

TRẮC NGHIỆM 12

TUYỂN CHỌN 2020 - 2021

HUỖNH ĐỨC KHÁNH (chủ biên)

Đăng ký mua trọn bộ trắc nghiệm 12 **FILE WORD**

Liên hệ tác giả HUỖNH ĐỨC KHÁNH - 0975 120 189

<https://www.facebook.com/duckhanh0205>

Khi mua có sẵn file word đề riêng;

file word đáp án riêng thuận tiện cho việc dạy

Ngoài ra còn có

TRẮC NGHIỆM 11 - TUYỂN CHỌN 2020 - 2021 (bản mới nhất)

TRẮC NGHIỆM 10 - TUYỂN CHỌN 2020 - 2021 (bản mới nhất)

CHỦ ĐỀ
1.

**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT
VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Bài 1

**SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN
CỦA HÀM SỐ**

1) Định lí

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K .

Chú ý: Khoảng K trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung thêm giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

2) Định lí mở rộng

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K . Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên K .

Chú ý: Tuy nhiên một số hàm số có $f'(x) = 0$ tại vô hạn điểm nhưng các điểm rời rạc thì hàm số vẫn đơn điệu. Ví dụ: Xét hàm số $y = 2x - \sin 2x$.

Ta có $y' = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ có vô hạn điểm làm cho $y' = 0$ nhưng các điểm đó rời rạc nên hàm số $y = 2x - \sin 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên K . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- D. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

Lời giải. Theo định lí mở rộng thì đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$, với x_1, x_2 bất kỳ thuộc $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải. A sai. Sửa lại cho đúng là " $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".

B sai: Sửa lại cho đúng là " $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

C sai: Sửa lại cho đúng là " $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".

D đúng (theo định nghĩa). **Chọn D.**

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.
- B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $\frac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên $(a;b)$.
- C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x)+2020$ đồng biến trên $(a;b)$.
- D. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x)-2020$ nghịch biến trên $(a;b)$.

Lời giải. Ví dụ hàm số $f(x) = x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, nhưng hàm số $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 4. (ĐHSP Hà Nội lần 3, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x_1) < f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$.
- B. $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$.
- C. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$.
- D. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$.

Lời giải. Từ giả thiết $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó đáp án D đúng. **Chọn D.**

Dạng 2. TÍNH CHẤT

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên $(a;b)$.
- B. Hàm số $y = f(x)+1$ đồng biến trên $(a;b)$.
- C. Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.
- D. Hàm số $y = -f(x)-1$ nghịch biến trên $(a;b)$.

Lời giải. Chọn A. Phép tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không làm thay đổi khoảng đồng biến, nghịch biến. Nhưng tịnh tiến sang trái, sang phải thì thay đổi.

Câu 6. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ thì hàm số $y = f(x+2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(-1;2)$.
- B. $(1;4)$.
- C. $(-3;0)$.
- D. $(-2;4)$.

Lời giải. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2 đơn vị, ta sẽ được đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$. Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên hàm số $y = f(x+2)$ đồng biến trên $(-3;0)$. **Chọn C.**

Cách 2. Từ giả thiết suy ra $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Xét $g(x) = f(x+2)$. Ta có $g'(x) = f'(x+2) \geq 0 \stackrel{\text{giả thiết}}{\Leftrightarrow} -1 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 0$.

Câu 7*. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì hàm số $g = f(2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(0;2)$. B. $(0;4)$. C. $(0;1)$. D. $(-2;0)$.

Lời giải. Chọn C. Từ giả thiết suy ra $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Xét $g(x) = f(2x)$. Ta có $g'(x) = 2f'(2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x) \geq 0 \stackrel{\text{giả thiết}}{\Leftrightarrow} 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + 8x + \cos x$ và hai số thực a, b sao cho $a < b$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(a) = f(b)$. B. $f(a) > f(b)$.
C. $f(a) < f(b)$. D. Không so sánh được $f(a)$ và $f(b)$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó với mọi số thực $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $e \simeq 2,718$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$. B. $f(e) - f(\pi) \geq 0$.
C. $f(e) + f(\pi) < 2f(2)$. D. $f(1) + f(2) = 2f(3)$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

- $\begin{cases} e < 3 \rightarrow f(e) < f(3) \\ \pi < 4 \rightarrow f(\pi) < f(4) \end{cases} \longrightarrow f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$. Vậy A đúng. **Chọn A.**
- $e < \pi \rightarrow f(e) < f(\pi) \rightarrow f(e) - f(\pi) < 0$. Vậy B sai.

Tương tự cho các đáp án C và D.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(-1) > f(1)$. B. $f(-1) = f(1)$. C. $f(-1) \geq f(1)$. D. $f(-1) < f(1)$.

Lời giải. Có $f'(x) = x^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến. Do đó $f(-1) < f(1)$. **Chọn D.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ và hai số thực $u, v \in (0;1)$ sao cho $u > v$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(u) = f(v)$. B. $f(u) > f(v)$.
C. $f(u) < f(v)$. D. Không so sánh $f(u)$ và $f(v)$ được.

Lời giải. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Vẽ bảng biến thiên ta thấy được hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó với $u, v \in (0;1)$ thỏa mãn $u > v \Rightarrow f(u) < f(v)$. **Chọn C.**

Câu 12. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

- A. $\begin{cases} a = b = 0; c < 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = b = 0; c < 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải. Quan sát các đáp án, ta sẽ xét hai trường hợp là: $a = b = 0$ và $a \neq 0$.

- Nếu $a = b = 0$ thì $y = cx + d$ là hàm bậc nhất $\rightarrow$ để y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $c > 0$.
- Nếu $a \neq 0$, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Dạng 3. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 13. [KHTN Hà Nội lần 1, năm 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	$-\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 14. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-2;0)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(0;2)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 15. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	$-0,5$		3	$+\infty$
y'	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	-2	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2; +\infty)$ và $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; 2)$.

Lời giải. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$, mà $(0; 2) \subset (-1; 2)$ nên suy ra C đúng.

Chọn C.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3		-2		$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		0		5	$-\infty$

Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

- i) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.
 ii) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.
 iii) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 iv) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

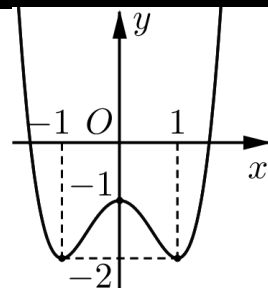
Lời giải. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Suy ra ii) Sai; iii) Đúng; iv) Đúng và i) Đúng (vì $(-\infty; -5) \subset (-\infty; -2)$). **Chọn A.**

Dạng 4. ĐỒ THỊ HÀM $f(x)$

Câu 19. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

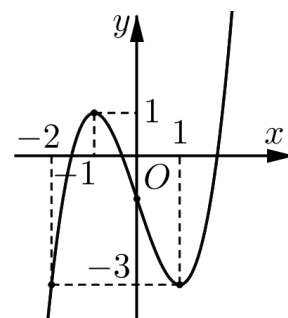
- A. $(0;1)$.
B. $(-\infty;1)$.
C. $(-1;1)$.
D. $(-1;0)$.



Lời giải. Chọn D.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có kết quả: Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$ nên các mệnh đề **A, B, C** đúng.

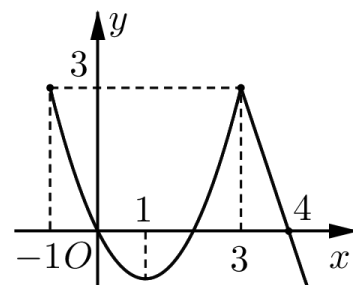
Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì mệnh đề **D** sai.

Ví dụ: Ta lấy $-1,1 \in (-\infty;-1)$, $1,1 \in (1;+\infty)$: $-1,1 < 1,1$ nhưng $f(-1,1) > f(1,1)$.

Chọn D.

Câu 21. (Đại học Vinh lần 2, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

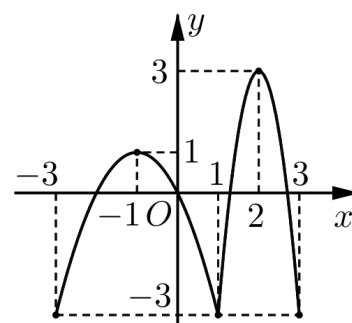
- A. $(2;4)$.
B. $(0;3)$.
C. $(2;3)$.
D. $(-1;4)$.



Lời giải. Chọn C.

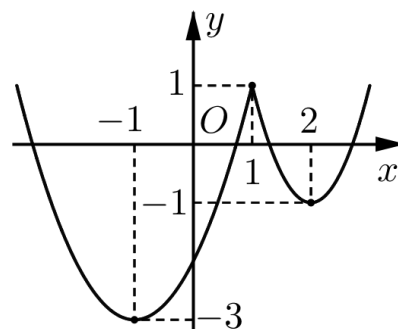
Câu 22. (Đại học Vinh lần 3, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(0;2)$.
B. $(-2;0)$.
C. $(-3;-1)$.
D. $(2;3)$.



Lời giải. Chọn D.

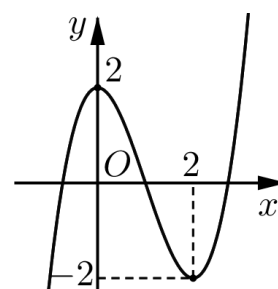
Câu 23. (Đại học Vinh lần 1, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?



- A. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- B. Đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- C. Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 24*. (Đại học Vinh lần 3, năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- A. $(1; 2)$.
- B. $(-\infty; 2)$.
- C. $(2; +\infty)$.
- D. $(-2; 2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -2f'(x)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Rightarrow g'(x) \geq 0$ hay $-2.f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. **Chọn A.**

Dạng 5. XÉT KHOẢNG ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến $(1; +\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 26. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 3)$.
- B. $(-\infty; -3)$ hoặc $(1; +\infty)$.
- C. $(-\infty; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -1)$ hoặc $(3; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$. **Chọn A.**

Câu 27. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số?

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^3$.

Lời giải. Để hàm số nghịch biến trên toàn trục số thì hệ số của x^3 phải âm. Do đó A & D không thỏa mãn.

Xét B: Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số này luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 28. (ĐỀ MINH HỌA 2016-2017) Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 8x^3$. Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' \geq 0 \Rightarrow 8x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. **Chọn D.**

Câu 29. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; 0)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Vì $(2; +\infty) \subset (1; +\infty)$ nên đáp án D đúng. **Chọn D.**

Câu 30. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Lời giải. Hàm trùng phương không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó ta loại C & D.
Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ số thì hệ số của x^3 phải âm. Do đó loại A.

Vậy chỉ còn lại đáp án B. **Chọn B.**

Thật vậy: Với $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1 \longrightarrow y' = -3x^2 + 2x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 31. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Cho hàm $y = \frac{x-2}{x+1}$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$. **Chọn B.**

Câu 32. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- B. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. **Chọn C.**

Chú ý: Sai lầm hay gặp là chọn A hoặc B. Lưu ý rằng khi kết luận hàm bậc nhất trên bậc nhất là đồng biến (nghịch biến) trên từng khoảng xác định.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$. **Chọn D.**

Bình luận: Hàm số đồng biến trên tất cả các khoảng con của các khoảng đồng biến của hàm số. Cụ thể trong bài toán trên:

- Hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$;

- $(1; +\infty) \subset (-2; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 34. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 3x^3 + 3x - 2$.

B. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

C. $y = x^4 + 3x^2$.

D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải. Đặc trưng hàm trùng phương là không đồng biến trên $\mathbb{R}$. Loại C.

Hàm bậc nhất trên bậc nhất cũng không đồng biến trên $\mathbb{R}$. Loại D.

Xét đáp án A, ta có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 35. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $y' < 0 \Leftrightarrow x < 0$ và $y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$, đồng biến trên $(0; +\infty)$. **Chọn B.**

Câu 36. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào đã cho dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [0; 2]$. Đạo hàm: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'			+	0	-
y					

Dựa vào BBT, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. **Chọn B.**

Câu 37. Cho hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [1;4]$. Đạo hàm: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ x-1 = 4-x \end{cases} \longrightarrow x = \frac{5}{2} \in (1;4)$.

Lập bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. **Chọn C.**

Câu 38*. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = 2x - \cos 2x - 5$.

C. $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

D. $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Lời giải. **Chọn B.** Vì $y' = 2 + 2\sin 2x = 2(\sin 2x + 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$.

Phương trình $\sin 2x = -1$ có vô số nghiệm nhưng các nghiệm tách rời nhau nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 39. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x}{x+1}$.

B. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y = x^2 - 5x + 3$.

D. $y = \tan x$.

Lời giải. Xét hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 40*. (ĐHSP Hà Nội lần 1, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = (1-x^2)^{2019}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = 2019 \cdot (-2x)(1-x^2)^{2018}$.

Do $(1-x^2)^{2018} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. **Chọn A.**

Dạng 6. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Câu 41. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 3$. C. $-1 \leq m \leq 3$. D. $m < 3$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + m$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (y' = 0 \text{ có hữu hạn nghiệm}) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn B.

Cách giải trắc nghiệm. Quan sát ta nhận thấy các giá trị m cần thử là:

✓ $m = 3$ thuộc B & C nhưng không thuộc A, D.

✓ $m = 2$ thuộc C & D nhưng không thuộc A, B.

• Với $m = 3 \longrightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \longrightarrow y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó ta loại A và D.

• Với $m = 2 \longrightarrow y = x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \longrightarrow y' = 3x^2 + 6x + 2$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt nên $m = 2$ không thỏa.

Câu 42. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (y' = 0 \text{ có hữu hạn nghiệm})$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-9; -8; \dots; -3\}. \text{ Chọn D.}$$

Sai lầm hay gặp là "Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ". Khi đó ra giải ra $-9 < m < -3$ và chọn B.

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = -4$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = mx^2 - 4x + m + 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (y' = 0 \text{ có hữu hạn nghiệm}):$

TH1: • $m = 0$ thì $y' = -4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2: • $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta'_{y'} = -m^2 - 3m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m = 1$. **Chọn D.**

Câu 44. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TH1: • $m = 1$. Ta có $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2: • $m = -1$. Ta có $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: • $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm)

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$. **Chọn C.**

Câu 45. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $\left[-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. D. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Cách 1. (So sánh nghiệm) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$.

TH1: $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 36 + 3(4m - 9) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$.

TH2: $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > -2 \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 > -2 \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \end{cases} : \text{vô lý.}$$

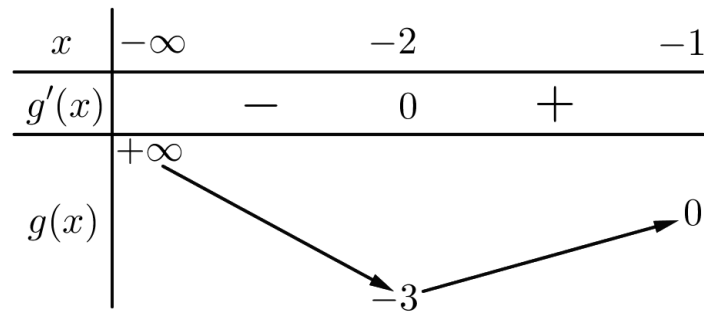
Vậy $m \leq -\frac{3}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Cách 2. (Phương pháp hàm số) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 + 12x + 9}{4}, \forall x \in (-\infty; -1). \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 12x + 9; g'(x) = 6x + 12$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta có $(*) \Leftrightarrow m \leq \frac{\min_{(-\infty; -1)} g(x)}{4} = -\frac{3}{4}$.

Nhận xét: 1) Phương pháp hàm số chỉ dùng được khi cô lập tham số m dễ dàng.
 2) Phương pháp hàm số chỉ tham khảo thêm vì bài này chưa học tới.

Câu 46*. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2; +\infty)$.

- A. $m < 5$. B. $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $m > -2$. D. $m < \frac{3}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Hàm số đồng biến trên $[2; +\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m+1)}{3} < 4 \\ -\frac{(2m^2 - 3m + 2)}{3} - 2 \cdot \frac{2(m+1)}{3} + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Nhận xét: 1) Nếu đề bài yêu cầu hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ thì yêu cầu bài toán vẫn là $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 2$.

2) Có thể giải như sau:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{m+1 - \sqrt{7(m^2 - m + 1)}}{3} < x_2 = \frac{m+1 + \sqrt{7(m^2 - m + 1)}}{3}.$$

$$\text{Do đó ycbt} \Leftrightarrow \frac{m+1 + \sqrt{7(m^2 - m + 1)}}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{7(m^2 - m + 1)} \leq 5 - m \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 47*. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

A. $m \geq \frac{12}{7}$. B. $m \leq \frac{12}{7}$. C. $m \geq 1$. D. $1 \leq m \leq \frac{12}{7}$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3$. Có $\Delta' = m^2 - m + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Hàm số đồng biến trên $(0;3) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1.y'(0) \leq 0 \\ -1.y'(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \geq 0 \\ -9+6(m-1)+m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2. (Phương pháp hàm số)

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3 \geq 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0;3). (*)$$

$$\text{Khảo sát hàm } g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1} \text{ trên } [0;3], \text{ ta được } \max_{[0;3]} g(x) = g(3) = \frac{12}{7}.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Câu 48*. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)]$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(m)$	$f(m+2)$	$+\infty$	

Dựa vào BBT, ta có YCBT $\Leftrightarrow [0;1] \subset [m; m+2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$. **Chọn C.**

Câu 49*. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

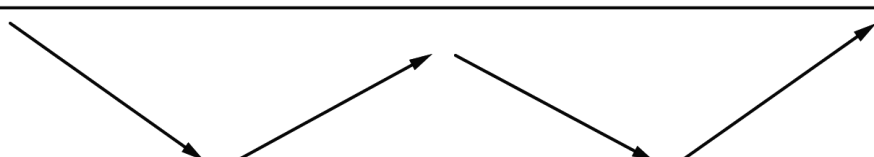
A. $1 < m < 2$. B. $1 < m \leq 2$. C. $m \leq 1$. D. $m \leq 2$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x[x^2 - (m-1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases}$.

• Nếu $m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \longrightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 0 \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1;3)$. Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn.

- Nếu $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m-1} \\ x = \sqrt{m-1} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Dựa vào bảng biến thiên, ta có YCBT $\Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2 \xrightarrow{m>1} 1 < m \leq 2$.
Hợp hai trường hợp ta được $m \leq 2$. **Chọn D.**

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

TH1: • $m \leq 0 \longrightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua điểm $x = 0 \longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

TH2: • $m > 0 \longrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt: $-\sqrt{m}$; 0 ; $\sqrt{m}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{m}; 0)$ và $(\sqrt{m}; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; \sqrt{m})$ và $(0; \sqrt{m})$. Do đó trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Cách khác. Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hàm số chỉ có một cực trị $\Leftrightarrow a.b \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ nhưng vấn đề cực trị ở bài này chưa học.

Câu 51. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq m$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{0; 1; 2\}$. **Chọn A.**

Nhận xét: Sai lầm hay gặp là cho $y' \geq 0, \forall x \neq m \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 52. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2017-2018] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m > 2$. D. $m \geq 2$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Với $-m+1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' < 0, \forall x \neq m \longrightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

YCBT $\Leftrightarrow (-\infty; 2) \subset (-\infty; m) \Leftrightarrow m \geq 2$: (thỏa mãn). **Chọn D.**

Cách 2. YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x < 2 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \neq (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 53. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 35. B. 40. C. 45. D. 55.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2m} \right\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2-10m}{(2mx+1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ x \neq \frac{-1}{2m} \end{cases}, \forall x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ \frac{-1}{2m} \notin (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m < 0 \\ \frac{-1}{2m} \leq 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 < m < 10 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$. **Chọn C.**

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2-mx-1}{1-x}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.

- A. $m < 0$. B. $m \geq 0$. C. $m = 0$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2+2x-m-1}{(1-x)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -x^2+2x-m-1 \leq 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x^2-2x+1+m \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ -4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 55*. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $[1; +\infty)$. B. $(3; +\infty)$. C. $[2; 3)$. D. $(-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

Lời giải. Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y(t) = \frac{t-2}{t-m+1} \longrightarrow y'(t) = \frac{3-m}{(t-m+1)^2}$.

Ta có $t' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, suy ra $t = \tan x$ **đồng biến** trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow y'(t) > 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ t-m+1 \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \neq t \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 2 \leq m < 3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 56*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- A. $m \geq -1$. B. $m > -1$. C. $m < -1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \longrightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y(t) = \frac{t+m}{t-1} \longrightarrow y'(t) = \frac{-1-m}{(t-1)^2}$.

Ta có $t' = \cos x < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, suy ra $t = \sin x$ **nghịch biến** trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow y'(t) > 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m > 0 \\ t-1 \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$. **Chọn C.**

Nhận xét. Khi ta đặt ẩn t , nếu t là hàm đồng biến trên khoảng đang xét thì giữ nguyên câu hỏi trong đề bài. Còn nếu t là hàm nghịch biến thì ta làm ngược lại câu hỏi trong đề bài.

Câu 57*. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m

thuộc $[-5; 5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{1-x}$, với $x \in (-3; 0) \longrightarrow t \in (1; 2)$.

Hàm số trở thành $f(t) = \frac{t+1}{t+m} \longrightarrow f'(t) = \frac{m-1}{(t+m)^2}$.

Ta có $t' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0, \forall x \in (-3;0)$. Suy ra $t = \sqrt{1-x}$ **nghiệch biến** trên $(-3;0)$.

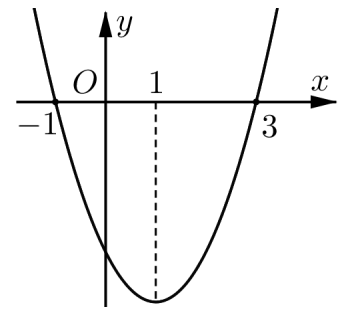
Do đó YCBT $\Leftrightarrow f(t)$ **nghiệch biến** trên $(1;2) \Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ t+m \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ -m \neq t \end{cases}, \forall t \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ -m \notin (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ -m \geq 2 \\ -m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 1 \\ m \leq -2 \end{cases} \xrightarrow[m \in [-5;-5]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-5; -4; \dots; 0\}. \text{ Chọn C.}$$

Dạng 7. ĐỒ THỊ HÀM $f'(x)$

Câu 58*. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có nhận xét:

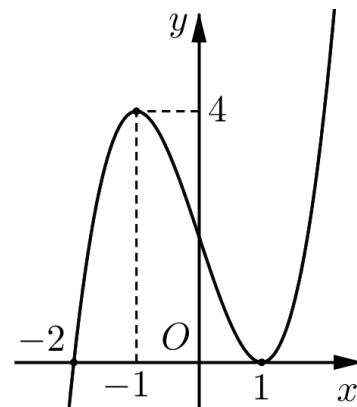
- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua điểm $x = -1$.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 3$.

Do đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$		$f(-1)$	$f(3)$	

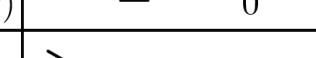
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đáp án B đúng. **Chọn B.**

Câu 59*. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây sai?



- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải. Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Từ BBT suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1) \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

Do đó đáp án B sai. **Chọn B.**

Câu 60*. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x+2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải. Chọn A. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem kép)} \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

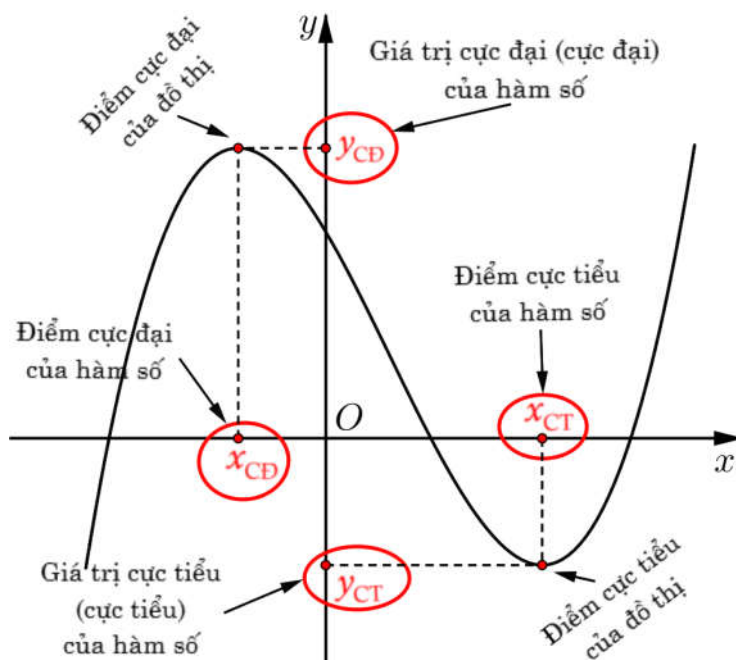
b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.



