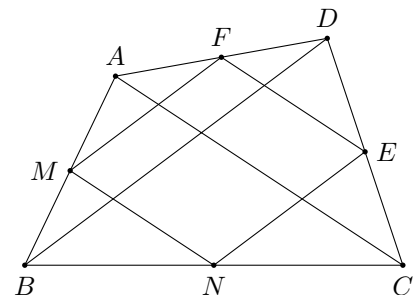
(C) $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{EF}$.

(D) $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FN}$.

Hướng dẫn:

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EF}$.



Chọn đáp án **C**

Câu 8. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CM}$.

(B) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

(C) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

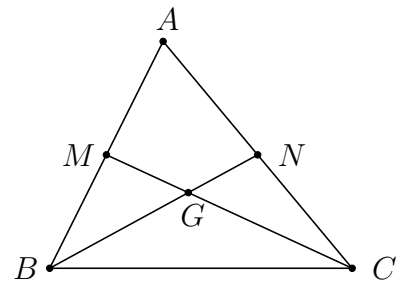
(D) $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

Hướng dẫn:

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\ &= 2\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **C**

Câu 9. Cho tam giác ABC . Vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABEF$, $ACPQ$, $BCM N$. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$;

(II) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$;

(III) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$.

Mệnh đề đúng là

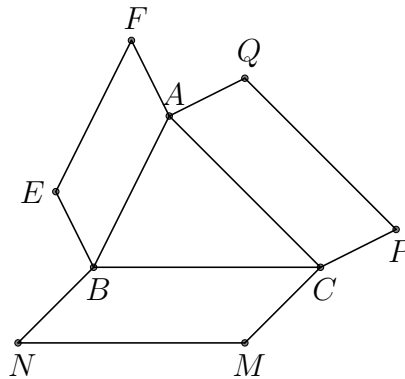
A (I) và (II).

B Chỉ (I).

C Chỉ (III).

D Chỉ (II).

Hướng dẫn:



Mệnh đề (I) đúng vì $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AQ}) = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{MP}$.

Mệnh đề (II) đúng vì $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{MN}$.

Mệnh đề (III) sai vì $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AQ} - (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}) \neq \overrightarrow{AQ} + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC})$ (do $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} \neq \vec{0}$).

Chọn đáp án **A**

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

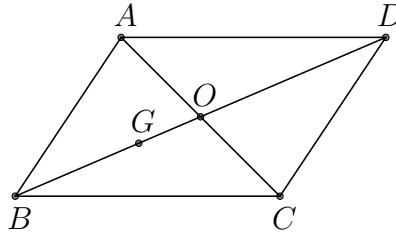
A $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.

C $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn:



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 11. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC , và I trung điểm của AM . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $-\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

(C) $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn: Vì M, I là trung điểm của BC và AM nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$.

Suy ra $\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 12. Cho tam giác ABC , trọng tâm G , gọi M là trung điểm BC . Tìm mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

(C) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$.

(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

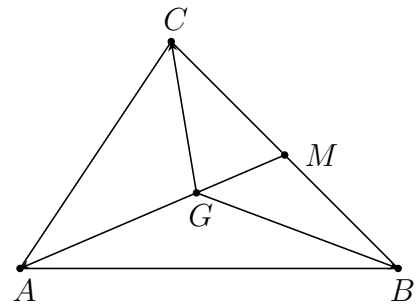
Hướng dẫn:

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}.$$



Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây là sai?

(A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

(B) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.

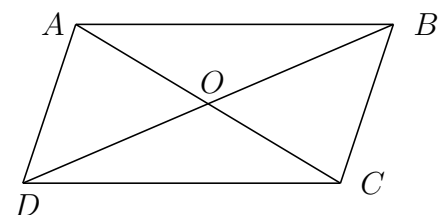
(C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn:

+) Vì $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên O là trung điểm hai đường chéo AC, BD . Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

+) Lại có $ABCD$ là hình bình hành nên theo qui tắc hình bình hành ta có



$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = BD.$$

+) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (theo quy tắc hình bình hành).

+) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 14. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Lấy điểm O tùy ý. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{MG} = \vec{0}.$

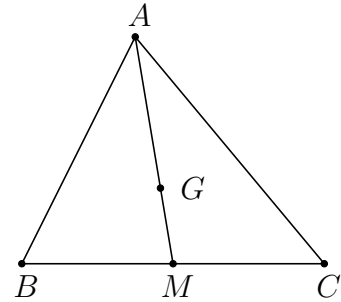
(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$

(C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OG}.$

(D) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}.$

Hướng dẫn:

Ta có: $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MG}.$



Chọn đáp án **(D)**

Câu 15. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $3MA = 2MB$. Khi đó ta có

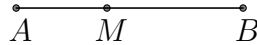
(A) $\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

(B) $\overrightarrow{MA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$

(C) $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}.$

(D) $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

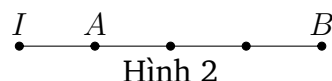
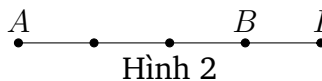
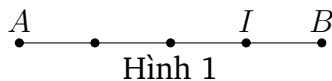
Hướng dẫn:



Vì điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $3MA = 2MB \Rightarrow MA = \frac{2}{5}AB \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 16. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$. Hình nào sau đây mô tả đúng giả thiết này?



(A) Hình 2.

(B) Hình 3.

(C) Hình 4.

(D) Hình 1.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}.$

Từ đó suy ra $IB = 3IA$ và $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng.

Vậy I là điểm thuộc đoạn thẳng AB mà $IA = \frac{1}{4}AB.$

Chọn đáp án **C**

Câu 17. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

A $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$.

C $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

D $\overrightarrow{MG} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

Hướng dẫn: Tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c} - \vec{b})$.

B $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

C $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

Hướng dẫn: Vì P là trung điểm của CD nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 19. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$. Biểu diễn $\overrightarrow{IC}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

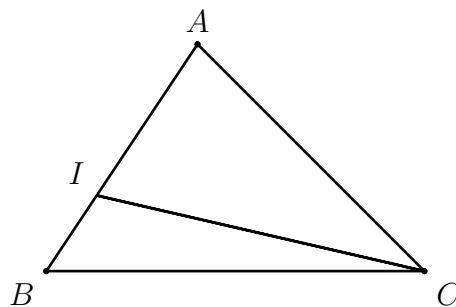
A $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{IC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn:



Ta có $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 20. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC . Tìm mệnh đề đúng.

A $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

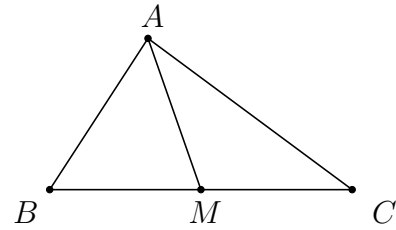
C $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn:

Vì M là trung điểm của BC nên ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Chọn đáp án Ⓒ

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của BC , biết rằng $\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AD} + n\overrightarrow{AB}$. Cặp $(m; n)$ thỏa mãn bài toán là

Ⓐ $\left(1; \frac{1}{2}\right).$

Ⓑ $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right).$

Ⓒ $\left(\frac{1}{2}; 1\right).$

Ⓓ $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$

Hướng dẫn:

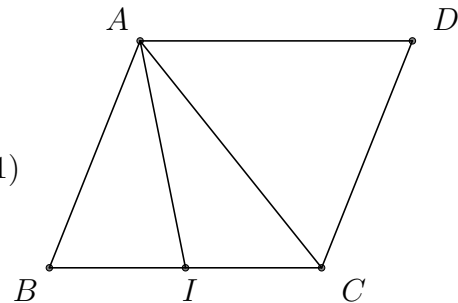
Vì $ABCD$ là hình bình hành, nên ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Vì I là trung điểm của BC , ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Theo bài ta có $\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AD} + n\overrightarrow{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có
$$\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = 1. \end{cases}$$



Chọn đáp án Ⓒ

Câu 22. Cho tam giác ABC điểm I thỏa $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}.$

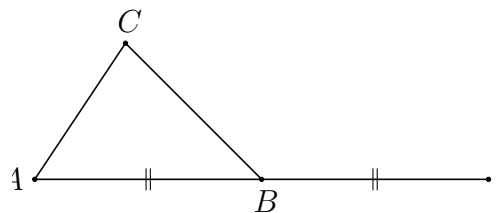
Ⓑ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}.$

Ⓒ $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$

Ⓓ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}.$

Hướng dẫn:

Ta có $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow B$ là trung điểm của AI
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$



Chọn đáp án Ⓒ

Câu 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$

Ⓐ $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}.$

Ⓑ $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}.$

Ⓒ $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}.$

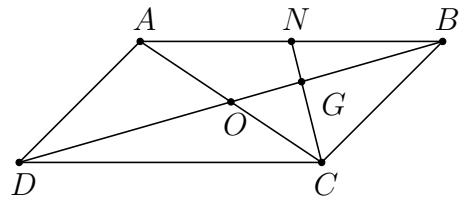
Ⓓ $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}.$

Hướng dẫn:

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = -(\vec{GB} + \vec{GC}).$$

$$\text{Suy ra } \vec{GA} = -\left(-\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}\right) = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}.$$



Chọn đáp án **(D)**

Câu 24. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $\vec{IA} = -2\vec{IB}$. Biểu diễn $\vec{IC}$ theo các véc-tơ $\vec{AB}, \vec{AC}$.

(A) $\vec{IC} = -2\vec{AB} + \vec{AC}.$

(B) $\vec{IC} = 2\vec{AB} + \vec{AC}.$

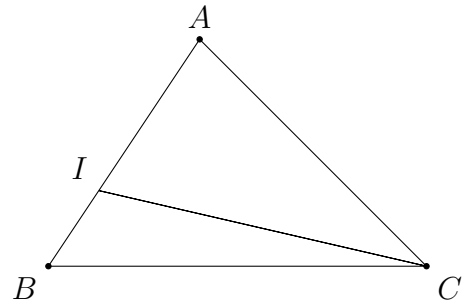
(C) $\vec{IC} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}.$

(D) $\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}.$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } \vec{IA} = -2\vec{IB} \Rightarrow \vec{IA} = -\frac{2}{3}\vec{AB}.$$

$$\text{Vậy } \vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AC} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}.$$



Chọn đáp án **(C)**

Câu 25. Câu 36 Cho tam giác ABC . M là điểm thỏa mãn $\vec{MB} = -2\vec{MC}$. Nếu $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ thì $(x; y)$ là cặp nào?

(A) $(1; 2).$

(B) $(2; 1).$

(C) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$

(D) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$

Hướng dẫn: Ta có $\vec{MB} = -2\vec{MC} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AM} = -2(\vec{AC} - \vec{AM}) \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}).$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I, J, K lần lượt là trung điểm GA, GB, GC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 2|\vec{AB} - \vec{AC}|$?

(A) Đường tròn tâm G , bán kính BC .

(B) Đường tròn tâm J , bán kính $\frac{2}{3}BC$.

(C) Đường tròn tâm K , bán kính $\frac{1}{6}BC$.

(D) Đường tròn tâm I , bán kính $\frac{1}{3}BC$.

Hướng dẫn: Theo quy tắc trung điểm, quy tắc trọng tâm suy ra $\begin{cases} \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} \\ \vec{MA} + \vec{MG} = 2\vec{MI} \end{cases}$

$$\text{Như vậy } |4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 2|\vec{AB} - \vec{AC}| \Leftrightarrow |3\vec{MA} + (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})| = 2|\vec{AB} - \vec{AC}|$$

$$\text{Hay } |3\vec{MA} + 3\vec{MG}| = 2|\vec{CB}| \Leftrightarrow |6\vec{MI}| = 2|\vec{CB}| \Leftrightarrow 6MI = 2BC \Leftrightarrow MI = \frac{BC}{3}. \text{ Do đó tập}$$

hợp các điểm M thỏa mãn là đường tròn tâm I bán kính $\frac{BC}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

3.3.3. Vận dụng thấp

Câu 27. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó, $|2\vec{AB} + \vec{AC}|$ bằng

(A) $a\sqrt{5}$.

(B) $5a$.

(C) $2a$.

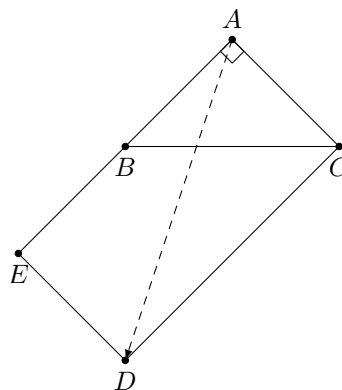
(D) $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn:

Dựng điểm E sao cho $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ và điểm D sao cho $AEDC$ là hình bình hành, khi đó $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$.

Ta có

$$AE = 2a \Rightarrow AD = \sqrt{AE^2 + AC^2} = a\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án **(A)**

Câu 28. Cho tam giác ABC , $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BA} - \vec{BC}|$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) Tam giác ABC cân tại B .

(B) Tam giác ABC vuông tại B .

(C) Tam giác ABC vuông tại C .

(D) Tam giác ABC vuông tại A .

Hướng dẫn:

Ta có $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$, với D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

Suy ra $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = BD$.

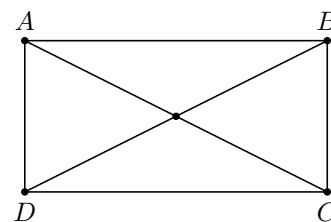
Và $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{CA}$, suy ra $|\vec{BA} - \vec{BC}| = |\vec{CA}| = CA$.

Do đó $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BA} - \vec{BC}| \Leftrightarrow BD = AC$.

Hình bình hành $ABCD$ có $BD = AC$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra tam giác ABC vuông tại B .

Chọn đáp án **(B)**



Câu 29. Cho tam giác ABC và M, N là các điểm được xác định bởi hệ thức $\vec{BM} = \vec{BC} - 2\vec{AB}$ và $\vec{CN} = x\vec{AC} - \vec{BC}$. Để ba điểm A, M, N thẳng hàng giá trị của x là

(A) $x = \frac{1}{2}$.

(B) $x = -\frac{1}{3}$.

(C) $x = -\frac{1}{2}$.

(D) $x = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{CN} = x\vec{AC} - \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AN} - \vec{AC} = x\vec{AC} - \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AN} = (x+1)\vec{AC} - \vec{BC}$.

Và $\vec{BM} = \vec{BC} - 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} - \vec{AB} = \vec{BC} - 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{BC} - \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{BC} - (\vec{CB} - \vec{CA}) \Leftrightarrow \vec{AM} = 2\vec{BC} + \vec{CA} \Leftrightarrow \vec{AM} = -\vec{AC} + 2\vec{BC}$.

Ba điểm A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 30. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- (A) $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
 (B) $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$.
 (C) $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}, \vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.
 (D) $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

Hướng dẫn: Giả sử $\vec{u} = m_1\vec{a} + n_1\vec{b}$ và $\vec{v} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, m_1, m_2, n_1, n_2 đều khác 0.

Ta có nhận xét, $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ khi và chỉ khi $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Từ đó, xét từng đáp án, ta nhận cặp véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}, \vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 31. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}, 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP}$. Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

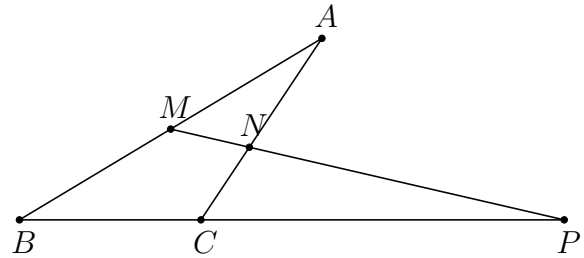
- (A) $k = \frac{1}{3}$. (B) $k = 3$. (C) $k = \frac{2}{3}$. (D) $k = \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn: Cách tự luận.

Ta có

$$\star \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\begin{aligned} \star \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



Để ba điểm M, N, P thẳng hàng thì $\exists m \in \mathbb{R}: \overrightarrow{NP} = m\overrightarrow{MN}$ hay

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{3m}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{m}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{k} - \frac{2}{5} = \frac{3m}{5} \\ -\left(\frac{1}{k} - 1\right) = -\frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Cách trắc nghiệm.

Ta có

$$\star \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -1.$$

$$\star \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = (1-k)\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = 1-k.$$

$$\star 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{NC} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{3}{2}.$$

Theo định lí Menelaus, ba điểm M, N, P thẳng hàng khi

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} = 1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (1-k) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 32. Cho tam giác ABC , I là trung điểm của BC và điểm M sao cho $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Khi đó tập hợp điểm M là

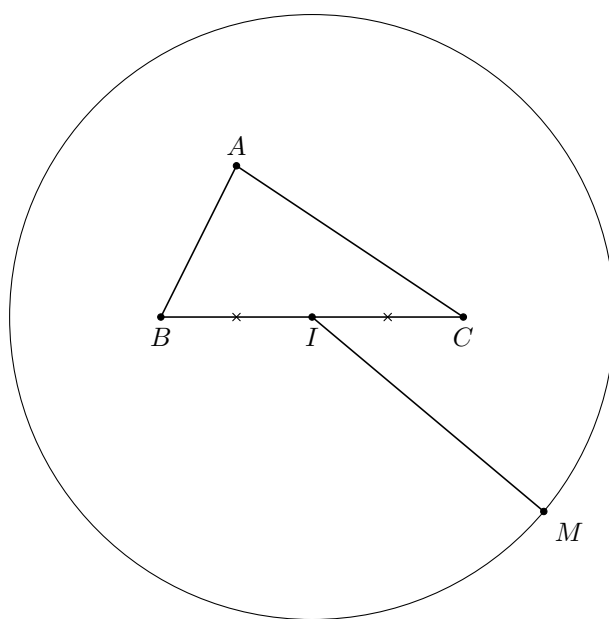
(A) Đường trung trực của BC .

(B) Đường tròn tâm B , bán kính IC .

(C) Đường tròn tâm C , bán kính IB .

(D) Đường tròn tâm I , bán kính BC .

Hướng dẫn:



Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| &= 2|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}| = 2|\overrightarrow{CB}| \\ &\Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})| = 2CB \\ &\Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = 2CB \Leftrightarrow 2MI = 2CB \\ &\Leftrightarrow MI = CB. \end{aligned}$$

Vì I cố định, CB không đổi nên tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính BC .

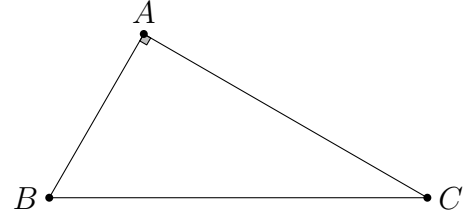
Chọn đáp án **(D)**

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $BC = 5$. Khi đó $|\vec{BA} + \vec{BC}|$ bằng
 (A) 4. (B) $\sqrt{13}$. (C) 5. (D) $2\sqrt{13}$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{BA} + \vec{BC}| &= \sqrt{|\vec{BA} + \vec{BC}|^2} \\ &= \sqrt{BA^2 + BC^2 + 2BA \cdot BC \cdot \cos B} \\ &= \sqrt{9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(D)**

Câu 34. Cho tam giác ABC . Tập hợp những điểm M sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MC} + \vec{MB}|$ là

- (A) đường tròn tâm I , bán kính $R = 2AB$ với I nằm trên cạnh AB sao cho $IA = 2IB$.
 (B) đường tròn tâm I , bán kính $R = 2AC$ với I nằm trên cạnh AB sao cho $IA = 2IB$.
 (C) đường trung trực của IJ với I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC .
 (D) đường trung trực của BC .

Hướng dẫn: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC , khi đó

$$|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MC} + \vec{MB}| \Leftrightarrow |2\vec{MI}| = |2\vec{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ.$$

Điều này tương đương tập các điểm M là đường trung trực của IJ .

Chọn đáp án **(C)**

Câu 35. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MB} + \vec{MC}|$. Tập hợp điểm M là

- (A) Một đường tròn. (B) Một nửa đường tròn.
 (C) Một đoạn thẳng. (D) Một đường thẳng.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm cạnh BC ta có G, I là các điểm cố định và

$$2|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MB} + \vec{MC}| \Leftrightarrow 2|3\vec{MG}| = 3|2\vec{MI}| \Leftrightarrow MG = MI.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI .

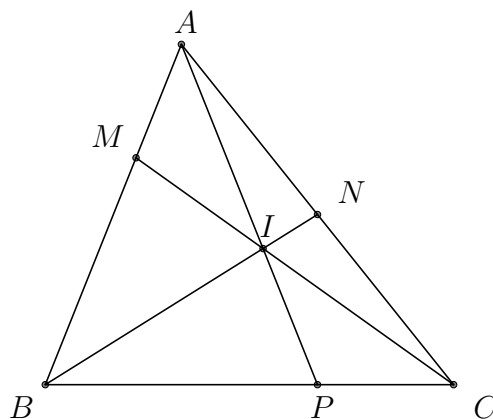
Chọn đáp án **(D)**

3.3.4. Vận dụng cao

Câu 36. Cho tam giác ABC . Trên đoạn AB, AC lấy các điểm M, N sao cho $BM = 2MA$, $AN = CN$. Gọi I là giao điểm của BN và CM . Đường thẳng AI cắt đoạn BC tại điểm P . Đặt $CI = x \cdot IM$, $\vec{BC} = y \cdot \vec{PB}$. Tính giá trị của biểu thức $T = x \cdot y$

- (A) $T = 1$. (B) $T = -1$. (C) $T = -\frac{9}{4}$. (D) $T = -3$.

Hướng dẫn:



Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BNC ta có $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{IN}{IB} = 1$. (1)

Vì $AN = CN \Rightarrow AC = 2AN$ nên thay vào (1) nên ta có $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{IN}{IB} = \frac{1}{2}$. (2)

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABN ta có: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{IB}{IN} \cdot \frac{CN}{CA} = 1$. (3)

Vì $\begin{cases} AN = CN \\ MB = 2MA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = 2CN \\ MB = 2MA \end{cases}$, thay vào (3) ta có $\frac{IB}{IN} = \frac{1}{4}$.

Thay $\frac{IB}{IN} = \frac{1}{4}$ vào (2) ta được $\frac{PB}{PC} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$.

Tương tự ta dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{IM} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy ta có $T = x \cdot y = -\frac{9}{4}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 37. Tam giác ABC là tam giác nhọn có AA' là đường cao. Khi đó véc-tơ $\vec{u} = (\tan B) \overrightarrow{A'B} + (\tan C) \overrightarrow{A'C}$ là

(A) $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

(B) $\vec{u} = \vec{0}$.

(C) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

(D) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn:

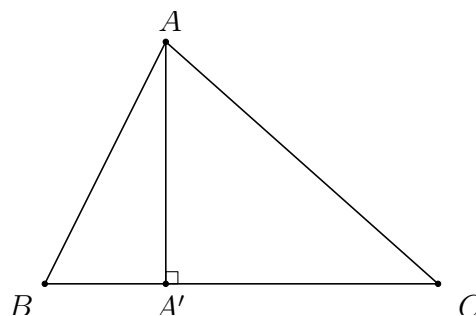
Ta có $\vec{u} = (\tan B) \overrightarrow{A'B} + (\tan C) \overrightarrow{A'C}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{AA'}{BA'} \overrightarrow{A'B} + \frac{AA'}{CA'} \overrightarrow{A'C}.$$

Ta thấy hai véc-tơ $\frac{AA'}{BA'} \overrightarrow{A'B}$ và $\frac{AA'}{CA'} \overrightarrow{A'C}$ ngược hướng và độ dài mỗi véc-tơ bằng AA' nên chúng là hai véc-tơ đối nhau.