CHÚ Ý

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a; b)$ nào đó chứa điểm chứa x_0 .

- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số f** .
- Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÝ 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÝ 2

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

ĐỊNH LÝ 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

4. Quy tắc tìm cực trị

QUY TẮC 1

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị

Ví dụ: Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

Lời giải. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$ $\searrow -\frac{23}{3}$		$\nearrow$ $+\infty$		

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-1) = 3$;

hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(3) = -\frac{23}{3}$.

QUY TẮC 2

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.

2. Tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.

3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Ví dụ: Áp dụng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

Lời giải. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3;$$

$$f''(x) = 2x - 2.$$

Vì $f''(-1) = -4 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, $f(-1) = 3$.

Vì $f''(3) = 4 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, $f(3) = -\frac{23}{3}$.

Dạng 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a;b)$.
- B. Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a;b)$.
- C. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a;b)$ thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song hoặc trùng với trục hoành.
- D. Nếu $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0 \in (a;b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a;x_0)$ và nghịch biến trên $(x_0;b)$.

Lời giải. Các mệnh đề A, B, C đều đúng theo định nghĩa trong SGK.

Xét mệnh đề D. Vì mệnh đề này chưa chỉ rõ ngoài $x_0 \in (a;b)$ là cực đại của $f(x)$ thì còn có cực trị nào khác nữa hay không. Nếu có thêm điểm cực đại (hoặc cực tiểu khác) thì tính đơn điệu của hàm sẽ bị thay đổi theo.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2$. Ta có $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0 = 0 \in (-2;2)$, nhưng $f(x)$ không đồng biến trên $(-2;0)$ và cũng không nghịch biến trên $(0;2)$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 , hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ (có thể trừ điểm x_0). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0 .
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

Lời giải. Chọn D (theo định lý SGK). Các mệnh đề còn lại sai vì:

A sai, ví dụ hàm $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x = 0$.

B thiếu điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0 .

C sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng K và $x_0 \in K$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu x_0 là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu $f''(x_0) = 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
- C. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x_0) \neq 0$.

Lời giải. Chọn C. Các mệnh đề còn lại sai vì:

A sai, vì theo định lí SGK không có chiều ngược lại. Có thể lấy ví dụ cho hàm $y = x^4$.

B sai, lấy phản ví dụ. Cụ thể hàm $y = x^3$.

D sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?

- i) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- ii) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- iii) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.
- iv) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì chưa kết luận được x_0 có là điểm cực trị của hàm số.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Các khẳng định i), ii) và iv) là đúng; khẳng định iii) là sai. **Chọn B.**

Câu 5. (ĐHSP Hà Nội lần 4, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- i) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$ thì $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.
- ii) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$ thì $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.
- iii) Nếu $f''(x_0) = 0$ thì hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = x_0$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = x^4$. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3$ và $f''(x) = 12x^2$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{khi } x < 0 \\ f'(x) > 0 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ nên hàm số $f(x) = x^4$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ nhưng $f''(0) = 0$. Do đó i) và iii) đều sai.

Tương tự, xét hàm số $f(x) = -x^4 \longrightarrow$ ii) sai. **Chọn A.**

Dạng 2. ĐỒ THỊ HÀM $f(x)$

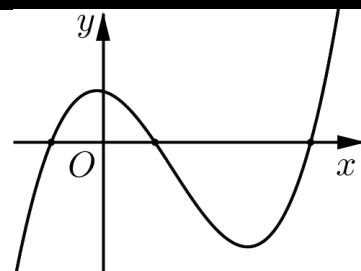
Câu 6. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2017-2018] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



Lời giải. Chọn C.

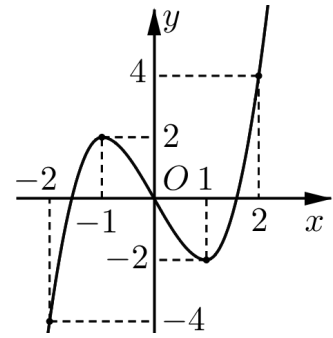
Câu 7. [ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016-2017] Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.



Lời giải. Chọn B.

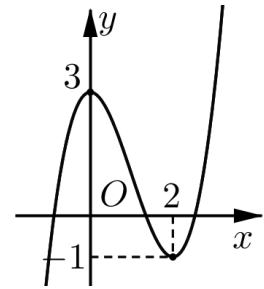
Câu 8. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .

B. Điểm cực tiểu của hàm số là -1 .

C. Điểm cực đại của hàm số là 3 .

D. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0 .



Lời giải. Chọn A.

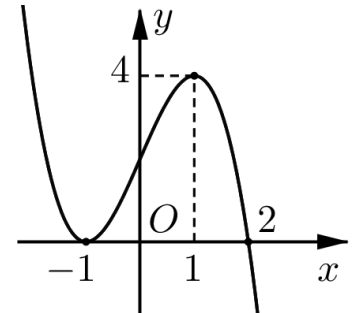
Câu 9. [ĐHSP Hà Nội lần 3, năm 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $y_{CT} = 0$.

B. Hàm số không có điểm cực tiểu.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 4$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 0$.



Lời giải. Chọn A.

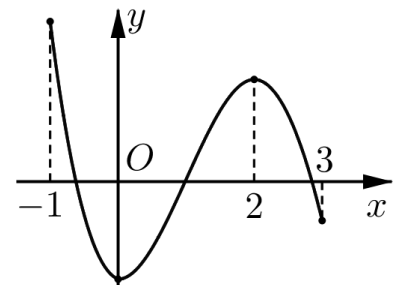
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị hàm số như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = 0$, $x = 3$.

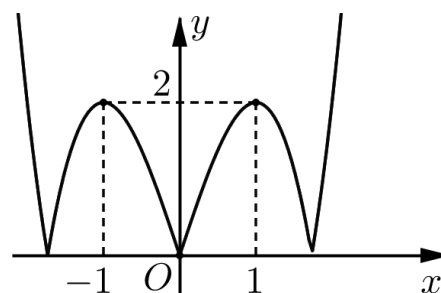
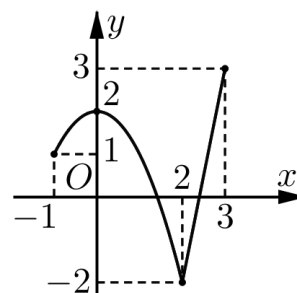
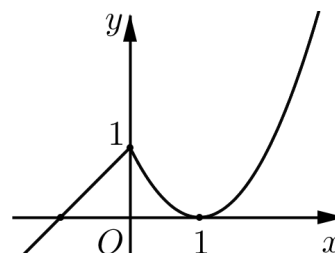
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.

D. Hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1$, $x = 2$.



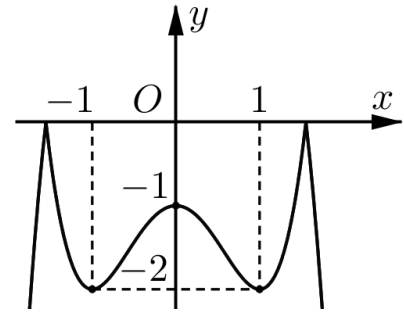
Lời giải. Chọn A.

Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\longrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt. **Chọn D.**



Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu giá trị cực trị?

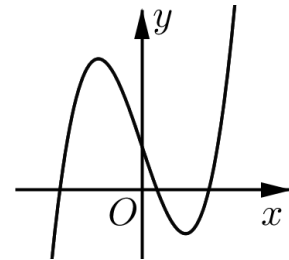
- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Lời giải. Hàm số có 3 giá trị cực trị là: $-2, -1, 0$. **Chọn B.**

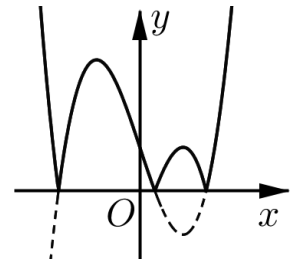
Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu giá trị cực trị?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Lời giải. ĐTHS $y = |f(x)|$ suy ra từ ĐTHS $y = f(x)$ bằng cách:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành;
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

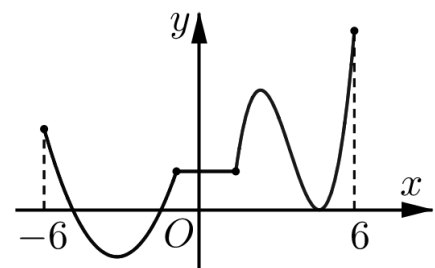


Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, ta thấy có 3 giá trị cực trị. **Chọn B.**

Chú ý: Nếu đề bài hỏi điểm cực trị thì ta kết luận có 5 điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-6;6]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hỏi trên đoạn $[-6;6]$ hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

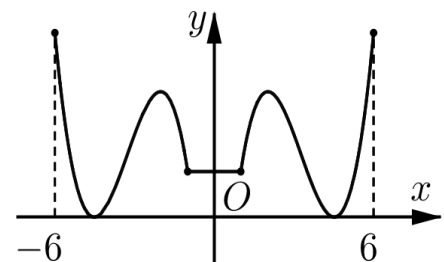
- A. 4.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 7.



Lời giải. ĐTHS $y = f(|x|)$ được suy ra từ ĐTHS $y = f(x)$ bằng cách:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải trục tung (xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung);
- Lấy đối xứng phần vừa giữ trên qua trục tung.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, ta thấy có 4 điểm cực trị. **Chọn A.**



Dạng 3. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 18. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải. Chọn B.

Câu 19. [ĐỀ THAM KHẢO 2017-2018] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	$-\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 5$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 20. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	$-\infty$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Lời giải. Chọn D.

Câu 21. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 0

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số có hai điểm cực tiểu. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
C. Hàm số có ba điểm cực trị. D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Lời giải. Chọn B.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-3			$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -4 -4

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có ba giá trị cực trị.
B. Hàm số có ba điểm cực trị.
C. Hàm số có hai điểm cực trị.
D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Lời giải. Chọn B. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

- Hàm số có ba điểm cực trị, gồm các điểm $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$ vì đạo hàm y' đổi dấu đi qua các điểm đó.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$.

(đáp án A sai vì hàm số chỉ có hai giá trị cực trị là $y_{\text{CD}} = -3$ và $y_{\text{CT}} = -4$. Nếu nói đến đồ thị hàm số thì khi đó mới có ba điểm cực trị là $A(0; -3)$, $B(-1; -4)$, $C(1; -4)$.)

Câu 23. [Đại học Vinh lần 2, năm 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định $(-\infty; 2]$ và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	2
$f(x)$		2		-1		2	1

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số có hai điểm cực tiểu. B. Hàm số có hai điểm cực đại.

C. Giá trị cực tiểu bằng -1 .

D. Giá trị cực đại bằng 2 .

Lời giải. Chọn A.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = -3$ và $x = 2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị. ($x = 1$ không là điểm cực trị vì $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x = 1$). **Chọn C.**

Câu 25. [Đại học Vinh lần 1, năm 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	-3	-1		0		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đạt cực tiểu tại $x = 0$.

B. Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

C. Đạt cực đại tại $x = -1$.

D. Đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải. • $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua $x = -1$ và $x = 2$ nên đạt cực đại tại hai điểm này.

- $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua $x = 1$ nên đạt cực tiểu tại điểm này.
- $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên không đạt cực trị tại điểm này. **Chọn A.**

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_2\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	x_0		x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(x_0)$	$f(x_1)$		$-\infty$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Lời giải. • Tại $x = x_2$, hàm số $y = f(x)$ không xác định nên không đạt cực trị tại điểm này.

- Tại $x = x_1$, hàm số đạt cực đại tại điểm này.
- Tại $x = x_0$, hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng liên tục tại x_0 nên hàm số đạt cực trị tại x_0 và theo bảng biến thiên thì x_0 là cực tiểu.

Vậy hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu. **Chọn D.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(x_2)$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- B. Hàm số đã cho không có cực trị.
- C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- D. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua điểm x_1 nhưng tại x_1 hàm số $f(x)$ không xác định nên x_1 không phải là điểm cực đại.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi đi qua điểm x_2 suy ra x_2 là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn A.**

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

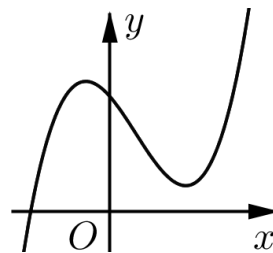
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất và đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị (hình vẽ).

Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**



Câu 29*. [KHTN lần 2, năm 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -1 3 -2

Biết $f(0) > 0$. Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

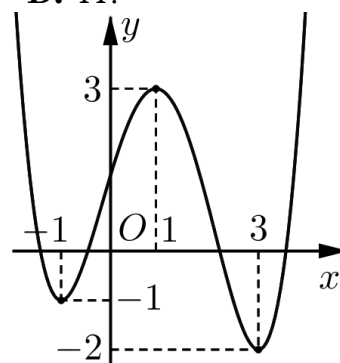
B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải. Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có thể vẽ phát họa đồ thị hàm số $f(x)$ như hình bên, mục đích để làm trắc nghiệm cho nhanh.

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$ trước và tiếp tục suy ra đồ thị hàm số $|f(|x|)|$. **Chọn C.**



Chú ý: Nếu đề cho $f(0) < 0$ thì ta chọn đáp án D.

Câu 30*. [Đại học Vinh lần 1, năm 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$f(x)$							

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 1 -2 1

Hàm số $g(x) = f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = 1$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(2x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 0 \xrightarrow{\text{BBT}} \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-0,5$		0		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Dựa vào BTT, ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$ và tại $x = 1$. **Chọn D.**

Nhận xét: 1) Đây là bài toán thuộc dạng VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO. Khi gặp những bài hàm hợp như thế này thì ta đi tính đạo hàm và lập BBT cho hàm hợp. Sau đó dựa vào BBT để kết luận.

2) Cách xét dấu $g'(x)$ như sau:

- Trước tiên tìm nghiệm của $g'(x) = 0$ và xác định rõ từng nghiệm là nghiệm bội lẻ (qua nghiệm đổi dấu) hay nghiệm bội chẵn (qua nghiệm không đổi dấu).
- Sau đó ta áp dụng xét dấu nhanh. Cụ thể trong bài toán trên ta xét trên khoảng $(1; +\infty)$, chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$. Ta cần tính $g'(2)$ mang dấu "+" hay "-". Ta có $g'(2) = 2f'(4)$, mà $f'(4) < 0$ (vì BBT cho trong đề bài chứng tỏ $f(x)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$). Do đó $g'(2) < 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$						

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 3f'(x)$.

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
 Vậy điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $x = \pm 1$. **Chọn C.**

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	↗ 3	↘ -1	↗ 2	↘ $-\infty$	

Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \xrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$.
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	−	+	0	−
$g(x)$	$-\infty$					

Diagram illustrating the function $g(x)$ and its derivative $g'(x)$ across intervals defined by critical points $x = 1, 2, 3$.

The derivative $g'(x)$ is positive on $(-\infty, 1)$, zero at $x = 1$, negative on $(1, 2)$, positive on $(2, 3)$, zero at $x = 3$, and negative on $(3, +\infty)$.

The function $g(x)$ is increasing on $(-\infty, 1)$, decreasing on $(1, 2)$, increasing on $(2, 3)$, and decreasing on $(3, +\infty)$. The function has local minima at $x = 1$ and $x = 3$, and a local maximum at $x = 2$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Dạng 4. TÌM ĐIỂM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU CỦA HÀM SỐ

Câu 33. Tìm các điểm cực trị x_0 của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

- A. $x_0 = -3$ và $x_0 = -\frac{1}{3}$. B. $x_0 = 0$ và $x_0 = \frac{10}{3}$.
 C. $x_0 = 0$ và $x_0 = -\frac{10}{3}$. D. $x_0 = 3$ và $x_0 = \frac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 10x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 34. Tìm các điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

- A. (0;0) và (1;-2). B. (0;0) và (2;4).
C. (0;0) và (2;-4). D. (0;0) và (-2;-4).

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y(0)=0 \\ x=2 \rightarrow y(2)=-4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 35. Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 = 0$. C. $x_0 = 1$. D. $x_0 = 3$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		3	↘		$+\infty$
				-1			

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. **Chọn A.**

Câu 36. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 4.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		4	↘		$+\infty$
				0			

Vậy giá trị cực đại của hàm số bằng 4. **Chọn D.**

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 3)^2$. Giá trị cực đại của hàm số $f'(x)$ bằng

- A. -8. B. $\frac{1}{2}$. C. 8. D. 9.

Lời giải. Ta có $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9 \longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x = g(x)$.

Bài toán yêu cầu tìm giá trị cực đại của hàm $g(x) = 4x^3 - 12x$.

Đạo hàm $g'(x) = 12x^2 - 12$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vẽ BBT, ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 8. **Chọn C.**

Nhận xét. Rất nhiều học sinh đọc đề không kỹ đi tìm giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và dẫn tới chọn đáp án D.

Câu 38. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $M(0; -1)$. B. $N(1; -10)$. C. $P(1; 0)$. D. $Q(-1; 10)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y(-1) = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y(3) = -26 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số đã hai điểm cực trị là $A(-1; 6)$ và $B(3; -26)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị chính là đường thẳng AB có phương trình $d: y = -8x - 2$. Suy ra $N(1; -10) \in d$. **Chọn B.**

Cách 2. Lấy y chia cho y' , ta được phần dư là $y = -8x - 2$. Đây chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Câu 39. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = \frac{1}{4}$. D. $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải. Xét hàm $y = x^3 - 3x^2 + 1$, có $y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y(0) = 1 \\ x = 2 \rightarrow y(2) = -3 \end{cases}$.

Suy ra $A(0; 1)$, $B(2; -3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB} = (2; -4) \longrightarrow$ VTPT $\vec{n}_{AB} = (2; 1)$.

Đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ có một VTPT là $\vec{n}_d = (2m - 1; -1)$.

YCBT $\Leftrightarrow \vec{n}_{AB} \cdot \vec{n}_d = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$. **Chọn D.**

Câu 40. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Lời giải. Ta có $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$						$-\infty$

$\nearrow 4 \searrow 3 \nearrow 4 \searrow -\infty$

Từ BBT, ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại. **Chọn D.**

Cách 2. (Cách trắc nghiệm) Ta có $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab < 0 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị. Vì $a = -1 < 0$ nên đồ thị có dạng chữ M. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Câu 41. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 4$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y(0) = 3 \\ x = \pm 1 \rightarrow y(\pm 1) = 2 \end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;3)$, $B(1;2)$, $C(-1;2)$.

Gọi H là trung điểm $BC \longrightarrow \begin{cases} H(0;2) \\ AH \perp BC \end{cases}$. Khi đó $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 1$. **Chọn B.**

Câu 42. Hàm số $y = x^5 + 2x^3 - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $y' = 5x^4 + 6x^2 = 0$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 + 6) = 0$. Phương trình $y' = 0$ không có nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho không có điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 43. Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \neq 0$.

Ta có $\begin{cases} y' > 0, \forall x > 0 \\ y' < 0, \forall x < 0 \end{cases} \longrightarrow y'$ đổi dấu khi qua $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn B.**

Câu 44. Hàm số $y = |x|^3 - 3x + 1$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Do đó $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ và $y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$, giá trị cực đại bằng $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 47. Biết rằng trên khoảng $(0; 2\pi)$ hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 3. B. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$. C. $\sqrt{3} + 1$. D. $\sqrt{3} - 1$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = a \cos x - b \sin x + 1$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$ nên $\begin{cases} y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1 = 0 \\ -a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow a + b = \sqrt{3} + 1. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 48. Hàm số $y = (x^2 - 4)^2(1 - 2x)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 6.

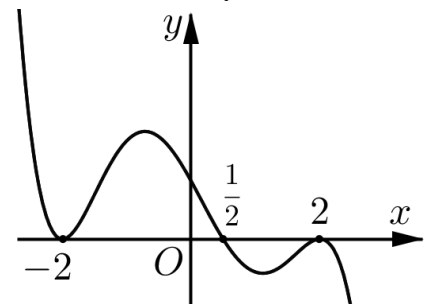
Lời giải. Đạo hàm: $y' = 2 \cdot 2x(x^2 - 4)(1 - 2x)^3 + (x^2 - 4)^2 \cdot 3 \cdot (-2)(1 - 2x)^2$
 $= (1 - 2x)^2(x^2 - 4) \cdot [4x(1 - 2x) - 6(x^2 - 4)] = -2(1 - 2x)^2(x^2 - 4)(7x^2 - 2x - 12)$.

Phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn nên hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn C.**

Cách 2. (Phương pháp trắc nghiệm) Vẽ phác họa đồ thị hàm số bằng cách:

- Cho $y = 0$ tìm được nghiệm kép $x = 2$, nghiệm kép $x = -2$, nghiệm bội ba $x = 0, 5$.
- Hệ số của bậc cao nhất khi nhân ra âm.

Từ đó ta phỏng đoán được đồ thị như hình bên.



Cách 3. (Công thức giải nhanh) Áp dụng công thức: số điểm cực trị bằng $m + 2n - 1$. Trong đó m là số nghiệm bội lẻ, n là số nghiệm bội chẵn. ($m = 1$, $n = 2$).

Dạng 5. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Câu 49. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị là

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. C. $(0; 8)$. D. $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $y' = 3(x^2 - 2mx + 2m)$. Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 50. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $ab > 0$. B. $ab < 0$. C. $ab \geq 0$. D. $ab \leq 0$.

Lời giải. Ta có $y' = 3(x+a)^2 + 3(x+b)^2 - 3x^2 = x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2$. Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Chọn A.

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x = 3$ và $x = 5$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải. Ta có $y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ nhận $x = 3$ và $x = 5$ làm nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(3m+2) + (2m^2+3m+1) = 0 \\ 25 - 5(3m+2) + (2m^2+3m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 6m + 4 = 0 \\ 2m^2 - 12m + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 52. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 2020$ có cực trị là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. C. $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải. • Nếu $m = 0$ thì $y = x^2 + x + 2017$: Hàm bậc hai luôn có cực trị.

• Khi $m \neq 0$, ta có $y' = mx^2 + 2x + 1$. Để hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < 1$.

Hợp hai trường hợp ta được $m < 1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Sai lầm thường gặp là không xét trường hợp $m = 0$ dẫn đến chọn đáp án B.

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị.

- A. $m = 3$. B. $m = 0, m = 3$. C. $m = 0$. D. $m \neq 3$.

Lời giải. • Nếu $m = 3$ thì $y = -6x^2 + 3$. Đây là một Parabol nên luôn có một cực trị. Do đó $m = 3$ không thỏa mãn.

• Nếu $m \neq 3$, ta có $y' = 3(m-3)x^2 - 4mx$. Để hàm số có không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn C.**

Câu 54. Cho hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết $M(1; -6)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Điểm cực đại N của đồ thị hàm số là

- A. $N(2; 21)$. B. $N(-2; 21)$. C. $N(-2; 11)$. D. $N(2; 6)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 2bx + c$ và $y'' = 12x + 2b$.

$$\text{Điểm } M(1; -6) \text{ là điểm cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = -6 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = -6 \\ b + c = -9 \\ 2b + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -12 \end{cases}.$$

Khi đó $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f(-2) = 21 \\ f''(-2) < 0 \end{cases}.$$

Suy ra $N(-2; 21)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số. **Chọn B.**

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính $f(-2)$.

- A. $f(-2) = -18$. B. $f(-2) = 2$. C. $f(-2) = 6$. D. $f(-2) = 22$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases}. \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ (1) và (2), ta được } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \longrightarrow f(-2) = -18. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 56. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a \neq 0$) nhận $x = -1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + c = b$. B. $2a - b = 0$. C. $3a + c = 2b$. D. $3a + 2b + c = 0$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số nhận $x = -1$ là một điểm cực trị nên suy ra $y'(-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 2b. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 57. Biết rằng hàm số $y = 3x^3 - mx^2 + mx - 3$ có một điểm cực trị $x_1 = -1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

- A. $x_2 = -\frac{1}{3}$. B. $x_2 = \frac{1}{3}$. C. $x_2 = \frac{1}{4}$. D. $x_2 = -2m - 6$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 9x^2 - 2mx + m$. Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 9 \end{cases}$. (*)

Từ giả thiết, suy ra $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 9 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa (*)).

Với $m = -3$ thì $y' = 9x^2 + 6x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $m = 1, m = -3$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$ và $f''(x) = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \longrightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m = -3$ thỏa mãn (vì $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua $x = -1$). **Chọn B.**

Cách 2. (Riêng hàm bậc ba) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 59. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b, c thì hàm số có ba điểm cực trị?

- A. a, b cùng dấu và c bất kì. B. a, b trái dấu và c bất kì.
C. $b = 0$ và a, c bất kì. D. $c = 0$ và a, b bất kì.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó a và b trái dấu, c bất kì. **Chọn B.**

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị.