Vậy $\vec{u} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **B**



Câu 38. Tam giác ABC là tam giác nhọn có AA' là đường cao.

Khi đó véc-tơ $\vec{u} = (\tan B) \overrightarrow{A'B} + (\tan C) \overrightarrow{A'C}$ là

(A) $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

(B) $\vec{u} = \vec{0}$.

(C) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

(D) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

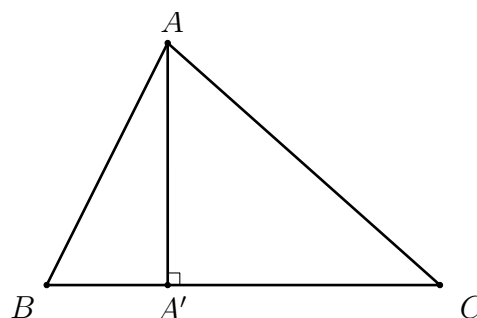
Hướng dẫn:

Ta có $\vec{u} = (\tan B) \overrightarrow{A'B} + (\tan C) \overrightarrow{A'C}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{AA'}{BA'} \overrightarrow{A'B} + \frac{AA'}{CA'} \overrightarrow{A'C}.$$

Ta thấy hai véc-tơ $\frac{AA'}{BA'} \overrightarrow{A'B}$ và $\frac{AA'}{CA'} \overrightarrow{A'C}$ ngược hướng và độ dài mỗi véc-tơ bằng AA' nên chúng là hai véc-tơ đối nhau.

Vậy $\vec{u} = \vec{0}$.



Chọn đáp án **B**

ĐÁP ÁN BÀI 3

1.C	2.A	3.C	4.D	5.C	6.C	7.C	8.C	9.A	10.A
11.C	12.C	13.D	14.D	15.A	16.C	17.C	18.A	19.C	20.C
21.C	22.C	23.D	24.C	25.D	26.D	27.A	28.B	29.C	30.C
31.A	32.D	33.D	34.C	35.D	36.C	37.B	38.B		

BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

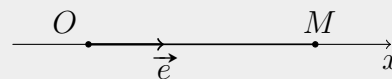
4.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

4.1.1. Trục tọa độ

Định nghĩa 1.4.1.

☆ Trục tọa độ là đường thẳng trên đó xác định một điểm gốc là O và một vec tơ đơn vị $\vec{e}$, kí hiệu $(O, \vec{e})$.

☆ Xét điểm M trên trục $(O, \vec{e})$, ta luôn có $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. Khi đó k là tọa độ của M trên trục đã cho.



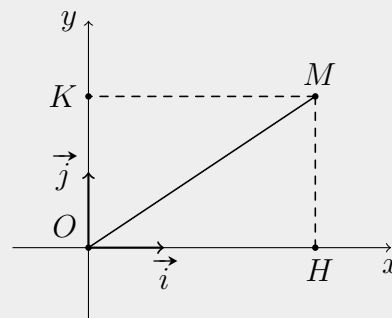
4.1.2. Hệ trục tọa độ

Định nghĩa 1.4.2.

☆ Hệ trục tọa độ bao gồm 2 trục vuông góc nhau (hình vẽ), kí hiệu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ hay Oxy .

- O là gốc tọa độ;
- $\vec{i}, \vec{j}$ là các vec tơ đơn vị và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

☆ Xét điểm M trên trục $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ta luôn có $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Khi đó (x, y) là tọa độ của M trên hệ trục đã cho.



4.1.3. Tọa độ vectơ

Định nghĩa 1.4.3. Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó

- ☆ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$.
- ☆ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$, với k là một hằng số.
- ☆ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.
- ☆ $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{a} = k\vec{b}$.

4.1.4. Tọa độ điểm

Định nghĩa 1.4.4. Cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$

- ☆ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- ☆ Trung điểm I của AB : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ và $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$
- ☆ G là trọng tâm tam giác ABC : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

4.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 4.1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục



Ví dụ 1

Cho trục tọa độ $(O, \vec{e})$. Khẳng định nào sau đây luôn **đúng**?

- (A) $AB = \overline{AB}$.
- (B) $AB = |\overline{AB}|$.
- (C) Điểm M có tọa độ là a đối với trục tọa độ $(O, \vec{e})$ thì $|\overrightarrow{OM}| = a$.
- (D) $|\overline{AB}| = \overline{AB}$.

Lời giải

Theo lý thuyết sách giáo khoa thì C đúng.

Ví dụ 2

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A = (2; 1)$, $B = (-1; -2)$, $C = (-3; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- (A) $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- (B) $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
- (C) $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- (D) $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC \text{ là } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 3

Cho $A(-6; 10)$, $B(12; 2)$. Tính AB .

- (A) $6\sqrt{5}$.
- (B) 10.
- (C) $2\sqrt{97}$.
- (D) $2\sqrt{65}$.

Lời giải

Ta có

$$AB = \sqrt{(12 - (-6))^2 + (2 - 10)^2} = 2\sqrt{97}.$$

Vậy $AB = 2\sqrt{97}$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có $A(4; 11)$, $B(10; -1)$, trọng tâm $G(5; 4)$. Tổng hoành và tung độ của C là

- (A) 3.
- (B) -6.
- (C) -15.
- (D) 1.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 2. \end{cases}$
 Khi đó $x_C + y_C = 3$.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 1), B(4; -3)$. Khi đó tọa độ trung điểm của đoạn AB là

- (A) $(1; -1)$. (B) $(2; -4)$. (C) $(6; -2)$. (D) $(3; -1)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AB , ta có $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -1)$.

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 1), B(4; -3)$ và $C(3; 5)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.

- (A) $G\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$. (B) $G(3; 1)$. (C) $G(1; 3)$. (D) $G(9; 3)$.

Lời giải

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 + 4 + 3}{3} = 3 \\ y_G = \frac{1 + (-3) + 5}{3} = 1. \end{cases}$
 Vậy $G(3; 1)$.

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $B(2; 3); C(-1; -2)$. Điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ có tọa độ là

- (A) $M\left(\frac{1}{5}; 0\right)$. (B) $M\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.
 (C) $M\left(0; \frac{1}{5}\right)$. (D) $M\left(0; -\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có

$$2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2 - x) + 3(-1 - x) = 0 \\ 2(3 - y) + 3(-2 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = -1 \\ -5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1; 3), B(4; 0), C(2; -5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là:

- Ⓐ $M(1; 18)$. Ⓑ $M(-1; 18)$. Ⓒ $M(1; -18)$. Ⓓ $M(-18; 1)$.

Lời giải

Phương pháp

Sử dụng các công thức: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$, $(a; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, $(a; a_2) = (b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.

Cách giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ ta có $\overrightarrow{MA} = (4 - x_0; -y_0)$; $\overrightarrow{MC} = (2 - x_0; -5 - y_0)$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (-1 + x_0; 18 + y_0) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + x_0 = 0 \\ 18 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -18 \end{cases} \Rightarrow M(1; -18)$$

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA và AB . Biết $A(1; 3)$, $B(-3; 3)$, $C(8; 0)$. Giá trị $x_M + x_N + x_P$ bằng

- Ⓐ 1. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ x_N = \frac{x_C + x_A}{2} \\ x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_M + x_N + x_P = \frac{x_B + x_C}{2} + \frac{x_C + x_A}{2} + \frac{x_A + x_B}{2} = x_A + x_B + x_C = 1 + (-3) + 8 = 6.$$

Ví dụ 10

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; 2)$, $B(-2; -3)$. Khi đó $|\overrightarrow{AB}|$ bằng

- Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ $5\sqrt{2}$. Ⓒ 10. Ⓓ 5.

Lời giải

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-3 - 2)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Dạng 4.2. Tìm tọa độ các véc-tơ tổng, hiệu và $k\vec{a}$



Ví dụ 1

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$ và $C(0; -3)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ có tọa độ là

- (A) $(4; 8)$. (B) $(1; 1)$. (C) $(-1; -1)$. (D) $(-4; -8)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-1; -6)$. Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-4; -8)$.

Ví dụ 2

Cho $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2)$, $\vec{c} = (-3; -2)$. Tọa độ của $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$ là

- (A) $(10; -15)$. (B) $(10; 15)$. (C) $(15; 10)$. (D) $(-10; 15)$.

Lời giải

Ta có $3\vec{a} = (0; 3)$; $2\vec{b} = (-2; 4)$ và $4\vec{c} = (-12; -8)$. Khi đó tọa độ $\vec{u} = (10; 15)$.

Ví dụ 3

Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 4)$ và $\vec{b} = (1; -5)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (3; -1)$. (B) $\vec{u} = (1; 9)$.
(C) $\vec{u} = (3; 9)$. (D) $\vec{u} = (-1; 3)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 1; 4 - 5) = (3; -1)$.

Ví dụ 4

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Khi đó, tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$ là:

- (A) $(2; -1)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(1; -5)$. (D) $(2; -3)$.

Lời giải

Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 5\vec{j}$. Do đó tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$ là $(1; -5)$.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Tọa độ $\vec{u}$ là

- (A) $\vec{u} = (2; -5)$. (B) $\vec{u} = (-2; 5)$.
(C) $\vec{u} = (2; -5)$. (D) $\vec{u} = (-2; -5)$.

Lời giải

Ví dụ 6

Câu 46 Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -4)$ và $\vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

(A) $\vec{u} = (7; -7)$.

(B) $\vec{u} = (9; -11)$.

(C) $\vec{u} = (9; -5)$.

(D) $\vec{u} = (-1; 5)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 2\vec{a} = (4; -8) \\ -\vec{b} = (5; -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = (9; -11).$

Ví dụ 7

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a}(2; -4)$; $\vec{b}(-5; 3)$. Véc-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

(A) $(7; -7)$.

(B) $(9; -5)$.

(C) $(-1; 5)$.

(D) $(9; -11)$.

Lời giải

$\vec{a}(2; -4) \Rightarrow 2\vec{a} = (4; -8) \Rightarrow 2\vec{a} - \vec{b} = (9; -11).$

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (-3; 1)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là

(A) $\vec{u} = (6; -8)$.

(B) $\vec{u} = (-8; 6)$.

(C) $\vec{u} = (-8; -6)$.

(D) $\vec{u} = (6; 8)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} = (-8; 6)$.

Ví dụ 9

Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm giá trị của x sao cho hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{3}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Do hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương nên

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = k[\vec{a} + (x - 1)\vec{b}] \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} - 3\vec{b} = k\vec{a} + k(x - 1)\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow (k - 2)\vec{a} + [k(x - 1) + 3]\vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Theo đầu bài hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k(x - 1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x - 1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 10

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a}(2; -3)$ và $\vec{b}(-4; 5)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{m} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{i}$ là

- (A) $(-16; 18)$. (B) $(14; -18)$. (C) $(16; -18)$. (D) $(1; -9)$.

Lời giải

Giả sử tọa độ véc-tơ $\vec{m}$ là $(x; y)$. Khi đó
$$\begin{cases} x = 2 - 3 \cdot (-4) + 2 = 16 \\ y = -3 - 3 \cdot 5 = -18. \end{cases}$$

Vậy $\vec{m}(16; -18)$.

Dạng 4.3. Xác định tọa độ của véc-tơ và của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy



Ví dụ 1

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 1)$, $B(-1; -2)$, $C(-3; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- (A) $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. (B) $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
(C) $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. (D) $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Ví dụ 2

Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$. Véc-tơ $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ có tọa độ là

- (A) $\vec{m} = (10; 12)$. (B) $\vec{m} = (11; 16)$.
(C) $\vec{m} = (12; 15)$. (D) $\vec{m} = (13; 14)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 2\vec{a} = (2; 4) \\ 3\vec{b} = (9; 12) \end{cases}$. Vậy ta có $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (11; 16)$.

Ví dụ 3

Cho ba điểm $A(2; -4)$, $B(6; 0)$, $C(m; 4)$. Định m để A, B, C thẳng hàng?

- (A) $m = 2$. (B) $m = 10$. (C) $m = -10$. (D) $m = -6$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (m - 6; 4)$.
Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB}$ với $k \neq 0$.

$$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 6 = 4k \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = 10 \end{cases}.$$

Vậy $m = 10$.

Ví dụ 4

Trong hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OM} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) + 5\vec{j} - 2\vec{i}$. Tọa độ điểm M là:

- (A) $(-1; -9)$. (B) $(1; 17)$. (C) $(-1; -17)$. (D) $(1; 9)$.

Lời giải

$$\overrightarrow{OM} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) + 5\vec{j} - 2\vec{i} = \vec{i} + 17\vec{j}. \text{ Suy ra } M(1; 17).$$

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(-1; 2)$. Nếu $I(3; -1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm B là

- (A) $(5; -4)$. (B) $(7; -3)$. (C) $(7; -4)$. (D) $(5; 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A \\ y_B = 2y_I - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 7 \\ y_B = -4 \end{cases}.$$

Vậy $B = (7; -4)$.

Ví dụ 6

Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2m + 1; n - 2)$, $\vec{b} = (3; m)$ với m, n là các số thực. Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n$ bằng

- (A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} 2m + 1 = 3 \\ n - 2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m + n = 4.$$

Ví dụ 7

Cho 2 điểm $A(1; 2)$ và $B(-5; 8)$. Tìm tọa độ điểm I biết: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

- (A) $I(-3; 3)$. (B) $I(-2; 5)$. (C) $I(3; -3)$. (D) $I(6; -6)$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } I \text{ là trung điểm của đoạn } AB \text{ như vậy } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 5 \end{cases}.$$

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O , hai đỉnh $A(-2; 2)$ và $B(3; 5)$. Tọa độ đỉnh C là

- (A) $(-1; -7)$. (B) $(2; -2)$. (C) $(-3; -5)$. (D) $(1; 7)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{-2+3+x_C}{3} = 0 \\ \frac{2+5+y_C}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7. \end{cases}$$

Vậy $C(-1; -7)$.

Ví dụ 9

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$, $B(1; -3)$, $C(-2; 2)$. Điểm M thuộc trục tung sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất có tung độ là

- (A) 1. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải

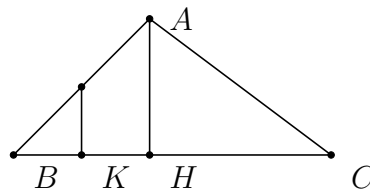
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , khi đó tọa độ của G là $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Áp dụng tính chất trọng tâm thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3MG$. Để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất thì M là hình chiếu của G lên Oy , hay tung độ của M là $\frac{1}{3}$.

Ví dụ 10

Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(-4; 1)$, $B(2; 1)$, $C(-3; -4)$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Tìm tọa độ điểm D có tung độ dương thuộc đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 10S_{IBD}$.

- (A) $D(-3; 2)$. (B) $D(2; 3)$. (C) $D(3; 2)$. (D) $D(1; 0)$.

Lời giải

Do điểm D nằm trên đường thẳng BC nên

$$\frac{S_{ABC}}{S_{IBD}} = 10 \Leftrightarrow \frac{BC}{BD} \cdot \frac{AH}{IK} = 10 \Leftrightarrow BC = 5BD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{BC} = -5\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

TH1: $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = (-1; -1) \Rightarrow D(1; 0)$ - Không thỏa mãn.

TH2: $\overrightarrow{BC} = -5\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = (1; 1) \Rightarrow D(3; 2)$ - Thỏa mãn.

Dạng 4.4. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương



Ví dụ 1

Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$.

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Ví dụ 2

Cho $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (1; 4)$, $\vec{c} = (5; 2)$. Biết $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, tính $S = m^2 + n$.

(A) $S = \frac{13}{4}$.

(B) $S = \frac{116}{25}$.

(C) $S = \frac{25}{4}$.

(D) $S = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2m + n \\ 2 = -2m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{5} \\ n = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow S = m^2 + n = \frac{116}{25}.$$

Ví dụ 3

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a}(6; -4)$; $\vec{b}(-3; 9)$; $\vec{c}(5; -8)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

(B) $\vec{a} = -\frac{4}{3}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$.

(C) $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{8}{5}\vec{c}$.

(D) $\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{b} + 2\vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} = (-3x + 5y; 9x - 8y).$$

$$\text{Mà } \vec{a}(6; -4) \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = 6 \\ 9x - 8y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \vec{a} = \frac{4}{3}\vec{b} + 2\vec{c}.$$

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho $AM = x$ ($0 \leq x \leq 1$), $DN = y$ ($0 \leq y \leq 1$). Tìm mối liên hệ giữa x, y sao cho $CM \perp BN$?

(A) $x - y\sqrt{2} = 0$.

(B) $x - y = 0$.

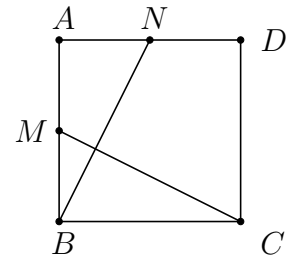
Ⓒ $x + y = 1.$

Ⓓ $x - y\sqrt{3} = 0.$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = (1 - y)\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và
 $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x - 1)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
 Do đó ta có

$$\begin{aligned} CM \perp BN &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ &\Leftrightarrow [(1 - y)\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}] [(x - 1)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}] = 0 \\ &\Leftrightarrow y - 1 + 1 - x = 0 \end{aligned}$$



Ví dụ 5

Biểu diễn véc-tơ $\vec{c}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (2; -3)$, $\vec{c} = (-1; 3)$.

Lời giải

Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$. Vậy $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$.

Dạng 4.5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song



Ví dụ 1

Tìm giá trị của m để hai véc-tơ $\vec{u} = (5; 0)$ và $\vec{v} = (1; m)$ cùng phương.

Ⓐ $m = 0.$

Ⓑ $m = \frac{1}{3}.$

Ⓒ $m = 1.$

Ⓓ $m = 5.$

Lời giải

Ta có $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$ nên $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 5 = k \cdot 1 \\ 0 = k \cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$

Ví dụ 2

Câu 9 Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ và $C(m + 4; 2m + 1)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng?

Ⓐ $m = -1.$

Ⓑ $m = 1.$

Ⓒ $m = -2.$

Ⓓ $m = 0.$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (m + 3; 2m)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{m + 3}{2} = \frac{2m}{1} \Leftrightarrow m + 3 = 2m \Leftrightarrow m = 3.$

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(3; 1)$; $B(1; -3)$; $C(-2; -1)$. Khi đó

- (A) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- (B) Điểm C là trung điểm của AB .
- (C) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ ngược hướng.
- (D) A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -4)$; $\overrightarrow{AC} = (-5; -2)$, ta thấy không tồn tại k sao cho $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

Ví dụ 4

Câu 38 Cho $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ đối nhau.
- (B) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- (C) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
- (D) A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.
 Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và điểm $B(-2; 1)$, đường thẳng d cắt trục Ox tại điểm K . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- (A) $K(-5; 0)$ và hai điểm A, B nằm khác phía đối với K .
- (B) $K(-5; 0)$ và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với K .
- (C) $K(-4; 0)$ và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với K .
- (D) $K(5; 0)$ và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với K .

Lời giải

Gọi $K(x; 0) \in Ox$
 $\overrightarrow{KA} = (1 - x; 2)$; $\overrightarrow{KB} = (-2 - x; 1)$
 Ba điểm K, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k: \overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = k(-2 - x) \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ k = 2. \end{cases}$
 Suy ra $K(-5; 0)$ và $k = 2 > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía đối với K .

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(2; 5)$, $B(1; 2)$, $C(4; -7)$.

- (a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- (b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\vec{i}$.
- (c) Tìm điểm N trên trục hoành sao cho A, B, N thẳng hàng.

Lời giải

- a** Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -12)$. Do $\frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{-12}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

- b** Ta có

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_A = 2(x_B - x_A) - 3(x_C - x_B) + 5 \\ y_M - y_A = 2(y_B - y_A) - 3(y_C - y_B) + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 26 \end{cases} \Leftrightarrow M(-4; 26)$$

- c** Gọi $N(x_N; 0)$, ta có $\overrightarrow{AN} = (x_N - 2; -5)$. Để A, B, N thẳng hàng thì

$$\frac{x_N - 2}{-1} = \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x_N = \frac{1}{3}.$$

Vậy nên tọa độ điểm N thỏa bài toán là $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(2; 0)$.

- a** Tính diện tích tam giác ABC .
- b** Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục hoành Ox sao cho góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất.

Lời giải

- a** Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; -3)$.
Nhận thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 10$ nên tam giác ABC vuông tại A .
Suy ra diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 2$.
- b** Gọi $M(x_M; 0)$ thuộc Ox , ta có $\overrightarrow{MA} = (1 - x_M; 1)$, $\overrightarrow{MB} = (3 - x_M; 3)$.
Góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất khi $\widehat{AMB} = 0^\circ$, xảy ra khi $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng
$$\Leftrightarrow \frac{1 - x_M}{3 - x_M} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_M = 0 \Leftrightarrow M(0; 0).$$

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-3; 4)$, $B(1; 1)$, $C(9; -5)$.

- a** Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- b** Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD .
- c** Tìm tọa độ điểm E trên trục hoành Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

- a** Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (12; -9)$.
Do $\frac{4}{12} = \frac{-3}{-9}$ nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. Vậy A, B, C thẳng hàng.
- b** A là trung điểm của BD nên

$$\begin{cases} x_B + x_D = 2x_A \\ y_B + y_D = 2y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_A - x_B = -7 \\ y_D = 2y_A - y_B = 7 \end{cases} \Rightarrow D(-7; 7).$$

- c) Gọi $E(x_E; 0)$, ta có $\overrightarrow{AE} = (x_E + 3; -4)$. Để A, B, E thẳng hàng thì

$$\frac{x_E + 3}{4} = \frac{-4}{-3} \Leftrightarrow x_E + 3 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x_E = \frac{7}{3}.$$

Vậy nên tọa độ điểm E thỏa bài toán là $\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

Ví dụ 9

Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(-2; 1)$, $C(m + 1; 2m + 3)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (m; 2m + 2)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ khi và chỉ khi

$$(-3) \times (2m + 2) - 0 \times m = 0 \Leftrightarrow 3(2m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Ví dụ 10

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ba điểm $A(0; 2)$, $B(4; 2)$, $C(3; 5)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tính cosin và sin của góc BAC .
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm N thuộc trục hoành sao cho $|NB - NC|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

- a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 3)$, vì $\frac{4}{3} \neq \frac{0}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C lập thành một tam giác.

- b) Ta có $AB = \sqrt{16} = 4$, $AC = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 3) \Rightarrow BC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{16 + 18 - 10}{2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BAC} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Hoặc dùng tích vô hướng } \cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- c) Gọi $H(a; b)$ là trực tâm tam giác ABC , ta có $\overrightarrow{AH} = (a; b - 2)$, $\overrightarrow{BH} = (a - 4; b - 2)$. H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3(b - 2) = 0 \\ 3(a - 4) + 3(b - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 12 = 0 \\ 3b - 6 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow H(3; 3).$$

- d) Điểm M thuộc trục tung nên $M(0; m)$. Khi đó $\overrightarrow{MA} = (0; 2 - m)$, $\overrightarrow{MB} = (4; 2 - m)$, $\overrightarrow{MC} = (3; 5 - m)$.
Suy ra $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (17; 21 - 6m)$.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| &= \sqrt{17^2 + (21 - 6m)^2} \\ &= \sqrt{36m^2 - 252m + 730} \\ &= \sqrt{36\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + 289} \\ &\geq \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$

$$\min |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = 17 \Leftrightarrow m - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(0; \frac{7}{2}\right).$$

- e) Điểm N thuộc trục hoành nên $N(n; 0)$. Ta có $\overrightarrow{NB} = (4 - n; 2)$, $\overrightarrow{NC} = (3 - n; 5)$.
Do B, C nằm cùng phía đối với trục hoành và $|NB - NC| \leq BC$ nên $\max |NB - NC| = BC = \sqrt{10}$ khi và chỉ khi N, B, C thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NB} = k\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - n = k(3 - n) \\ 2 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ n = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{14}{3}; 0\right).$$

4.3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

4.3.1. Nhận biết

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 2)$, $B(-2; -3)$. Khi đó $|\overrightarrow{AB}|$ bằng

(A) 5.

(B) $5\sqrt{2}$.

(C) 10.

(D) $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-5; -5)$, do đó $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 2. Cho ba điểm $A(1; -3)$, $B(4; 5)$, $C(2; -3)$. Xét các mệnh đề sau:

1. $\overrightarrow{AB} = (3; 8)$.

2. A' là trung điểm của BC thì $A'(6; 2)$.

3. Tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Hỏi mệnh đề nào đúng?

(A) Chỉ 1 và 3.

(B) Chỉ 1 và 2.

(C) Cả 1, 2 và 3.

(D) Chỉ 2 và 3.

Hướng dẫn: Ta có

☆ Tọa độ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = (3; 8)$.

☆ Tọa độ trung điểm A' của BC là $A'(3; 1)$.

☆ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Vậy chỉ mệnh đề 1 và 3 đúng

Chọn đáp án (A)

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(3; -5)$, $B(1; 7)$. Trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- (A) $I(2; -1)$. (B) $I(-2; 12)$. (C) $I(4; 2)$. (D) $I(2; 1)$.

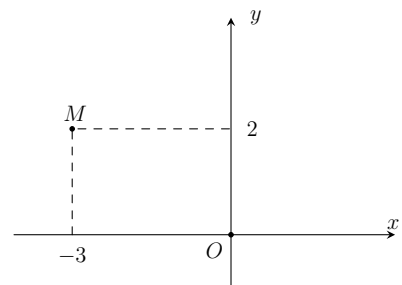
Hướng dẫn: Ta có
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 4.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$. (B) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
(C) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$. (D) $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.



Hướng dẫn: Từ đồ thị ta có $M(-3; 2) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 5. Câu 10 Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(2; 3)$, $B(4; 1)$, $C(3; -5)$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

- (A) $\left(3; -\frac{1}{3}\right)$. (B) $(9; -1)$. (C) $(-1; 9)$. (D) $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$.

Hướng dẫn: Ta có tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{2+4+3}{3}; \frac{3+1-5}{3}\right) = \left(3; -\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Khi đó tọa độ véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$ là

- (A) $(2; -1)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(1; -5)$. (D) $(2; -3)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2; -3)$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = (1; 2)$ suy ra $\vec{a} - \vec{b} = (1; -5)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 7. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
(C) A, B, C thẳng hàng. (D) $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn:

- ☆ Vì $\overrightarrow{BA} = (-2; -2)$ và $\overrightarrow{CA} = (1; 1)$ suy ra $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = (0; 0) = \vec{0}$ nên A đúng.
- ☆ Vì $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; -1)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên B sai.
- ☆ $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; -1)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- ☆ Vì $\overrightarrow{BA} = (-2; -2)$ và $\overrightarrow{BC} = (-3; -3)$ suy ra $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên D đúng.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 8. Câu 5 Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$?

- (A) $\vec{a} = (-2; 3)$. (B) $\vec{a} = (2; 3)$.
(C) $\vec{a} = (2; -3)$. (D) $\vec{a} = (3; 2)$.

Hướng dẫn: Véc-tơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; 3)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$ là

- (A) $(-6; 9)$. (B) $(4; -5)$. (C) $(6; 9)$. (D) $(-5; -14)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1 + 5; 2 + (-7)) = (4; -5)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 10. Cho $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (3; 4)$. Véc-tơ $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ có tọa độ là

- (A) $\vec{m} = (10; 12)$. (B) $\vec{m} = (11; 16)$.
(C) $\vec{m} = (12; 15)$. (D) $\vec{m} = (13; 14)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (11; 16)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 11. Cho véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{i}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

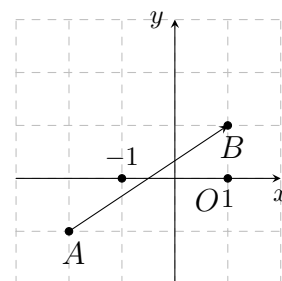
- (A) $\vec{u} = (2; 0)$. (B) $\vec{u} = (-2; 0)$.
(C) $\vec{u} = (0; 2)$. (D) $\vec{u} = (0; -2)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{u} = 2\vec{i} + 0\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (2; 0)$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 12.

Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ như hình vẽ. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là



- (A) $(3; 2)$. (B) $(-2; 3)$. (C) $(-3; -2)$. (D) $(-1; 0)$.

Hướng dẫn: Ta có $A(-2; -1)$, $B(1; 1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- (A) $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$. (B) $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{2}\right)$.
(C) $G\left(\frac{x_A - x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$. (D) $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Hướng dẫn: Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 14. Cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$ thì giá trị x là

- (A) $x = 3$. (B) $x = -3$. (C) $x = 2$. (D) $x = -2$.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8; 6)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{8}{3}; 2\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Vậy $x = 3$.

Chọn đáp án (A)

4.3.2. Thông hiểu

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2; 3)$, $B(0; 4)$, $C(5; -4)$. Tọa độ đỉnh D là:

- (A) $(3; -5)$. (B) $(3; 7)$. (C) $(3; \sqrt{2})$. (D) $(\sqrt{7}; 2)$.

Hướng dẫn: Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = 2 \\ -4 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (3; -5)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(-1; 3)$, $N(2; 2)$, $P(1; 0)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB , AC , BC . Tọa độ đỉnh C là

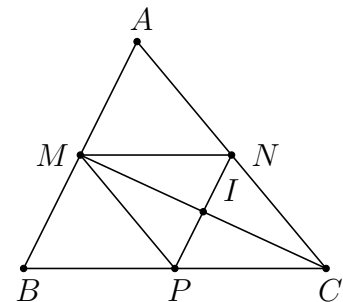
- (A) $(2; 1)$. (B) $(0; 5)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(4; -1)$.

Hướng dẫn:

Ta có $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ là trung điểm của NP .

Nhận thấy $MNCP$ là hình bình hành nên $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ cũng là trung điểm của MC . Gọi $C(x; y)$,

ta có: $\begin{cases} x - 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \\ y + 3 = 2 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$.



Chọn đáp án (D)

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $M(2; -3)$, $N(-1; 2)$, $P(3; -2)$. Gọi Q là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QN} - 4\overrightarrow{MQ} = \vec{0}$. Tìm tọa độ điểm Q .

- Ⓐ $Q\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$. Ⓑ $Q\left(\frac{5}{3}; -2\right)$. Ⓒ $Q\left(\frac{3}{5}; 2\right)$. Ⓓ $Q\left(\frac{3}{5}; -2\right)$.

Hướng dẫn: Gọi $Q(x; y)$ ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (3-x; -2-y) \\ \overrightarrow{QN} = (-1-x; 2-y) \\ -4\overrightarrow{MQ} = (-4x+8; -4y-12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-x) + (-1-x) + (-4x+8) = 0 \\ (-2-y) + (2-y) + (-4y-12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 18. Trong mặt phẳng (Oxy) cho $\vec{a} = (4; -7)$, $\vec{b} = (-1; 3)$. Tọa độ của $2\vec{a} - \vec{b}$ là

- Ⓐ $(7; -17)$. Ⓑ $(9; -17)$. Ⓒ $(9; -11)$. Ⓓ $(7; -11)$.

Hướng dẫn: Ta có: $2\vec{a} - \vec{b} = (8; -14) - (-1; 3) = (9; -17)$.

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 19. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Tìm x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- Ⓐ $x = -\frac{1}{2}$. Ⓑ $x = \frac{1}{4}$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = -1$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{u} = (2; -1)$ và $\vec{v} = (1; x)$.

Do $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\frac{1}{2} = \frac{x}{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{b}(-3; 4)$ và $\vec{a} = -\vec{j} + 2\vec{i}$. Tọa độ của $\vec{a} + 2\vec{b}$ là

- Ⓐ $(-4; 7)$. Ⓑ $(-4; -7)$. Ⓒ $(-7; 10)$. Ⓓ $(-4; 6)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} = -\vec{j} + 2\vec{i}$ suy ra $\vec{a} = (2; -1)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{a} + 2\vec{b}$ là $(2 - 6; -1 + 8) = (-4; 7)$.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 21. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là

- Ⓐ $\vec{u} = (7; -7)$. Ⓑ $\vec{u} = (9; -11)$.
Ⓒ $\vec{u} = (9; -5)$. Ⓓ $\vec{u} = (-1; 5)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} = (2; -4)$; $\vec{b} = (-5; 3)$, suy ra $\vec{u} = (9; -11)$.

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 22. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm giá trị của x sao cho hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương.

- Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $-\frac{3}{2}$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn: Do hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương nên

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - 3\vec{b} &= k[\vec{a} + (x-1)\vec{b}] \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} - 3\vec{b} &= k\vec{a} + k(x-1)\vec{b} \\ \Leftrightarrow (k-2)\vec{a} + [k(x-1)+3]\vec{b} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo đầu bài hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k(x-1)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ x-1=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 23. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 5)$, $B(1; -1)$. Tìm tọa độ M sao cho $\vec{MA} = -2\vec{MB}$

- (A)** $M(1; 0)$. **(B)** $M(0; 1)$. **(C)** $M(-1; 0)$. **(D)** $M(0; 1)$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{MA} = -2\vec{MB} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{OM} = -2(\vec{OB} - \vec{OM}) \Rightarrow \vec{OM} = (0; 1) \Rightarrow M(0; 1)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 24. Cho $A(2; 1)$, $B(1; 2)$. Để tứ giác $OABC$ là hình bình hành thì tọa độ điểm C là

- (A)** $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. **(B)** $(-1; -1)$. **(C)** $(1; 1)$. **(D)** $(-1; 1)$.

Hướng dẫn: Gọi tọa độ điểm $C(x_C; y_C)$.

Để tứ giác $OABC$ là hình bình hành thì $\vec{OA} = \vec{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - x_C \\ 1 = 2 - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 1 \end{cases}$. Vậy $C(-1; 1)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 25. Cho hai điểm $M(8; -1)$ và $N(3; 2)$. Nếu P là điểm đối xứng với điểm M qua điểm N thì P có tọa độ là

- (A)** $(-2; 5)$. **(B)** $(13; -3)$. **(C)** $(11; -1)$. **(D)** $\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn: Do P là điểm đối xứng của M qua N suy ra N là trung điểm của MP .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_P = 2x_N - x_M \\ y_P = 2y_N - y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2 \cdot 3 - 8 \\ y_P = 2 \cdot 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = -2 \\ y_P = 5 \end{cases}.$$

Vậy $P(-2; 5)$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(-2; -3)$ và $G(-1; -1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC .

- (A)** $(1; -1)$. **(B)** $(-2; -2)$. **(C)** $(2; -2)$. **(D)** $(-1; 1)$.

Hướng dẫn: Ta có: $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = -2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$, $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$, $P\left(0; \frac{1}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA , AB . Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

(A) $G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

(B) $G(-4; -4)$.

(C) $G\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

(D) $G(4; -4)$.

Hướng dẫn:

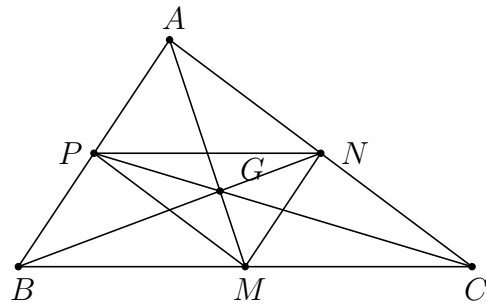
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên G cũng là trọng tâm tam giác MNP .

Tọa độ điểm G là $\begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\frac{4}{3} \\ y_G = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 28. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$.

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Hướng dẫn: Ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

Vậy $m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 29. Cho véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3)$. Nếu $\vec{c} = (m; n)$ cùng phương với $2\vec{a} - 3\vec{b}$ thì $m + n$ là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

Hướng dẫn: Ta có $2\vec{a} - 3\vec{b} = (7; -7) \Rightarrow k(2\vec{a} - 3\vec{b}) = (7k; -7k)$.

Vì $\vec{c}$ cùng phương $2\vec{a} - 3\vec{b}$ nên $\vec{c} = k(2\vec{a} - 3\vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} m = 7k \\ n = -7k \end{cases}$

Do đó $m + n = 7k - 7k = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{u} = (2; -4)$, $\vec{a} = (-1; -2)$, $\vec{b} = (1; -3)$. Biết $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b}$, tính $m - n$.

(A) 5.

(B) -2.

(C) -5.

(D) 2.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + n = 2 \\ -2m - 3n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{2}{5} \\ n = \frac{8}{5} \end{cases}$

Vậy $m - n = -2$.

Chọn đáp án (B)

Câu 31. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -2)$ và $\vec{b} = (1; 4)$. Hãy biểu diễn véc-tơ $\vec{c} = (5; 0)$ theo hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$.

(A) $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.

(B) $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

(C) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

(D) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Hướng dẫn: Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5 = 2m + n \\ 0 = -2m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2; -4), B(-2; 6)$. Điểm H thuộc đường thẳng $(d): y = x - 13$ sao cho các điểm A, B, H thẳng hàng có tọa độ là

(A) $(-4; -9)$.

(B) $(13; 0)$.

(C) $(4; -9)$.

(D) $(9; -4)$.

Hướng dẫn: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 10) \Rightarrow$ đường thẳng AB có một VTPT $\vec{n} = (5; 2) \Rightarrow AB: 5x + 2y - 2 = 0$.

A, B, H thẳng hàng $\Rightarrow H = d \cap AB$

Suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -9 \end{cases}$. Vậy $H(4; -9)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 33. Cho 4 điểm $M(1; -2), N(0; 3), P(-3; 4), Q(-1; 8)$. Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho là thẳng hàng?

(A) M, P, Q .

(B) M, N, P .

(C) N, P, Q .

(D) M, N, Q .

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 5), \overrightarrow{MP} = (-4; 6), \overrightarrow{MQ} = (-2; 10), \overrightarrow{NP} = (-3; 1), \overrightarrow{NQ} = (-1; 5)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ}$ hay M, N, Q thẳng hàng.

Chọn đáp án (D)

Câu 34. Cho 4 điểm $A(1; -2), B(0; 3), C(-3; 4), D(-1; 8)$. Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho là thẳng hàng?

(A) A, B, C .

(B) B, C, D .

(C) A, B, D .

(D) A, C, D .

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 5), \overrightarrow{AD} = (-2; 10) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, D$ thẳng hàng.

Chọn đáp án (C)

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1; 1), B(0; 2), C(3; 1)$ và $D(0; -2)$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- (B) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.
- (C) Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- (D) Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$, $\overrightarrow{DC} = (3; 3)$ suy ra $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$. Do đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{DC}$.

Suy ra $AB \parallel DC \Rightarrow ABCD$ là hình thang.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (4; 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 4 \\ \overrightarrow{BD} = (0; -4) \Rightarrow |\overrightarrow{BD}| = 4 \end{cases} \Rightarrow AC = BD$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn đáp án (C)

Câu 36. Trong hệ trục tọa độ cho bốn điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$, $D(3; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- (B) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- (C) $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCD .
- (D) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 2)$ nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$.

Mà $\overrightarrow{BC} = (2; 4)$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ nên A, B, C không thẳng hàng.

Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (B)

Câu 37. Trên mặt phẳng Oxy , cho $M(-5; 7)$; $N(3; 5)$; $P(3x + 2; 4)$. Tìm x để 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

- (A) $x = -\frac{4}{3}$.
- (B) $x = \frac{4}{3}$.
- (C) $x = -1$.
- (D) $x = \frac{5}{3}$.

Hướng dẫn: Ta có: $\overrightarrow{MN} = (8; -2)$; $\overrightarrow{NP} = (3x - 1; -1)$.

Ba điểm M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 1}{8} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án (D)

4.3.3. Vận dụng thấp

Câu 38. Cho $\triangle ABC$ với $A(-5; 6)$, $B(3; 2)$, $C(0; -4)$. Chân đường phân giác trong góc A có tọa độ

- (A) $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.
- (B) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.
- (C) $(5; -2)$.
- (D) $\left(\frac{5}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn: Ta có

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3 - (-5))^2 + (2 - 6)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (-4 - 6)^2} = 5\sqrt{5}.$$

Gọi $D(x; y)$ là chân đường phân giác trong góc A . Suy ra

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{4}{5} \Rightarrow -5\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -5(x-3) = 4(x-0) \\ -5(y-2) = 4(y+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy $D\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 39. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-3; 3)$, $C(1; 1)$ và $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm D .

- (A)** $D(-1; 7)$. **(B)** $D(2; -4)$. **(C)** $D(-4; 0)$. **(D)** $D(0; 6)$.

Hướng dẫn: Theo bài ta có G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3x_G - x_A - x_C \\ y_B = 3y_G - y_A - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 3 - 1 \\ y_B = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 \\ y_B = -2 \end{cases}.$$

Vậy $B(-2; -2)$.

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 3 = 1 - x_D \\ -2 - 3 = 1 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 6 \end{cases}.$$

Vậy $D(0; 6)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-3; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Giá trị của x để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là

- (A)** $x = 0$. **(B)** $x = -\frac{4}{3}$. **(C)** $x = -\frac{3}{4}$. **(D)** $x \in \emptyset$.

Hướng dẫn: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 4k \\ 0 = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy $x = 0$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Chọn đáp án **(A)**

ĐÁP ÁN BÀI 4

1.B	2.A	3.D	4.C	5.A	6.C	7.B	8.B	9.B	10.B
11.A	12.A	13.D	14.A	15.A	16.D	17.B	18.B	19.A	20.A
21.B	22.C	23.D	24.D	25.A	26.B	27.A	28.A	29.A	30.B
31.D	32.C	33.D	34.C	35.C	36.B	37.D	38.B	39.D	40.A

Chương 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

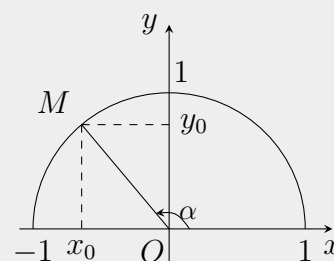
1.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1. Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$

Khi đó ta có định nghĩa:

- (a) sin của góc α là y_0 , kí hiệu $\sin \alpha = y_0$;
- (b) cosin của góc α là x_0 , kí hiệu $\cos \alpha = x_0$;
- (c) tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), kí hiệu $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- (d) cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), kí hiệu $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.



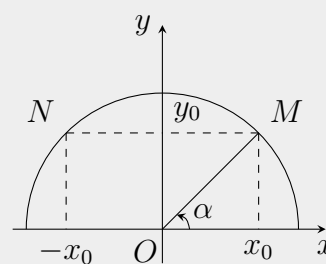
1.1.2. Tính chất:

Tính chất 2.1.1.

Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$.

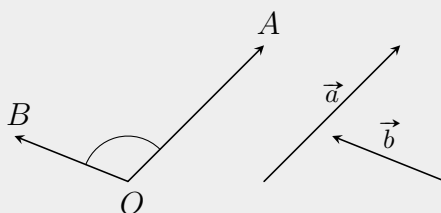
Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

- (a) $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$
- (b) $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
- (c) $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$
- (d) $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$



1.1.3. Góc giữa hai vectơ:

Định nghĩa 2.1.2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.



- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$

1.1.4. Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Chú ý.

Giá trị lượng giác	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

Dạng 1.1. Xét dấu của các giá trị lượng giác

Ví dụ 1

Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\sin \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Vì α là góc tù suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Ví dụ 2

Cho $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\cot \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha < 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Theo khái niệm “Giá trị lượng giác của một cung” thì $\tan \alpha < 0$.

Ví dụ 3

Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\sin \alpha < \sin \beta$. (B) $\cos \alpha < \cos \beta$.
 (C) $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. (D) $\cot \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải

Vì α, β là hai góc nhọn và $\alpha < \beta$ nên

$$\star \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha > 0.$$

$$\star \alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos (90^\circ - \beta) \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \beta.$$

$$\star \sin \alpha < \sin \beta.$$

$$\star \cos \alpha > \cos \beta.$$

Vậy khẳng định sai là $\cos \alpha < \cos \beta$.

Ví dụ 4

Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$; $b = 10$; $c = 20$. Diện tích của tam giác ABC bằng

(A) $50\sqrt{2}$.

(B) 50.

(C) $50\sqrt{3}$.

(D) $50\sqrt{5}$.

Lời giải

FB tác giả: Thubon Bui

Ta có $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = 50\sqrt{3}$.

Ví dụ 5

Tam giác ABC có $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 3$ Tính độ dài cạnh AC .

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\sqrt{6}$.

(C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(D) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Thubon Bui

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{3}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 1.2. Tính các giá trị lượng giác



Ví dụ 1

Giá trị của $\tan 60^\circ$ là

(A) -1.

(B) $-\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) 0.

Lời giải

Ví dụ 2

Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Tính giá trị biểu thức $A = 2 \sin \alpha + \cos \alpha$.

(A) $\sqrt{2}$.

(B) $-\sqrt{2}$.

(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$A = 2 \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \sin 135^\circ + \cos 135^\circ = 2 \sin 45^\circ - \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 3

Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

(A) $\cot \alpha = \cot (180^\circ - \alpha).$

(B) $\tan \alpha = \tan (180^\circ - \alpha).$

(C) $\cos \alpha = \cos (180^\circ - \alpha).$

(D) $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha).$

Lời giải

Ví dụ 4

Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tính $\cos \alpha$

(A) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$

(B) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$

(C) $\cos \alpha = \frac{5}{3}.$

(D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}.$

Lời giải

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \frac{3}{5}.$

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$

Ví dụ 5

Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

(A) 12.

(B) 11.

(C) 13.

(D) 5.

Lời giải

Ta có $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2 = 11.$

Ví dụ 6

Cho góc α là góc tù thỏa $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha$.