- A. $m = 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải. Ta có $a = 1$, $b = 2m$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 1.2m < 0 \Leftrightarrow m < 0$. **Chọn C.**

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 1$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b thì hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại?

- A. $a < 0, b < 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b < 0$. D. $a > 0, b > 0$.

Lời giải. Để hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0$. (1)

Để ba điểm cực trị là một điểm cực tiểu, hai điểm cực đại $\Rightarrow a < 0$ (để dáng điệu của đồ thị là chữ M). (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} a < 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 62. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 1$ ($a \neq 0$). Với điều kiện nào của các tham số a, b thì hàm số chỉ có duy nhất một điểm cực trị là điểm cực tiểu?

- A. $a < 0, b \leq 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b < 0$. D. $a > 0, b \geq 0$.

Lời giải. Để hàm số có một điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$. (1)

Để điểm cực trị là điểm cực tiểu $\Rightarrow a > 0$ (để dáng điệu của đồ thị là chữ U). (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 63. (ĐHSP Hà Nội lần 1, năm 2018-2019) Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $a = m$, $b = -1$.

- Nếu $m = 0$ thì $y = -x^2 + 1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.
- Khi $m \neq 0$, hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow m(-1) \geq 0 \xrightarrow{m \neq 0} m < 0$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 0$. **Chọn A.**

Câu 64. (KTTN lần 3, năm 2018-2019) Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải. • Với $m = 0$, ta được $y = 3x^2$: Đồ thị là một Parabol với bề lõm quay lên nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

- Với $m \neq 0$ hàm số là hàm trùng phương. Để hàm số không có điểm cực đại tức là hàm số chỉ có đúng một cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ ab = m(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn bài toán. **Chọn D.**

Câu 65. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -20$.

B. $S = -14$.

C. $S = 14$.

D. $S = 34$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 6x + a$.

$$\text{Đồ thị có điểm cực tiểu } A(2; -2) \longrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases}.$$

Thử lại: Với $a = -20$, $b = 34$ ta được $y = x^4 - 3x^2 - 20x + 34$. Tính đạo hàm và lập BBT ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (thỏa). Vậy $\begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases} \longrightarrow S = 14$. **Chọn C.**

Câu 66. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có điểm đại $A(0; -3)$ và có điểm cực tiểu $B(-1; -5)$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. -9 .

B. -5 .

C. -1 .

D. 3 .

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx$.

$$\text{Đồ thị có điểm cực đại } A(0; -3) \longrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases} \rightarrow c = -3. \quad (1)$$

$$\text{Đồ thị có điểm cực tiểu } B(-1; -5) \longrightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ a + b + c = -5 \end{cases}. \quad (2)$$

Giải hệ gồm (1) và (2), ta được $a = 2$, $b = -4$, $c = -3$.

Thử lại: Với $a = 2$, $b = -4$, $c = -3$ ta được $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$. Tính đạo hàm và lập BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = -1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}$.

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m + 1$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0. \text{ Chọn C.}$$

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

A. $m = -1$. B. $m = -3$. C. $m = -1, m = -3$. D. $m = 3$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \longrightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$.

- Thử lại với $m = -1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$: không thỏa mãn.
- Thử lại với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 69*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. $-1 < m < 0$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $m = -1, m = 0$. D. $m < 0, m > -1$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = -m \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -m - 1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow -m(-m-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$. **Chọn A.**

Câu 70*. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x - \frac{4}{3}$ với m là tham số thực dương. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại thuộc trục hoành.

A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{3}{4}$. D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2(m+1)x + (2m+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m+1 \end{cases}$.

Do $m > 0$ nên $2m+1 \neq 1$. Suy ra đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Do $m > 0$ nên $2m+1 > 1 \longrightarrow$ hoành độ điểm cực đại là $x = 1$ nên $y_{\text{CD}} = y(1) = m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 71*. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$.

Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

A. $m = 0$. B. $m = \pm \frac{1}{2}$. C. $m = \pm \frac{9}{2}$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3[x^2 - 2mx + (m^2 - 1)]$. Có $\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Theo định lí Viet, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow 4m^2 - 3(m^2 - 1) = 7 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$. **Chọn D.**

Câu 72*. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để $x_1 + 4x_2 = 0$.

- A. $m = 0$. B. $m = \pm \frac{1}{2}$. C. $m = \pm \frac{3}{2}$. D. $m = \pm \frac{9}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 12x^2 + 2mx - 3$. Có $\Delta' = m^2 + 36 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{m}{6}$. Kết hợp với yêu cầu bài toán

$x_1 + 4x_2 = 0$. Suy ra $x_1 = -\frac{2}{9}m, x_2 = \frac{m}{18}$.

Lại có theo Viet: $x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{9}m\right) \cdot \frac{m}{18} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{9}{2}$. **Chọn D.**

Câu 73*. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (2m+3)x + 2020$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-50; 50]$ để $x = 1$ là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C_m) ?

- A. 0. B. 1. C. 49. D. 50.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2(m+2)x + (2m+3); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m+3 \end{cases}$

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi $2m+3 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -1$. (*)

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m+4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{2m+4}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -1$: không thỏa mãn (*). **Chọn A.**

Nhận xét. Qua khảo sát 99% học sinh chọn đáp án A, lý do là quên điều kiện để có hai cực trị. Tôi cố tình ra giá trị m đúng ngay giá trị loại đi.

Nếu gặp bài toán không ra nghiệm đẹp như trên thì ta giải như sau: " x_0 là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y''(x_0) = 0$ ".

Câu 74*. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3[x^2 + 4x + (m+2)]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$
 $\Leftrightarrow y'(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn C.**

Câu 75*. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2020]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z} \text{ \& } m \in [-2019; 2020]} m = \{3; 4; 5; \dots 2020\}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 76*. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(-2; 3)$ là

- A. $(1; 3)$. B. $(3; 4)$. C. $(-1; 3) \cup (3; 4)$. D. $(-1; 4)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = -1 \\ x = x_2 = 2 - m \end{cases}$.

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

- Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m < 3$ thì ycbt $\Leftrightarrow -2 < -1 < 2 - m < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$.
- Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m > 3$ thì ycbt $\Leftrightarrow -2 < 2 - m < -1 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Vậy $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. **Chọn C.**

Câu 77*. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó, điều kiện nào sau đây cho biết đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ O ?

- A. $a = 0$. B. $c = 0$. C. $9 + 2b = 3a$. D. $ab = 9c$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Thực hiện phép chia y cho y' , ta được $y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) \cdot y' + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Do AB đi qua gốc tọa độ $O \longrightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$. **Chọn D.**

Câu 78*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = -1$. C. $m = 3, m = -1$. D. Không tồn tại m .

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 3m$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$. (*)

Thực hiện phép chia y cho y' ta được phần dư $2mx + 1$. Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $\Delta: y = 2mx + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d[M, \Delta] = \frac{2}{\sqrt{4m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 79*. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 3m = -3(x^2 - m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m})$ và $B(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m})$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn). **Chọn C.**

Câu 80*. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

- A. $m = -\sqrt{2}$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = \pm\sqrt{2}$. D. $m = 0$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Nên hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 2)$ và $B(2m; 2 - 4m^3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m - 1; 4 - 4m^3)$.

Ba điểm A, B và M thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{2m - 1}{-1} = \frac{4 - 4m^3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \pm\sqrt{2} \text{ (thỏa)} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 81*. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - 3$ có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung là

A. $(0;2)$. B. $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. C. $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$. D. $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt và cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m-1) > 0 \\ P = 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Chọn C.}$$

Nhận xét: • Nếu yêu cầu hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm khác phía đối với trục tung $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

• Nếu yêu cầu hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng một phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y(x_1) \cdot y(x_2) > 0$.

• Nếu yêu cầu hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm khác phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Câu 82*. Cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cách đều trục tung.

A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 2mx - 12$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$|x_1| = |x_2| \longrightarrow x_1 = -x_2 \text{ (do dáng điệu của hàm bậc ba nên } x_1 \neq x_2 \text{)}.$$

Suy ra $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 0$. **Chọn B.**

Câu 83*. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -6 . B. 0 . C. 3 . D. 6 .

Lời giải. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}$.

Tọa độ các điểm cực trị: $A\left(m-1; \frac{m^3-3m+2}{3}\right)$ và $B\left(m+1; \frac{m^3-3m-2}{3}\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ trung điểm $I\left(m; \frac{m^3-3m}{3}\right)$ của AB thuộc d

$$\Leftrightarrow \frac{m^3-3m}{3} = 5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các phân tử của S bằng 0. **Chọn B.**

Câu 84*. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = -3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 0 \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị: $A(0; -3m - 1)$ và $B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$.

Suy ra tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (8; -1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ 8 - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. **Chọn D.**

Câu 85*. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{3}{2}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4x[x^2 - (m^2 - m + 1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}$.

Tọa độ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

$$A(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{\text{CT}}) \text{ và } B(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{\text{CT}}).$$

Khi đó $AB^2 = 4(m^2 - m + 1) = 4\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 86*. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA \cdot OB \cdot OC = 12$ với O là gốc tọa độ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải. Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-2m) < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Đạo hàm: $y' = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m}$.

Tọa độ các điểm cực trị: $A(0; 2)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2)$.

Bài toán yêu cầu: $OA \cdot OB \cdot OC = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot [m + (-m^2 + 2)^2] = 12 \longrightarrow m = 2$. **Chọn B.**

Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Khi đó

y có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$		y có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

Xét trường hợp có ba cực trị $\longrightarrow$ tọa độ các điểm cực trị

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

$$\bullet \quad BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}, \quad AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} \quad \text{với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\bullet \quad \text{Phương trình đường qua điểm cực trị: } BC: y = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{và} \quad \begin{cases} AB: y = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c \\ AC: y = -\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c \end{cases}.$$

$$\bullet \quad \text{Gọi } \widehat{BAC} = \alpha, \text{ luôn có } \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}.$$

$$\bullet \quad \text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}.$$

$$\bullet \quad \text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ là } R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}.$$

$$\bullet \quad \text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } ABC \text{ là } r = \frac{b^2}{4|a|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}.$$

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1) $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
2) $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
3) $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
4) $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
5) $ABOC$ nội tiếp	$c.\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$
6) $ABOC$ là hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
-----	-----
7) Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
8) Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
9) Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3.\tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
10) Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$

11) Tam giác ABC có diện tích S_0	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
12) Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
14) Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
16) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
17) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
18) Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

Câu 87*. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục tọa độ.

A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$. C. $m > 0$. D. $m = -2, m > 0$.

Lời giải. Ta có $y' = -4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ các điểm cực trị: $A(0; -4) \in Oy$, $B(-\sqrt{m}; m^2 - 4)$ và $C(\sqrt{m}; m^2 - 4)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow B, C \in Ox \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 (\text{loại}) \\ m = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$. **Chọn B.**

Công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị: $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

YCBT $\longrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 (\text{loại}) \\ m = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$.

Câu 88*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$.

A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = \pm\sqrt{2}$. C. $m = 4$. D. $m = \pm 4$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ các điểm cực trị: $A(0; 1)$, $B(\sqrt{m}; 1 - m^2)$ và $C(-\sqrt{m}; 1 - m^2)$.

YCBT: $BC = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn). **Chọn C.**

Công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

YCBT: $BC = m_0 \rightarrow am_0^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow 1.4^2 + 2.(-2m) = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 89*. (ĐỀ MINH HỌA 2016-2017) Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 0$.

Toạ độ các điểm cực trị: $A(0;1)$, $B(\sqrt{-m}; -m^2 + 1)$ và $C(-\sqrt{-m}; -m^2 + 1)$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (\text{loại}) \\ m = -1 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{YCBT} \longrightarrow 8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8.1 + (2m)^3 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 90*. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Toạ độ các điểm cực trị: $A(0;0)$, $B(\sqrt{m}; -m^2)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Tam giác ABC cân tại A , suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d[A, BC].BC = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m}$.

Theo bài ra, ta có $S_{\triangle ABC} < 1 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: (thỏa mãn). **Chọn C.**

Công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{YCBT} \longrightarrow \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^5} < 1 \longrightarrow 0 < m < 1.$$

Dạng 6. BIỂU THỨC $f'(x)$ - ĐỒ THỊ HÀM $f'(x)$

Câu 91*. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị (cụ thể là 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại). **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm. Ta nhận được phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 92*. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2018-2019] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Dễ thấy phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn $x = 0$ và một nghiệm kép $x = -2$. Do đó hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 93*. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Đạo hàm: $g'(x) = f'(x) - 1 = (x+1)(x-1)^2(x-2)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ta thấy } x = -1 \text{ và } x = 2 \text{ là các nghiệm}$$

đơn, $x = 1$ là nghiệm kép $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 94*. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(3 - x) = -[(3 - x)^2 - 1][(3 - x) - 4] = -(x^2 - 6x + 8)(-x - 1)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 4, x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		2		4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$. **Chọn B.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; 4)$, ta chọn $x = 3$. Khi đó $g'(3) = -f'(0) = -[(-1) \cdot (-4)] = -4 < 0$. Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ đều là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 95*. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$.

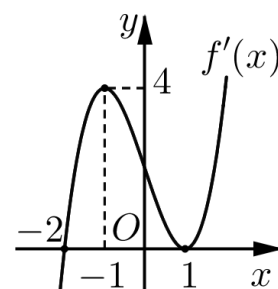
Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x = -3$ và $x = 2$

→ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là: $x = -3$ và $x = 2$. Trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương

→ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị (cụ thể là $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn B.**

Câu 96*. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có các nhận xét sau:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi đi qua điểm $x = -2$.
- $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x = 1$.

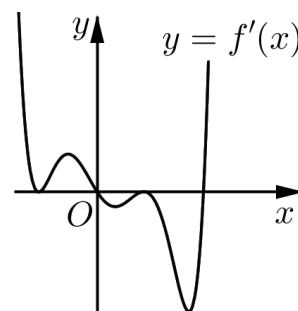
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘ ↗				

Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$. **Chọn C.**

Câu 97*. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Lời giải. Ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành là: $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ nhưng chỉ cắt thực sự tại hai điểm là 0 và x_3 .

Bảng biến thiên

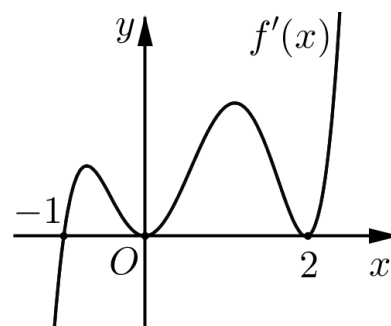
x	$-\infty$	x_1		0		x_2		x_3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$									

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đồ thị của $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành nhưng cắt và bằng qua luôn trục hoành chỉ có 2 điểm nên có hai cực trị.

- Cắt và bằng qua trục hoành từ trên xuống thì đó là điểm cực đại.
- Cắt và bằng qua trục hoành từ dưới lên thì đó là điểm cực tiểu.

Câu 98*. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K . Hỏi trên khoảng K hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0.

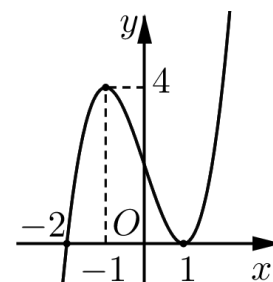
B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra trên khoảng K phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm bội lẻ $x = -1$ (cắt trục hoành) và hai nghiệm bội chẵn $x = 0$, $x = 2$ (tiếp xúc với trục hoành). Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị (đó là điểm cực tiểu vì $f'(x)$ đổi dấu từ " $-$ " sang " $+$ " khi qua nghiệm bội lẻ $x = -1$). **Chọn B.**

Câu 99*. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

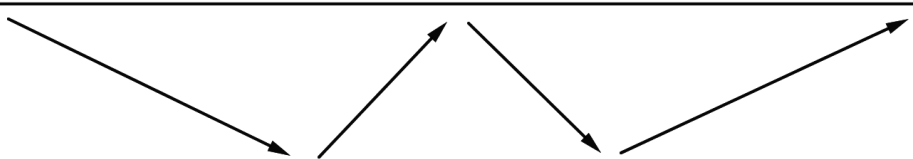
C. 4.

D. 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \text{ (nghiem kep)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \text{ (nghiem kep)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B**.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\bullet \quad x \in (2; +\infty) \rightarrow x > 0. \quad (1)$$

$$\bullet \quad x \in (2; +\infty) \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x^2 - 3 > 1 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x^2 - 3) > 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3) > 0$ trên $(2; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x = \pm 2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.

Câu 100*. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số

$y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(|x|) + 2021$

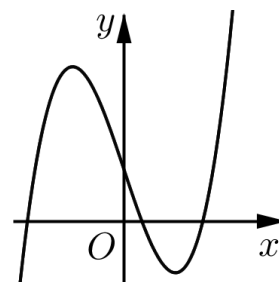
có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\rightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\rightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\rightarrow f(|x|) + 2021$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). **Chọn C**.

Bài 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$.

a) Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D}$ nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$ và tồn tại $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max_{\mathcal{D}} f(x)$.

b) Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D}$ nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$ và tồn tại $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_{\mathcal{D}} f(x)$.

2. Định lý

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

3. Quy tắc tìm GTLN - GTNN của hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $(a; b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a; b]} f(x) \quad \text{và} \quad m = \min_{[a; b]} f(x).$$

Dạng 1. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$
$f(x)$	-1	2	1

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.
- B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 .
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1.
- D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải. Chọn A.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$			4		-1	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\min_{[1;3]} f(x) = -1$.
- B. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -2$.
- C. $\max_{[-2;3]} f(x) = 4$.
- D. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 4$.

Lời giải. Xét trên $\mathbb{R}$, hàm số không có giá trị lớn nhất. Vậy D sai. **Chọn D.**

Câu 3. (ĐHSP Hà Nội lần 2, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

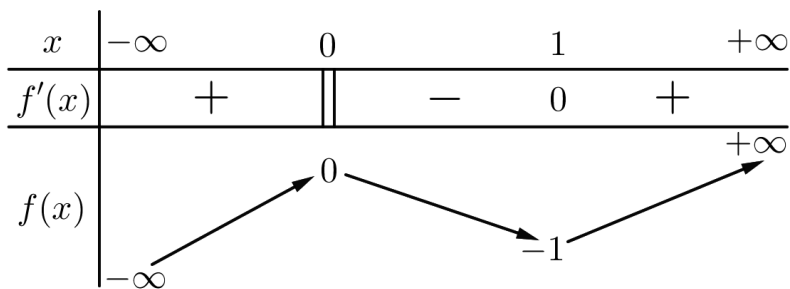
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$			3		1

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{1}{3}$.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

Lời giải. Chọn D.

Câu 4. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có đúng một điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

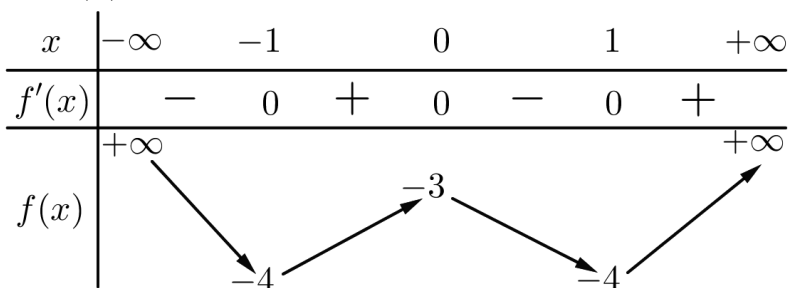
Lời giải. Chọn D.

A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -4 .
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -3 .
- D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải. Chọn B.

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(-5) > f(-4)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên $f(-5) > f(-4)$. **Chọn A.**

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-5; 7]$, có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-5	1	7	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$		6	2	9	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\min_{[-5; 7]} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7]$.
- B. $\max_{[-5; 7]} f(x) = 6$ và $\min_{[-5; 7]} f(x) = 2$.
- C. $\max_{[-5; 7]} f(x) = 9$ và $\min_{[-5; 7]} f(x) = 2$.
- D. $\max_{[-5; 7]} f(x) = 9$ và $\min_{[-5; 7]} f(x) = 6$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

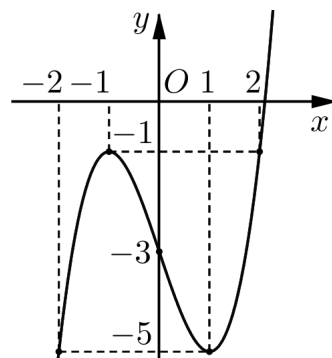
- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x = 1 \in [-5; 7]$.
- Ta có $\begin{cases} f(x) \leq 9, \forall x \in [-5; 7] \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5; 7]$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5; 7]$ sao cho

$f(x_0) = 9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5; 7]$.

Vậy $\min_{[-5; 7]} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7]$. **Chọn A.**

Dạng 2. ĐỒ THỊ

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ lần lượt là



- A. -5 và 0 .
- B. -5 và -1 .
- C. -1 và 0 .
- D. -2 và 2 .

Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2; 2]$

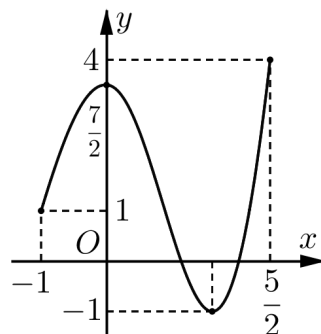
- Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2; -5)$ và $(1; -5)$
 $\longrightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2; 2]$ bằng -5 .
- Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1; -1)$ và $(2; -1)$
 $\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2; 2]$ bằng -1 . **Chọn B.**

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$

lần lượt là

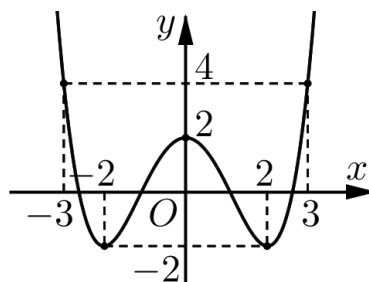
- A. -1 và $\frac{7}{2}$.
- B. -1 và $\frac{5}{2}$.
- C. -1 và 4 .
- D. 1 và 4 .



Lời giải. Chọn C.

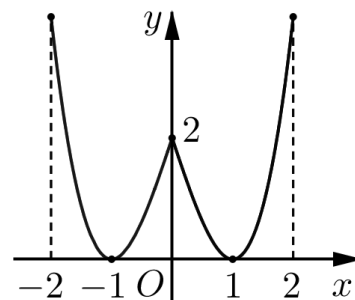
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 2 .
- B. 3 .
- C. 4 .
- D. 5 .



Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2; 3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3; 4)$
 $\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 4 . **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

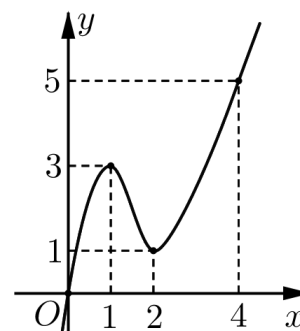


- i) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- ii) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.
- iii) Trên đoạn $[-2;2]$ hàm số có ba điểm cực trị.
- iv) Trên đoạn $[-2;2]$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Chọn B. Khẳng định ii) và iv) là sai. Khẳng định i) và iii) là đúng.

Câu 15*. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f[2(\sin^4 x + \cos^4 x)]$. Tổng $M + m$ bằng



- A. 3. B. 4.
- C. 5. D. 6.

Lời giải. Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \xrightarrow{\forall x \in \mathbb{R}} 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2$.

Dựa vào đồ thị, suy ra $\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \longrightarrow M + m = 4$. **Chọn B.**

Dạng 3. TÌM GTLN – GTNN TRÊN ĐOẠN

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1;3]$.

- A. $\max_{[1;3]} f(x) = -7$.
- B. $\max_{[1;3]} f(x) = -4$.
- C. $\max_{[1;3]} f(x) = -2$.
- D. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{67}{27}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1;3] \\ x = -\frac{2}{3} \notin [1;3] \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = -7 \\ f(3) = -2 \end{cases} \longrightarrow \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = -2$. **Chọn C.**

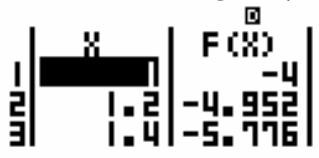
Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**.

Bước 1: Bấm tổ hợp phím **MODE 7**.

Bước 2: Nhập $f(X) = X^3 - 2X^2 - 4X + 1$.

Sau đó ấn phím = (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím =). Tiếp theo nhập $\begin{cases} \text{Start} = 1 \\ \text{End} = 3 \\ \text{Step} = 0.2 \end{cases}$.

(Chú ý: Thường ta chọn $\text{Step} = \frac{\text{End} - \text{Start}}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTLN:		X	$f(X)$
	1	1	-4
		1.2	-4.952
		1.4	-5.776
		1.6	-6.424
	2	1.8	-6.848
		2	-7
		2.2	-6.832
		2.4	-6.296
		2.6	-5.344
		2.8	-3.928
		3	-2

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = -2$.

Câu 17. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. B. 0. C. 3. D. 11.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 - 14x + 11 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 3 \\ f(2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2$. **Chọn A.**

Câu 18. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259. B. -4. C. 0. D. 68.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 4] \\ x = -\frac{7}{3} \notin [0; 4] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -4 \\ f(4) = 68 \end{cases} \longrightarrow \min_{[0; 4]} f(x) = f(1) = -4$. **Chọn B.**

Câu 19. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ bằng

A. $-\frac{11}{2}$.

B. -5 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 5 .

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 6x^2 + 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \\ x = -1 \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = -5 \\ f(-1) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = -5 \\ \max_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 0 \end{cases} \longrightarrow \min_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) + \max_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = -5$. **Chọn B.**

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại x_0 . Tính $P = x_0 + 2020$.

A. $P = 3$.

B. $P = 2017$.

C. $P = 2021$.

D. $P = 2023$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 4] \\ x = 3 \in [0; 4] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 28 \\ f(3) = 1 \\ f(4) = 8 \end{cases} \longrightarrow \min_{[0; 4]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 3 = x_0 \longrightarrow P = 2023$. **Chọn D.**

Câu 21. Xét hàm $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$ trên $[-1; 1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = -4x^2 - 4x - 1 = -(2x+1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$. **Chọn B.**

Câu 22. [ĐỀ THAM KHẢO 2017-2018] Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 50. D. 122.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3 - 8x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2;3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2;3] \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 5 \\ f(\pm\sqrt{2}) = 1 \\ f(-2) = 5 \\ f(3) = 50 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-2;3]} f(x) = 50. \text{ Chọn C.}$$

Câu 23. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

- A. $\frac{49}{4}$. B. $\frac{51}{4}$. C. $\frac{51}{2}$. D. 13.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3 - 2x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2;3] \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2;3] \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-2) = 25 \\ f(3) = 85 \\ f(0) = 13 \\ f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} \end{cases} \longrightarrow \min_{[-2;3]} f(x) = \frac{51}{4}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 24. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 10$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = -8x^3 + 8x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=12 \\ f(2)=-6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M = \max_{[0;2]} f(x) = 12 \\ m = \min_{[0;2]} f(x) = -6 \end{cases} \longrightarrow M + m = 6. \text{ Chọn C.}$$

Câu 25. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $-\frac{16}{3}$. B. $-\frac{14}{3}$. C. $\frac{14}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in (0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$ nên $\begin{cases} M = \max_{[0;2]} f(x) = f(0) = \frac{1}{3} \\ m = \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -5 \end{cases}$.

Khi đó $M + m = -\frac{14}{3}$. **Chọn B.**

Câu 26. Hàm số nào sau đây không có GTLN và GTNN trên đoạn $[-2;2]$?

A. $y = x^3 + 2$. B. $y = x^4 + x^2$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải. Nhận thấy hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2;2]$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$.

Do đó hàm số này không có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[-2;2]$. **Chọn C.**

Câu 27. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ bằng

A. -3 . B. -2 . C. 6 . D. $\frac{19}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{cases}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2)=7 \\ f(3)=6 \\ f(4)=\frac{19}{3} \end{cases} \longrightarrow \min_{[2;4]} f(x) = 6. \text{ Chọn C.}$$

Câu 28. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

- A. -1 . B. 3 . C. $1 + \sqrt{2}$. D. $2 + \sqrt{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$. Ta có: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$ nên $\begin{cases} \max_{[0;1]} f(x) = f(1) = 2 \\ \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 29. Tập giá trị của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ với $x \in [2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Hiệu $b - a$

- A. $\frac{1}{2}$. B. 6 . C. $\frac{25}{4}$. D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in [2;4] \\ x = -3 \notin [2;4] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = \frac{13}{2} \\ f(3) = 6 \\ f(4) = \frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min_{[2;4]} f(x) = 6 \\ \max_{[2;4]} f(x) = \frac{13}{2} \end{cases} \rightarrow [a;b] = \left[6; \frac{13}{2}\right] \Rightarrow b - a = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 30. Tập giá trị của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x \in [3;5]$ là

- A. $\left[\frac{29}{3}; \frac{127}{5}\right]$. B. $\left[\frac{29}{3}; \frac{526}{15}\right]$. C. $\left[\frac{38}{3}; \frac{142}{5}\right]$. D. $\left[\frac{38}{3}; \frac{526}{15}\right]$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} > 0, \forall x \in (3;5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3;5]$ nên $\min_{[3;5]} f(x) = f(3) = \frac{29}{3}$; $\max_{[3;5]} f(x) = f(5) = \frac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\frac{29}{3}; \frac{127}{5}\right]$. **Chọn A.**

Câu 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ bằng

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [2;4]$. Có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [2;4]$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = \sqrt{2} \\ f(3) = 2 \\ f(4) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \max f(x) = 2. \text{ Chọn B.}$

Câu 32. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ bằng

- A. 0. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [-2; 2]$. Đạo hàm: $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [-2; 2] \\ x = -\sqrt{2} \in [-2; 2] \end{cases}.$$

Ta có $\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(-\sqrt{2}) = -2 \\ f(\sqrt{2}) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max f(x) = 2 \\ \min f(x) = -2 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{2-x^2}$ bằng

- A. $-\sqrt{2}$. B. -1. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Đạo hàm: $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Ta có $\begin{cases} f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \\ f(1) = 2 \\ f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \min f(x) = -\sqrt{2}. \text{ Chọn A.}$

Câu 34*. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - 2\sqrt{-x^2+4x-3}$ bằng

- A. $-\sqrt{2}$. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [1; 3]$. Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)

$$\longrightarrow t^2 = x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x} \longrightarrow -2\sqrt{-x^2+4x-3} = 2-t^2.$$

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = -t^2 + t + 2$ trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$ ". Xét hàm số $g(t) = -t^2 + t + 2$ xác định và liên tục trên $[\sqrt{2}; 2]$.

Đạo hàm: $g'(t) = -2t + 1 < 0, \forall t \in (\sqrt{2}; 2)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$.

Do đó $\max_{[\sqrt{2}; 2]} g(t) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \longrightarrow \max_{[1; 3]} f(x) = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Bình luận: Sau khi đọc lời giải, bạn đọc thắc mắc là tại sao biết được $t \in [\sqrt{2}; 2]$???

Từ phép đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = h(x)$.

Đạo hàm: $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \longrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1; 3]$.

Ta có $\begin{cases} h(1) = \sqrt{2} \\ h(2) = 2 \\ h(3) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min_{[1; 3]} h(x) = \sqrt{2} \\ \max_{[1; 3]} h(x) = 2 \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2} \leq h(x) \leq 2 \longrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$.

Câu 35. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x-x^2}$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [0; 2]$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$).

$\longrightarrow t^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{2-x} + 2 - x \longrightarrow 2\sqrt{2x-x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$ ". Xét hàm số $g(t) = t^2 + t - 2$ xác định và liên tục trên $[\sqrt{2}; 2]$.

Đạo hàm: $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (\sqrt{2}; 2)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$.

Do đó $\max_{[\sqrt{2}; 2]} g(t) = g(2) = 4 \longrightarrow \max_{[0; 2]} f(x) = 4$. **Chọn C.**

Câu 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |-x^2 - 4x + 5|$ trên đoạn $[-6; 6]$ bằng

A. 0.

B. 9.

C. 55.

D. 110.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = -x^2 - 4x + 5$ liên tục trên đoạn $[-6; 6]$.

Đạo hàm: $g'(x) = -2x - 4 \longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-6; 6]$.

Lại có $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-6; 6] \\ x = -5 \in [-6; 6] \end{cases}$.

Có $\begin{cases} g(-6) = -7 \\ g(-2) = 9 \\ g(6) = -55 \\ g(1) = g(-5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \max_{[-6; 6]} f(x) = \max_{[-6; 6]} \{|g(-6)|; |g(-2)|; |g(6)|; |g(1)|; |g(-5)|\} = 55$.

Chọn C.

Nhận xét. Bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Câu 37. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - x$ trên đoạn $[-4; 4]$ bằng

A. 2.

B. 17.

C. 34.

D. 68.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; 4]$.

- Nếu $x \in [1; 2]$ thì $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ nên suy ra $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

Đạo hàm: $f'(x) = -2x + 2 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1; 2]$. Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \end{cases}$.

- Nếu $x \in [-4; 1] \cup [2; 4]$ thì $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ nên suy ra $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-4; 1] \cup [2; 4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4) = 34 \\ f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \\ f(4) = 2 \end{cases}$.

So sánh hai trường hợp, ta được $\max_{[-4; 4]} f(x) = f(-4) = 34$. **Chọn C.**

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3$ bằng

A. 0.

B. $\frac{112}{27}$.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Ta có $f(x) = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3 = \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x + 4$.

Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$). Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$ trên đoạn $[-1; 1]$ ".

Đạo hàm: $g'(t) = 3t^2 - 4t + 1 \longrightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{112}{27} \\ g(1) = 4 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1; 1]} g(t) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{112}{27} \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{112}{27}$. **Chọn B.**

Câu 39. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ bằng

A. 1.

B. $\frac{70}{79}$.

C. $\frac{90}{91}$.

D. $\frac{110}{111}$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$). Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1; 1]$ ".

Đạo hàm: $g'(t) = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2} \longrightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(0) = 1 \\ g(1) = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \max_{[-1; 1]} g(t) = g(0) = 1 \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1. \text{ Chọn A.}$

Câu 40*. (Đại học Vinh lần 3, năm 2018-2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \cos \frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

- A. -4. B. -2. C. 0. D. 2.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 2 - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$.

Vì $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 < 2 - \frac{\pi}{2} \leq 2 - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \leq 2 + \frac{\pi}{2} \longrightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

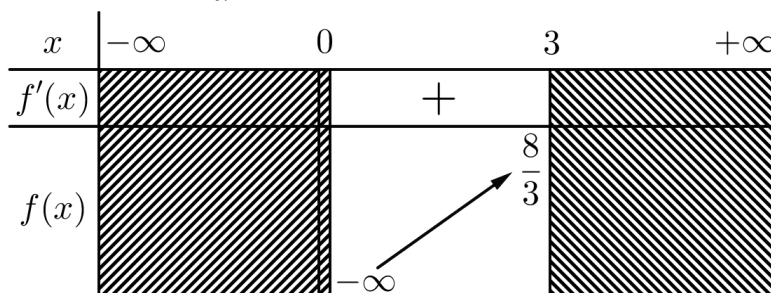
Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2; 2]$ nên $\begin{cases} \max_{[-2; 2]} f(x) = f(2) = 3 \\ \min_{[-2; 2]} f(x) = f(-2) = -5 \end{cases} \text{ Chọn B.}$

Dạng 4. TÌM GTLN – GTNN TRÊN KHOẢNG

Câu 41. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 3]$ bằng

- A. 0. B. 3. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$



Dựa vào BBT, ta thấy $\max_{(0; 3]} f(x) = f(3) = \frac{8}{3}$. **Chọn D.**

Nhận xét: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $(0; 3]$.

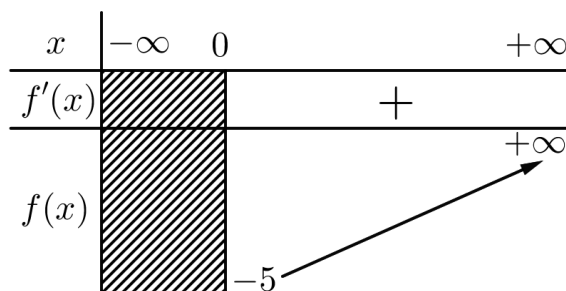
Câu 42. Xét hàm $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$ trên $[0; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất là -5 nhưng không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là -5 .

C. Hàm số có giá trị lớn nhất là 5 và có giá trị nhỏ nhất là -5.

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Dựa vào BBT, ta thấy không tồn tại $\max_{[0;+\infty)} f(x)$ nhưng $\min_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = -5$. **Chọn B.**

Câu 43. Xét hàm số $f(x) = -x - \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-1; 2]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

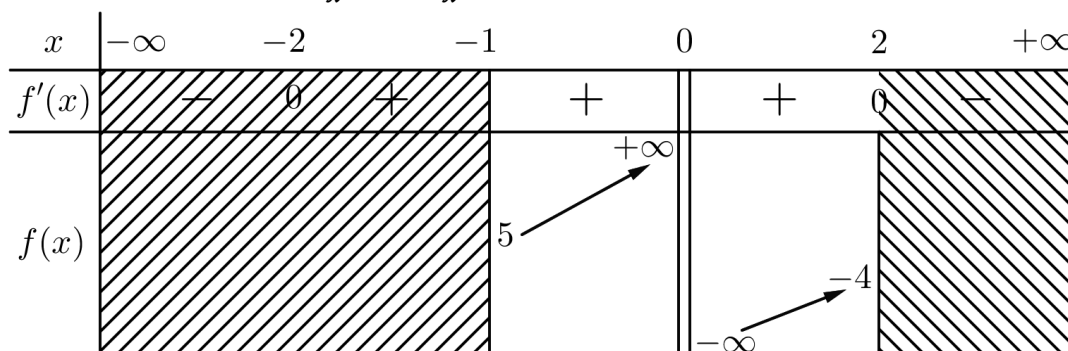
A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 5.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất là 5.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Lời giải. Ta có $f'(x) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 + 4}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.



Dựa vào BBT, ta thấy trên $[-1; 2]$ hàm số không có giá trị nhỏ nhất và cũng không có giá trị lớn nhất. **Chọn D.**

Câu 44. Biết rằng hàm số $f(x) = -x + 2019 - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 4)$ tại x_0 .

Tính $P = x_0 + 2020$.

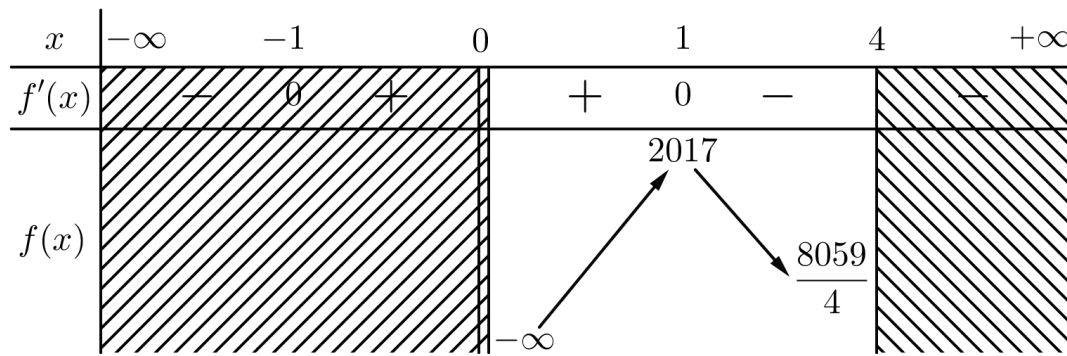
A. $P = 2017$.

B. $P = 2018$.

C. $P = 2021$.

D. $P = 4037$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -1 \notin (0; 4) \end{cases}$.

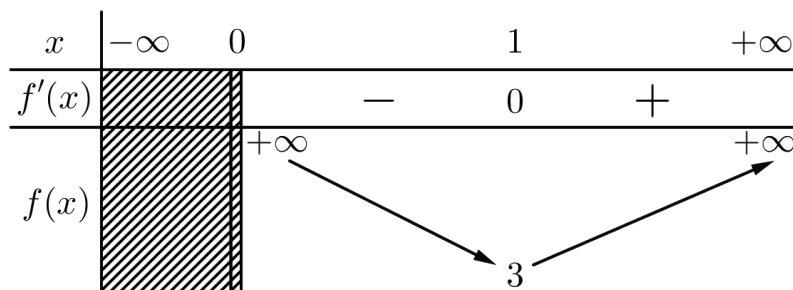


Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đạt GTLN trên $(0;4)$ tại $x_0 = 1 \longrightarrow P = 2021$. **Chọn C.**

Câu 45. Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên $(0; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y_{CT} > \min_{(0; +\infty)} y$. B. $y_{CT} = 1 + \min_{(0; +\infty)} y$. C. $y_{CT} = \min_{(0; +\infty)} y$. D. $y_{CT} < \min_{(0; +\infty)} y$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

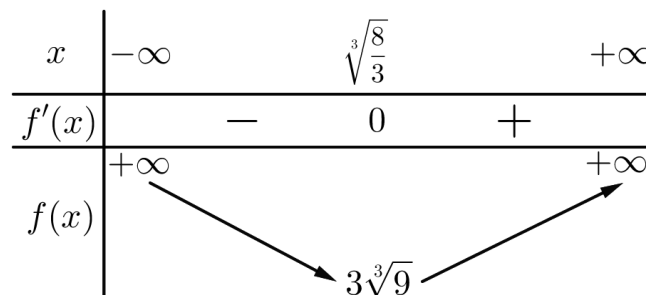


Dựa vào BBT, ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{CT} = \min_{(0; +\infty)} y$. **Chọn C.**

Câu 46. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- A. $2\sqrt[3]{9}$. B. $3\sqrt[3]{9}$. C. 7. D. $\frac{33}{5}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3 - \frac{8}{x^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.



Dựa vào BBT, ta thấy $\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$. **Chọn B.**

Câu 47. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ trên $(0;+\infty)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} = \frac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0;+\infty) \\ x = 1 \in (0;+\infty) \end{cases}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta thấy $\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Dạng 5. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $a = 0$.

B. $a = 2$.

C. $a = 4$.

D. $a = 6$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = -3x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(-1) = a - 2 \\ f(0) = a \\ f(1) = a - 4 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = a - 4$.

Theo bài ra: $\min_{[-1;1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = \pm\sqrt{2}$.

C. $m = \pm\sqrt{7}$.

D. $m = \pm 3$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \longrightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min_{[0;2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$. **Chọn D.**

Câu 50. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

- A. $-m^2$. B. m^2 . C. $\frac{1-m^2}{2}$. D. $\frac{1+m^2}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{1+m^2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \longrightarrow \max_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m^2}{2}$. **Chọn C.**

Câu 51. Gọi S là tập tất cả các phần tử của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2 . Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -16 . B. -8 . C. 0 . D. 2 .

Lời giải. Đạo hàm: $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3] \longrightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{8}$.

Thao bài ra: $\min_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m = \pm 4$. **Chọn C.**

Câu 52. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (với m là tham

số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m \leq 0$. B. $0 < m \leq 2$. C. $2 < m \leq 4$. D. $m > 4$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m \neq 1$.

Khi đó $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = f(1) + f(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{5m}{6} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn D.**

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Tổng $m_1 + m_2$ bằng

- A. 2 . B. 3 . C. 5 . D. 10 .

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = \frac{m}{2\sqrt{x-1}}$ không đổi dấu trên $[2;5]$.

Do đó $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10 \Leftrightarrow f(2) + f(5) = m^2 - 10 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0$.

Khi đó theo định lí Viet, ta có $m_1 + m_2 = 3$. **Chọn B.**

Câu 54*. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} f(x) = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m < -1$. B. $1 \leq m < 3$. C. $3 < m \leq 4$. D. $m > 4$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} < 0; \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\frac{m+1}{(x-1)^2} > 0; \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn D.**

Câu 55*. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x}+1}$ với m là tham số thực lớn hơn 1. Tập hợp các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3 là

- A. $(1;3)$. B. $(1;3]$. C. $(1;3) \setminus \{2\}$. D. $(1;\sqrt{5})$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \frac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x}(x+1)}$, $f'(x) = 0 \xrightarrow{m>1} \sqrt{x} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow x = \frac{4}{m^2} \in (0;4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{m^2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$					

Dựa vào BBT, ta thấy YCBT $\Leftrightarrow f\left(\frac{4}{m^2}\right) < 3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} < 3 \Leftrightarrow m < \sqrt{5} \xrightarrow{m>1} m \in (1;\sqrt{5})$.

Chọn D.

Câu 56*. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + (a+2)x + a+3$ (với a là tham số thực). Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số trên $[1-2a; 2a-3]$. Tính $P = \frac{m+M}{2}$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 6$.

Lời giải. Điều kiện: $1 - 2a < 2a - 3 \Leftrightarrow a > 1$.

Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 6x + a + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $a > 1$).

Suy ra hàm số $f(x)$ tăng trên $[1 - 2a; 2a - 3]$ nên

$$\begin{cases} M = f(2a - 3) = 8a^3 - 22a^2 + 20a - 3 \\ m = f(1 - 2a) = -8a^3 + 22a^2 - 20a + 9 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{m + M}{2} = 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 57*. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $c - a$. B. $c + 8a$. C. $c - \frac{7a}{16}$. D. $c + \frac{9a}{16}$.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Nhận xét: Hàm số đã cho là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

$$\text{Do đó từ giả thiết } \min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1) \longrightarrow \begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = a + b + c \\ b = -2a \end{cases} \longrightarrow \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = c - a. \text{ Chọn A.}$$

Dạng 6. TOÁN ỨNG DỤNG

Câu 58. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

- A. 16cm^2 . B. 20cm^2 . C. 30cm^2 . D. 36cm^2 .

Lời giải. Gọi $a, b > 0$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

Diện tích hình chữ nhật: $S = ab$. (*)

Biểu thức S phụ thuộc hai biến a và b nên gây khó khăn cho việc xét hàm (vì ta chỉ xét hàm một biến). Do đó ta cần tìm mối liên hệ giữa a và b , mục đích để rút a theo b (hoặc b theo a) để đưa S về biểu thức một biến.

Theo giả thiết, ta có $2(a + b) = 16 \Leftrightarrow a + b = 8 \longrightarrow b = 8 - a$. Thay vào (*) ta được

$$S = ab = a(8 - a) = -a^2 + 8a.$$

Xét hàm $f(a) = -a^2 + 8a$ trên $(0; 8)$, ta được $\max f(a) = 16$ khi $a = 4$. **Chọn A.**

Cách 2. (Dùng bất đẳng thức) Ta có $S = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{8^2}{4} = 16$.

Câu 59. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $2\sqrt{S}$. B. $4\sqrt{S}$. C. $2S$. D. $4S$.

Lời giải. Gọi $a, b > 0$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Chu vi hình chữ nhật: $P = 2(a+b)$. (*)

Mối liên hệ giữa a và b là: $S = ab$ (trong đó S là diện tích cho trước không đổi).

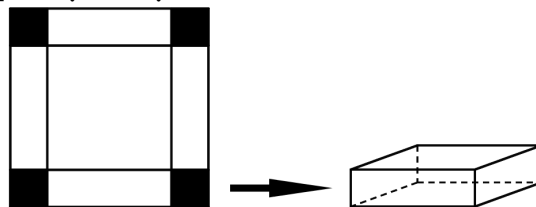
Suy ra $b = \frac{S}{a}$. Thay vào (*) ta được

$$P = 2(a+b) = 2a + \frac{2S}{a}.$$

Xét hàm $f(a) = 2a + \frac{2S}{a}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $\min f(a) = 4\sqrt{S}$ khi $a = \sqrt{S}$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $P = 2(a+b) \geq 2.2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{S}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Câu 60. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 6$.

Lời giải. Khối hộp có: đáy là hình vuông cạnh bằng $12 - 2x$ (cm);

chiều cao x (cm) với $0 < x < 6$.

Thể tích khối hộp $V = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ trên $(0; 6)$, ta được $\max_{(0;6)} f(x) = f(2) = 128$.

Vậy với $x = 2$ (cm) thể tích khối hộp lớn nhất. **Chọn A.**

Cách 2. Ta có

$$V = x(12 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + 12 - 2x + 12 - 2x}{3} \right)^3 = 128.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 61. Ông An quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50m. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất

hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà ông An nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1m^2 đất khi bán là 1500000 VN đồng.

A. 112687500 VN đồng.

B. 114187500 VN đồng.

C. 115687500 VN đồng.

D. 117187500 VN đồng.

Lời giải. Ông An thu được số tiền lớn nhất khi bán được diện tích đất nhiều nhất.

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x (m). Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{50}{4}$.

Vì mảnh đất có chu vi 50m, suy ra chiều dài mảnh đất là $25 - x$ (m).

Diện tích đất ban đầu $S_1 = x(25 - x)$ (m^2).

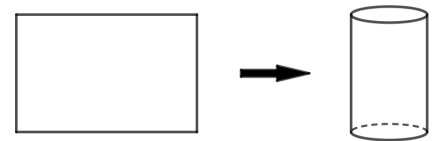
Diện tích đất còn lại $S_2 = x^2$ (m^2).

Suy ra diện tích đất bán được là $f(x) = S_1 - S_2 = x(25 - x) - x^2 = 25x - 2x^2$ (m^2).

Khảo sát hàm $f(x) = 25x - 2x^2$ trên đoạn $\left[0; \frac{50}{4}\right]$, ta được $\max_{\left[0; \frac{50}{4}\right]} f(x) = \frac{625}{8}$.