(A) $A = \frac{11}{5}.$

(B) $A = 1.$

(C) $A = -\frac{7}{5}.$

(D) $A = \frac{9}{5}.$

Lời giải

Ta có α là góc tù nên $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$.

Khi đó $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$

Suy ra $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{4}{5}$ nên $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{5}.$

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng Oxy , nếu $\vec{a} = (-1; 1)$, $\vec{b} = (2; 0)$ thì cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad |\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + 0^2} = 2.$$

Do đó

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 8

Biết $\cot \alpha = -a$, $a > 0$. Tính $\cos \alpha$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. (B) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
(C) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. (D) $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Lời giải

Ta có $\tan \alpha = -\frac{1}{a}$

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a^2}{1+a^2}$$

Do $\sin \alpha \geq 0$ với mọi $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ nên từ $\cot \alpha = -a$, $a > 0$ ta suy ra $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Vậy } \cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ví dụ 9

Cho $\tan x = -1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x}$.

- (A) -1 . (B) 1 . (C) 2 . (D) -2 .

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{1 + 2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 2}{1 + 2 \tan x} = \frac{-1 + 2}{1 + 2 \cdot (-1)} = -1.$$

Ví dụ 10

Với $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$ ta có

- (A) $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$. (B) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$.

Ⓒ $\tan \alpha = \frac{15}{8}$.

Ⓓ $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$.

Lời giải

Do $0 < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$.

Ta có: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$.

Dạng 1.3. Chứng minh, rút gọn các biểu thức lượng giác



Ví dụ 1

Cho tam giác ABC . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $\sin A = \pm \sqrt{1 + \cos^2 A}$.

Ⓑ $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

Ⓒ $\sin A = -\sqrt{1 - \cos^2 A}$.

Ⓓ $\sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

Lời giải

Do $0 < A < \pi \Rightarrow \sin A > 0$.

Ta có $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$.

Ví dụ 2

Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\cot(90^\circ + \alpha) = \tan \alpha$.

Ⓑ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Ⓒ $\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$.

Ⓓ $\tan(90^\circ + \alpha) = \cot \alpha$.

Lời giải

Khẳng định đúng là $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Ví dụ 3

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

Ⓑ $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

Ⓒ $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$.

Ⓓ $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải

Với hai góc bù nhau ta có $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

Ví dụ 4

Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

(A) $M = -\frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$.
 (C) $M = -\frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

(B) $M = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$.
 (D) $M = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

Lời giải

$$M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}.$$

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai**?

(A) $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$.

(B) $\cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

(C) $\cos \frac{A + B + 2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

(D) $\sin(A + B) = \sin C$.

Lời giải

$$\text{Do } \cos \frac{A + B + 2C}{2} = \cos \left(\frac{A + B + C + C}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \right) = -\sin \frac{C}{2}.$$

Ví dụ 6

Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Giá trị biểu thức $\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha$ bằng

(A) $3m^3 - m$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{4\pi}{3}$.

(D) $m^3 - 3m$.

Lời giải

Ta có $m^3 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 = \cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha + 3 \tan \alpha \cdot \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = \cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha + 3m$.

Vậy $\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha = m^3 - 3m$.

Ví dụ 7

Cho $0^\circ < x < 90^\circ$. Khi đó biểu thức $P = \frac{2}{1 + \tan x} + \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x}$ bằng

(A) $\sin^2 x + \cos^2 x$.

(B) $2 \cos^2 x$.

(C) $2 \sin^2 x$.

(D) $\sin^2 x - \cos^2 x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{1 + \tan x} + \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} = \frac{2}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{1 - \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} \\ &= \frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x. \end{aligned}$$

Dạng 1.4. Xác định góc giữa hai véc-tơ, góc giữa hai đường thẳng



Ví dụ 1

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{a}(2; 1)$ và $\vec{b}(3; -6)$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- (A) 0° . (B) 90° . (C) 180° . (D) 60° .

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 = 0$.

Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 90° .

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (5; 1)$ và $\vec{b} = (2; 3)$. Tìm góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- (A) 135° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 45° .

Lời giải

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

Ví dụ 3

Tìm cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 2x + 3y - 10 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 4 = 0$.

- (A) $\frac{5}{13}$. (B) $\frac{6}{13}$. (C) $\frac{5}{\sqrt{13}}$. (D) $\sqrt{13}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ_1 có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; 3)$, Δ_2 có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; -3)$.

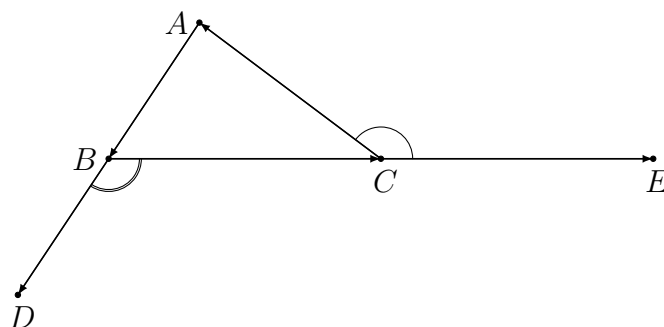
Vậy $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{13}$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

- (A) 120° . (B) 360° . (C) 270° . (D) 240° .

Lời giải



Vẽ các véc-tơ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}) = \widehat{CBD} + \widehat{ACE}$
 $= 180^\circ - \widehat{ABC} + 180^\circ - \widehat{ACB} = 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{A}) = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC vuông ở A và góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

- (A) $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$. (C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. (D) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \sin 90^\circ + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 6

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (-1; -7)$. Tính góc giữa hai véc-tơ đó

- (A) 135° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 60° .

Lời giải

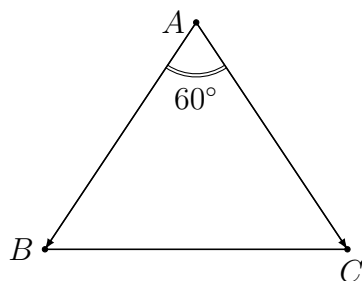
$$\text{Có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Ví dụ 7

Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{3}{2}$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 8

Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

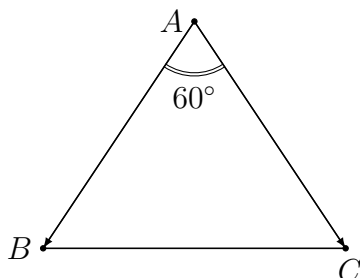
Ⓐ $\frac{3}{2}$.

Ⓑ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓓ $-\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 9

Tính $(\vec{a}, \vec{b})$, biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$).

Ⓐ 135° .

Ⓑ 60° .

Ⓒ 150° .

Ⓓ 120° .

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} &= -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) &= 120^\circ. \end{aligned}$$

Ví dụ 10

Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ là

Ⓐ $\frac{1}{2}$.

Ⓑ $-\frac{1}{2}$.

Ⓒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

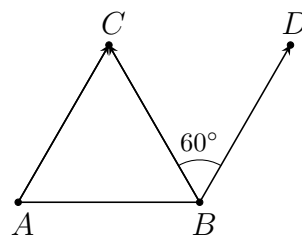
Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Dựng $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{CBD} = 60^\circ$.

Vậy $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



1.2. Bài tập tự luyện

1.2.1. Nhận biết

Câu 1. Cho góc x thỏa mãn $90^\circ < x < 180^\circ$. Đặt $P = \sin x \cos x$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $P = 0$. (B) $P > 0$. (C) $P < 0$. (D) $P > 1$.

Hướng dẫn: Ta có với $90^\circ < x < 180^\circ$ thì $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ nên $P = \sin x \cos x < 0$.

Chọn đáp án (C)

Câu 2. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\sin \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

Hướng dẫn: Vì α là góc tù suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Chọn đáp án (C)

Câu 3. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây

- (A) $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. (B) $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ$.
(C) $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. (D) $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Hướng dẫn: Khi $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ hàm $\cos \alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra “ $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$ ” sai.

Chọn đáp án (D)

Câu 4. Trong các hệ thức sau đây, hệ thức nào là hệ thức đúng?

- (A) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (B) $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.
(C) $\sin 2x + \cos 2x = 1$. (D) $\sin^2 x + \cos x^2 = 1$.

Hướng dẫn: Theo lý thuyết ta có hệ thức đúng là $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Chọn đáp án (A)

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x + 2y = 0$ và $d_2: 2x + y = 0$. Khi đó giá trị $\cos$ góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

- (A) $\frac{4}{5}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. (C) 1. (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn: Đường thẳng d_1 và d_2 có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 2)$; $\vec{n}_2 = (2; 1)$.
Ta có $\cos(d_1; d_2) = |\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 6. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- (A) 45° . (B) 0° . (C) 180° . (D) 90° .

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$, nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= -1 \\ \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

1.2.2. Thông hiểu

Câu 7. Cho $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\sin a > 0, \cos a > 0.$

(B) $\sin a > 0, \cos a < 0.$

(C) $\sin a < 0, \cos a > 0.$

(D) $\sin a < 0, \cos a < 0.$

Hướng dẫn:

Chọn đáp án **A**

Câu 8. Cho góc $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Tìm điều kiện của góc α để các giá trị lượng giác $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ trái dấu.

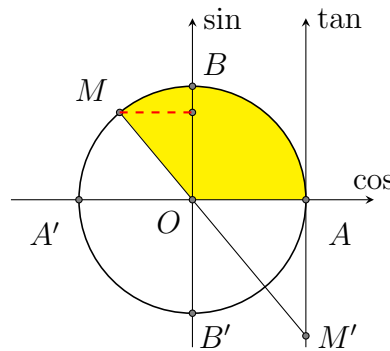
(A) $0^\circ < \alpha < 90^\circ.$

(B) $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$

(C) $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ.$

(D) $90^\circ < \alpha < 180^\circ.$

Hướng dẫn: Vẽ đường tròn lượng giác với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.



Khi đó $\sin \alpha \geq 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Chọn đáp án **D**

Câu 9. Cho $\cos x = \frac{-4}{5}$ và góc x thỏa mãn $90^\circ < x < 180^\circ$. Khi đó

(A) $\cot x = \frac{4}{3}.$

(B) $\sin x = \frac{3}{5}.$

(C) $\tan x = \frac{4}{5}.$

(D) $\sin x = \frac{-3}{5}.$

Hướng dẫn: Có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{3}{5}$.

Vì $90^\circ < x < 180^\circ$ nên $\sin x = \frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 10. Cho biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó giá trị $\cos \alpha$ bằng

(A) $\frac{3}{5}$.

(B) $\frac{1}{5}$.

(C) $-\frac{3}{5}$.

(D) $-\frac{1}{5}$.

Hướng dẫn: Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 11. Biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị $\tan \alpha$ là bao nhiêu?

(A) 2.

(B) -2.

(C) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn: Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 12. Câu 43 Cho tam giác ABC có $\sin A \cdot \cos A < 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Tam giác ABC là tam giác tù.

(B) Góc A là góc lớn nhất.

(C) $BC - AC < 0$.

(D) $\hat{A} > \hat{B} + \hat{C}$.

Hướng dẫn: Ta có $\sin A \cdot \cos A < 0 \Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow 90^\circ < \hat{A} < 180^\circ \Rightarrow \hat{A}$ là góc tù $\Rightarrow \hat{A}$ là góc lớn nhất.

Mà trong tam giác “cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn” nên suy ra $BC - AC > 0$.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho $\tan x = -1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x}$.

(A) -1.

(B) 1.

(C) 2.

(D) -2.

Hướng dẫn: $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{1 + 2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 2}{1 + 2 \tan x} = \frac{-1 + 2}{1 - 2} = -1$.

Chọn đáp án (A)

Câu 14. Cho α là góc thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}$.

(A) $P = \frac{1}{2}$.

(B) $P = 0$.

(C) $P = \frac{1}{4}$.

(D) $P = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn: Ta có $\cos \alpha \neq 0$ nên suy ra $P = \frac{2 \tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 2} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 15. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, với $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Tính giá trị của $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$.

(A) $M = -\frac{25}{27}$.

(B) $M = \frac{35}{27}$.

(C) $M = \frac{25}{27}$.

(D) $M = \frac{175}{27}$.

Hướng dẫn: Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Vì $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, nên $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Thay vào biểu thức ta có $M = -\frac{25}{27}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$. Tính $\cos \alpha$.

(A) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

(B) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

(C) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

(D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn: Ta có $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 17. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị của $\cot \alpha$ bằng bao nhiêu?

(A) $-\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(B) $-\sqrt{15}$.

(C) $\sqrt{15}$.

(D) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Hướng dẫn: Ta có $\cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - 1 = 15$.

Do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cot \alpha = -\sqrt{15}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 18. Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

(A) $\cos 2\alpha$.

(B) $\cot 2\alpha$.

(C) $\tan 2\alpha$.

(D) $\sin 2\alpha$.

Hướng dẫn: Có

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \frac{2 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \tan 2\alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 19. Các cặp đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

(A) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

(B) $\sin \alpha = \sqrt{3}$ và $\cos \alpha = 0$.

(C) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\sin \alpha = 1$ và $\cos \alpha = 1$.

Hướng dẫn:

★ Với $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, ta có

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \neq 1$, nên cặp đẳng thức $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ không đồng thời xảy ra.

★ Với $\sin \alpha = \sqrt{3}$ và $\cos \alpha = 0$, ta có

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sqrt{3})^2 + (0)^2 = 3 \neq 1$, nên cặp đẳng thức $\sin \alpha = \sqrt{3}$ và $\cos \alpha = 0$ không đồng thời xảy ra.

★ Với $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, nên cặp đẳng thức $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ đồng thời xảy ra.

★ Với $\sin \alpha = 1$ và $\cos \alpha = 1$, ta có

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (1)^2 + (1)^2 = 2 \neq 1$, nên cặp đẳng thức $\sin \alpha = 1$ và $\cos \alpha = 1$ không đồng thời xảy ra.

Chọn đáp án (C)

Câu 20. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\cot \alpha = \cot \beta$.

(B) $\sin \alpha = \sin \beta$.

(C) $\tan \alpha = -\tan \beta$.

(D) $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Hướng dẫn: Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau thì $\cot \alpha = -\cot \beta$.

Chọn đáp án (A)

Câu 21. Giá trị của biểu thức $3 \sin^2 35^\circ + 3 \sin^2 55^\circ - 2 \cos^2 65^\circ - 2 \sin^2 115^\circ + 5 \tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ$ là

(A) 2.

(B) 6.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} & 3 \sin^2 35^\circ + 3 \sin^2 55^\circ - 2 \cos^2 65^\circ - 2 \sin^2 115^\circ + 5 \tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ \\ &= 3 \sin^2 35^\circ + 3 \cos^2 35^\circ - 2 \cos^2 65^\circ - 2 \sin^2 65^\circ + 5 \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \\ &= 3 (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) - 2 (\cos^2 65^\circ + \sin^2 65^\circ) + 5 \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \\ &= 3 - 2 + 5 = 6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$, biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

(A) 135° .

(B) 60° .

(C) 150° .

(D) 120° .

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Chọn đáp án (D)

Câu 23. Cho góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° . Hỏi góc giữa hai vec-tơ $2\vec{a}$ và $-3\vec{b}$ bằng

(A) 120° .

(B) 60° .

(C) 90° .

(D) 30° .

Hướng dẫn: $(2\vec{a}, -3\vec{b}) = (\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 24. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

(A) $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(B) $P = \frac{3}{2}$.

(C) $P = -\frac{3}{2}$.

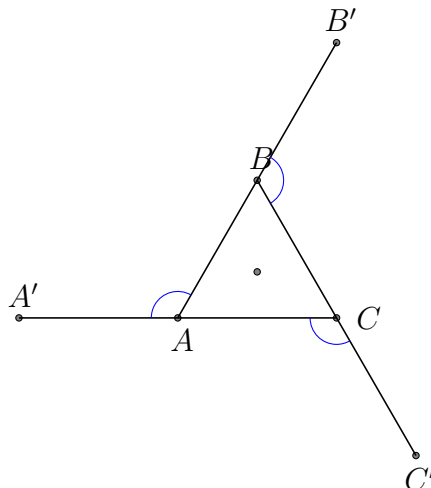
(D) $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn:

Dựa vào hình vẽ bên, ta có:

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{B'BC} = 120^\circ$.
- $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CA}) = \widehat{C'CA} = 120^\circ$.
- $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{A'AB} = 120^\circ$.

Suy ra $P = 3 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 25. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

(A) 120° .

(B) 60° .

(C) 45° .

(D) 135° .

Hướng dẫn: Ta có góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60° suy ra góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 120° .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông ở A . Tìm tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

(A) 180° .

(B) 360° .

(C) 270° .

(D) 240° .

Hướng dẫn: Vì tam giác ABC vuông ở A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C}$
 $= 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

Chọn đáp án **(C)**

1.2.3. Vận dụng thấp

Câu 27. Cho tam giác ABC có ba cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \sin A$.

(B) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$.

(C) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A$.

(D) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Hướng dẫn: FB tác giả: Thubon Bui

Áp dụng định lý cô-sin vào tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 28. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$.

(A) $B = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 + 8\sqrt{2}}$.

(B) $B = \frac{3\sqrt{2} - 1}{8\sqrt{2} + 3}$.

(C) $B = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 1}$.

(D) $B = \frac{3\sqrt{2} + 1}{8\sqrt{2} - 1}$.

Hướng dẫn:
$$B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$
$$= \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}$$
$$= \frac{(1 + \tan^2 \alpha)(\tan \alpha - 1)}{3 \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha + 3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 29. Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ là

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

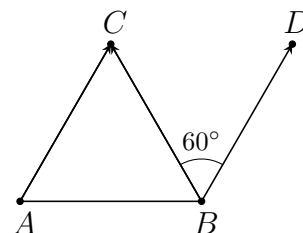
(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn:

Dựng $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{CBD} = 60^\circ$.

Vậy $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 30. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$. Khi đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

(A) 90° .

(B) 60° .

(C) 45° .

(D) 30° .

Hướng dẫn: Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° .

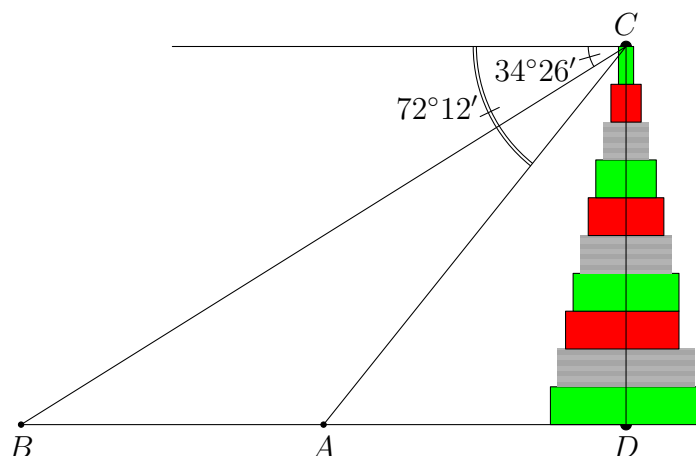
Chọn đáp án **(C)**

1.2.4. Toán thực tế

Câu 31.

Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80m$, người ta nhìn hai điểm A, B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương ngang. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB .

- (A) 71 m. (B) 91 m. (C) 79 m. (D) 40 m.



Hướng dẫn: Theo đề ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ - 72^\circ 12' = 17^\circ 48'$, $\widehat{BCD} = 90^\circ - 34^\circ 26' = 55^\circ 34'$.
Ta có

$$AB = BD - AD = CD \cdot \tan \widehat{BCD} - CD \cdot \tan \widehat{ACD} = CD (\tan \widehat{BCD} - \tan \widehat{ACD}) \approx 91 \text{ m.}$$

Chọn đáp án (B)

ĐÁP ÁN BÀI 1

1.C

2.C

3.D

4.A

5.A

6.C

7.A

8.D

9.B

10.C

11.C

12.C

13.A

14.D

15.A

16.C

17.B

18.C

19.C

20.A

21.B

22.D

23.A

24.C

25.A

26.C

27.D

28.A

29.D

30.C

31.B

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

2.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

2.1.1. Định nghĩa tích vô hướng hai véc - tơ

Định nghĩa 2.2.1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véc-tơ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$. Ta có:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

2.1.2. Các tính chất của tích vô hướng:

Tính chất 2.2.1. Với ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- (b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- (c) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- (d) $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Hệ quả 2.2.1. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai véc-tơ ta suy ra

- (a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- (b) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- (c) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

2.1.3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

Định nghĩa 2.2.2. Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Chú ý. Hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

2.1.4. Ứng dụng:

Định nghĩa 2.2.3.

a) Độ dài của véc-tơ

Độ dài của véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

b) Góc giữa hai véc-tơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai véc-tơ ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 2.1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc



Ví dụ 1

Cho tam giác ABC đều cạnh 1. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) $-\frac{1}{6}$.

(D) $-\frac{3}{8}$.

Lời giải

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(3; -3)$, $C(6; 0)$. Diện tích tam giác ABC là

(A) 6.

(B) $6\sqrt{2}$.

(C) 12.

(D) 9.

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (2; -2)$, $\vec{BC} = (3; 3)$. Do $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ nên $\triangle ABC$ vuông tại B .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6.$$

Ví dụ 3

Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 2. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -2$.

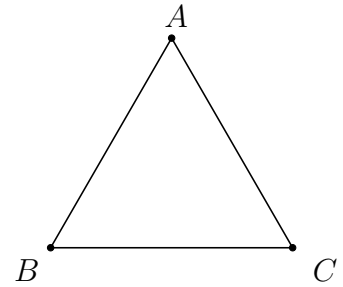
(B) $(\vec{BC} - \vec{AC}) \cdot \vec{BA} = 4$.

(C) $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AC} = -4$.

(D) $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = 2\vec{BC}$.

Lời giải

- ★ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2.$
- ★ $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = BA^2 = 4.$
- ★ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = 4.$
- ★ $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}.$



Ví dụ 4

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-2; 1)$. Tính giá trị của $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1.$
 (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{4}{5}.$
 (C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{5}.$
 (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$

Lời giải

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0.$

Ví dụ 5

Cho tam giác vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và AM là đường trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM}$ có giá trị bằng

- (A) $\frac{a^2}{2}.$
 (B) $a^2.$
 (C) $-a^2.$
 (D) $-\frac{a^2}{2}.$

Lời giải

Dựng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM}.$

Tam giác vuông tại A có AM là trung tuyến $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = BM = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (\sqrt{3}a)^2} = a.$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cos(\widehat{BMA}) = |\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cos(\widehat{MCN}).$$

$$\triangle BAM \text{ có } AB = AM = MC = a \Rightarrow \triangle ABM \text{ đều} \Rightarrow \widehat{NMC} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cos(\widehat{MCN}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Ví dụ 6

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$

- (A) $a^2.$
 (B) $\frac{a^2}{2}.$
 (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$
 (D) $-\frac{a^2}{2}.$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ta được

- (A) 8. (B) -8. (C) -6. (D) 6.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8$.