Số tiền lớn nhất thu được là $\frac{625}{8} \cdot 1500000 = 117187500$. **Chọn D.**

Câu 62. Từ một tấm tôn hình chữ nhật người ta cuộn thành một chiếc thùng hình trụ không đáy (như hình vẽ). Biết tấm tôn có chu vi bằng 120 cm. Để chiếc thùng có thể tích lớn nhất thì chiều dài, chiều rộng của tấm tôn lần lượt là



A. 35 cm; 25 cm.

B. 30 cm; 30 cm.

C. 40 cm; 20 cm.

D. 50 cm; 10 cm.

Lời giải. Gọi chiều dài tấm tôn là x (cm) ($0 < x < 60$). Suy ra chiều rộng: $60 - x$ (cm).

Giả sử quấn tấm tôn theo cạnh có kích thước $x \Rightarrow$ bán kính đáy $r = \frac{x}{2\pi}$ và chiều cao

$h = 60 - x$. Khi đó

$$V = \pi r^2 h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi} = \frac{x \cdot x \cdot (120 - 2x)}{8\pi} \stackrel{\text{Così}}{\leq} \frac{(x + x + 120 - 2x)^3}{8\pi \cdot 27} = \frac{8000}{\pi} (\text{cm}^3).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 120 - 2x \Leftrightarrow x = 40$ (cm). **Chọn C.**

Cách 2. Xét hàm $f(x) = -x^3 + 60x^2$ trên $(0; 60)$.

Câu 63. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn.

A. $S_{\max} = 80\text{cm}^2$.

B. $S_{\max} = 100\text{cm}^2$.

C. $S_{\max} = 160\text{cm}^2$.

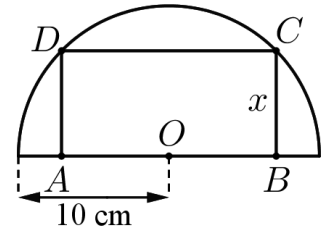
D. $S_{\max} = 200\text{cm}^2$.

Lời giải. Đặt $BC = x$ cm là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của đường tròn ($0 < x < 10$). Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là $AB = 2OB = 2\sqrt{10^2 - x^2}$ cm.

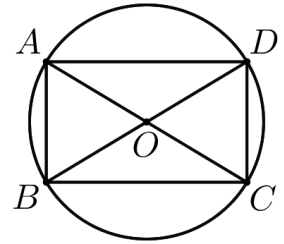
→ Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ cm².

Xét hàm $f(x) = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ trên $(0;10)$, được $\max_{(0;10)} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = 100$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $2x\sqrt{10^2 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + (10^2 - x^2)}{2} = 100$.



Câu 64. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng.



A. $S_{\min} = 961\pi - 961$ (m²).

B. $S_{\min} = 1922\pi - 961$ (m²).

C. $S_{\min} = 1892\pi - 946$ (m²).

D. $S_{\min} = 480,5\pi - 961$ (m²).

Lời giải. Gọi $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ ($x > 0$, $y > 0$) lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật; $R(\text{m})$ là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn $\Rightarrow R^2 = OB^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}$.

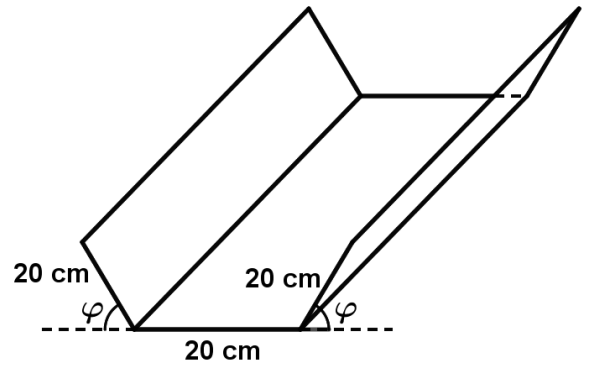
Theo đề bài, ta có $xy = 961\text{m}^2$.

Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{\text{tròn}} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$$= \pi \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{4} - xy \stackrel{\text{Cosine}}{\geq} \pi \cdot \frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961. \text{ Chọn D.}$$

Nhận xét. Dấu "=" xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông. Nếu phát hiện điều này thì làm trắc nghiệm rất nhanh.

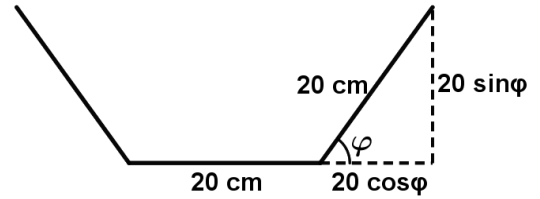
Câu 65. Bạn Nam làm một cái máng thoát nước, mặt cắt hình thang cân có độ dài hai cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm, thành máng nghiêng với mặt đất một góc φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) (tham khảo hình vẽ bên). Bạn Nam phải nghiêng thành máng một góc trong khoảng nào sau đây để lượng nước mưa thoát được là nhiều nhất?



- A. $[10^\circ; 30^\circ)$. B. $[30^\circ; 50^\circ)$. C. $[50^\circ; 70^\circ)$. D. $[70^\circ; 90^\circ)$.

Lời giải. Theo yêu cầu bài toán, $V_{\max} \rightarrow S_{\text{thang max}}$

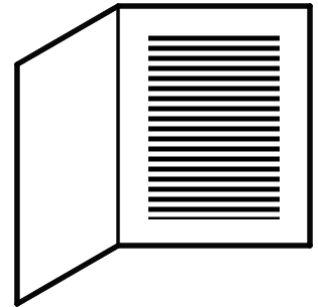
$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{\text{thang}} &= \frac{(20 + 40 \cos \varphi) + 20}{2} \cdot 20 \sin \varphi \\ &= 400(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{aligned}$$



Xét $f(\varphi) = \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, được $\max_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\varphi) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $\varphi = 60^\circ$. **Chọn C.**

Câu 66. Mỗi trang giấy của cuốn sách giáo khoa cần diện tích 384cm^2 . Lề trên và lề dưới là 3cm, lề trái và lề phải là 2cm. Hãy cho biết kích thước tối ưu của trang giấy?

- A. Dài 23,5cm; rộng 17cm.
B. Dài 24cm; rộng 16cm.
C. Dài 25cm; rộng 15,36cm.
D. Dài 25,6cm; rộng 15cm.



Lời giải. Trang giấy có kích thước tối ưu khi diện tích phần trình bày nội dung là lớn nhất. Gọi chiều dài của trang giấy là x ($x \geq \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$) $\Rightarrow$ chiều rộng là $\frac{384}{x}$.

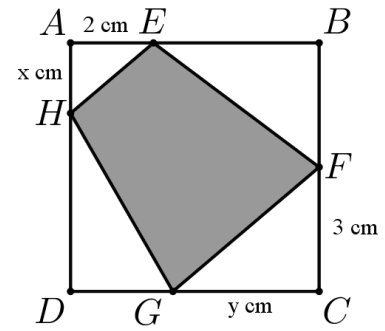
Diện tích để trình bày nội dung là $f(x) = (x - 6) \left(\frac{384}{x} - 4 \right) = -4x - \frac{2304}{x} + 408$.

Xét hàm $f(x) = -4x - \frac{2304}{x} + 408$ trên $[8\sqrt{6}; +\infty)$, ta tìm được tại $x = 24$ thì hàm số có giá trị lớn nhất. **Chọn B.**

Câu 67. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x+y=7$. B. $x+y=5$.

C. $x+y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$. D. $x+y=4\sqrt{2}$.



Lời giải. Để S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S' = S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CGF} + S_{\triangle DGH}$ lớn nhất (do $S_{\triangle BEF}$ không đổi).

Tính được $2.S' = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36$. (1)

Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$

$\rightarrow \triangle AEH \sim \triangle CGF \rightarrow \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{3} \rightarrow xy = 6$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $2S' = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$. Để $2S'$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ

nhất. Mà $4x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

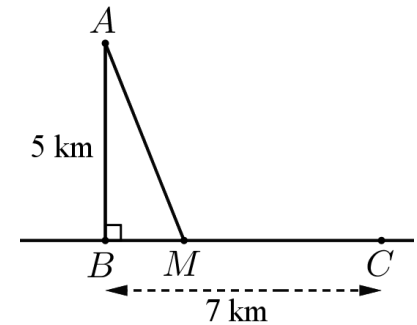
Câu 68*. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h . Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?

A. $2,1\text{km}$.

B. $3,0\text{km}$.

C. $4,5\text{km}$.

D. $7,0\text{km}$.



Lời giải. Đặt $BM = x \text{ km}$ ($0 \leq x \leq 7$) $\rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2 + 25} \text{ km} \\ MC = (7-x) \text{ km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} \text{ h}$.

Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \frac{7-x}{6} \text{ h}$.

$\rightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là

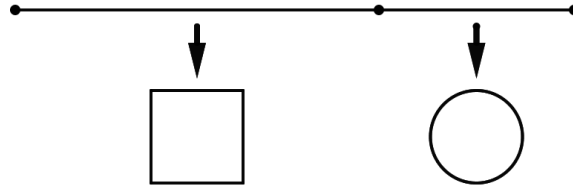
$$t = t_{AM} + t_{MC} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} \text{ h}.$$

Xét hàm $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min_{[0;7]} f(x) = f(2\sqrt{5}) = \frac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4,5\text{km}$. **Chọn C.**

Câu 69*. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r .

Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < 60$).

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi \cdot r^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\frac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi) \cdot x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \frac{(4+\pi) \cdot x - 60\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60\pi}{4+\pi}$; $S'' = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$. Do đó S đạt giá trị nhỏ

nhất tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$.

Với $x = \frac{60\pi}{4+\pi} \longrightarrow r = \frac{30}{(4+\pi)}$ và $a = \frac{240}{(4+\pi) \cdot 4} \longrightarrow \frac{a}{r} = \frac{240}{120} = 2$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2 \geq \frac{60^2}{4\pi+16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{4\pi} = \frac{60-x}{16} \rightarrow x = \frac{60\pi}{4+\pi}$.

Câu 70*. Chủ của một nhà hàng muốn làm tường rào bao quanh 600m^2 đất để làm bãi đỗ xe. Ba cạnh của khu đất sẽ được rào bằng một loại thép với chi phí 14000 đồng một mét, riêng mặt thứ tư do tiếp giáp với mặt bên của nhà hàng nên được xây bằng tường gạch xi măng với chi phí là 28000 đồng mỗi mét. Biết rằng cổng vào của khu đỗ xe là 5m. Tìm chu vi của khu đất sao cho chi phí nguyên liệu bỏ ra là ít nhất, biết rằng khu đất rào được có dạng hình chữ nhật.

- A. 75m. B. 100m. C. 125m.

Lời giải. Gọi độ dài của hàng rào xây bằng xi măng là x ($x > 5$) và độ dài hai hàng rào vuông góc với nó là y .

Vì diện tích khu đất rào được bằng 600m^2 nên

$$xy = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}.$$

Độ dài dây thép để làm hàng rào là

$$(x - 5) + 2y = x - 5 + 2 \cdot \frac{600}{x} = x + \frac{1200}{x} - 5.$$

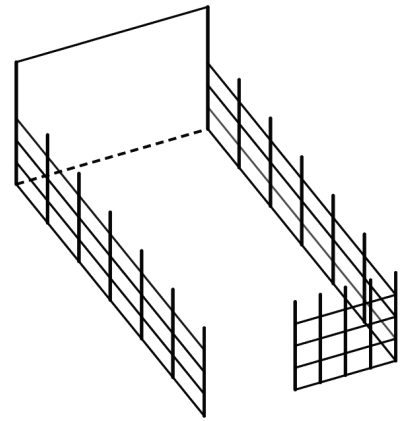
Suy ra tổng chi phí là

$$f(x) = \left(x + \frac{1200}{x} - 5\right) \cdot 14000 + x \cdot 28000 = 42000x + \frac{16800000}{x} - 70000.$$

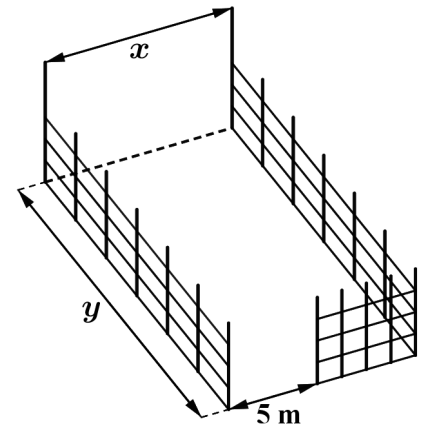
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $f(x) \geq 2\sqrt{42000x \cdot \frac{16800000}{x}} + 5 = 1610000.$

Đẳng thức xảy ra khi $42000x = \frac{16800000}{x} \Leftrightarrow x = 20.$

Suy ra chu vi của khu đất là $2(x + y) = 2\left(20 + \frac{600}{20}\right) = 100 \text{ m}.$ **Chọn B.**



D. 150m.



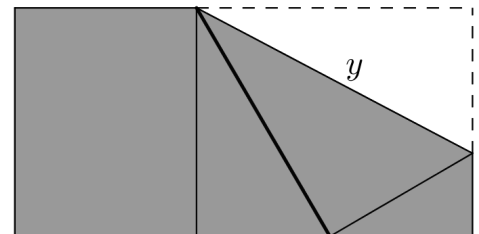
Câu 71*. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm dưới như hình vẽ. Gọi độ dài nếp gấp là y thì giá trị nhỏ nhất của y là bao nhiêu?

- A. $3\sqrt{5}.$ B. $3\sqrt{7}.$ C. $6\sqrt{2}.$ D. $6\sqrt{3}.$

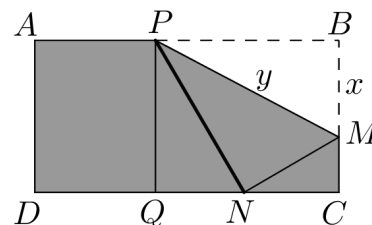
Lời giải. Gọi các điểm như hình vẽ, kẻ PQ vuông góc với CD . Đặt $BM = x$ ($x \leq 8$).

Để N chạm đáy CQ thì $MB > MC$ nên $x > 4$.

Ta có $\triangle MNC \sim \triangle NPQ$ nên $\frac{MN}{NP} = \frac{NC}{PQ}$



$$\Rightarrow \frac{x}{PB} = \frac{NC}{8} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - (8-x)^2}}{8} \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{x-4}.$$



Ta chú ý thêm điều kiện $PB \leq AB = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2 - x^2} \leq 12$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3}{x-4} - x^2} \leq 12 \Leftrightarrow 18 - 6\sqrt{5} \leq x \leq 18 + 6\sqrt{5} \xrightarrow{x \leq 8} 18 - 6\sqrt{5} \leq x \leq 8.$$

Xét hàm $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$ trên $[18 - 6\sqrt{5}; 8]$, ta được $\min_{[18-6\sqrt{5}; 8]} f(x) = f(6) = 108$.

Suy ra $y_{\min} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Dạng 7. BIỂU THỨC $f'(x)$ - ĐỒ THỊ HÀM $f'(x)$

Câu 72. (Đại học Vinh lần 2, năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(3)$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \text{ (nghiem kep)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

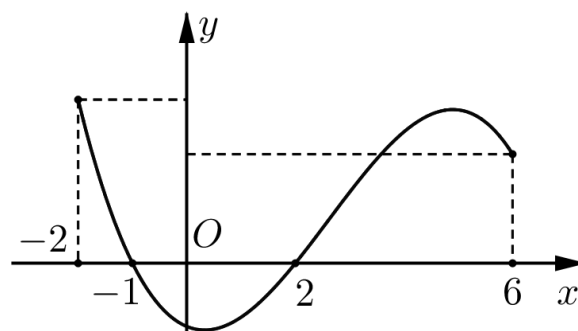
x	-1	0	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(2)$

Dựa vào BBT, suy ra $\min_{[-1; 2]} f(x) = f(0)$. **Chọn B.**

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.

B. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(0)$.



C. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(2)$.

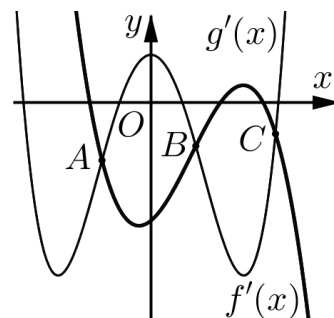
D. $\max_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.

Lời giải. Từ đồ thị của $f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-2	-1	2	6	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Dựa vào BBT, suy ra $\max_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$ bằng



A. $h(0)$.

B. $h(a)$.

C. $h(b)$.

D. $h(c)$.

Lời giải. Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x) \xrightarrow{\text{do thi}} h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ hoặc } x = b \text{ hoặc } x = c$.

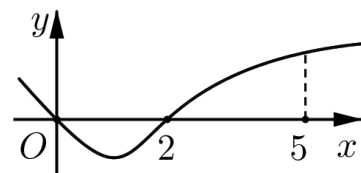
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$		$h(a)$		$h(b)$		$h(c)$	

The diagram illustrates the mapping of points a , b , and c under the function h . The points $h(a)$ and $h(c)$ are positioned above $h(b)$. Arrows indicate the mapping: $h(a) \rightarrow h(b)$ and $h(c) \rightarrow h(b)$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$. **Chọn C.**

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(0); f(5)$.

B. $f(2); f(0)$.

C. $f(1); f(5)$.

D. $f(2); f(5)$.

Lời giải. Từ đồ thị $f'(x)$ trên $[0; 5]$, ta có BBT của hàm số $f(x)$ như sau

x	0	2	5
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$

Suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0); f(5)\}$.

Từ giả thiết, ta có $f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$. (1)

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5] \longrightarrow f(3) > f(2)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(5) > f(0) \longrightarrow \max_{[0;5]} f(x) = \{f(0), f(5)\} = f(5)$. **Chọn D.**

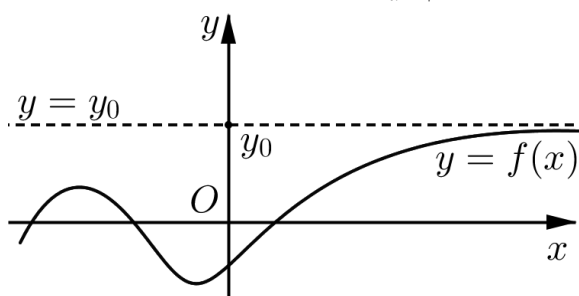
1. Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Điểm $M \in (\mathcal{C})$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d . Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x| \rightarrow +\infty$ hoặc $|x| \rightarrow x_0$.

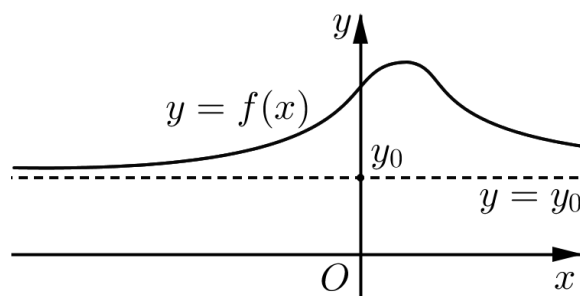
2. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).

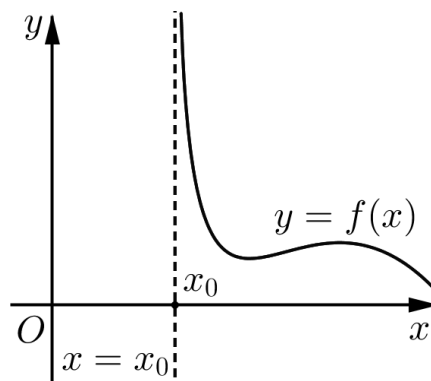
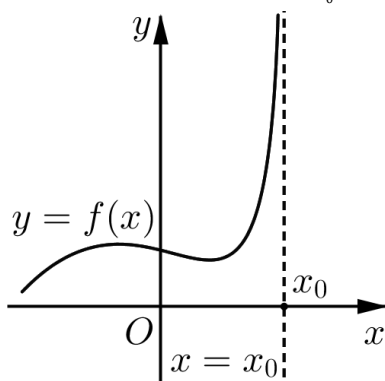


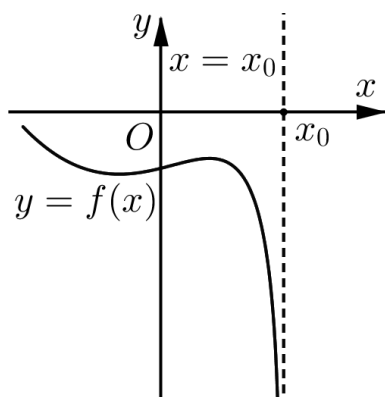
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

3. Tiệm cận đứng

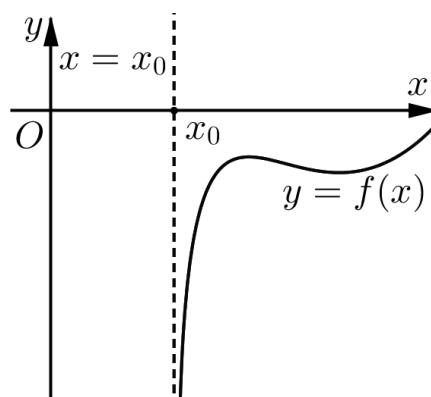
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$





Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).



Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

Dạng 1. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. [ĐHSP Hà Nội lần 4, năm 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
y'	—		—
y	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \longrightarrow x = \frac{1}{2}$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn B.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	—		—
y	5	$+\infty$	2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \longrightarrow y = 5$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 3. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn B.**

Câu 4. [KHTN Hà Nội lần 1, năm 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	2	1	5	$-\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y					

Trong các mệnh đề sau đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- i) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.
- ii) Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.
- iii) Hàm số có 2 điểm cực trị.
- iv) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ nên không tồn tại x_0 để $f(x_0) = 2$. Do đó i) sai.
- Dễ thấy ii) đúng
- Tại $x = 0$ hàm số không xác định nên $x = 0$ không là điểm cực trị. Do đó iii) sai.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN; • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Do đó iv) đúng. Vậy có tất cả 2 mệnh đề đúng. **Chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	$+$		$+$	$+$
y				

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Chọn C.

Câu 7. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			$+$	$-$
y				

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \longrightarrow x = -2$ là TCD; • $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
y'			$-$		$+$
y		$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -2$ là TCD; • $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn B.**

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$		$-$
y	0	2	$+\infty$	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN; • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD; • $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2 \longrightarrow x = -2$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 10. [ĐHSP Hà Nội lần 1, năm 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Dựa vào BBT, ta có:

- $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$ có hai nghiệm phân biệt. Suy ra ĐTHS $g(x)$ có 2 TCD.
- Lại có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \end{cases} \longrightarrow y=1$ là TCN của ĐTHS $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn D.**

Câu 11. Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
y	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải. Dựa vào BBT, có $f(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=a \in (-\infty; -1) \end{cases} \longrightarrow$ ĐTHS $g(x)$ có hai TCD.

Lại có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1} = 0 \longrightarrow y = 0 \text{ TCN} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1} = -1 \longrightarrow y = -1 \text{ TCN} \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	-2

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f^2(x)-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Xét phương trình $f^2(x) - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 & (1) \\ f(x) = -3 & (2) \end{cases}$. Dựa vào BBT, ta thấy mỗi phương trình (1) và (2) đều có một nghiệm (hai nghiệm này khác nhau) $\longrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 13*. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{f^2(x) - 5f(x) + \frac{21}{4}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Xét $f^2(x) - 5f(x) + \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} & (1) \\ f(x) = \frac{7}{2} & (2) \end{cases}$. Dựa vào BBT, ta thấy:

- (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$

—→ $f(x) - \frac{3}{2} = x.h(x)$ với $h(x)$ là hàm bậc hai và $h(x) = 0$ vô nghiệm.