Ví dụ 8

Cho các véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = x, |\vec{b}| = y, |\vec{c}| = z$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

- (A) $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. (B) $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$.
(C) $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. (D) $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c} \\ &\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (-2\vec{c})^2 \\ &\Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 4\vec{c}^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 3z^2 \\ &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 9

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết rằng $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

- (A) $\alpha = 90^\circ$. (B) $\alpha = 0^\circ$. (C) $\alpha = 45^\circ$. (D) $\alpha = 180^\circ$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}) &= -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) &= -1 \\ \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}) &= 180^\circ.\end{aligned}$$

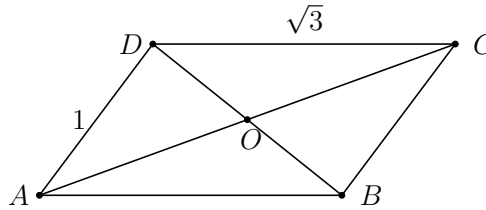
Ví dụ 10

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$ và $\widehat{BAD} = 30^\circ$.

- (a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- b** Tính độ dài hai đường chéo AC và BD .
c Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

Lời giải



- a** Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\star \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\star \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 150^\circ = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

- b** Tính độ dài hai đường chéo AC và BD .

Theo định lý Cô-sin, ta có

$$\star AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ = 7.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

$$\star BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 1.$$

$$\Rightarrow BD = 1.$$

- c** Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{OC^2 + OD^2 - DC^2}{2 \cdot OC \cdot OD} = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Dạng 2.2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài



Ví dụ 1

Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1; 1)$, $N(4; -1)$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

A $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{13}.$

B $|\overrightarrow{MN}| = 5.$

C $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{29}.$

D $|\overrightarrow{MN}| = 3.$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = (3; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{13}.$

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

(A) $P = 4 + 4\sqrt{2}$.

(B) $P = 8 + 8\sqrt{2}$.

(C) $P = 2 + 2\sqrt{2}$.

(D) $P = 4 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}.$$

$$\overrightarrow{AC} = (4; 0) \Rightarrow AC = 4.$$

$$\overrightarrow{BC} = (2; 2) \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy chu vi tam giác là } P = AB + AC + BC = 4 + 4\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3

Đoạn thẳng AB có độ dài $2a$, I là trung điểm AB . Khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3a^2$. Độ dài MI là

(A) $2a$.

(B) a .

(C) $a\sqrt{3}$.

(D) $a\sqrt{7}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2 \Rightarrow MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + IA^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow MI = 2a.$$

Ví dụ 4

Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

(A) $\sqrt{21}$.

(B) $\sqrt{61}$.

(C) 21.

(D) 61.

Lời giải

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 21.$$

$$\text{Do đó } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{21}.$$

Ví dụ 5

Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tổng hai véc-tơ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

(A) 2.

(B) 4.

(C) 8.

(D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải

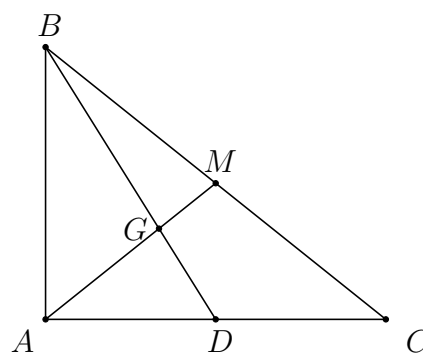
Gọi M là trung điểm của BC . M cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC tại A .

Ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.

Mà G là trọng tâm tam giác vuông ABC nên $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Do đó $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 2|\overrightarrow{GM}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AM}| = \frac{2}{3}AM$
 $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 4$.



Ví dụ 6

Cho $\triangle ABC$ và hai điểm M, M' bất kì. Gọi I và I', H và H', K và K' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M và M' lên BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KK'} = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM'} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{0} = 0$.

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(0; 4), B(3; 2), D(3; 0)$.

- Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6 - 3t; 8 + 2t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Chứng minh rằng A, B, D không thẳng hàng. Từ đó tính chu vi của tam giác ABD .

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-6 - 3t; 4 + 2t)$, do $\frac{-6 - 3t}{3} = \frac{4 + 2t}{-2} = -t - 2$ nên $\overrightarrow{AB}$ luôn cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
Suy ra A, B, C luôn thẳng hàng với mọi $t \in \mathbb{R}$.
- Ta có $\overrightarrow{AD} = (3; -4)$ và $\overrightarrow{BD} = (0; -2)$, do $\frac{3}{0} \neq \frac{-4}{-2}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AD}$ nên A, B, D không thẳng hàng.
Chu vi tam giác ABD là $P = AB + BD + DA = \sqrt{13} + 2 + \sqrt{25} = 7 + \sqrt{13}$.

Ví dụ 8

Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H , M là trung điểm của BC . Chứng minh $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

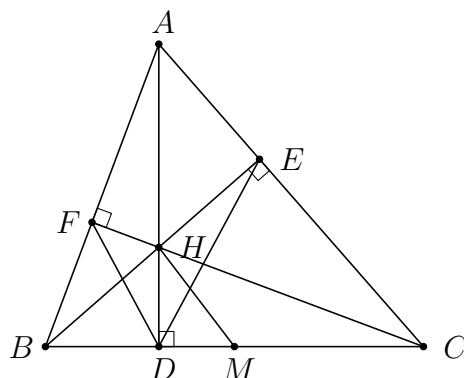
Lời giải

Tứ giác $AFDC$ có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và F, D là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác nên $AFDC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $BD \cdot BC = BF \cdot BA$.

Tứ giác $AEDB$ có $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ và D, E là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác nên $AEDB$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $CE \cdot CA = CD \cdot CB$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4} (BF \cdot BA + CE \cdot CA) \\ &= \frac{1}{4} (BD \cdot BC + CD \cdot CB) = \frac{1}{4} BC^2.\end{aligned}$$



Ví dụ 9

Cho $\triangle ABC$ có

- a** $AB = 2, AC = 3, \hat{A} = 60^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh BC .
- b** $AB = 3, BC = 4, \hat{B} = 45^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh AC .
- c** $AC = 5, BC = 6, \hat{C} = 120^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh AB .

Ví dụ 10

Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O , M là một điểm bất kì.

- a** Chứng minh rằng: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2)$.
- b** Giả sử M di động, tìm các vị trí của M để $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Dạng 2.3. Điều kiện vuông góc



Ví dụ 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , hai véc-tơ $\vec{u} = (a_1; a_2), \vec{v} = (b_1; b_2)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

- A** $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.
- B** $a_1b_1 - a_2b_2 = 0$.
- C** $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$.
- D** $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Lời giải

Công thức tích vô hướng.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MNP vuông tại M . Biết điểm $M(2; 1)$, $N(3; -2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy . Tính diện tích tam giác MNP .

- (A) $\frac{10}{3}$. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{16}{3}$. (D) $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Do $P \in Oy \Rightarrow P(0; y)$.

Ta có $\overrightarrow{MP} = (-2; y - 1)$, $\overrightarrow{MN} = (1; -3)$.

Nên $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow -2 - 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$.

Mà $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-2; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow MP = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ và $MN = \sqrt{10}$.

Vậy $S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{10}{3}$.

Ví dụ 3

Cho $\vec{a} = (1; -2)$. Với giá trị nào của y thì $\vec{b} = (-3; y)$ vuông góc với $\vec{a}$?

- (A) -6 . (B) 6 . (C) $-\frac{3}{2}$. (D) 3 .

Lời giải

Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot y = 0 \Leftrightarrow -3 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- (A) $k = 40$. (B) $k = -40$. (C) $k = 20$. (D) $k = -20$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v}(k; -4)$. Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5) \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Ví dụ 5

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- (A) 120° . (B) 60° . (C) 90° . (D) 30° .

Lời giải

Vì hai véc-tơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ vuông góc nhau nên $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. Do đó

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0.$$

Mà $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 4$. Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° .

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2; 4)$, $B(8; 4)$. Có mấy điểm C trên Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C ?

- (A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

Lời giải

Vì C thuộc Ox nên $C(x; 0)$.

Có $\overrightarrow{AC} = (x + 2; -4)$; $\overrightarrow{BC} = (x - 8; -4)$.

Vì tam giác ABC vuông tại C nên

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x - 8) + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6. \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm C thỏa mãn.

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Lấy các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BC = 3MC$, $AC = 3AN$, $AP = x$, $x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

- (A) $x = \frac{5a}{12}$. (B) $x = \frac{a}{2}$. (C) $x = \frac{4a}{5}$. (D) $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có

$$\frac{AP}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{x}{a} \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{và } \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} &= \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right) \left(\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{x}{3a} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{9} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{2x}{3a} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{x}{3a} AB^2 - \frac{1}{9} AB \cdot AC \cdot \cos A + \frac{2x}{3a} AB \cdot AC \cdot \cos A - \frac{2}{9} AC^2 \\ &= \frac{x}{3a} a^2 - \frac{1}{9} a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + \frac{2x}{3a} a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - \frac{2}{9} a^2 \\ &= \frac{2ax}{3} - \frac{5a^2}{18}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } AM \perp NP \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow \frac{2ax}{3} - \frac{5a^2}{18} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- (A) $C(6; 0)$. (B) $C(0; 6)$. (C) $C(-6; 0)$. (D) $C(0; -6)$.

Lời giải

Gọi điểm C trên trục Oy có tọa độ là $(0; a)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; a - 2)$. Tam giác ABC vuông tại A , khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 6$. Tọa độ điểm C là $C(0; 6)$.

Ví dụ 9

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 4)$, $B(-3; 2)$ và véc-tơ $\vec{v} = (2m + 1; 3 - 4m)$.

- ① Tìm tất cả các giá trị của m để $\vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
- ② Tìm tất cả các giá trị của m để $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 10

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2 + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})^2 \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= BC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Dạng 2.4. Các bài toán tìm điểm và tập hợp điểm



Ví dụ 1

Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $A(1; 1)$, $B(-1; 3)$ và $H(0; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC .

- Ⓐ $C(-1; 0)$. Ⓑ $C(1; 0)$. Ⓒ $C(0; 1)$. Ⓓ $C(0; -1)$.

Lời giải

Giả sử $C(x; y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (-1; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (x + 1; y - 3)$, $\overrightarrow{BH} = (1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (x - 1; y - 1)$.

H là trực tâm của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1(x + 1) + 0(y - 3) = 0 \\ 1(x - 1) + (-2)(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy $C(-1; 0)$.

Ví dụ 2

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Các điểm A, B, C thỏa $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị của m thỏa

- (A) $m \in (2; 3)$. (B) $m \in (1; 2)$.
(C) $m \in (-1; 0)$. (D) $m \in (0; 1)$.

Lời giải

$$\text{YBCT} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Vậy $m \in (0; 1)$.

Ví dụ 3

Xét đẳng thức $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

- (A) Đẳng thức trên chỉ xảy ra khi H là trực tâm tam giác ABC .
(B) Với bốn điểm A, B, C, H bất kỳ ta luôn có đẳng thức trên.
(C) Đẳng thức trên chỉ xảy ra khi có ít nhất hai điểm trùng nhau.
(D) Đẳng thức trên không bao giờ xảy ra.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra, đẳng thức $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ đúng với bốn điểm A, B, C, H bất kỳ.

Ví dụ 4

Cho hình vuông $ABCD$, biết đỉnh $A(1; -1)$, $B(3; 0)$ và đỉnh C có tọa độ dương. Tìm tọa độ C .

- (A) $C(4; -2)$. (B) $C(4; 2)$. (C) $C(2; 4)$. (D) $C(2; 2)$.

Lời giải

Gọi $C(x; y)$ ($x > 0$), $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 3; y)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \Leftrightarrow 2(x - 3) + y = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + y &= 6 \\ \Rightarrow y &= 6 - 2x. \\ AB^2 &= BC^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 5 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (6 - 2x)^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 30x + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vì vị trí của A, B nên tung độ của C phải dương nên $C(2; 2)$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

Ⓐ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $R = \frac{a}{4}$. Ⓒ $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AG . Ta có

$$\begin{aligned} 4MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MA^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MA^2 + 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 6MI^2 + 3IA^2 + 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 6IM^2 + \frac{3a^2}{2} \\ \Rightarrow 4MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \frac{5a^2}{2} \\ \Leftrightarrow 6IM^2 + \frac{3a^2}{2} &= \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{a}{\sqrt{6}} \\ \Rightarrow R &= \frac{a}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC , M và N là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

Ⓐ 3. Ⓑ $-\frac{1}{3}$. Ⓒ 2. Ⓓ $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\star \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}.$$

$$\star \overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (x+1)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.$$

Để A, M, N thẳng hàng thì $\exists k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN}$.

$$\text{Hay } (x+1)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = k(-\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -k \\ -1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

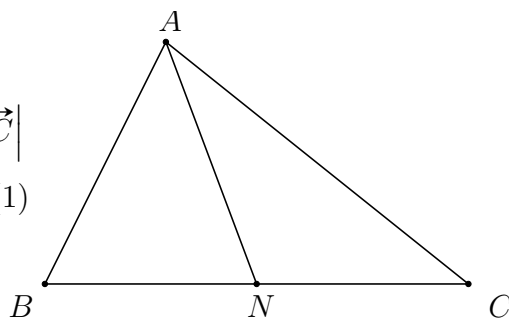
- (A) Tập hợp các điểm M là một đường tròn.
 (B) Tập hợp của các điểm M là một đường thẳng.
 (C) Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
 (D) Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A .

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| &= |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}| &= |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|. \quad (1) \end{aligned}$$



Gọi N là trung điểm BC . Ta được $(1) \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = 2|-\overrightarrow{AN}| \Leftrightarrow IM = AN$.

Vì I, A, N cố định nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính AN .

Dạng 2.5. Cực trị và chứng minh bất đẳng thức



Ví dụ 1

Cho $M(-1; -2), N(3; 2), P(4; -1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$ nhỏ nhất.

- (A) $E(4; 0)$. (B) $E(3; 0)$. (C) $E(1; 0)$. (D) $E(2; 0)$.

Lời giải

Do $E \in Ox$ nên $E(a; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{EM} = (-1 - a; -2); \overrightarrow{EN} = (3 - a; 2); \overrightarrow{EP} = (4 - a; -1)$

Suy ra $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} = (6 - 3a; -1)$.

Do đó $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}| = \sqrt{(6 - 3a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(6 - 3a)^2 + 1} \geq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$ bằng 1.

Vậy $E(2; 0)$.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 5), B(2; 2)$. Điểm E thuộc trục Ox thỏa $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm E .

- Ⓐ $E\left(\frac{2}{3}; 3\right)$. Ⓑ $E\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Ⓒ $E(3; 0)$. Ⓓ $E\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

Lời giải

Giả sử $E(e; 0)$ là điểm bất kỳ thuộc trục hoành.

Ta có $\overrightarrow{AE} = (e + 2; -5)$ và $\overrightarrow{BE} = (e - 2; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = (3e - 2; -11)$

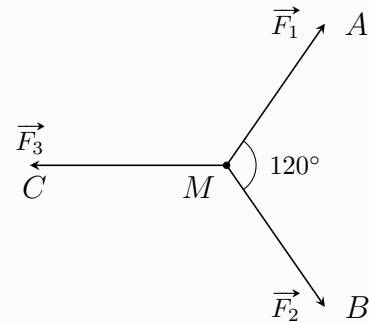
Suy ra $|\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE}| = \sqrt{(3e - 2)^2 + 121} \geq 11$.

Do đó $|\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $e = \frac{2}{3}$, hay $E\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

Ví dụ 3

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M khiến vật đứng yên như hình vẽ. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là

- Ⓐ $50\sqrt{2}N$. Ⓑ $25\sqrt{3}N$.
Ⓒ $100\sqrt{3}N$. Ⓓ $25N$.



Lời giải

Do vật đứng yên nên ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$
 $\Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \Rightarrow |\vec{F}_3|^2 = |\vec{F}_1|^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + |\vec{F}_2|^2 = 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 25 \cdot \cos 120^\circ + 25^2 = 625$
 $\Rightarrow |\vec{F}_3| = 25N$.

Ví dụ 4

Cho ba điểm $A(0; 6)$, $B(2; 5)$, $M(2t - 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho

- Ⓐ $MA + MB$ nhỏ nhất. Ⓑ $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải

- Ⓐ Ta có

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(2t - 2)^2 + (t - 6)^2} + \sqrt{(2t - 4)^2 + (t - 5)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 12t + 40} + \sqrt{5t^2 - 26t + 41} \\ &= \sqrt{5} \left(\sqrt{(t - 2)^2 + 2^2} + \sqrt{\left(\frac{13}{5} - t\right)^2 + \frac{36}{25}} \right) \\ &\geq \sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(t - 2 + \frac{13}{5} - t\right)^2 + \left(2 + \frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{53}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t - 2}{2} = \frac{\frac{13}{5} - t}{\frac{6}{5}} \Leftrightarrow t = \frac{19}{8} \Rightarrow M\left(\frac{11}{4}; \frac{19}{8}\right)$.

b Ta có

$$\begin{aligned}|MA - MB| &= \left| \sqrt{(2t-2)^2 + (t-6)^2} - \sqrt{(2t-4)^2 + (t-5)^2} \right| \\ &\leq \sqrt{(2t-2-2t+4)^2 + (t-6+5-t)^2} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2t-2}{4-2t} = \frac{t-6}{5-t} \Leftrightarrow t = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(5; \frac{7}{2}\right)$.

Ví dụ 5

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x+2)^2 + 2^2} + \sqrt{(1-x)^2 + 1^2}$.
Xét hai véc-tơ $\vec{u} = (x+2; 2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(x+2)^2 + 2^2}$, véc-tơ $\vec{v} = (1-x; 1) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(1-x)^2 + 1^2}$.
Khi đó $\vec{u} + \vec{v} = (3; 3) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{2}$.
Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ ta được $\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 3\sqrt{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} = \frac{2}{1} > 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ví dụ 6

Tìm GTNN của biểu thức $\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$.

Lời giải

Ta có $P = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (y-2)^2}$.
Xét hai véc-tơ $\vec{u} = (x+1; y-2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$, véc-tơ $\vec{v} = (3-x; y-2) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(3-x)^2 + (y-2)^2}$.
Khi đó $\vec{u} + \vec{v} = (4; 2(y-2)) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 4(y-2)^2} \geq 4$ (1).
Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ ta được

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} \geq \sqrt{4^2 + 4(y-2)^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} \geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3-x) \geq 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ y = 2. \end{cases}$

Ví dụ 7

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + b^2}$.
Xét hai véc-tơ $\vec{u} = (x-a; |a|) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(x-a)^2 + a^2}$, véc-tơ $\vec{v} = (b-x; |b|) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(b-x)^2 + b^2}$.
Khi đó $\vec{u} + \vec{v} = (b-a; |a| + |b|) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2|ab| - 2ab}$.
Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ ta được

$$\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} \geq \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2|ab| - 2ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x+a}{b-x} = \frac{|a|}{|b|} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{|a|b + a|b|}{|a| + |b|}$.

Ví dụ 8

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\sqrt{4 \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4 \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2$.

Lời giải

Xét hai véc-tơ $\vec{u} = (2 \cos a \cos b; \sin(a-b))$ và $\vec{v} = (2 \sin a \sin b; \sin(a-b)) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (2 \cos(a-b); 2 \sin(a-b))$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ ta được

$$\sqrt{4 \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4 \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2 \sqrt{\cos^2(a-b) + \sin^2(a-b)} = 2.$$

Ví dụ 9

Cho $\triangle ABC$ có M là điểm tùy ý. Tìm vị trí M trong các trường hợp sau

- a) $MA^2 + MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- b) M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

- a) Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 - MC^2 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - (\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= MI^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC}) + IA^2 + IB^2 - IC^2 = MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2. \end{aligned}$$

Vì I là điểm cố định nên $IA^2 + IB^2 - IC^2$ là không đổi nên

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 = MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2 \geq IA^2 + IB^2 - IC^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$.

- b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 3MB^2 - MC^2 &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + 3(\vec{MO} + \vec{OB})^2 - (\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + 3OB^2 - OC^2 + 2\vec{MO}(\vec{OA} + 3\vec{OB} - \vec{OC}) \\ &= 6R^2 + 2\vec{MO}(\vec{OA} + 3\vec{OB} - \vec{OC}) = 6R^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{v} = 6R^2 + 2R|\vec{v}| \cos(\vec{MO}, \vec{v}) \leq 6R^2 + 2R|\vec{v}| \end{aligned}$$

Với $\vec{v} = \vec{OA} + 3\vec{OB} - \vec{OC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{MO} \uparrow \uparrow (\vec{OA} + 3\vec{OB} - \vec{OC})$.

Ví dụ 10

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$. Chứng minh rằng $xy + yz + zx \leq 8$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 3 \\ \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} + y\right)^2 = 16. \end{cases}$$

Đặt $\vec{u} = \left(\frac{x}{2} + y; \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}; \frac{z}{2} + y\right)$ với x, y, z dương, áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} + y\right) \cdot \frac{\sqrt{3}z}{2} + \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \left(\frac{z}{2} + y\right) &\leq \sqrt{\left[\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} + y\right)^2\right]} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx) &\leq \sqrt{3 \cdot 16} \\ \Leftrightarrow xy + yz + zx &\leq 8. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng và thỏa mãn giả thiết.

2.3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

2.3.1. Nhận biết

Câu 1. Câu 44 Cho $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$.
- (B) Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ có giá trùng nhau.
- (C) $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$.
- (D) $(k \cdot \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ với mọi $k \in \mathbb{R}^+$.

Hướng dẫn: Vì $k \in \mathbb{R}^+$ nên $k \cdot \vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ suy ra $(k \cdot \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$.

Chọn đáp án (D)

Câu 2. Tìm m để hai véc-tơ $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (m^2; 4)$ vuông góc với nhau.

- (A) $m = 12$.
- (B) $m = 2\sqrt{3}$.
- (C) $m = -2\sqrt{3}$.
- (D) $m = \pm 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Để $\vec{a} \perp \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{3} \\ m = -2\sqrt{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án (D)

2.3.2. Thông hiểu

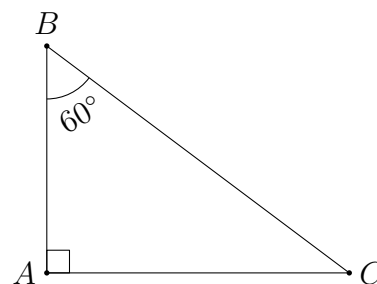
Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- (A) $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -3\sqrt{2}a$.
- (B) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -a^2$.
- (C) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.
- (D) $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 3a^2$.

Hướng dẫn:

Ta có $\tan 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$; $\sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow BC = 2\sqrt{3}a$.

Suy ra $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\vec{AC}, \vec{CB}) = 2\sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a \cdot \cos 150^\circ = -3\sqrt{3}a^2$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 4. Cho hai điểm $A(2; 0)$ và điểm $B(5; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

(A) $AB = \sqrt{10}$.

(B) $AB = 2\sqrt{10}$.

(C) $AB = 2$.

(D) $AB = 10$.

Hướng dẫn: Ta có $\vec{AB} = (3; 1)$ nên suy ra $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$.