- (2) có nghiệm $x = 2$ (nghiệm kép) và $x = a \in (0;1)$

$$\longrightarrow f(x) - \frac{7}{2} = (x-a)(x-2)^2.$$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{x(x-2)}{(x-a)(x-2)^2 \cdot xh(x)} = \frac{1}{(x-a)(x-2).h(x)}.$$

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = a$ và $x = 2$. **Chọn B.**

Dạng 2. ĐỒ THỊ

Câu 14. (ĐHSP Hà Nội lần 2, năm 2018-2019) Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm

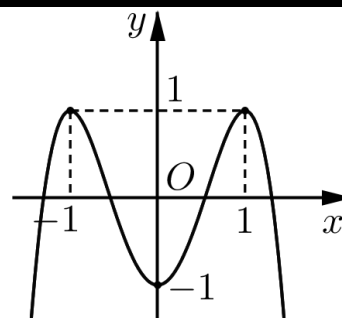
cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)+1}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. ĐTHS $g(x)$ có số đường tiệm cận đứng là số nghiệm của phương trình

$$f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1.$$

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng. **Chọn C.**

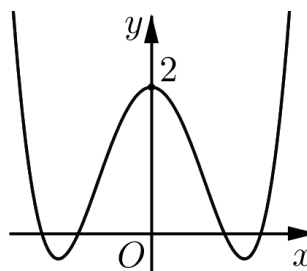
Câu 15. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x}{f(x)[f(x)-1]}$ là

A. 6.

B. 8.

C. 9.

D. 10.



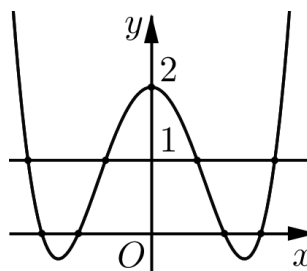
Lời giải. Xét $f(x)[f(x)-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$. Dựa vào đồ

thị, ta thấy phương trình $f(x)[f(x)-1] = 0$ có 8 nghiệm phân biệt trong đó không có nghiệm nào bằng 0 (0 là nghiệm của tử)

—→ đồ thị hàm số có 8 đường tiệm cận đứng.

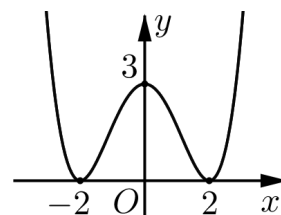
Lại có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

—→ đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là $y = 0$.



Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 9 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 16. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x)} + 2020$ là



- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

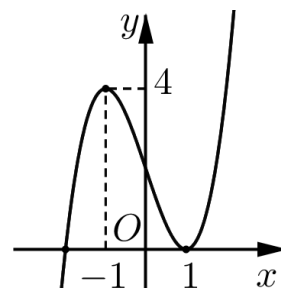
Lời giải. Ta có $g(x) = \frac{2019 + 2020f(x)}{f(x)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow 2019 + 2020f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (nghĩa là tử không có nghiệm).
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \longrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 TCD: $x = -2$ và $x = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 2020 \longrightarrow$ Đồ thị hàm số có TCN: $y = 2020$.

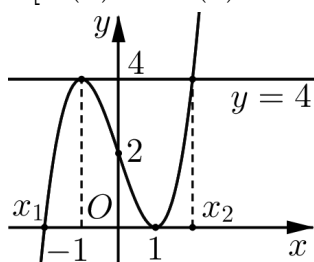
Vậy đồ thị hàm $g(x)$ số có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng). **Chọn C.**

Câu 17*. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Lời giải. Xét $f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 4 & (2) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy



- (1) có nghiệm $x = x_1 \in (-\infty; -1)$ (nghiệm đơn) và $x = 1$ (nghiệm kép)
 $\longrightarrow f(x) = (x - x_1)(x - 1)^2$.
- (2) có nghiệm $x = -1$ (nghiệm kép) và $x = x_2 \in (1; +\infty)$ (nghiệm đơn)
 $\longrightarrow f(x) - 4 = (x + 1)^2(x - x_2)$.

Do đó $g(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - x_1)(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2(x - x_2)} = \frac{1}{(x - x_1)(x - 1)(x + 1)(x - x_2)}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD. **Chọn D.**

Câu 18*. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Số

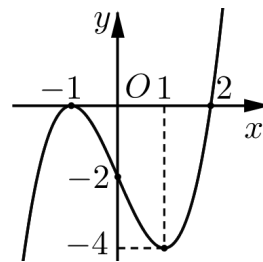
tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f(x) = (x+1)^2(x-2)$. Khi đó $g(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^2(x-2)}}{(x+1)^2(x-1)(x-3)}$.

Vì $\sqrt{f(x)}$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \{-1\} \cup [2; +\infty)$ nên $x = -1, x = 1$ không là các đường TCD

—→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x = 3$. **Chọn A.**

Nhận xét: Học sinh dễ nhầm lẫn $x = -1$ cũng là một đường TCD.

Dạng 3. TÌM TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

Câu 19. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \rightarrow y = 0$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-4} = \infty \rightarrow x = -2$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 2$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 1 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 20. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$ có bao nhiêu

đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -4} y = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+1}{x+4} = \infty \rightarrow x = -4$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 4} y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8} \rightarrow x = 4$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 21. (Đại học Vinh lần 1, năm 2018-2019) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)^2} = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{9} \longrightarrow x = 2$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 1 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \longrightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = -3 \longrightarrow y = -3$ là TCN;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = 3 \longrightarrow y = 3 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường TCN và không có đường TCD. **Chọn B.**

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-|x|-2} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty \longrightarrow x = -2$ là TCD; $\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty \longrightarrow x = 2$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 2 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta có $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1} = \frac{|x+1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > -1, x \neq 1 \\ -\frac{1}{x-1} & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

- Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 1} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 1 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 25. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải. Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên không có TCD. Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng. **Chọn A.**

(Thật vậy; hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD)

Câu 26. [ĐỀ THAM KHẢO 2017-2018] Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. B. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải. Quan sát các đáp án ta dự đoán là B hoặc D.

Xét đáp án D thấy $x = -1$ là nghiệm của mẫu và không là nghiệm của tử nên đáp án D là đúng. **Chọn D.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2 + 3x - 4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [7; +\infty)$.

Vì $x^2 + 3x - 4 \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn A.**

Câu 28. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Ta có $4x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ TXĐ của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}$ là TCN;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường TCN. **Chọn B.**

Câu 29. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2017-2018] Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6} \longrightarrow x = 0$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 30. [ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016-2017] Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x = -3$ và $x = -2$. B. $x = -3$.
C. $x = 3$ và $x = 2$. D. $x = 3$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

- $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6} \longrightarrow x = 2$ không là TCD.
- $\lim_{x \rightarrow 3} y = \infty \longrightarrow x = 3$ là TCD. **Chọn D.**

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (-3; 3) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$.

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = 0 \longrightarrow x = -3$ không là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = +\infty \longrightarrow x = 3$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (-4; 4)$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = -4$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = 4$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \setminus \{1\}$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1 \text{ là TCD.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCD. **Chọn A.**

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x^4}-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = -\frac{3}{4} \longrightarrow x = 1$ không là TCD;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \end{cases}.$$

Vậy đồ thị có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn B.**

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}} = -\infty \longrightarrow x = -1$ là TCD;.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 2 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 38. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $n = d = 1$. B. $n = 0; d = 1$. C. $n = 1; d = 2$. D. $n = 0; d = 2$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (0; 1) \longrightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét phương trình $(x-1)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 0$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy $n = 0; d = 2$. **Chọn D.**

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \setminus \{-1; 1\}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1$ không là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường TCN và 1 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 40. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường TCN và 1 đường TCD. **Chọn C.**

Dạng 4. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow -5$	$\nearrow 4$	$\searrow$	$-\infty$	

Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ có 3 đường tiệm cận đứng?

- A.** $m < -5$. **B.** $m = -5$. **C.** $-5 < m < 4$. **D.** $-5 \leq m < 4$.

Lời giải. Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ có ba tiệm cận đứng thì phương trình

$f(x) - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Dựa vào BBT $\longrightarrow m = -5$. **Chọn B.**

Câu 42. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S = m^2 + n^2 - 2$.

- A.** $S = -1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải. Dễ dàng có được: $x = m+n$ là TCD và $y = m-2n-3$ là TCN.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} m+n=0 \\ m-2n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \longrightarrow S = m^2 + n^2 - 2 = 0$. **Chọn B.**

Câu 43. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

- A.** $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2;5)$. **B.** $M(4;3)$ hoặc $M(-2;1)$.
- C.** $M(4;3)$ hoặc $M(2;5)$. **D.** $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2;1)$.

Lời giải. Đường tiệm cận đứng $\Delta: x = 1$; đường tiệm cận ngang $\Delta': y = 2$.

Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow d[M, \Delta] = 3d[M, \Delta'] \Leftrightarrow |a-1| = 3\left|\frac{2a+1}{a-1} - 2\right| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4; 3) \\ M(-2; 1) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$. B. $m = 1, m = 2$. C. $m = 0, m = 1$. D. $m = 1$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{(x-m)(2x+2m-3)+2m(m-1)}{x-m} = 2x+2m-3 + \frac{2m(m-1)}{x-m}.$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giới hạn $\lim_{x \rightarrow m^\pm} y$ tồn tại hữu hạn

$$\Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Cách 2. YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $2x^2 - 3x + m = 0$ có một nghiệm là $x = m$

$$\longrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 45. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có

ba đường tiệm cận là

- A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng?

- A. 2020. B. 2022. C. 2023. D. 2024.

Lời giải. Ycbt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \in [-2020; 2020]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2020; \dots; 0; 1; 2; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Vậy có tất cả 2023 giá trị nguyên thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2-4x+m} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó YCBT $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có 1 TCD $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m = 0 \\ \Delta' = 4 - m > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -12 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-12; 12]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng?

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2-4x+m} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó YCBT $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$. **Chọn A.**

Nhận xét. Bạn đọc dễ nhầm lẫn mà xét thêm trường hợp mẫu thức $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm $x = -2 \longrightarrow m = -12$. Điều này là sai, vì với $m = -12$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{x-6}$. Đồ thị này vẫn còn TCD là $x = 6$.

Câu 49. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ với m là tham số

thực. Tập hợp các giá trị m để đồ thị của hàm số có 2 tiệm cận ngang là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Lời giải. Với $m < 0$ thì hàm số có TXĐ là một khoảng không chứa $\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCN.

Với $m = 0$ suy $y = x + 1 \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Khi $m > 0$, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN.

Vậy với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải. • Với $m < 0$, khi đó hàm số có TXĐ: $D = \left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}; \sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$ là một khoảng không chứa $\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$, suy ra đồ thị không có TCN.
- Với $m > 0$, khi đó hàm số có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN. **Chọn C.**

Câu 51. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = 2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}$ có một đường tiệm cận ngang $y = -1$. Giá trị của biểu thức $P = 2a - b^2$ bằng

A. -72 .

B. -8 .

C. 8 .

D. 72 .

Lời giải. Ta có: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}\right) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4-a)x^2 - bx - 4}{2x - \sqrt{ax^2 + bx + 4}}$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = -1$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4-a)x^2 - bx - 4}{2x - \sqrt{ax^2 + bx + 4}} = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-a=0 \\ \frac{-b}{2+\sqrt{a}}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases} \longrightarrow P=2a-b^2=-8. \text{ Chọn B.}$$

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + \sqrt{4x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}}$.

- Với $a^2 - 4 \neq 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = \infty \longrightarrow$ Đồ thị hàm số không có TCN.
- Với $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = 0 \longrightarrow$ Đồ thị hàm số có TCN là $y = 0$. Vậy $a = \pm 2$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 53*. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận là

A. $(0;1)$.

B. $[0;1]$.

C. $(0;1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $(-\infty;1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = (m; +\infty)$.

Xét phương trình

$$[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \\ \sqrt{x-m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = 2m \\ x = m \end{cases}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \longrightarrow$ Đồ thị hàm số có TCN: $y = 0$.

Khi đó YCBT $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có 3 đường TCD $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 2m \\ 1 > m \\ 2m > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 54*. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 2x - m + 2} - x - 1}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-3;6]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{-\sqrt{2}-1} \end{cases} \longrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường TCN.

Khi đó YCBT $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có 2 đường TCD

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x - m + 2} - x - 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2x^2 - 2x - m + 2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - m + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 - m + 1 \neq 0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \xleftarrow[x_1 x_2 = -m + 1]{x_1 + x_2 = 4} (**) \begin{cases} -3 < m \leq 6 \\ m \neq 2 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 55*. Cho hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị

nguyên m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $\sqrt{x+1}$ xác định khi $x \geq -1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - (1-m)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 ,

$$x_2 \text{ thỏa mãn } -1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ 1 - m > -2 \\ 1 \cdot (m + 2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0\}. \text{ Chọn B.}$$

Nhận xét: Vấn đề đặt ra là sao không thể cho $-1 \leq x_1 < x_2$? Vì $x_1 = -1 \Rightarrow m = -2$, suy

ra $x_2 = 4$. Lúc đó mẫu thức là $\sqrt{(x+1)(x-4)}$ xác định khi $\begin{cases} x < -1 \\ x > 4 \end{cases}$. Suy ra điều kiện

xác định của hàm số là $x > 4 \longrightarrow$ đường $x = -1$ không là đường tiệm cận.

Câu 56*. Cho hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị của

tham số m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $\sqrt{x+1}$ xác định khi $x \geq -1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } -1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m > 0 \\ m > -2 \\ 1.(1-2m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 57*. Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là

- A. $(0; 4)$. B. $[0; 4]$. C. $\left(4; \frac{9}{2}\right)$. D. $\left[4; \frac{9}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có $\sqrt{4x - x^2}$ xác định khi $0 \leq x \leq 4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 6x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } 0 < x_1 < x_2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(0) > 0 \\ a.f(4) > 0 \\ 0 < x_1 + x_2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2m > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 8 > 0 \\ 0 < 6 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < \frac{9}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Nhận xét: Giải thích tại sao không lấy dấu "=" tại 0 và tại 4.

Với $x_1 = 0 \Rightarrow m = 0$, suy ra $x_2 = 6 \notin [0; 4]$.

Với $x_1 = 4 \Rightarrow m = 4$, suy ra $x_2 = 2 \in [0; 4]$. Ta thấy điều kiện của căn ở tử là $[0; 4]$, còn khi $m = 4$ thì điều kiện của căn ở mẫu là $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 58*. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}} = \frac{1}{1 + \sqrt{m}}$ với $m \geq 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}} = \frac{1}{1 - \sqrt{m}}$ với $m \geq 0, m \neq 1$.

$$\text{Nếu } m = 1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1\right)}{4} = -\infty,$$

suy ra đồ thị hàm số có đúng một TCN là $y = \frac{1}{2}$ (do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}$ khi $m = 1$). Do đó giá trị $m = 1$ thỏa.

Nếu $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{m}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}} \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0, m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 59*. Cho hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{mx^2 + 1}}{(x-1)^2}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng?

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1}$ với $m \geq -1$. Do đó với $m < -1$ thì hàm số không có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ nên đồ thị hàm số không có TCD.

• Với $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1} \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ nên đồ thị hàm

số có TCD là $x = 1$.

• Với $m = 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 1}}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2 (2x + \sqrt{3x^2 + 1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(2x + \sqrt{3x^2 + 1})(x-1)} = \infty$ nên ĐTHS có TCD là $x = 1$.

Vậy để đồ thị hàm số có TCD $\Leftrightarrow m \geq -1 \xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 10\}$. **Chọn C.**

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 0$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m > 0$.

D. $m < 1$.

Lời giải. Ta có $f(\tan x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{(\tan^2 x + 1)^2}$. Suy ra $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$.

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - m}$ có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$f(x) - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{1}{(x^2 + 1)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Xét $\frac{1}{(x^2 + 1)^2} - m = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \sqrt{\frac{1}{m}} \quad (m > 0) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{\frac{1}{m}} - 1$. Để phương trình này có

2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m}} - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Vậy $0 < m < 1$ thỏa YCBT. **Chọn B.**

Bài 5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên của hàm số:
 - + Tính đạo hàm;
 - + Tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định;
 - + Xét dấu đạo hàm và suy ra chiều biến thiên của hàm số.
- Tìm điểm cực trị.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

Dạng 1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

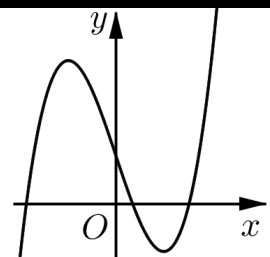
Câu 1. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = -x^2 + x - 1$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba. Loại đáp án B và C.
Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. **Chọn D.**

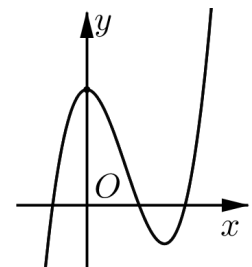
Câu 2. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại B, C.
Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$ nên chỉ có A phù hợp. **Chọn A.**

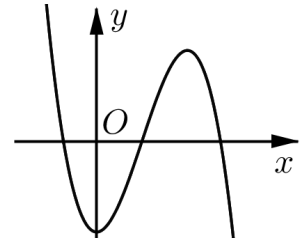
Câu 3. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2017-2018] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

B. $y = x^4 - x^2 - 2$.

C. $y = -x^4 + x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại B, C.
Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$ nên chỉ có D phù hợp. **Chọn D.**

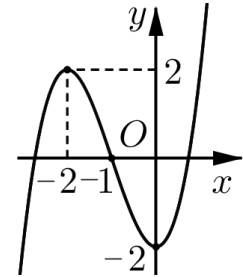
Câu 4. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Loại đáp án A, C.

Thấy đồ thị cắt trục hoành tại điểm $x = -1$ nên thay $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ vào hai đáp án B và D, chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

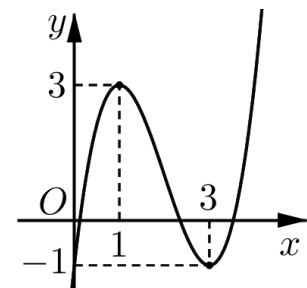
Câu 5. (Đại học Vinh lần 2, năm 2018-2019) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$.

B. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

C. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$.

D. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.



Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Loại đáp án C.

Khi $x = 0 \Rightarrow y = -1$. Loại đáp án B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; -1)$ nên chỉ có đáp án D thỏa mãn. **Chọn D.**

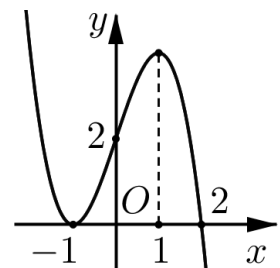
Câu 6. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = (x+1)^2(1-x)$.

B. $y = (x+1)^2(1+x)$.

C. $y = (x+1)^2(2-x)$.

D. $y = (x+1)^2(2+x)$.



Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại đáp án B, D.

Để ý thấy khi $x = 0$ thì $y = 2$. Do đó chỉ có đáp án C phù hợp. **Chọn C.**

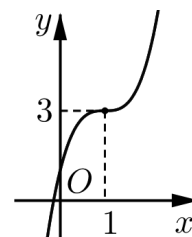
Câu 7. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

B. $y = -2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$.

C. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

D. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$.



Lời giải. Dựa vào dáng điệu đồ thị ta loại A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $I(1;3)$. **Chọn C.**

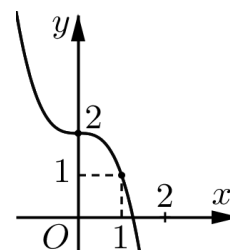
Câu 8*. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 2$.



Lời giải. Khi $x = 0$ thì $y = 2$. Loại đáp án A.

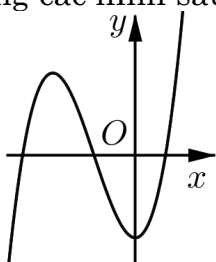
Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số không có cực trị nên ta loại đáp án B vì $y' = -3x^2 + 3$ có hai nghiệm.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$, kiểm tra thấy C & D đều thỏa mãn.

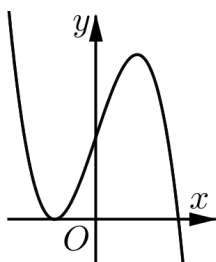
Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{CASIO}} x = 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{2} \in (1;2)$. Do đó chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

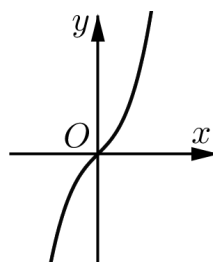
Câu 9. Hình dạng có thể có của đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ là những hình nào trong các hình sau đây?



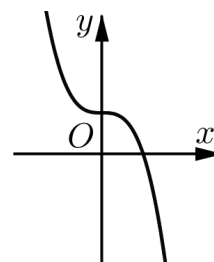
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



(Hình IV)

A. (I).

B. (III).

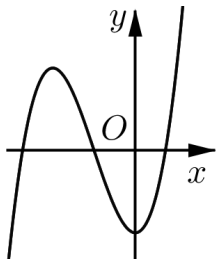
C. (I) hoặc (III).

D. (II) hoặc (IV).

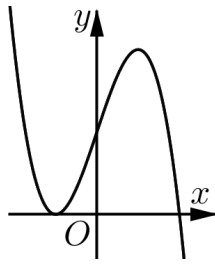
Lời giải. Hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx - 1$ có $\Delta'_{y'} = b^2 + 3 > 0, \forall b \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị. **Chọn A.**

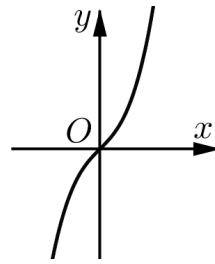
Câu 10. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



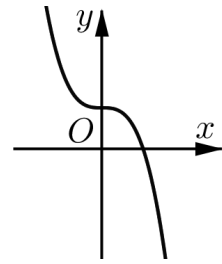
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



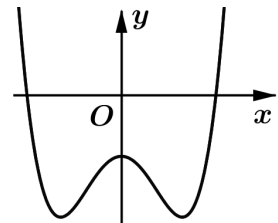
(Hình IV)

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị như (I) có được khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- B. Đồ thị như (II) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- C. Đồ thị như (III) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm.
- D. Đồ thị như (IV) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Lời giải. Chọn C.

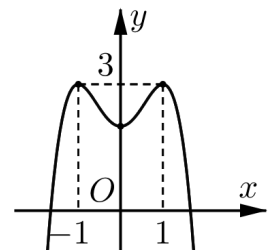
Câu 11. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2017-2018] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
- B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
- C. $y = x^3 - x^2 - 1$.
- D. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm trùng phương. Loại đáp án C và D. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. **Chọn A.**

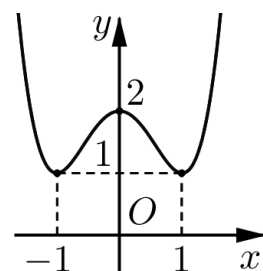
Câu 12. [ĐỀ THAM KHẢO 2017-2018] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- B. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm trùng phương. Loại đáp án C và D. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. **Chọn B.**

Câu 13. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



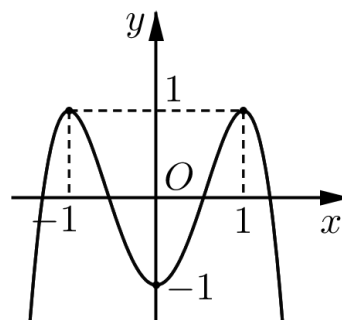
- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.
- D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a > 0$. Loại đáp án A. Để ý thấy khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên ta loại đáp án D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 14. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1.$
- B. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1.$
- C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$
- D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1.$



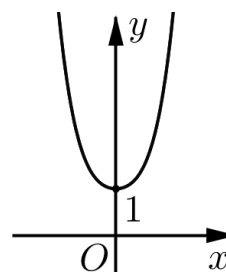
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại A.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên thể hiện $c = -1$. Loại D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 15. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 + x^2 + 2.$
- B. $y = x^4 - x^2 + 2.$
- C. $y = x^4 - x^2 + 1.$
- D. $y = x^4 + x^2 + 1.$

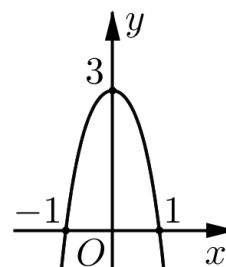


Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x = 0$ thì $y = 1$. Loại A, B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu. **Chọn D.**

Câu 16. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3.$
- B. $y = -x^4 - 2x^2 - 3.$
- C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$
- D. $y = x^4 + 2x^2 + 3.$



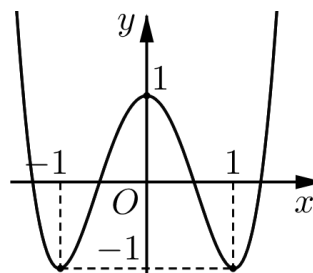
Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a < 0$. Loại D.

Dựa vào đồ thị thấy khi $x = 0$ thì $y = 3$. Loại B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu. **Chọn A.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = 15.$
- B. $f(2) = 16.$
- C. $f(2) = 17.$
- D. $f(2) = 18.$



Lời giải. Ta có $y' = f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1), B(1;-1)$ và đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại

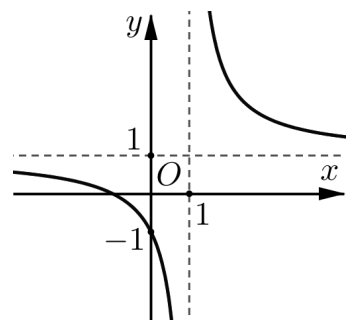
$$B(1;-1) \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$$

Do đó: $y = f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \longrightarrow f(2) = 17$. **Chọn C.**

Câu 18. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. B. $y = x^4 + x^2 + 1$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$. D. $y = x^3 - 3x - 1$.

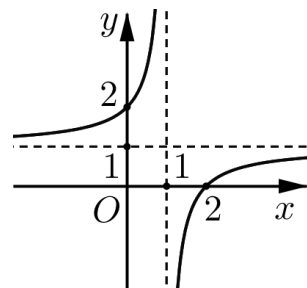


Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc nhất trên bậc nhất. Loại đáp án B và D. Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;-1) \longrightarrow$ chỉ có C thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 19. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x-2}$. D. $y = \frac{x+2}{x-1}$.



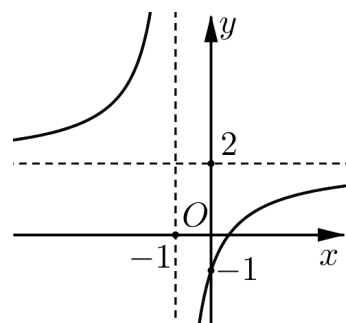
Lời giải. Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2;0) \longrightarrow$ loại C và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;2) \longrightarrow$ chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 20. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x-1}$. D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

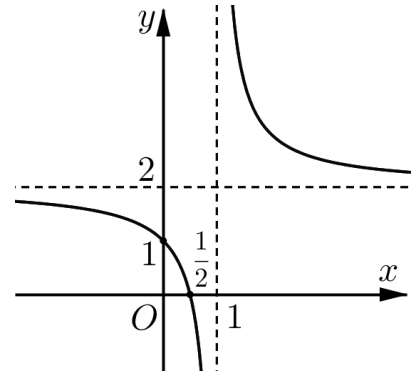


Lời giải. Đồ thị hàm số có TCD: $x = -1$. Loại đáp án C và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;-1) \longrightarrow$ chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 21. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.
C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

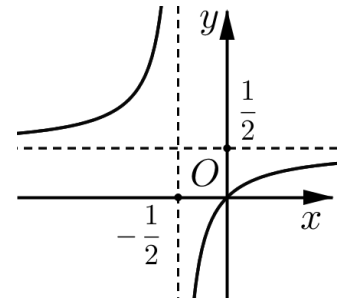


Lời giải. Đồ thị hàm số có TCD: $x = 1$. Loại đáp án A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;1) \rightarrow$ chỉ có C thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 22. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$. B. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.
C. $y = \frac{x}{2x+1}$. D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.



Lời giải. Các chi tiết đồ thị hàm số có TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$ đều giống nhau.

Chỉ có chi tiết đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ là phù hợp cho đáp án C. **Chọn C.**

Dạng 2. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 23. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1		$-\frac{29}{3}$	$+\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

B. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{2}{3}$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$.

D. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{2}{3}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$. Loại A và D.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C. **Chọn B.**

Câu 24. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4		-4	$+\infty$

A. $y = 2x^3 - 6x$. B. $y = -2x^3 + 6x - 8$. C. $y = -2x^3 + 6x$. D. $y = 2x^3 - 6x + 8$.

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a > 0$. Loại B và C.

Thử tại $x = 1 \rightarrow y = -4$ thì chỉ có đáp án A thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 25. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$-\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 - x^2 + 2x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a < 0$. Loại B và C.

Thử tại $x = 1 \rightarrow y = 1$ thì chỉ có đáp án D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 26. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$							

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số trùng phương có hệ số $a < 0$. Loại A và C.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên loại B. **Chọn D.**

Câu 27. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	-2	$+\infty$	-2

A. $y = \frac{x-1}{x-1}$. B. $y = \frac{-2x}{x-1}$. C. $y = \frac{-2+x}{x+1}$. D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta có các nhận xét sau:

- Đồ thị hàm số có TĐĐ: $x = -1$. Loại đáp án A và B.
- Đồ thị hàm số có TCN: $y = -2$. **Chọn D.**

Câu 28. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	-1	$+\infty$	-1

A. $y = \frac{-x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{-x-2}{x+1}$. C. $y = \frac{-x-2}{x-1}$. D. $y = \frac{-x+2}{x-1}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta có các nhận xét sau:

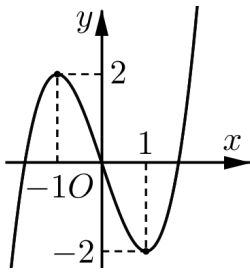
- Đồ thị hàm số có TĐĐ: $x = -1$. Loại đáp án C và D.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử đáp án A, có $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0$:

không thỏa mãn. Vậy còn lại duy nhất đáp án B. **Chọn B.**

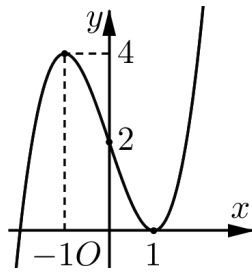
Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$					$+\infty$

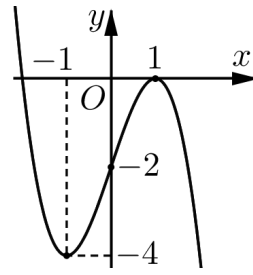
Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y = f(x)$?



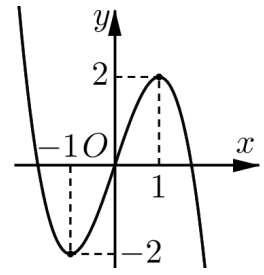
A



B



C



D

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2. Loại đáp án B và C.
- Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ nên chỉ có đáp án A là phù hợp. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$a-b+c-1$	-24	$+\infty$	

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$.

A. $P = -9$.

B. $P = -3$.

C. $P = 3$.

D. $P = 9$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là -1 và $3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \end{cases}$.

Lại có $f(3) = -24 \longrightarrow 27 + 9a + 3b + c = -24 \longrightarrow c = 3$.

Vậy $P = a + b + 3c = -3$. **Chọn B.**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$							
								</

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 2$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải. Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$. (1)

Lại có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được $a = -1, b = 2, c = 1 \rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 6$. **Chọn C.**

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$a+b$	0	-1	$+\infty$

Hiệu $a - b$ bằng

A. -3.

B. -1.

C. 1.

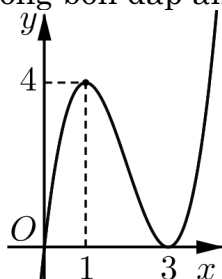
D. 3.

Lời giải. Đạo hàm: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

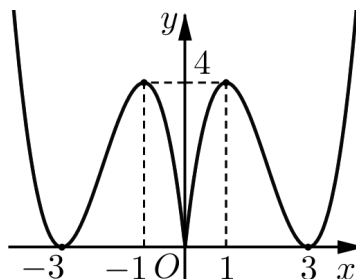
Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2a + b) = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Dạng 3. PHÉP SUY ĐỒ THỊ

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

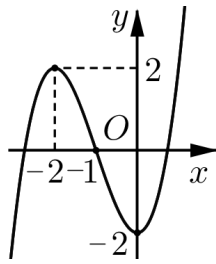
C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

D. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

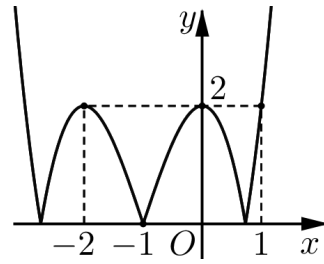
Lời giải. Nhắc lại lý thuyết: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.
- Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy . **Chọn D.**

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 + 3x^2 - 2$.

B. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.

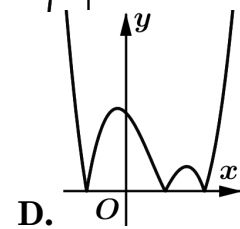
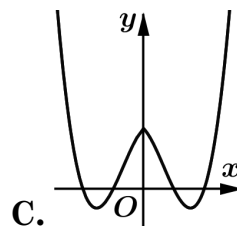
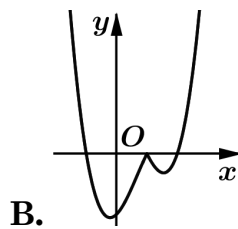
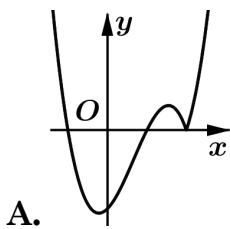
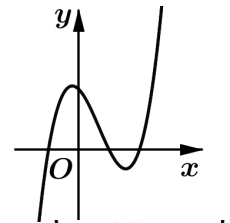
C. $y = ||x|^3 + 3x^2 - 2|$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải. Nhắc lại lý thuyết: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y < 0$ qua trục Ox . **Chọn B.**

Câu 35. [ĐỀ THAM KHẢO 2016-2017] Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



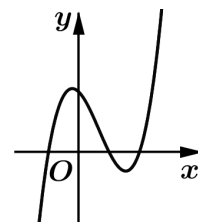
Lời giải. Ta có $y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

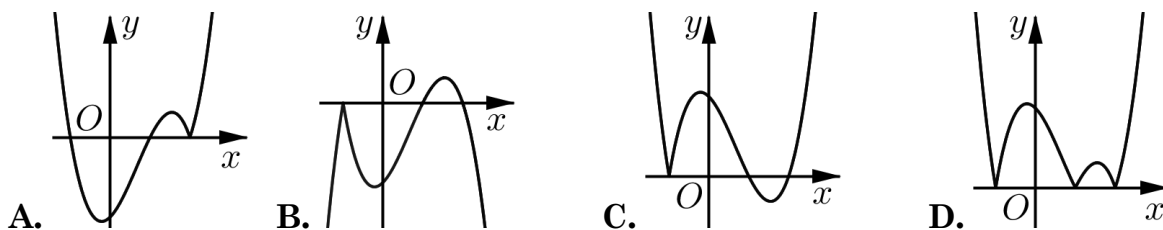
Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq 2$ (bên phải đường thẳng $x = 2$).
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x < 2$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được đồ thị hàm số cần tìm. **Chọn A.**

Câu 36. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây trong các đáp án A, B, C, D là đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2-3x+2)$?



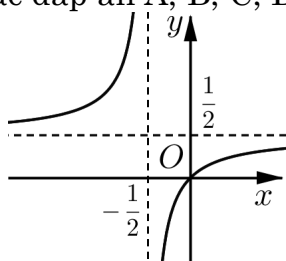


Lời giải. Ta có $y = |x+1|(x^2 - 3x + 2) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \geq -1 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

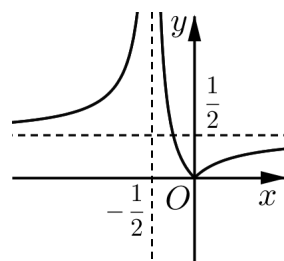
Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2 - 3x + 2)$ giống hoàn toàn phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq -1$ (bên phải đường thẳng $x = -1$).

Đối chiếu các đáp án ta **chọn C**.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1

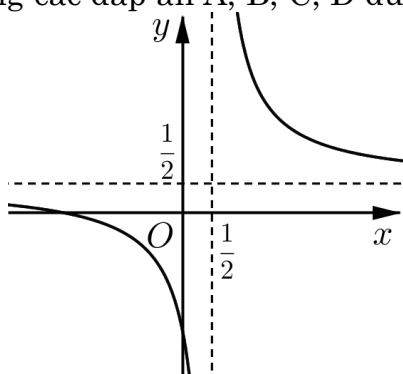


Hình 2

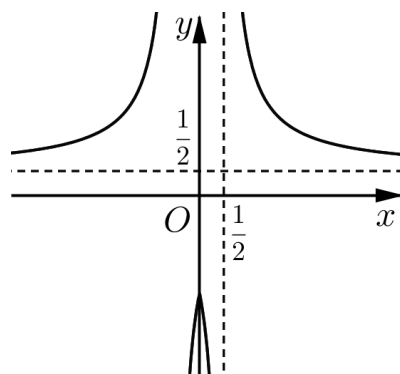
A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$. B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$. C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$. D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1

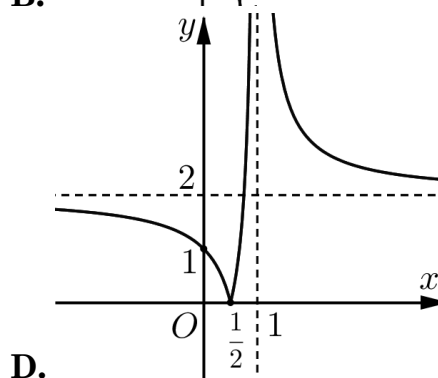
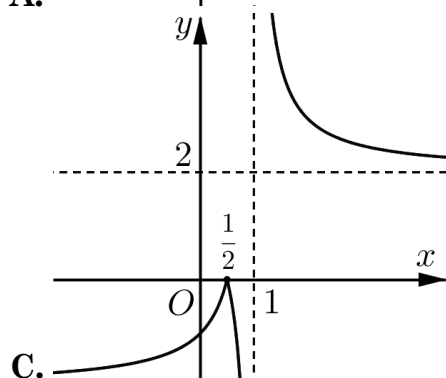
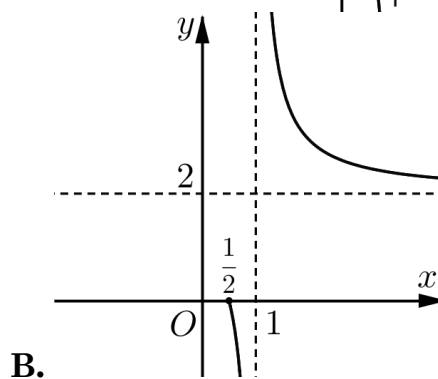
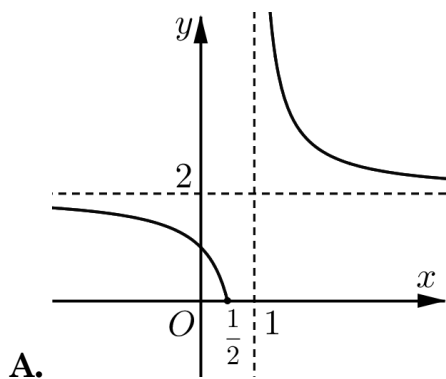
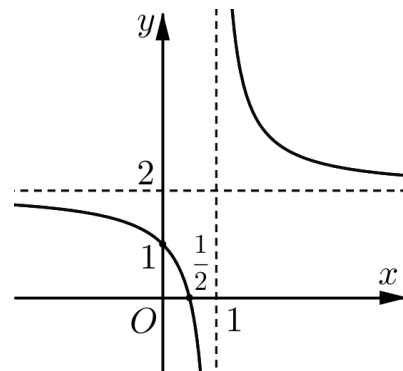


Hình 2

A. $y = -\left(\frac{x+2}{2x-1} \right)$. B. $y = \frac{|x|+2}{2|x|-1}$. C. $y = \left| \frac{x+2}{2x-1} \right|$. D. $y = \frac{|x|+2}{2x-1}$.

Lời giải. Chọn B.

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:



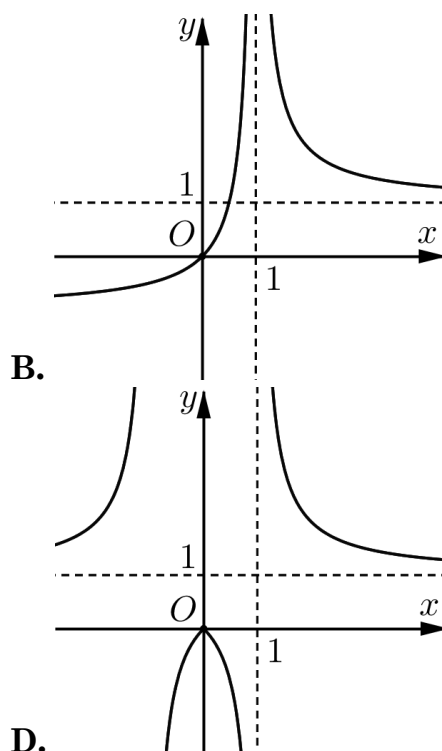
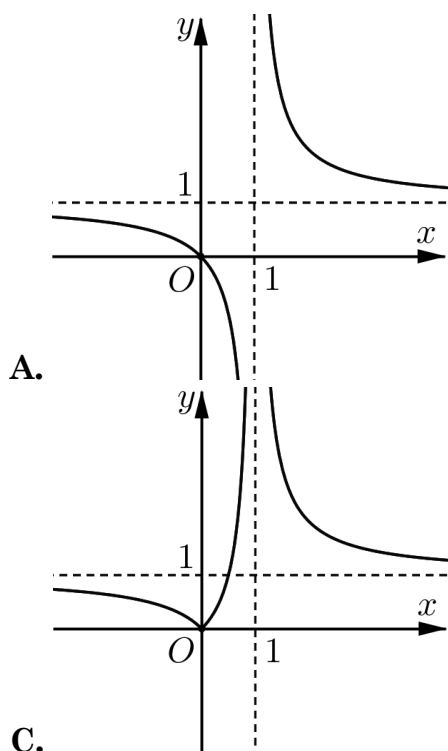
Lời giải. Ta có $y = \frac{|2x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$. **Chọn C.**

Câu 40. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$?



Lời giải. Ta có $y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ bằng cách:

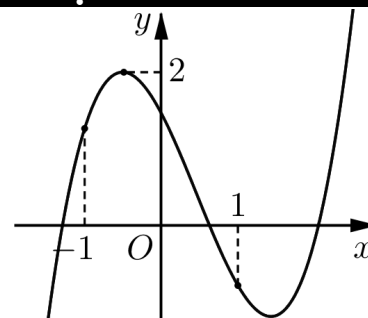
- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x=1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x=1$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$. **Chọn B.**

Dạng 4. TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ

Câu 41. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



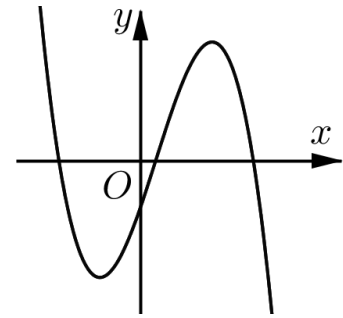
Lời giải. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\begin{cases} x_{CT} > 1 \\ -1 < x_{CĐ} < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{CĐ} + x_{CT} > 0 \\ x_{CĐ} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases} . \text{ Vậy } a > 0, b < 0, c < 0, d > 0. \text{ Chọn C.}$$

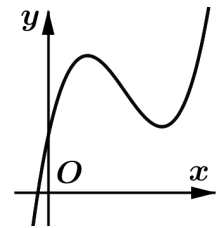
Câu 42. [ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016-2017] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 43. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

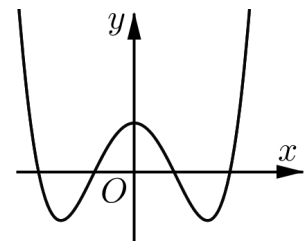


- A. $ac > 0, bd < 0$.
- B. $ac > 0, bd > 0$.
- C. $ac < 0, bd < 0$.
- D. $ac < 0, bd > 0$.

Lời giải. Chọn A. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Dễ dàng suy ra $a > 0$ và $d > 0$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đều dương nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, suy ra $\frac{c}{3a} > 0$ và $-\frac{2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$. Vậy $ac > 0, bd < 0$.

Câu 44. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$.

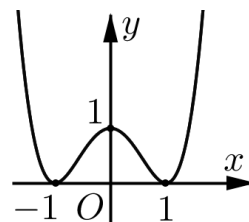
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$. **Chọn C.**

Câu 45. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

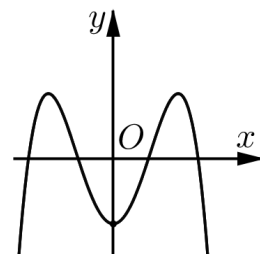
- A. $a < 0, b > 0, c = 1$. B. $a > 0, b < 0, c = 1$.
C. $a > 0, b > 0, c = 1$. D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải. Chọn B.

Câu 46. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

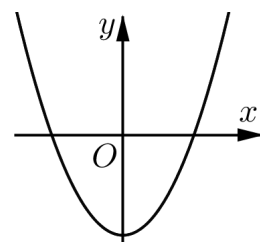
- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0$.
C. $a < 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải. Chọn B.

Câu 47. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b \geq 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c \leq 0$.
C. $a > 0, b \geq 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải. Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a > 0$.

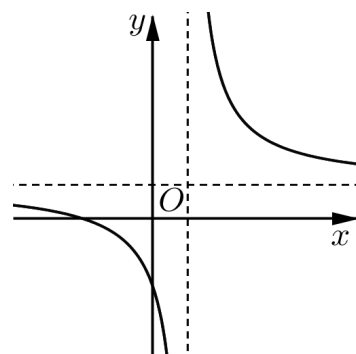
Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \xrightarrow{a > 0} b \geq 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a > 0, b \geq 0, c < 0$. **Chọn A.**

Câu 48. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b > 0, c > 0, d < 0$.
B. $b > 0, c < 0, d < 0$.
C. $b < 0, c < 0, d < 0$.
D. $b < 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số, ta thấy

- Khi $y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$.
- Khi $x = 0 \rightarrow y = \frac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b > 0} d < 0$.

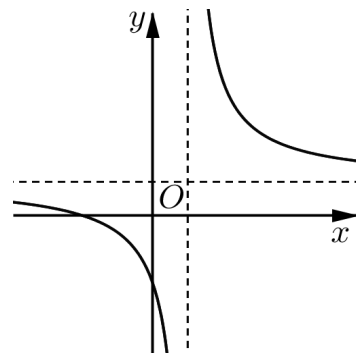
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d < 0} c > 0$.

Vậy $b > 0, c > 0, d < 0$. **Chọn A.**

Câu 49. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ

thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c - ab = 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

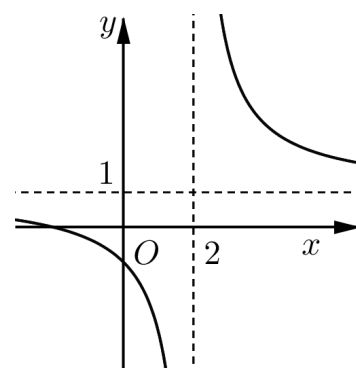
Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống (từ trái sang phải) nên suy ra đạo hàm $y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \longrightarrow c - ab < 0$. Vậy $a > 0, b > 0, c - ab < 0$. **Chọn A.**

Câu 50. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Đường cong

ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là

các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 1$. B. $y' < 0, \forall x \neq 2$.
- C. $y' > 0, \forall x \neq 1$. D. $y' > 0, \forall x \neq 2$.



Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra $y' < 0, \forall x \neq 2$. **Chọn B.**

Bài 6

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

1. Giao điểm của hai đồ thị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là $(\mathcal{C}_1)$ và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là $(\mathcal{C}_2)$.

Để tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là ta giải phương trình

$$f(x) = g(x).$$

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị.

2. Sự tiếp xúc của hai đường cong

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là $(\mathcal{C}_1)$ và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là $(\mathcal{C}_2)$.

Hai đường cong $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

Dạng 1. BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1. [ĐỀ THAM KHẢO 2017-2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

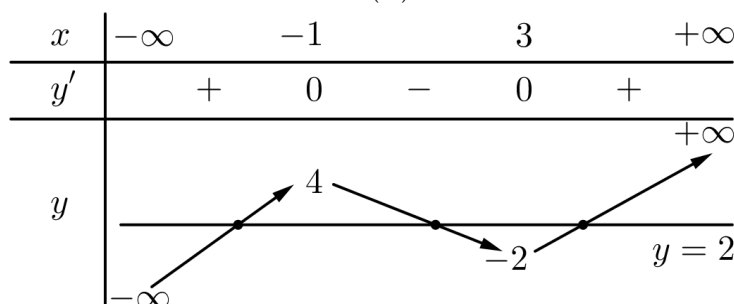
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$. Do đó số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giữa hai đường này có 3 điểm chung. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt. **Chọn D.**

Câu 2. [ĐỀ THAM KHẢO 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1			$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$. Do đó số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giữa hai đường này có 4 điểm chung. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt. **Chọn D.**

Câu 3. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2018-2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$			-1			$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. **Chọn D.**

Câu 4. (KHTN Hà Nội lần 1, năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	$-\infty$			1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Chọn C.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y		$\nearrow 4$	$\searrow -2$	$\nearrow 4$	$\searrow -\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| - 7 = 0$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải. Ta có $2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f(x) = \pm \frac{7}{2}$.

Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = \frac{7}{2}$ có 4 nghiệm; $f(x) = -\frac{7}{2}$ có 2 nghiệm. **Chọn C.**

Cách 2. Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	0	x_3	1	x_4	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$+\infty$

Dựa vào BBT $\longrightarrow 2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2}$ có 6 nghiệm.

Câu 6*. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

Gọi m là số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3$ và n là số nghiệm của phương trình $f(|x|) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m + n = 4$.B. $m + n = 6$.C. $m + n = 7$.D. $m + n = 8$.