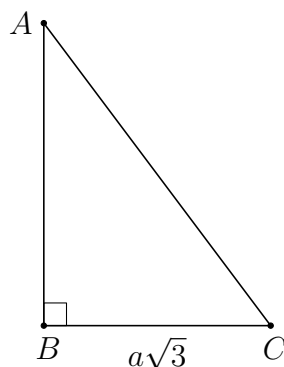
(A) $3a^2$.

(B) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

(D) $-3a^2$.

Hướng dẫn:



$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{CB} &= |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{AC}, \vec{CB}) = |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cdot \cos(180^\circ - \hat{C}) \\ &= -|\vec{AC}| |\vec{CB}| \cdot \cos \hat{C} = -|\vec{AC}| |\vec{CB}| \cdot \frac{BC}{AC} = -BC^2 = -3a^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 6. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a , trọng tâm G . Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{BC} \cdot \vec{CG}$ bằng

(A) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

(B) $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

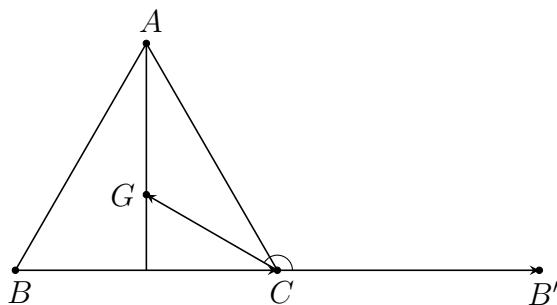
(C) $\frac{a^2}{2}$.

(D) $-\frac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn:

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} &= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CG}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG}) \\ &= BC \cdot CG \cdot \cos(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CG}) \\ &= BC \cdot CG \cdot \cos 150^\circ \\ &= a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)****Câu 7.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

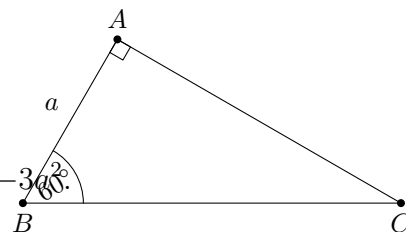
- (A) $-2a^2$. (B) $2a^2$. (C) $3a^2$. (D) $-3a^2$.

Hướng dẫn:

Vì ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = 2a$,
 $AC = a\sqrt{3}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{C} = -\sqrt{3}a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2.$$

Chọn đáp án **(D)****Câu 8.** Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

- (A) 0° . (B) 180° . (C) 45° . (D) 90° .

Hướng dẫn: Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.Chọn đáp án **(B)****Câu 9.** Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(3; -3)$, $C(6; 0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

- (A) 6. (B) $6\sqrt{2}$. (C) 12. (D) 9.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 3)$. Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên $\triangle ABC$ vuông tại B .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6.$$

Chọn đáp án **(A)****Câu 10.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 9$. Khi đó AB , AC , BC có độ dài là

- (A) 2; 3; $\sqrt{13}$. (B) 3; 4; 5. (C) 2; 4; $2\sqrt{5}$. (D) 4; 6; $2\sqrt{13}$.

Hướng dẫn: Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 4 \\ \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \\ \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 4 \\ AC^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 11. Cho $\vec{a} = (-3; 4)$, $\vec{b} = (4; 3)$. Kết luận nào sau đây sai.

(A) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

(B) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$.

(C) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Hướng dẫn: Ta có

$$\vec{a} = (-3; 4) \Rightarrow |\vec{a}| = 5.$$

$$\vec{b} = (4; 3) \Rightarrow |\vec{b}| = 5.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ đều, $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

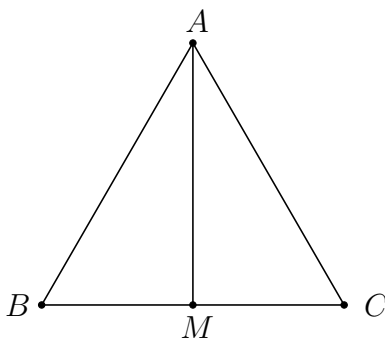
(A) -18 .

(B) 27 .

(C) 18 .

(D) -27 .

Hướng dẫn:



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = AB \cdot MA \cdot \cos 150^\circ = 6 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -27.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 13. Cho tam giác ABC có $A(5; 3)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

(A) $H(-3; 2)$.

(B) $H(-3; -2)$.

(C) $H(3; 2)$.

(D) $H(3; -2)$.

Hướng dẫn: Gọi $H(x; y)$ là tọa độ cần tìm.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - 5; y - 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-3; 6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -3x + 6y - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} = (x-2; y+1) \\ \overrightarrow{AC} = (-6; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 14 = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x + 6y = 3 \\ -6x + 2y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $H(3; 2)$ là tọa độ cần tìm.

Chọn đáp án **C**

Câu 14. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ khi ba điểm O, A, B không thẳng hàng là

- (A) tam giác OAB đều. (B) tam giác OAB cân tại O .
(C) tam giác OAB vuông tại O . (D) tam giác OAB vuông cân tại O .

Hướng dẫn: Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

Vậy $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{AB}$ hay $\triangle OAB$ cân tại O .

Chọn đáp án **B**

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -1)$ và $B(-2; 1)$. Tìm điểm M thuộc tia Ox sao cho tam giác ABM vuông tại M .

- (A) $M(\sqrt{5}; 0)$. (B) $M(\sqrt{3}; 0)$ và $M(-\sqrt{3}; 0)$.
(C) $M(-\sqrt{5}; 0)$. (D) $M(-\sqrt{5}; 0)$ và $M(\sqrt{5}; 0)$.

Hướng dẫn: Gọi $M(m; 0) \in Ox, (m > 0)$.

$$\overrightarrow{AM} = (m-2; 1), \overrightarrow{BM} = (m+2; -1).$$

Tam giác ABM vuông tại $M \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{5}$. Vậy $M(\sqrt{5}; 0)$.

Chọn đáp án **A**

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
(B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
(C) $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.
(D) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Hướng dẫn: Mệnh đề “ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ” là sai vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ có thể xảy ra khi $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 17. Cho tam giác ABC , biết $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Tam giác ABC vuông tại A . (B) Tam giác ABC vuông tại B .
(C) Tam giác ABC vuông tại C . (D) Tam giác ABC cân tại A .

Hướng dẫn: Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow 2AM = BC$ hay tam giác ABC vuông tại A .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

- (A)** $a + 6b = 5$. **(B)** $a + 6b = 6$. **(C)** $a + 6b = 7$. **(D)** $a + 6b = 8$.

Hướng dẫn: Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho khi đó ta có

$$\overrightarrow{AH}(a + 3; b), \overrightarrow{BC}(-1; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -a - 3 + 6b = 0$$

$$\overrightarrow{BH}(a - 3; b), \overrightarrow{AC}(5; 6) \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 5a - 15 + 6b = 0$$

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a + 6b = 7.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1; 1)$ và $B(4; 4)$. Tọa độ của các điểm N trên trục Oy để $\triangle ABN$ vuông tại N là

- (A)** $(0; 0)$, $(0; 3)$. **(B)** $(0; 0)$, $(0; 5)$.
(C) $(0; 1)$, $(0; 5)$. **(D)** $(0; 1)$, $(0; 4)$.

Hướng dẫn: Vì N trên trục $Oy \Rightarrow N(0; y)$. Ta có $\overrightarrow{AN} = (1; y - 1)$, $\overrightarrow{BN} = (-4; y - 4)$. Tam giác ABN vuông tại N khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow -4 + (y - 1)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy tọa độ các điểm N là $(0; 0)$, $(0; 5)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 4)$; $B(-4; -4)$; $C(4; 2)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tọa độ điểm I là

- (A)** $(0; 0)$. **(B)** $(1; 0)$. **(C)** $(1; -1)$. **(D)** $(0; -1)$.

Hướng dẫn: Gọi $I(x_I; y_I)$. Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(0 - x_I)^2 + (4 - y_I)^2} = \sqrt{(-4 - x_I)^2 + (-4 - y_I)^2} \\ \sqrt{(0 - x_I)^2 + (4 - y_I)^2} = \sqrt{(4 - x_I)^2 + (2 - y_I)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_I^2 + 16 - 8y_I + y_I^2 = 16 + 8x_I + x_I^2 + 16 + 8y_I + y_I^2 \\ x_I^2 + 16 - 8y_I + y_I^2 = 16 - 8x_I + x_I^2 + 4 - 4y_I + y_I^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 8x_I + 16 + 16y_I \\ 0 = -8x_I + 4 + 4y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

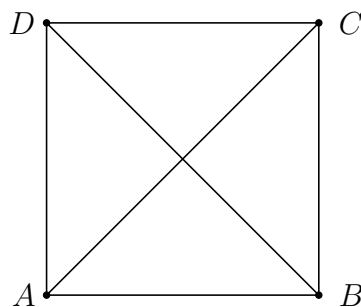
2.3.3. Vận dụng thấp

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- (A)** $P = 2\sqrt{2}a$. **(B)** $P = 2a^2$. **(C)** $P = a^2$. **(D)** $P = -2a^2$.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned}
 P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}) \\
 &= 2 (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BD} \\
 &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\
 &= 2a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ + 0 = -2a^2.
 \end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

Câu 22. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB = 6a$, $CD = 3a$ và $AD = 3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $MA = a$. Tính $T = (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CB}$

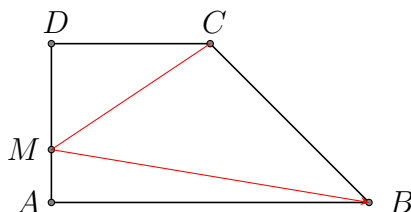
(A) $T = 45a^2$.

(B) $T = 27a^2$.

(C) $T = -27a^2$.

(D) $T = -45a^2$.

Hướng dẫn:



Ta có

$$\begin{aligned}
 T &= (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CB} \\
 &= [(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})] (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\
 &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC}) [\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})] \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
 &= (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \\
 &= \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 \\
 &= (6a)^2 - (3a)^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

Câu 23. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có G là trọng tâm. Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ là

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(B) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

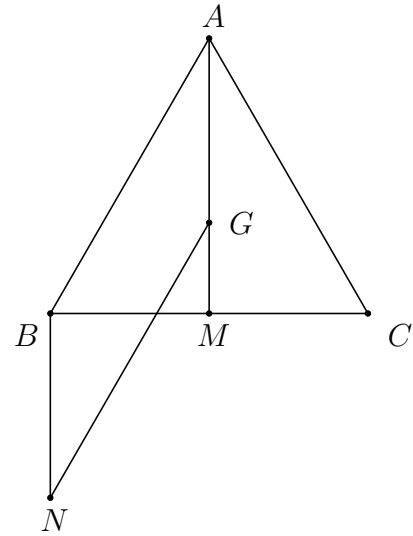
(D) $\frac{2a}{3}$.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm BC , dựng điểm N sao cho $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AG}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| &= |\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}| \\ &= |\overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC})| \\ &= |2\overrightarrow{GB}| \\ &= 2 \cdot GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C**

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$. Điểm C thuộc tia Ox sao cho $\triangle ABC$ vuông tại C có tọa độ là

- A** $C(3; 0)$. **B** $C(-3; 0)$. **C** $C(-1; 0)$. **D** $C(1; 0)$.

Hướng dẫn: Điểm C thuộc tia Ox nên $C(x; 0)$, ($x > 0$).

$\overrightarrow{AC} = (x - 2; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (x + 2; -1)$. Tam giác ABC vuông tại C nên

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + (-3)(-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $C(1; 0)$.

Chọn đáp án **D**

Câu 25. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$. Điểm C thuộc tia Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C có tọa độ là

- A** $C(3; 0)$. **B** $C(-3; 0)$. **C** $C(-1; 0)$. **D** $C(2; 0)$.

Hướng dẫn: Ta có $C \in Ox \Rightarrow C(x; 0)$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = (x - 2; -3)$; $\overrightarrow{BC} = (x + 2; -1)$.

Tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $C(-1; 0)$ hoặc $C(1; 0)$.

Chọn đáp án **C**

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-4; 0)$, $B(5; -3)$, $C(-2; -4)$. Tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A** $(2; 1)$. **B** $(1; 0)$. **C** $(1; 2)$. **D** $(0; 1)$.

Hướng dẫn: Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó

$$\begin{aligned} AI &= BI = CI \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 4)^2 + y^2 = (x - 5)^2 + (y + 3)^2 \\ (x + 4)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y + 4)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x - 6y = 18 \\ 4x - 8y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy $I(1; 0)$.

Chọn đáp án **B**

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(3; 2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A $M(0; 1)$.

B $M(0; -1)$.

C $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn: Gọi tọa độ của M nằm trên Oy là $(0; m)$.

Khi đó $MA^2 + MB^2 = 1^2 + (-1-m)^2 + 3^2 + (2-m)^2 = 2m^2 - 2m + 15 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}$.

Vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{29}{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

2.3.4. Vận dụng cao

Câu 28. Cho tam giác đều ABC , gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

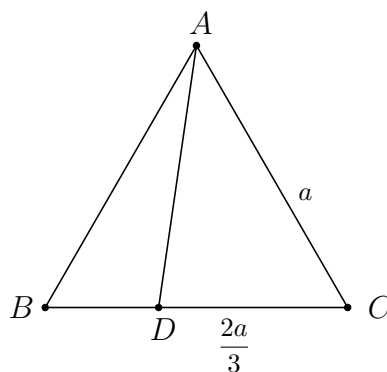
A $\frac{5}{2}$.

B $\frac{5 + 7\sqrt{7}}{9}$.

C $\frac{7 + 5\sqrt{5}}{9}$.

D $\frac{7 + 5\sqrt{7}}{9}$.

Hướng dẫn:



Đặt $AB = BC = CA = a$.

Có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, nên $DC = \frac{2a}{3}$, $BD = \frac{a}{3}$.

Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác ADC , ta có

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos ACD = a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9}.$$

Suy ra $AD = \sqrt{\frac{7a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Khi đó, tam giác ADC có $S_{\triangle ADC} = \frac{AD \cdot DC \cdot CA}{4R} = \frac{AD + DC + CA}{2} \cdot r$.

$$\text{Mà } S_{\triangle ADC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Nên } R = \frac{AD \cdot DC \cdot CA}{4S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a}{4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}} = \frac{a\sqrt{21}}{9}.$$

$$\text{Và } r = \frac{2 \cdot S_{\triangle ADC}}{AD + DC + CA} = \frac{2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{7}}{3} + \frac{2a}{3} + a} = \frac{a\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}}.$$

$$\text{Do đó, ta có được } \frac{R}{r} = \frac{a\sqrt{21}}{9} : \frac{a\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{(5 + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}}{9} = \frac{7 + 5\sqrt{7}}{9}.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

(A) $x = \frac{a}{2}$.

(B) $x = \frac{7a}{12}$.

(C) $x = \frac{5a}{12}$.

(D) $x = \frac{4a}{5}$.

Hướng dẫn:

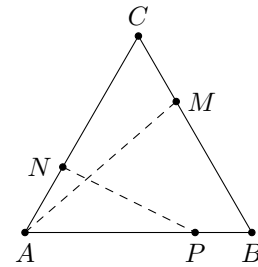
Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Để $AM \perp NP$ thì

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3a} \overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{2x}{3a} - \frac{1}{9} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{xa}{3} + \left(\frac{2x}{3a} - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{5a}{18} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(C)**

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ điểm N trên cạnh BC của tam giác ABC có $A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -2)$ sao cho $S_{ABN} = 3S_{ANC}$ là

(A) $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right)$.

(B) $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4} \right)$.

(C) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$.

(D) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

Hướng dẫn:

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

Theo đề ra ta có

$$\begin{aligned} S_{ABN} &= 3S_{ACN} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH \cdot BN &= \frac{3}{2}AH \cdot CN \\ \Leftrightarrow BN &= 3CN \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} &= -3\overrightarrow{CN} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} &= -3(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC}) \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BN} &= 3\overrightarrow{BC}. (*) \end{aligned}$$

Ta có $\overrightarrow{BN} = (x_N - 2; y_N - 3)$; $\overrightarrow{BC} = (-3; -5)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_N - 2) = 3(-3) \\ 4(y_N - 3) = 3(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\frac{1}{4} \\ y_N = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } N\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Chọn đáp án **B**

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ điểm N trên cạnh BC của tam giác ABC có $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$ sao cho $S_{ABN} = 3S_{ANC}$ là

Ⓐ $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn:

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

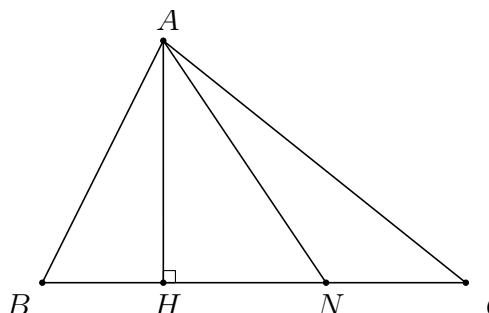
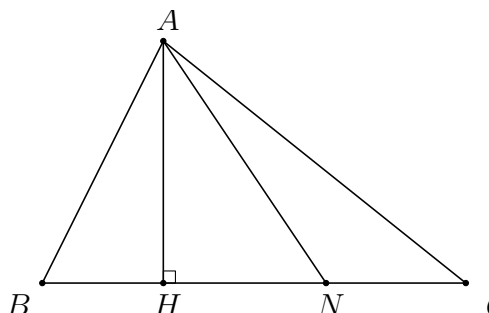
Theo đề ra ta có

$$\begin{aligned} S_{ABN} &= 3S_{ACN} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH \cdot BN &= \frac{3}{2}AH \cdot CN \\ \Leftrightarrow BN &= 3CN \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} &= -3\overrightarrow{CN} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} &= -3(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC}) \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BN} &= 3\overrightarrow{BC}. (*) \end{aligned}$$

Ta có $\overrightarrow{BN} = (x_N - 2; y_N - 3)$; $\overrightarrow{BC} = (-3; -5)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_N - 2) = 3(-3) \\ 4(y_N - 3) = 3(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\frac{1}{4} \\ y_N = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } N\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Chọn đáp án **B**



ĐÁP ÁN BÀI 2

1.D

2.D

3.A

4.A

5.D

6.D

7.D

8.B

9.A

10.A

11.B

12.D

13.C

14.B

15.A

16.D

17.A

18.C

19.B

20.D

21.D

22.B

23.C

24.D

25.C

26.B

27.C

28.D

29.C

30.B

31.B

BÀI 3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

3.1. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

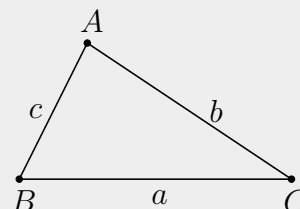
3.1.1. Định lý cô-sin

Định lý 2.3.1. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Ta có

(a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

(b) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$.

(c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Hệ quả 2.3.1.

(a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

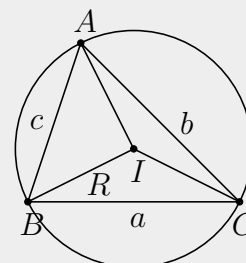
(b) $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$.

(c) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3.1.2. Định lý sin

Định lý 2.3.2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



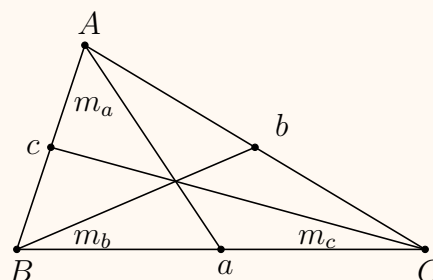
3.1.3. Công thức tính độ dài đường trung tuyến

Hệ quả 2.3.2. Cho tam giác ABC có m_a , m_b , m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A , B , C . Ta có

(a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

(b) $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

(c) $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.



3.1.4. Công thức tính diện tích tam giác:

Định nghĩa 2.3.1. Gọi S là diện tích tam giác ABC . Ta có

- (a) $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$
- (b) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$
- (c) $S = \frac{abc}{4R}.$
- (d) $S = p \cdot r$
- (e) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Trong đó:

- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

3.2. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 3.1. Tính toán các đại lượng trong tam giác



Ví dụ 1

Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6, AC = 8, BC = 13$. Tính độ dài đoạn trung tuyến m_a .

- (A) $m_a = \frac{\sqrt{430}}{2}.$
- (B) $m_a = \frac{\sqrt{31}}{2}.$
- (C) $m_a = \frac{\sqrt{197}}{2}.$
- (D) $m_a = \frac{\sqrt{346}}{2}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } m_a^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{31}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{31}}{2}.$$

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $BC = 8, AB = 3, \widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh AC là

- (A) $\sqrt{61}.$
- (B) $49.$
- (C) $7.$
- (D) $\sqrt{97}.$

Lời giải

Áp dụng định lý hàm số $\cos$ ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Leftrightarrow AC^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow AC^2 = 49 \Rightarrow AC = 7.$$

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có ba cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \sin A$.

(B) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$.

(C) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A$.

(D) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Lời giải

Áp dụng định lý cô-sin vào tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Ví dụ 4

Tam giác ABC có $S = 84$ là diện tích tam giác; các cạnh $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Hỏi độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác là cặp số nào?

(A) $\frac{65}{8}$; 4.

(B) $\frac{65}{8}$; 8.

(C) $\frac{65}{2}$; 4.

(D) $\frac{65}{2}$; 8.

Lời giải

Ta có nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = 21$.

Ta có bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(A) $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(B) $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $R = \sqrt{2}$.

(D) $R = \sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$ (Do $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$).

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2 \sin A} = \sqrt{2}$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 10$, $c = 20$. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $70\sqrt{3}$.

(B) $60\sqrt{3}$.

(C) $50\sqrt{3}$.

(D) $40\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sin 60^\circ = 50\sqrt{3}$.

Ví dụ 7

Hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3$, $BC = 4$, $BD = 2$. Khi đó S_{ABCD} bằng

(A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

(B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

(C) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$.

(D) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải

Gọi P là nửa chu vi của tam giác BCD thì $P = \frac{BC + CD + BD}{2} = \frac{9}{2}$.

Ta có $S_{ABCD} = 2S_{BCD} = 2\sqrt{\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\right) \left(\frac{9}{2} - 3\right) \left(\frac{9}{2} - 4\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$.

Ví dụ 8

Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

(A) $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(B) $R = \frac{a}{2}$.

(C) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(D) $R = a$.

Lời giải

Theo định lý sin trong tam giác ta có $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = 6$ và $\widehat{C} = 135^\circ$. Diện tích tam giác ABC là

(A) 4.

(B) $6\sqrt{2}$.

(C) $3\sqrt{2}$.

(D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin 135^\circ = 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 10

Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = AD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$. Tính $\cos \widehat{BAD}$.

(A) $\frac{17}{25}$.

(B) $-\frac{7}{25}$.

(C) $\frac{5}{25}$.

(D) $-\frac{17}{25}$.

Lời giải

Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên DC .

Đặt $AB = AD = BC = x$.

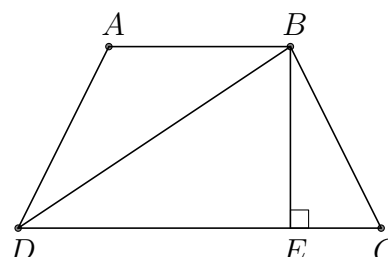
Ta có $EC = \frac{DC - x}{2}$ (1).

Trong tam giác vuông BDE ta có

$$\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{3}{4}ED$$

$$\Leftrightarrow BE = \frac{3}{4} \left(DC - \frac{DC - x}{2} \right) = \frac{3}{8}(DC + x) \quad (2).$$

tam giác vuông BEC ta có $BC^2 = EC^2 + BE^2$ (3).



Trong

Thay (1), (2) vào (3) biến đổi ta được: $39x^2 + 14DC \cdot x - 25DC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{39}DC$ hay $DC = \frac{39}{25}x$. Khi đó $EC = \frac{7}{25}x$.
 Mặt khác $\cos \widehat{BAD} = -\cos \widehat{BCE} = -\frac{EC}{BC} = -\frac{7}{25}$.

Dạng 3.2. Chứng minh các hệ thức



Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chọn đẳng thức sai.

- (A) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. (B) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
 (C) $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C$. (D) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.

Lời giải

Theo định lý côsin trong tam giác ABC , ta có $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.

Ví dụ 2

Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- (A) $S = \frac{abc}{4R}$. (B) $R = \frac{a}{\sin A}$.
 (C) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. (D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- (A) $S = \frac{abc}{4R}$. (B) $R = \frac{a}{\sin A}$.
 (C) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. (D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ac \cos C$.

Lời giải

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Ví dụ 4

Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$. (B) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.

Ⓒ $a \cdot \sin A = b \cdot \sin B = c \cdot \sin C$.

Ⓓ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Lời giải

Mệnh đề $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 5

Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 120^\circ$, $AD = x$ là phân giác trong của góc A và độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c . Hệ thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{x^2}$.

Ⓑ $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}$.

Ⓒ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{x^2}$.

Ⓓ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}$.

Lời giải

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow BD^2 = c^2 + x^2 - 2c \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BD^2 = c^2 + x^2 - c \cdot x$.
 $DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow DC^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow DC^2 = b^2 + x^2 - cx$.
 Mà $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \left(\frac{BD}{DC}\right)^2 = \frac{c^2 + x^2 - c \cdot x}{b^2 + x^2 - cx} = \frac{c^2}{b^2}$
 $\Leftrightarrow x(b+c) - bc = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Ví dụ 6

Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và $GB \perp GC$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Ⓑ $b^2 + c^2 = 3a^2$.

Ⓒ $b^2 + c^2 = 4a^2$.

Ⓓ $b^2 + c^2 = 6a^2$.

Lời giải

Vì tam giác GBC vuông tại G nên ta có $GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2$ (1).

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$; $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$.

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_c^2 + m_b^2) = a^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ A và B vuông góc với nhau. Khi

đó tỉ số $\frac{CA^2 + CB^2}{AB^2}$ bằng

(A) 20.

(B) 1.

(C) 10.

(D) 5.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm CB, CA .

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, ta có

$$AM^2 = \frac{2(CA^2 + AB^2) - CB^2}{4}; BN^2 = \frac{2(CB^2 + AB^2) - CA^2}{4}.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có: $AG^2 = \frac{4}{9}AM^2, BG^2 = \frac{4}{9}BN^2$.

Theo giả thiết, tam giác AGB vuông tại G nên ta có

$$\begin{aligned} &AG^2 + BG^2 = AB^2 \\ \Leftrightarrow &\frac{2(CA^2 + AB^2) - CB^2}{9} + \frac{2(CB^2 + AB^2) - CA^2}{9} = AB^2 \\ \Leftrightarrow &\frac{CA^2 + CB^2 + 4AB^2}{9} = AB^2 \\ \Leftrightarrow &CA^2 + CB^2 = 5AB^2 \\ \Leftrightarrow &\frac{CA^2 + CB^2}{AB^2} = 5. \end{aligned}$$

Ví dụ 8

Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

(B) $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

(C) $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

(D) $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

$$b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ABM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $AC = 3AM$.

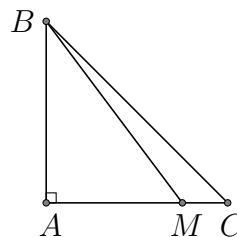
(B) $AM = \frac{3}{4}MC$.

(C) $AM = \frac{1}{4}MC$.

(D) $AM = 3MC$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{ABC} &= \frac{4}{3}S_{ABM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BA \cdot AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}BA \cdot AM \Leftrightarrow AC = \\ &\frac{4}{3}AM \Leftrightarrow AM = \frac{3}{4}MC. \end{aligned}$$



Ví dụ 10

Trong tam giác ABC có

(A) $m_a = \frac{b+c}{2}$.

(B) $m_a > \frac{b+c}{2}$.

(C) $m_a < \frac{b+c}{2}$.

(D) $m_a = b+c$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ a > |b - c| \end{cases}$

Suy ra $m_a^2 < \frac{2(b^2 + c^2) - (b - c)^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{4} = \frac{(b + c)^2}{4}$

Hay $m_a < \frac{b + c}{2}$.

Dạng 3.3. Nhận dạng tam giác



Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng

(A) 60° .

(B) 150° .

(C) 120° .

(D) 90° .

Lời giải

Diện tích tam giác $S_{ABC} = \frac{1}{2}CB.CA \sin \widehat{ACB} \leq \frac{1}{2}a.b$.

Do đó diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}ab$, đạt được khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Ví dụ 2

Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và diện tích $S = \frac{1}{2}(a + b - c)(a - b + c)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\triangle ABC$ đều.

(B) $\triangle ABC$ cân.

(C) $\triangle ABC$ vuông tại A .

(D) $\triangle ABC$ vuông tại B .

Lời giải

Theo công thức Hê – rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$.

Ta có $S = \frac{1}{2}(a+b-c)(a-b+c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \frac{1}{2}(a+c+b)(a+c-b)$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = (a+c+b)^2(a+c-b)^2 \\
 &\Leftrightarrow (b+c-a)(a+b-c) = (a+c+b)(a+c-b) \\
 &\Leftrightarrow b^2 - (a-c)^2 = (a+c)^2 - b^2 \\
 &\Leftrightarrow b^2 - a^2 - c^2 + 2ac = a^2 + c^2 + 2ac - b^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2.
 \end{aligned}$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại B .

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù.
 (B) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.
 (C) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn.
 (D) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn.

Lời giải

Áp dụng định lý cô-sin ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì suy ra $\cos A > 0$ hay góc A nhọn.

Ví dụ 4

Cho $M(1; 4)$, $N(-1; 3)$, $P(0; 6)$. Gọi $Q(a; b)$ là điểm thỏa mãn $NPMQ$ là hình bình hành. Tổng $a + b$ bằng

- (A) -1 . (B) 0 . (C) 2 . (D) 1 .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{PN} = (-1; -3)$ và $\overrightarrow{MQ} = (a-1; b-4)$.

Tứ giác $NPMQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = -1 \\ b-4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

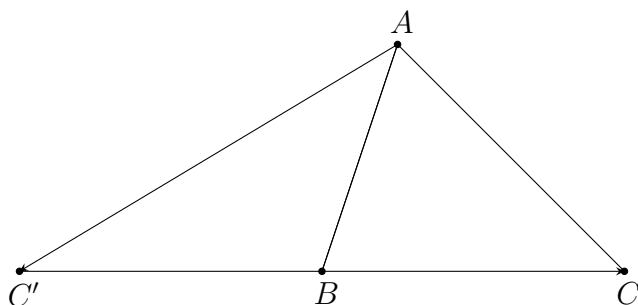
Do đó $a + b = 1$.

Ví dụ 5

Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

- (A) 3 . (B) $\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{12}$. (D) 2 .

Lời giải



Gọi 3 điểm A, B, C thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Suy ra 3 điểm A, B, C lập thành một tam giác với $AB = 2, BC = 3, CA = 4$.

Ta có $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC'}|$, với C' là điểm đối xứng của C qua B .

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACC' ta có $AB^2 = \frac{AC'^2 + AC^2}{2} - \frac{CC'^2}{4}$

Suy ra $AC'^2 = \frac{4AB^2 + CC'^2 - 2AC^2}{2} \Leftrightarrow AC'^2 = \frac{4 \cdot 4 + 36 - 2 \cdot 16}{2} \Leftrightarrow AC' = \sqrt{10}$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\triangle ABC$ vuông tại B . (B) $\triangle ABC$ cân tại C .
(C) $\triangle ABC$ vuông tại A . (D) $\triangle ABC$ đều.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2a(b^2 + c^2 - a^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ a^2(b + c) + bc(b + c) - (b^3 + c^3) = 2a(b^2 + c^2) - 2a^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ 2a^3 + 2abc - ((b + c)^3 - 3bc(b + c)) = 2a((b + c)^2 - 2bc) - 2a^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ 4a^3 + 2abc - (8a^3 - 6abc) = 2a(4a^2 - 2bc) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ bc = a^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c. \end{aligned}$$

Vậy tam giác đều.

Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh BC, AC, AB lần lượt là a, b, c và $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\triangle ABC$ đều. (B) $\triangle ABC$ cân tại C .
(C) $\triangle ABC$ vuông tại A . (D) $\triangle ABC$ vuông tại B .

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos B}{\sin B} &= \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \\ \text{Ta có } \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} - 1 &= \frac{2a + c}{2a - c} - 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2c}{2a - c} \Leftrightarrow 2a \cos B = c \\ &\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

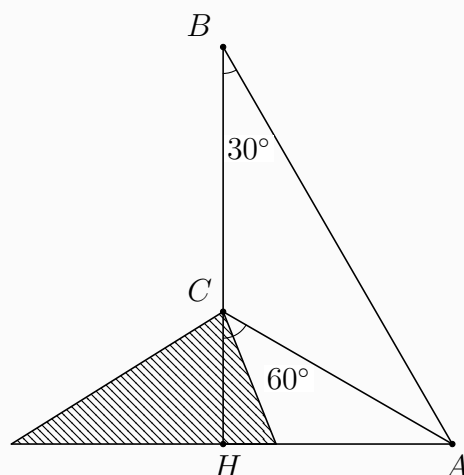
Dạng 3.4. Giải tam giác và các ứng dụng thực tế



Ví dụ 1

Trên ngọn đồi có một tháp cao 100m (hình vẽ bên). Đỉnh tháp B chân tháp C nhìn điểm A dưới chân đồi dưới một góc tương ứng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao CH của ngọn đồi.

- (A) 45m. (B) 60m. (C) 50m. (D) 40m.



Lời giải

Ta có $\widehat{BAC} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. (Áp dụng tính chất góc ngoài tam giác).

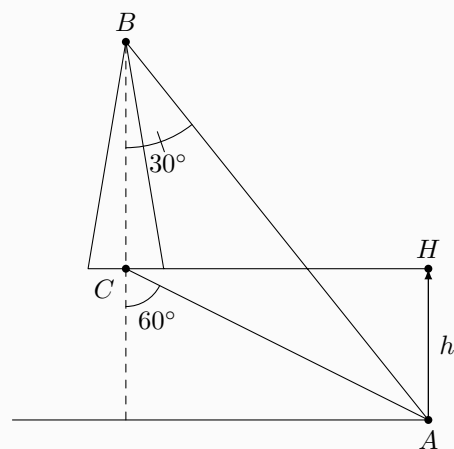
Suy ra $\triangle ABC$ cân tại $C \Rightarrow AC = BC = 100\text{m}$.

Xét $\triangle AHC$ có $\widehat{HAC} = 30^\circ \Rightarrow HC = \frac{1}{2}AC = 50\text{m}$.

Ví dụ 2

Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 100 m (hình vẽ). Đỉnh tháp B và chân tháp C lần lượt nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao AH của ngọn đồi.

- (A) 55 m. (B) 45 m. (C) 60 m. (D) 50 m.



Lời giải

Gọi $I = AB \cap CH$.

Ta có $BC = 100 \Rightarrow CI = BC \tan 30^\circ = \frac{100}{\sqrt{3}}$. (1)

Tam giác AHI vuông tại H

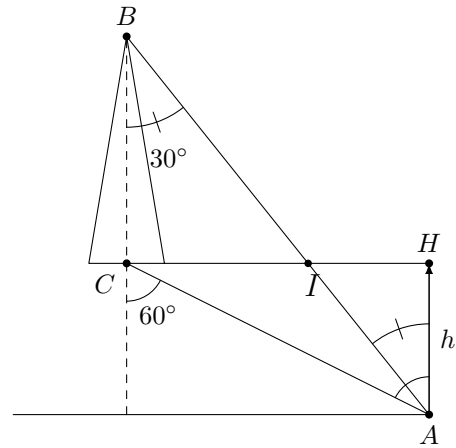
$\Rightarrow IH = h \tan 30^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$. (2)

Tam giác AHC vuông tại H

$\Rightarrow CH = h \tan 60^\circ = h\sqrt{3}$. (3)

Từ (1), (2), (3) và $CH = CI + IH$ suy ra $\frac{100}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} =$

$h\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow h = 50$.



Ví dụ 3

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là 300(N) và 400(N). $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

(A) 0(N).

(B) 700(N).

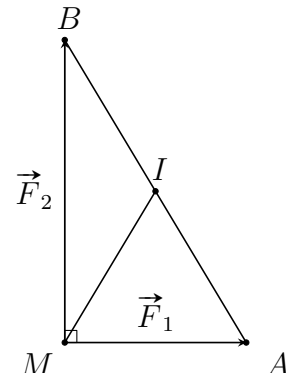
(C) 100(N).

(D) 500(N).

Lời giải

Cường độ lực tổng hợp là $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MA} + \vec{MB}|$
 $= 2|\vec{MI}| = AB$ (I là trung điểm của AB).

Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$, suy ra $|\vec{F}| = 500(\text{N})$.



Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 26 cm và $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$. Tính diện tích của tam giác ABC .

(A) $2\sqrt{23}$ (cm²).

(B) $6\sqrt{13}$ (cm²).

(C) $3\sqrt{39}$ (cm²).

(D) $5\sqrt{21}$ (cm²).

Lời giải

Ta có $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin B = 3 \sin A \\ \sin C = \frac{5}{2} \sin A \end{cases}$

Mặt khác theo định lí sin trong tam giác ABC ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = \frac{5}{2}a. \end{cases}$

Mà $a + b + c = 26 \Leftrightarrow a + 3a + \frac{5}{2}a = 26 \Leftrightarrow \frac{13a}{2} = 26 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 12$ và $c = 10$.

Vậy diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{13(13-4)(13-12)(13-10)} = 3\sqrt{39} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 5

Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80\text{m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB gần đúng bằng

(A) 91m.

(B) 71m.

(C) 79m.

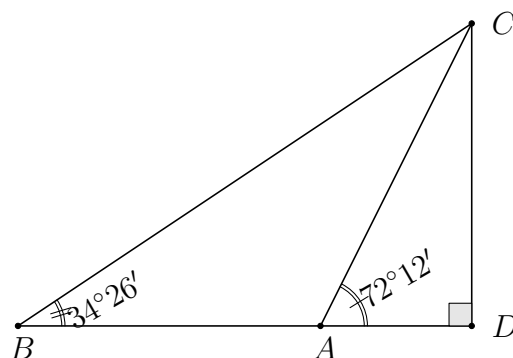
(D) 40m.

Lời giải

Xét tam giác ACD có: $AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'}$.

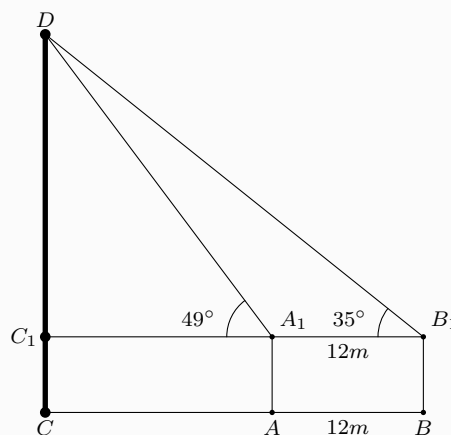
Xét tam giác BCD có: $BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'}$.

Vậy $AB = BD - AD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} - \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} - \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 91\text{m}.$



Ví dụ 6

Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



(A) 22,77m.

(B) 21,47m.

(C) 20,47m.

(D) 21,77m.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$, $\widehat{C_1DB_1} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $\widehat{A_1DB_1} = 14^\circ$.

b) Xét tam giác A_1DB_1 , ta có $\frac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1DB_1}} = \frac{A_1D}{\sin \widehat{A_1B_1D}} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45\text{m}.$

- (c) Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 , ta có
- (d) $\sin \widehat{C_1A_1D} = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin C_1A_1D = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47\text{m}$
- (e) $\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77\text{m}.$

Ví dụ 7

Gọi S, R lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi $S = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$ thì biểu thức $\sqrt{12}\sin A + 2\sin B + \sqrt{3}\sin C$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m . Tìm khẳng định đúng.

- (A) $m \in \left(\frac{11}{2}; 6\right).$ (B) $m \in \left(6; \frac{13}{2}\right).$
- (C) $m \in \left(15; \frac{31}{2}\right).$ (D) $m \in \left(5; \frac{11}{2}\right).$

Lời giải

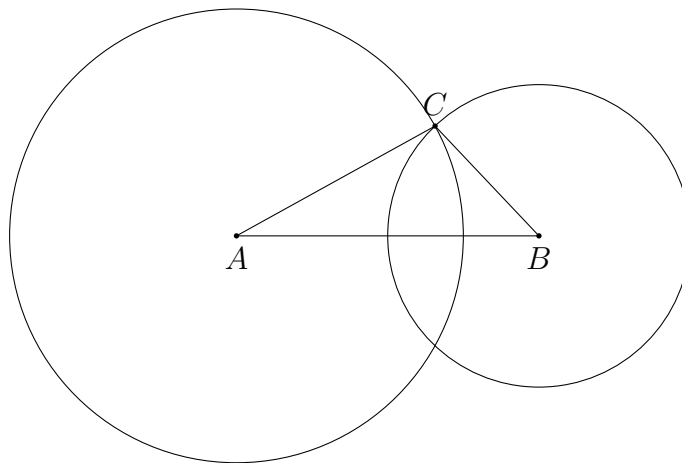
$$\begin{aligned}\sqrt{12}\sin A + 2\sin B + \sqrt{3}\sin C &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2R} + 2 \cdot \frac{b}{2R} + \sqrt{3} \cdot \frac{c}{2R} \\ \text{Ta có} \quad &\geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2R} \cdot 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{c}{2R}} = 3\sqrt[3]{\frac{3abc}{2R^3}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{abc}{4R} \cdot \frac{6}{R^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \cdot \frac{6}{R^2}} = 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = m \in \left(5; \frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

Ví dụ 8

Trên cánh đồng có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa hai cọc là 4 mét, còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

- (A) $1,989\text{m}^2.$ (B) $1,034\text{m}^2.$ (C) $1,574\text{m}^2.$ (D) $2,824\text{m}^2.$

Lời giải



Con bò thứ nhất có thể ăn cỏ trong hình tròn tâm A bán kính $AC = 3\text{m}$.
Con bò thứ hai có thể ăn cỏ trong hình tròn tâm B bán kính $BC = 2\text{m}$.

Phần diện tích lớn nhất hai con có thể ăn chung là phần giao của hai hình tròn.

Xét tam giác ABC có $AC = 3$; $BC = 2$; $AB = 4$.

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{11}{16} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 46^\circ 34' \Rightarrow \widehat{CBD} \approx 93^\circ 8'.$$

$$\Rightarrow S_{CBD} = \frac{93^\circ 8' \cdot \pi BC^2}{360^\circ} \approx 3,251 \text{ m}^2. \Rightarrow S_{CAD} = \frac{57^\circ 54' \cdot \pi AC^2}{360^\circ} \approx 4,548 \text{ m}^2.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 1,997 \text{ m}^2 \text{ và } S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \widehat{CAD} \approx 3,812 \text{ m}^2.$$

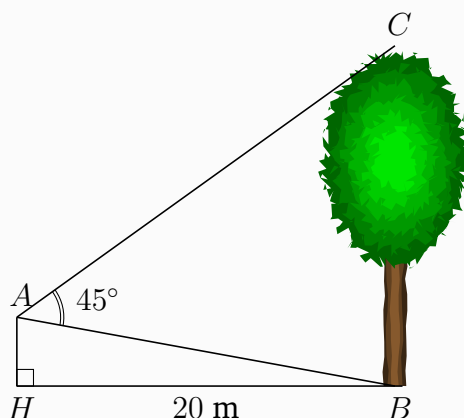
$$\text{Vậy } S = (S_{qCAD} - S_{\Delta CAD}) + (S_{qCBD} - S_{\Delta CBD}) = (4,548 - 3,812) + (3,251 - 1,997) = 1,99 \text{ m}^2.$$

Nhận xét: mỗi con bò có thể ăn cỏ trong hình tròn có tâm là cọc buộc, bán kính là dây buộc.

Do đó phần diện tích cỏ có thể ăn chung lớn nhất chính là phần giao nhau của hai hình tròn.

Ví dụ 9

Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết $AH = 4 \text{ m}$, $HB = 20 \text{ m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



(A) 14 m.

(B) 15 m.

(C) 17 m.

(D) 16 m.

Lời giải

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26}.$$

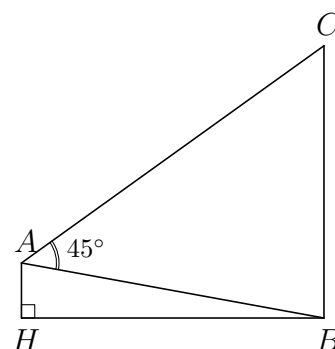
$$\tan \widehat{HAB} = \frac{HB}{HA} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \widehat{HAB} \approx 78,69^\circ.$$

$$\text{Do } AH \parallel BC \text{ nên } \widehat{ABC} = \widehat{HAB} \approx 78,69^\circ.$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - \widehat{ABC} \approx 56,31^\circ.$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ABC ta có

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 56,31^\circ} = \frac{4\sqrt{26}}{\sin 56,31^\circ} \Rightarrow BC \approx 17,33.$$



3.3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN THEO MỨC ĐỘ

3.3.1. Nhận biết

Câu 1. Tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$ có diện tích bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$.

(B) $\frac{1}{2}a^2$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

(D) $3\sqrt{3}a^2$.

Hướng dẫn: Ta có diện tích của tam giác đều cạnh bằng a là $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Áp dụng ta được $(2a\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}a^2$.

Chọn đáp án (D)

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

(A) $S = \frac{abc}{4R}$.

(B) $R = \frac{a}{\sin A}$.

(C) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

(D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Hướng dẫn: Theo định lý Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Câu 9 Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh BC , CA , AB lần lượt là a , b , c . Hệ thức nào sau đây là đúng?

(A) $a \cos A + b \cos B = c$.

(B) $a \cos A - b \cos B = c$.

(C) $a \cos B + b \cos A = c$.

(D) $a \cos B - b \cos A = c$.

Hướng dẫn: Ta có $a \cos B + b \cos A = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2c^2}{2c} = c$.

Chọn đáp án (C)

Câu 4. Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh lần lượt là 13, 14, 15. Diện tích của tam giác bằng

(A) $\sqrt{42}$.

(B) $\sqrt{84}$.

(C) 84.

(D) 42.

Hướng dẫn: Nửa chu vi của tam giác là $p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$.

Theo công thức Hê - rông, ta có diện tích của $\triangle ABC$ là $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$.

Chọn đáp án (C)

3.3.2. Thông hiểu

Câu 5. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a , b , c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?

(A) 30° .

(B) 45° .

(C) 60° .

(D) 90° .

Hướng dẫn: Ta có

$$\begin{aligned}
 & b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \\
 \Leftrightarrow & b^3 - ba^2 - ca^2 + c^3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (b + c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b + c) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & b^2 + c^2 - a^2 = bc \\
 \Leftrightarrow & \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \widehat{BAC} = 60^\circ.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

Câu 6. Tam giác ABC có các góc $\widehat{A} = 75^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$. Tỷ số $\frac{AB}{AC}$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (D) 1, 2.

Hướng dẫn: Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Theo định lý sin, ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 7. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Diện tích tam giác MNP bằng

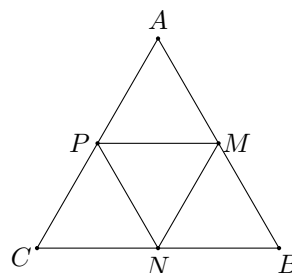
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn:

Ta có M, N lần lượt là trung điểm BA, BC nên $MN = \frac{1}{2}AC = 1$.

Tương tự ta có $NP = MP = 1$.

Vậy diện tích tam giác MNP bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án **C**

Câu 8. Cho G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác đều ABC, ACD, BCE . Số đo $\widehat{G_2G_1G_3}$ bằng

- (A) 135° . (B) 150° . (C) 100° . (D) 120° .

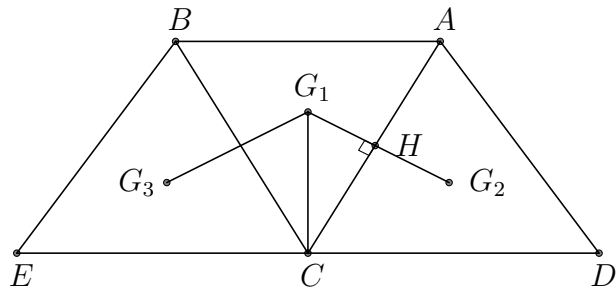
Hướng dẫn:

Gọi H là trung điểm của cạnh AC , từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\widehat{G_2G_1G_3} &= 2\widehat{CG_1H} \\ &= 2(90^\circ - \widehat{G_1CH}) \\ &= 2(90^\circ - 30^\circ) \\ &= 120^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{G_2G_1G_3} = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 9. Cho tam giác ABC đều có bán kính đường tròn ngoại tiếp R . Tính diện tích tam giác ABC .

- (A) $3R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $R^2 \sqrt{3}$. (C) $R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $R^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn: Áp dụng định lý sin ta có $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích tam giác đều ABC là $S = BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 10. Cho một hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Công thức nào dưới đây là công thức tính diện tích của hình bình hành đó?

- (A) $a^2 + b^2$. (B) $ab \sin \widehat{ABC}$. (C) ab . (D) $2(a + b)$.

Hướng dẫn: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin \widehat{ABC} = ab \sin \widehat{ABC}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 11. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$, $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

- (A) 3,7. (B) 3,3. (C) 3,5. (D) 3,1.

Hướng dẫn: Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 80^\circ$

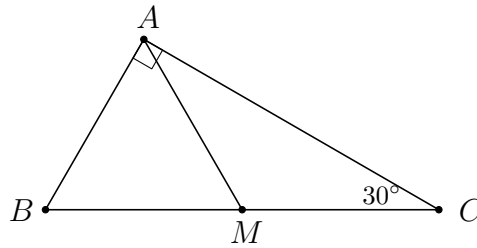
Áp dụng định lý sin: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 3,7$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $C = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM .

- (A) 3. (B) 4. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn:



Do tam giác $\triangle ABC$ vuông ở A , $\widehat{C} = 30^\circ$, $AB = 3$ nên $BC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 6$.

Độ dài đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 13. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C . Tìm khẳng định sai?

(A) $\sin A = \sin(B + C)$.

(B) $\cos C + \cos(A + B) = 0$.

(C) $\cot B = \cot(A + C)$.

(D) $\sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A + C}{2}$.

Hướng dẫn: Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi - (A + B)$.

$\Rightarrow \cot C = \cot[\pi - (A + B)] \Leftrightarrow \cot C = -\cot(A + B)$.

Đáp án $\cot B = \cot(A + C)$ sai.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 14. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

(B) $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

(C) $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

(D) $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Hướng dẫn: Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$

Mà $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 15. Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào sai?

(A) $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$.

(B) $\cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

(C) $\cos \frac{A + B + 2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

(D) $\sin(A + B) = \sin C$.

Hướng dẫn: Ta có $\cos \left(\frac{A + B + 2C}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi + C}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \right) = -\sin \frac{C}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 16. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\cos B + \cos C = 2 \cos A.$

(B) $\sin B + \sin C = 2 \sin A.$

(C) $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A.$

(D) $\sin B + \cos C = 2 \sin A.$

Hướng dẫn: Theo định lý sin trong tam giác ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C. \end{cases}$$

Do đó $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R(\sin B + \sin C) = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$

Chọn đáp án (D)

Câu 17. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

(A) $S = \frac{abc}{4R}.$

(B) $R = \frac{a}{\sin A}.$

(C) $S = \frac{1}{2}ab \sin C.$

(D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C.$

Hướng dẫn: Theo định lý Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Nên mệnh đề **sai** là “ $R = \frac{a}{\sin A}$ ”.

Chọn đáp án (B)

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC thỏa mãn $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó

(A) $\hat{A} = 45^\circ.$

(B) $\hat{A} = 30^\circ.$

(C) $\hat{A} = 60^\circ.$

(D) $\hat{A} = 75^\circ.$

Hướng dẫn: Theo định lý cô-sin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Theo bài ra

$$b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

Vậy $\hat{A} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B)

Câu 19. Cho $\triangle ABC$ có $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\triangle ABC$ cân tại A .

(B) $\triangle ABC$ cân tại B .

(C) $\triangle ABC$ vuông tại A .

(D) $\triangle ABC$ đều.

Hướng dẫn: Có $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow b = c$.

Vậy $\triangle ABC$ cân tại A .

Chọn đáp án (A)

Câu 20. Cho tam giác $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh BC , AB , AC lần lượt là a , b , c và $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\triangle ABC$ vuông tại B .(B) $\triangle ABC$ vuông tại C .(C) $\triangle ABC$ vuông tại A .(D) $\triangle ABC$ đều.

Hướng dẫn: Ta có $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos A}{2} = \frac{b}{2c} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2+a^2=c^2$.

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C .

Chọn đáp án (B)

Câu 21. Cho tam giác ABC có $a+3b+5c=28$ và $\sin A+3\sin B+5\sin C=7$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(A) $R = \frac{1}{4}$.(B) $R = \frac{1}{2}$.(C) $R = 2$.(D) $R = 4$.

Hướng dẫn: Ta có $a+3b+5c=28 \Leftrightarrow 2R(\sin A+3\sin B+\sin C)=28 \Rightarrow R=2$.

Chọn đáp án (C)

Câu 22. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA=250$ m, $CB=120$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

(A) 266 m.

(B) 255 m.

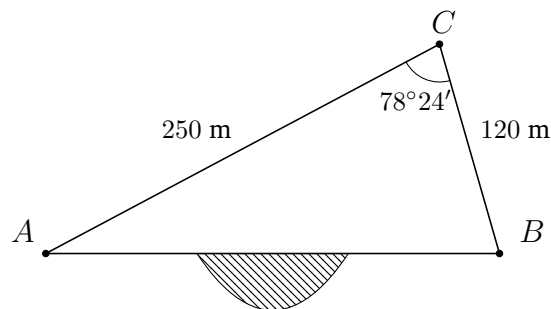
(C) 166 m.

(D) 298 m.

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý cô-sin cho $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C \\ &= 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \\ &\approx 64835 \\ \Rightarrow AB &\approx 255 \text{ (m)}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (B)

Câu 23. Cho tam giác ABC có $b=7$, $c=5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác bằng

(A) 8.

(B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.(C) $80\sqrt{3}$.(D) $8\sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Ta có $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = 14$;

lại có $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc \cdot \cos A} = 4\sqrt{2}$.

$$\text{Từ đây có } h_a = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{a} = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Chu vi của tam giác đã cho là

(A) $P = 8 + 8\sqrt{2}$.(B) $P = 2 + 2\sqrt{2}$.(C) $P = 4 + 2\sqrt{2}$.(D) $P = 4 + 4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn: Ta có: $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$; $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2} = 4$;
 $BC = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Chu vi tam giác ABC là: $P = AB + AC + BC = 4 + 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

3.3.3. Vận dụng thấp

Câu 25. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 10$, $m_b = 8$ và $m_c = 6$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

(A) $S = 32$.

(B) $S = 24$.

(C) $S = 48$.

(D) $S = 64$.

Hướng dẫn:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB , G là trọng tâm tam giác ABC .

Theo bài ra ta có $AM = 10, BN = 8, CP = 6$.

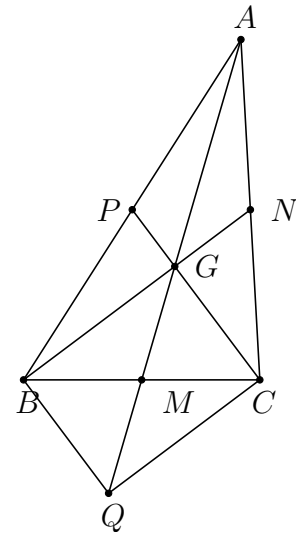
Lấy Q đối xứng với G qua M thì $BGCQ$ là hình bình hành và ta có $BQ = CG = \frac{2CP}{3} = 4, QG = 2GM = \frac{2AM}{3} = \frac{20}{3}$.

Mà $BG = \frac{2BN}{3} = \frac{16}{3}$ nên $QG^2 = BG^2 + BQ^2$ hay $\triangle BGQ$ vuông tại B .

Suy ra $S_{BGQ} = \frac{BG \cdot BQ}{2} = \frac{32}{3}$.

Mà $S_{BGQ} = S_{BGC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 32$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 26. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

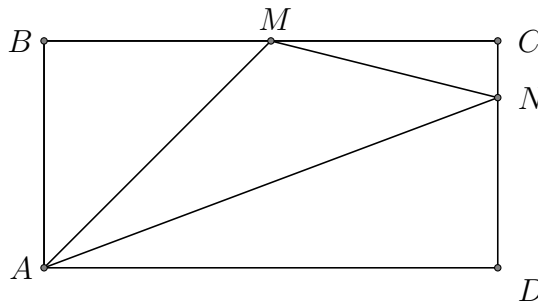
(A) $3\sqrt{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

(C) $5\sqrt{2}$.

(D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn:



Ta có $MN = \sqrt{MC^2 + NC^2} = \sqrt{10}$; $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 5$; $AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{45}$.

Do đó

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

và

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là

$$R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 27. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$. Độ dài đường phân giác AD bằng

A $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}.$

B $\frac{3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}.$

C $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}.$

D $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}.$

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC có

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3}.$$

Lại có

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DAC} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot AC &= \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{2}}{4}(3\sqrt{3}+3) \cdot AD \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{9\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(3\sqrt{3}+3)} \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $AD = \frac{3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}.$

Chú ý: Có thể tính góc B rồi suy ra góc ADB . Áp dụng định lý sin tính AD .

Chọn đáp án **B**

Câu 28. Cho tam giác đều ABC , gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}.$

B $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}.$

C $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}.$

D $\frac{5}{2}.$

Hướng dẫn:

Giả sử cạnh tam giác đều ABC là a ,
($a > 0$).

$$S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6};$$

$$CD = \frac{2}{3}BC = \frac{2a}{3}.$$

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 60^\circ \\ &= a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$R = \frac{AD \cdot CD \cdot AC}{4 \cdot S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6}} =$$

$$\frac{a\sqrt{21}}{9};$$

$$p = \frac{AD + CD + AC}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{3} + \frac{2a}{3} + a}{2} = \frac{a(5 + \sqrt{7})}{6}.$$

$$r = \frac{S_{\triangle ACD}}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{\frac{a(5 + \sqrt{7})}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}};$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{7 + 5\sqrt{7}}{9}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 29. Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì

(A) $\hat{A}$ là góc tù.

(B) $\hat{A}$ là góc vuông.

(C) $\hat{A}$ là góc nhọn.

(D) $\hat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Do $a^2 < b^2 + c^2$ nên $\cos A > 0$.

Vậy $\hat{A}$ là góc nhọn.

Chọn đáp án (C)

Câu 30. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

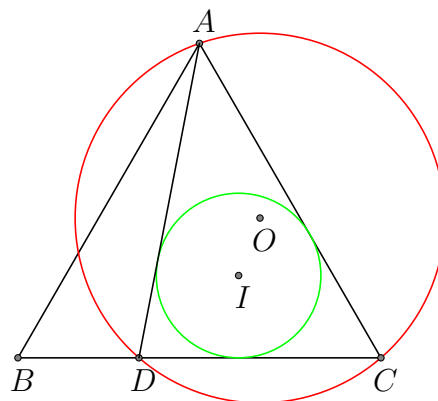
(A) $\frac{12}{5}$.

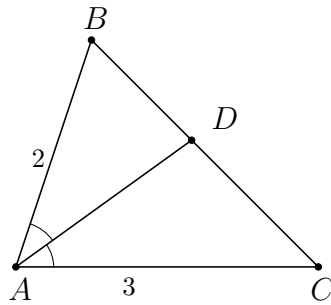
(B) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

(C) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

(D) $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn:





Gọi AD là đường phân giác trong của góc A .

Ta có

$$\begin{aligned}
 S_{ABD} + S_{ACD} &= S_{ABC} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\
 \Leftrightarrow AD \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot (AB + AC) &= AB \cdot AC \cdot \sin A \\
 \Leftrightarrow AD &= \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \cdot \sin \frac{A}{2}} \\
 \Leftrightarrow D &= \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{(2 + 3) \cdot \sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{5}
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

Câu 31. Cho tam giác ABC thay đổi có $BC = a$ và $CA = 2a$ với a là độ dài cho trước. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

- (A) 60° . (B) 90° . (C) 150° . (D) 120° .

Hướng dẫn: Diện tích của tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \sin C = a^2 \cdot \sin C \leq a^2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin C = 1 \Leftrightarrow C = 90^\circ$.

Vậy diện tích của tam giác ABC lớn nhất khi $C = 90^\circ$.

Chọn đáp án **B**

Câu 32. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\triangle ABC$ vuông tại B . (B) $\widehat{ABC} \leq 60^\circ$.
 (C) $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$. (D) $\triangle ABC$ đều.

Hướng dẫn: Ta có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$.

$$\text{Có } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc} \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} \leq 60^\circ.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 33. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm của BC ,

N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

(A) $3\sqrt{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

(C) $5\sqrt{2}$.

(D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}, BM = 3,$$

$$AB = 4 \Rightarrow AM = 5,$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45},$$

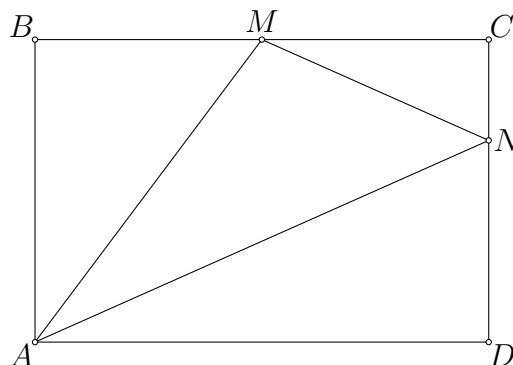
$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2},$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$$

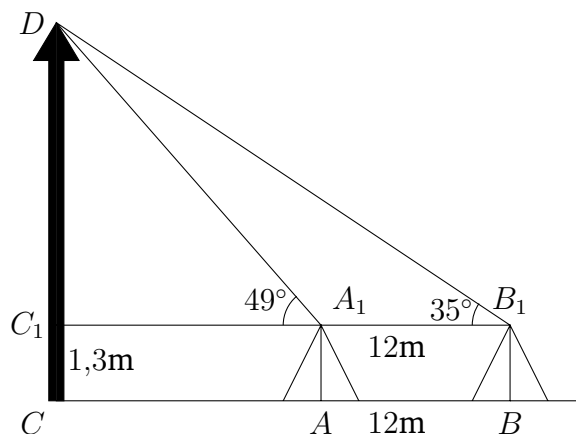
Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN là:

$$R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án (D)



Câu 34. Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



(A) 22,77m.

(B) 21,47m.

(C) 21,77m.

(D) 20,47m.

Hướng dẫn: $\triangle A_1C_1B$ vuông nên $A_1C_1 = DC_1 \cdot \cot \widehat{DA_1C_1} = DC_1 \cdot \cot 49^\circ$.

$\triangle B_1C_1D$ vuông nên $B_1C_1 = DC_1 \cdot \cot \widehat{DB_1C_1} = DC_1 \cdot \cot 35^\circ$.

$$B_1C_1 - A_1C_1 = 12 \Leftrightarrow DC_1 (\cot 35^\circ - \cot 49^\circ) = 12 \Rightarrow DC_1 \approx 21,47.$$

Do đó chiều cao tháp $CD = CC_1 + C_1D \approx 1,3 + 21,47 \approx 22,77\text{m}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 35. Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 300(N) và 400(N). $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp

tác động vào vật.

(A) 0(N).

(B) 700(N).

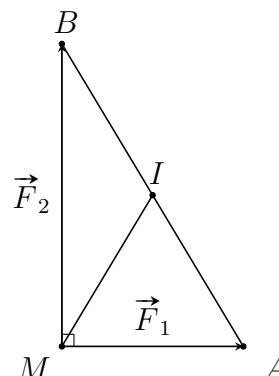
(C) 100(N).

(D) 500(N).

Hướng dẫn:

Cường độ lực tổng hợp là $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MA} + \vec{MB}|$
 $= 2|\vec{MI}| = AB$ (I là trung điểm của AB).

Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$, suy ra $|\vec{F}| = 500(\text{N})$.



Chọn đáp án (D)

3.3.4. Toán thực tế

Câu 36.

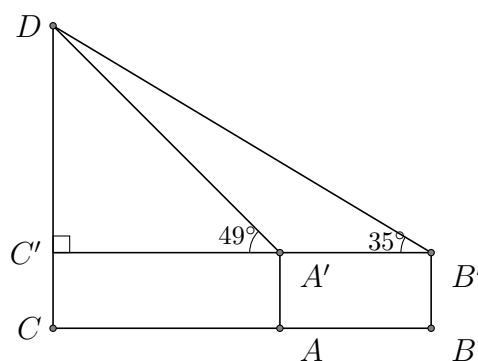
Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A', B' cùng thẳng hàng với C' thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$ và $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$. Chiều cao CD của tháp là? (làm tròn đến hàng phần trăm).

(A) 21,77 m.

(B) 22,77 m.

(C) 21,47 m.

(D) 20,47 m.



Hướng dẫn: Ta có $CC' = 1,3$ m.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle A'B'D$ ta được

$$\frac{B'D}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D})} = \frac{A'B'}{\sin(180^\circ - \widehat{B'A'D} - 35^\circ)} \Leftrightarrow \frac{B'D}{\sin 131^\circ} = \frac{12}{\sin 14^\circ} \Leftrightarrow B'D = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 14^\circ}.$$

Xét $\triangle B'C'D$ có

$$C'D = B'D \cdot \sin 35^\circ = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 21,47 \text{ m.}$$

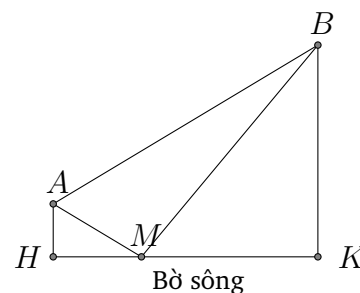
Độ dài $CD = C'D + CC' \approx 22,77$ m.

Chọn đáp án **B**

Câu 37.

Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông lấy nước mang về B . Tính đoạn đường ngắn nhất mà người ấy có thể đi.

- (A) 779,8 m. (B) 671,4 m. (C) 741,2 m. (D) 596,5 m.



Hướng dẫn:

Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên bờ sông, lấy A' đối xứng với A qua bờ HK . Nối $A'B$ cắt bờ HK tại M . Suy ra $AM = A'M$.

Ta có $AM + MB = A'M + MB \geq A'B$ nên quãng đường ngắn nhất người đó đi là $AM + MB = A'B$.

Kẻ $AC \perp BK$ tại $C \Rightarrow AHKC$ là hình chữ nhật có $CK = AH = 118$ m.

Suy ra $CB = BK - CK = 487 - 118 = 369$ m.

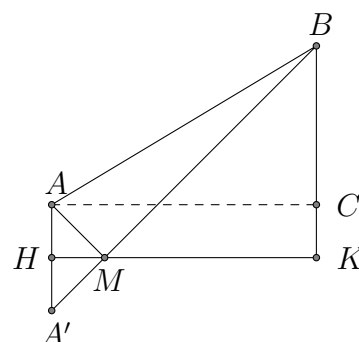
Tam giác CAB vuông tại $C \Rightarrow AC = HK = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 492$ m.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } HA' // BK &\Rightarrow \frac{HM}{MK} = \frac{A'M}{MB} = \frac{A'H}{BK} = \frac{118}{487} \\ \Rightarrow \frac{HM}{MK} &= \frac{118}{487} \Rightarrow \frac{HM}{HM + MK} = \frac{118}{118 + 487} = \frac{118}{605} \Leftrightarrow \\ \frac{HM}{HK} &= \frac{118}{605} \\ \Leftrightarrow \frac{HM}{492} &= \frac{118}{605} \Rightarrow HM = \frac{58056}{605}. \end{aligned}$$

Xét tam giác HMA' có $MA' = \sqrt{HM^2 + HA'^2} = \sqrt{\left(\frac{58056}{605}\right)^2 + 118^2} \approx 152,093$.

$$\text{Từ đó } \frac{A'M}{MB} = \frac{118}{487} \Rightarrow \frac{A'M}{A'M + MB} = \frac{118}{118 + 487} \Leftrightarrow \frac{A'M}{A'B} = \frac{118}{605} \Leftrightarrow A'B = \frac{A'M \cdot 605}{118} \approx 779,8 \text{ m.}$$

Chọn đáp án **A**



ĐÁP ÁN BÀI 3

1.D	2.B	3.C	4.C	5.C	6.C	7.C	8.D	9.A	10.B
11.A	12.A	13.C	14.B	15.C	16.D	17.B	18.B	19.D	20.B
21.C	22.B	23.B	24.C	25.A	26.D	27.B	28.A	29.C	30.C
31.B	32.C	33.D	34.A	35.D	36.B	37.A			