Lời giải. Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $g(x) = |f(x)|$ như hình bên (trong đó a là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành).

x	$-\infty$	a	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	2	0	2	$+\infty$

Dựa vào BBT $\rightarrow |f(x)| = 3$ có 3 nghiệm.

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm $h(x) = f(|x|)$ như hình bên. Dựa vào BBT $\rightarrow f(|x|) = 3$ có 4 nghiệm.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0
$h(x)$	$+\infty$	2	0	2	$+\infty$

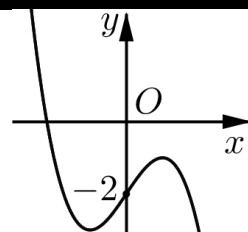
Vậy $m + n = 3 + 4 = 7$. **Chọn C.**

Dạng 2. ĐỒ THỊ

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2.
C. 4.

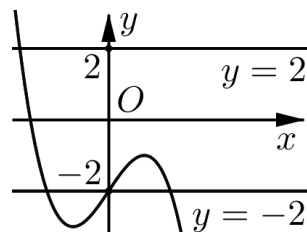
- B. 3.
D. 5.



Lời giải. Ta có $[f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$. Do đó số nghiệm

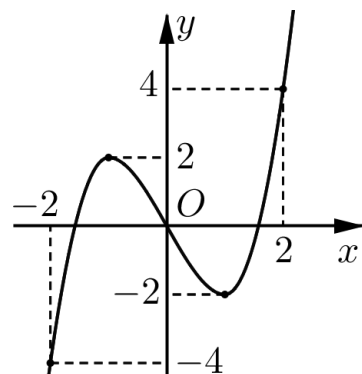
của phương trình $[f(x)]^2 = 4$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với hai đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: Phương trình (1) có 1 nghiệm; Phương trình (2) có 3 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm. **Chọn C.**



Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2; 2]$?

- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.



Lời giải. Ta có $|f(x) - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 9*. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ.

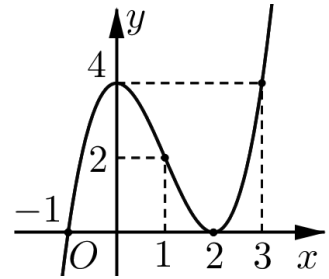
Hỏi phương trình $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.



Lời giải. Ta có $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1 \Leftrightarrow f^3(x) - 3f^2(x) + 4 = 3f^2(x) - 5f(x) + 4$

$$\Leftrightarrow f^3(x) - 6f^2(x) + 5f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \\ f(x) = 5 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) có 2 nghiệm; (2) có 3 nghiệm; (3) có 1 nghiệm. **Chọn C.**

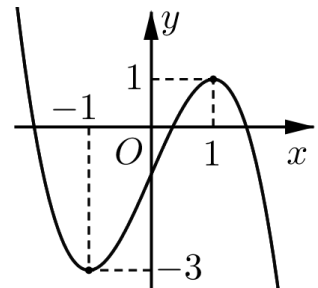
Câu 10. (KHTN Hà Nội lần 1, năm 2018-2019) Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| - 5 = 0$ là

A. 1.

B. 3.

C. 4.

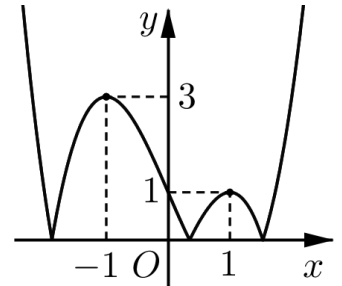
D. 6.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ như hình bên.

Ta có $2|f(x)| - 5 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{5}{2}$. (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm. **Chọn C.**



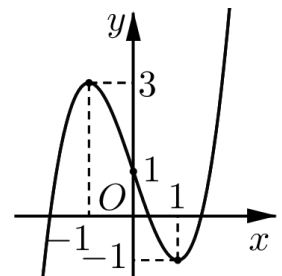
Câu 11*. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f(|x - 2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

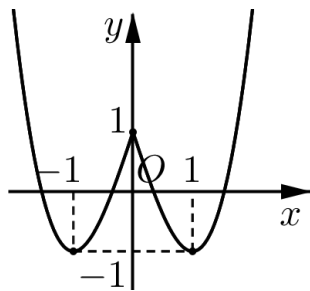
C. 4.

D. 6.

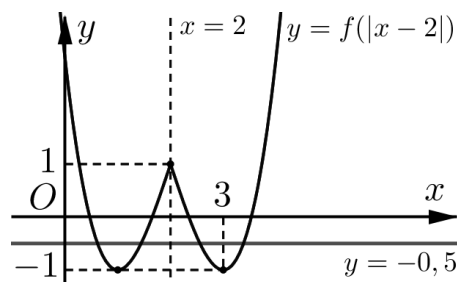


Lời giải. Đồ thị hàm số $f(|x - 2|)$, được suy từ đồ thị $f(x)$ bằng cách:

- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x)$ phía bên phải Oy (xóa phần đồ thị bên trái Oy) qua Oy (xem Hình 1);
- Tịnh tiến đồ thị ở bước trên sang phải 2 đơn vị (xem Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

Từ đồ thị của hàm số $f(|x-2|)$, suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 12*. Cho hàm số $y = (x-1) \cdot f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x-1| \cdot f(x)$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$.

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

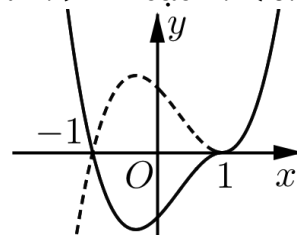
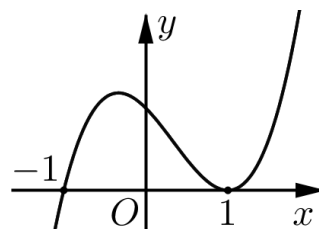
C. $0 < m < 1$.

D. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y = (x-1) \cdot f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)|x-1|$ như hình bên.

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $|x-1| \cdot f(x) = m^2 - m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$ khi và chỉ khi

$$m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 13*. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f[f(x)] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3.

B. 5.

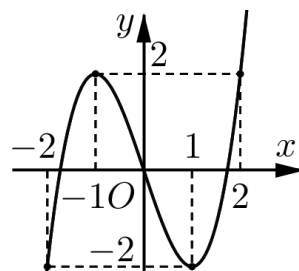
C. 7.

D. 9.

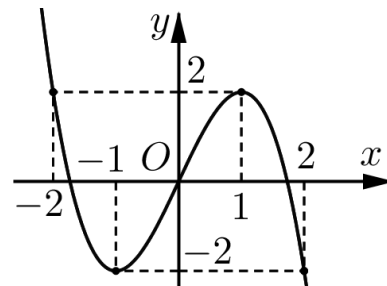
Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a & (-2 < a < -1) & (1) \\ f(x) = b & (0 < b < 1) & (2) \\ f(x) = c & (1 < c < 2) & (3) \end{cases}$$

Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm. **Chọn D.**



Câu 14*. (ĐHSP Hà Nội lần 4, năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) = -2$ là



A. 2.

B. 4.

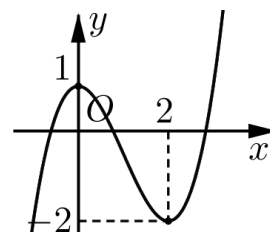
C. 5.

D. 9.

Lời giải. Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra phương trình $f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 15*. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$ là



A. 0.

B. 2.

C. 4.

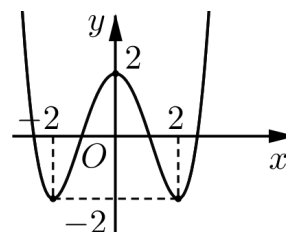
D. 6.

Lời giải. Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $f(t) = -\frac{3}{2}$. (*)

Số nghiệm của (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng

$y = -\frac{3}{2}$. Dựa vào đồ thị, phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 < 0 \text{ (loại)} \\ 0 < t_2 < 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_2} \\ t_3 > 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_3} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 16. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 8 = 0$ là



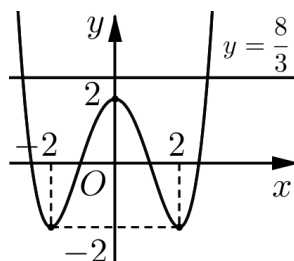
A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $3f(x) - 8 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{8}{3}$. Do đó số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{8}{3}$.



Dựa vào đồ thị ta thấy giữa hai đường này có 2 điểm chung. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt. **Chọn B.**

$$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên có 3 giao điểm. **Chọn D.**

Câu 22. [ĐỀ MINH HỌA 2016-2017] Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = -1$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = 4$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $x = 0 \longrightarrow y = 2$. **Chọn C.**

Câu 23. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (C) không cắt trục hoành. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm. **Chọn B.**

Câu 24. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có hai điểm chung với đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ là A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 1. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -1 \\ x = 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

Suy ra $A(1; -1), B(2; -1) \longrightarrow AB = 1$. **Chọn A.**

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có bao nhiêu điểm chung với trục hoành?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$

Suy ra phương trình có 3 nghiệm nên có 3 điểm chung. **Chọn C.**

Câu 26. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2020}{2x + 1}$ với trục tung.

- A. $M(0; 0)$. B. $M(0; -2020)$. C. $M(2020; 0)$. D. $M(2020; -2020)$.

Lời giải. Do giao với trục tung nên thay $x = 0 \longrightarrow y = -2020$. **Chọn B.**

Câu 27. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x}$ có hai điểm chung với đồ thị hàm số

$y = x^2 + x + 1$ là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tổng $y_1 + y_2$ bằng

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x} = x^2 + x + 1 \quad (x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = x(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \longrightarrow y(1) = 3 \\ x = -1 \longrightarrow y(-1) = 1 \end{cases}$$

Khi đó $y_1 + y_2 = y(1) + y(-1) = 4$. **Chọn C.**

Dạng 4. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Câu 28. (ĐHSP Hà Nội lần 4, năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	
y					

Phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $m \in (-1; 2)$.

B. $m \in (1; 2)$.

C. $m \in [1; 2)$.

D. $m \in [1; 2]$.

Lời giải. Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = m$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow 1 < m < 2$. **Chọn B.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có 2 nghiệm.

A. $-2 < m < -1$.

B. $m = -1, m > 0$.

C. $m = -2, m > -1$.

D. $m = -2, m \geq -1$.

Lời giải. Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	-15	$-\infty$

Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất là

- A. $(-\infty; -1] \cup [15; +\infty)$. B. $(-\infty; -15) \cup (1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (15; +\infty)$. D. $(-\infty; -15] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} -m > 1 \\ -m < -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 15 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	
y	2	$-\infty$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt.

- A. $1 < m < \frac{3}{2}$. B. $1 \leq m < \frac{3}{2}$. C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. D. $1 < m < 2$.

Lời giải. YCBT $\Leftrightarrow 1 < 2m - 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Nhận xét: Sai lầm hay gặp là cho $1 \leq 2m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$	$-$	$-$
y	$-3 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 2 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 3$	

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m \leq -2$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq -2, m \geq 1$.

D. $m < -2, m > 1$.

Lời giải. YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 3 \\ 2m+1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \leq 2m + 1 \leq 3$.

Câu 33. [ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016-2017] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	
	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	
		-1			
		$-\infty$			$-\infty$

Tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt là

A. $(-\infty; 2]$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-1; 2]$.

D. $[-1; 2]$.

Lời giải. Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = m$ có 3 nghiệm $\Leftrightarrow -1 < m < 2$. **Chọn B.**

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m = 2 \end{cases}$; 1 nghiệm $\Leftrightarrow m > 2$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	2	4	3	$-\infty$	-1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải. Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 3 < m < 4 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1		0	1		2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$+$
y	0	-2	$+\infty$		$-\infty$	1	$+\infty$	0	1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = m$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow -2 < m \leq 0$. **Chọn B.**

Nhận xét. 1) Học sinh rất dễ sai lầm vì cho rằng $-2 < m < 0$.

2) Ph trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$, có 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$, có 5 nghiệm $0 < m < 1$.

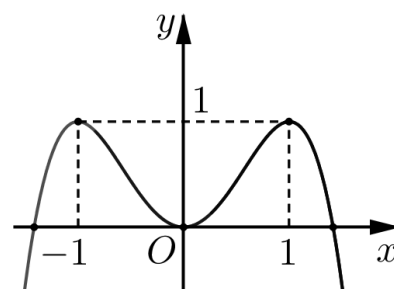
Câu 36. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $0 \leq m \leq 1$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m < 1$.

D. $m > 0$.



Lời giải. Chọn B.

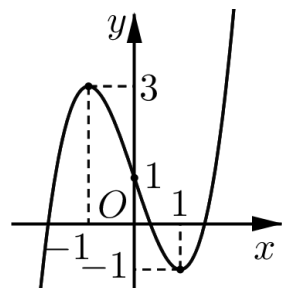
Câu 37. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2020 = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 2017, m = 2021$.

B. $2017 < m < 2021$.

C. $m < 2017, m > 2021$.

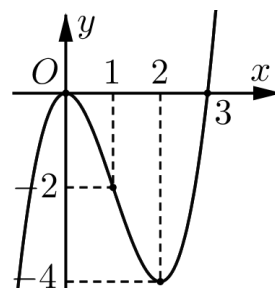
D. $2017 \leq m \leq 2021$.



Lời giải. Ta có $f(x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2020 - m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2020 - m > 3 \\ 2020 - m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2017 \\ m > 2021 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị như hình vẽ. Dựa vào đồ thị, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.



A. $\frac{1}{3} < m < \frac{5}{3}$.

B. $1 < m < \frac{5}{3}$.

C. $2 < m < \frac{7}{3}$.

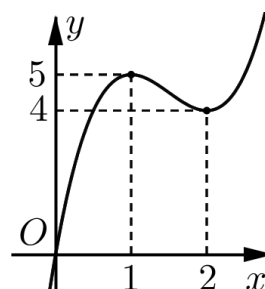
D. $-2 < m < \frac{4}{3}$.

Lời giải. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 1 - 3m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow -4 < 1 - 3m < -2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{3}$. **Chọn B.**

Chú ý: Không để ý kỹ sẽ mắc sai lầm hay gặp là cho $-4 < 1 - 3m < 0$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) + m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $m < -5$.

B. $-5 < m < -4$.

C. $4 < m < 5$.

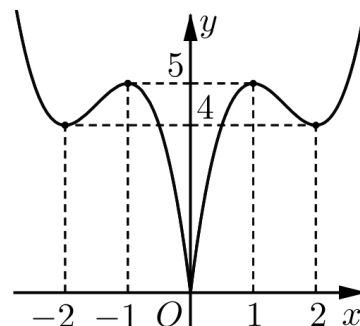
D. $m > -4$.

Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.

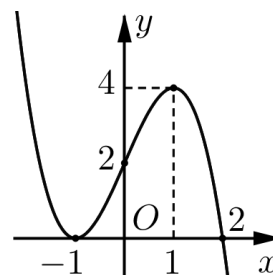
Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Chọn B.



Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

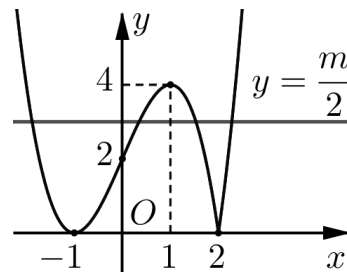
C. 7.

D. 8.

Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

Ta có $2|f(x)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2}$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 8$. **Chọn C.**



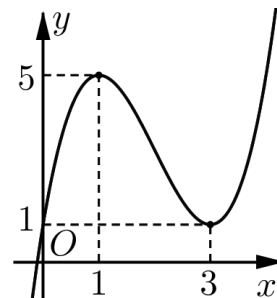
Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

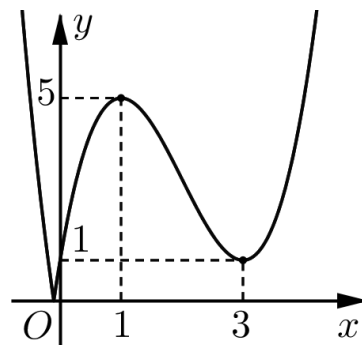


Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

Ta có $2|f(x)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2}$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 1$ hoặc $\frac{m}{2} > 5$

$\Leftrightarrow 0 < m < 2$ hoặc $m > 10$. **Chọn B.**



Câu 42. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $(0; 4)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải. Ph trình hđgđ: $(x-1)(x^2 + mx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + mx + m = 0 \end{cases} \quad (1)$

YCBT $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + m \cdot 1 + m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4m > 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Nếu nhẩm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\begin{cases} x = x_0 \\ ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$.
- Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.
- Nếu không nhẩm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:

- Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} < 0$.
- Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} = 0$.
- Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} > 0$ hoặc hàm số không có cực trị.

Chú ý: Nếu $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nhằm được hai nghiệm thì tính $y_{\text{CD}}, y_{\text{CT}}$ dễ dàng. Trường hợp không nhằm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Câu 43. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt là

- A. $(-4; 0)$. B. $(0; +\infty)$.
C. $(-\infty; -4)$. D. $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải. Chọn A. Xét hàm bậc ba $y = x^3 - 3x^2$, có

$$y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y_{\text{CD}} = 0 \\ x = 2 \longrightarrow y_{\text{CT}} = -4 \end{cases}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow y_{\text{CT}} < m < y_{\text{CD}} \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Câu 44. Cho phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. $m = -\frac{1}{2}, m = -1$. B. $m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{5}{2}$.
C. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{5}{2}$. D. $m = 1, m = -\frac{5}{2}$.

Lời giải. Chọn A. Xét hàm bậc ba $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, có

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y_{\text{CD}} = 0 \\ x = 1 \longrightarrow y_{\text{CT}} = -1 \end{cases}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = y_{\text{CD}} \\ 2m+1 = y_{\text{CT}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = 0 \\ 2m+1 = -1 \end{cases}$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 0$. C. $m \neq 3$. D. $m > 3$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{3} \neq 0 \\ y(0) \cdot y\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 \cdot \left(\frac{-4m^3}{27} + 4\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3. \text{ Chọn D.}$$

Câu 46. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \sqrt[3]{2}$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $m = \sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có hai điểm cực trị và tích hai cực trị bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ y(0) \cdot y(2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 \cdot (-4m^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m \leq 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

- **TH1:** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 0$.
- **TH2:** Hàm số có hai cực trị y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ y(-\sqrt{m}) \cdot y(\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2 + 2m\sqrt{m})(2 - 2m\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m < 1$. **Chọn B.**

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x - 1) + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt $A(1;1), B, C$.

A. $m \neq 0$. B. $m < \frac{9}{4}$. C. $0 \neq m < \frac{9}{4}$. D. $m = 0, m > \frac{9}{4}$.

Lời giải. Ph trình hđgđ: $-x^3 + 3x - 1 = m(x - 1) + 1$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 2 + m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

- A. $m > -3$. B. $m = -3$. C. $m > -2$. D. $m = -2$.

Lời giải. Ph trình hđgđ: $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Để $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$.

Giả sử $x_1 = 1$. Khi đó x_2, x_3 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -m - 2 \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) = 4 \Leftrightarrow m = -2$. **Chọn D.**

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

- A. $m = 3$. B. $m = 2, m = 3$. C. $m = -2, m = -3$. D. $m = -2, m = 3$.

Lời giải. Ph trình hđgđ: $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2 \neq m < -1 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases}$.

Giải sử $B(x_1; x_1 + 4), C(x_2; x_2 + 4)$. Ta có $BC = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$ và $d[M, d] = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

YCBT: $S_{\triangle MBC} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(M, d) BC = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 16$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = -2 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 51. [ĐỀ CHÍNH THỨC 2016-2017] Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$ là

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải. Ph trình hđgđ: $x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Đề d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m - 2) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$.

Giả sử $x_2 > 1$ thì $x_1 = 2 - x_2 < 1$, suy ra $x_1 < 1 < x_2$.

Theo giả thiết $BA = BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B = 1$ và $x_A = x_1, x_C = x_2$. Khi đó ta có $x_A + x_C = 2x_B$ nên d luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $AB = BC$. Vậy với $m < 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 52*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m = 1$.

B. $m = 2, m = -1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải. Ta có $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \xrightarrow{\text{Viet}} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1 + x_3 = 2x_2} x_2 = -\frac{b}{3a}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0$. $(*)$

Từ giả thiết suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = m$.

Thay $x = m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3 - 3m \cdot m^2 + 6m \cdot m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Thử lại: • Với $m = -1$, ta được $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 : \text{thỏa mãn} \\ x = 2 \end{cases}$

• Với $m = 2$, ta được $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: không thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 53. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2(1 - x^2) = 1 - k$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. $0 < k < 2$.

B. $k < 3$.

C. $-1 < k < 1$.

D. $0 < k < 1$.

Lời giải. Xét hàm trùng phương $y = 4x^2(1 - x^2) = -4x^4 + 4x^2$, có

$$y' = -16x^3 + 8x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow y_{CT} < 1 - k < y_{CD} \Leftrightarrow 0 < 1 - k < 1 \Leftrightarrow 0 < k < 1$. **Chọn D.**

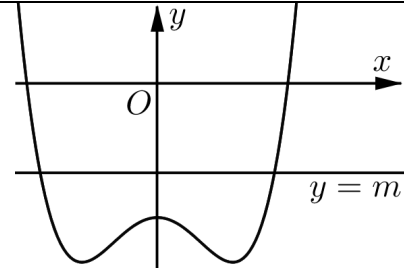
Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ ($a > 0, b < 0$). (1)

Cách 1. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $y = m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng như sau:

Dựa vào đồ thị ta có:

- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m < y_{CT}$.
- (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m = y_{CT} \\ m > y_{CD} \end{cases}$.
- (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow m = y_{CD}$.
- (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD}$.

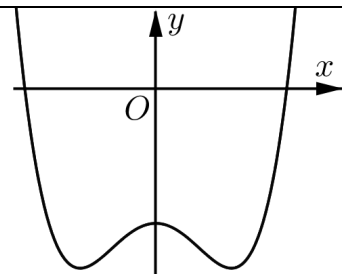


Cách 2. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m \longleftrightarrow ax^4 + bx^2 + c - m = 0$. (2)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c - m$ có dạng như sau:

Ta có các trường hợp sau:

- (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} > 0$.
- (2) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CT} = 0 \\ y_{CD} < 0 \end{cases}$.
- (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CD} = 0$.
- (2) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} < 0 < y_{CD}$.



Câu 54. Cho hàm số $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A. $m > 1$. B. $m > -\sqrt{2}$. C. $m > \sqrt{2}$. D. $0 < m \neq 1$.

Lời giải. Xét hàm trùng phương $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$, có

$$y' = 4x^3 - 2m(m+1)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y = m^3 \\ x^2 = \frac{m(m+1)}{2} \longrightarrow y = -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có ba điểm cực trị và $y_{CT} < 0 < y_{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2} > 0 \\ -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 < 0 < m^3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 55. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 2020 - m = 0$ có đúng ba nghiệm.

- A. $m = 6060$. B. $m = 4040$. C. $m = 2020$. D. $m = 1794$.

Lời giải. Xét hàm trùng phương $y = x^4 - 2x^2$, có

$$y' = 4x^3 - 4x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm 1 \longrightarrow y(\pm 1) = -1 \end{cases}.$$

YCBT $\Leftrightarrow m - 2020 = y_{\text{CD}} \Leftrightarrow m - 2020 = 0 \Leftrightarrow m = 2020$. **Chọn C.**

Câu 56*. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Xét hàm trùng phương $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$, có

$$y' = -4x^3 + 4(2+m)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2+m \end{cases}.$$

Dựa vào dáng điệu của hàm trùng phương với hệ số của x^4 âm, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

- Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ -4-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2$.
- Hàm số có ba điểm cực trị và giá trị cực đại âm
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ y(\pm\sqrt{2+m}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-3; -2; -1\}$. **Chọn C.**

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2mx + m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{2x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt.

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m > 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-2}{2x+1} = 2mx + m + 1 \quad \left(x \neq -\frac{1}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = (2mx + m + 1)(2x + 1) \Leftrightarrow 4mx^2 + 4mx + m + 3 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0. \quad \textbf{Chọn A.}$$

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $0 < m < 1$. B. $m < -2, m > 5$. C. $1 < m < \frac{3}{2}$. D. $0 < m < \frac{1}{3}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-3}{x+1} = x - 2m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow x-3=(x-2m)(x+1) \Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0. \quad (*)$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 59. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

- A. $m < 0$. B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $0 < m \neq 1$.

Lời giải. Đường thẳng d có dạng $y = m(x-1) = mx - m$.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{x+2}{x-1} = mx - m \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x+2 = (mx-m)(x-1) \Leftrightarrow \underbrace{mx^2 - (2m+1)x + m - 2}_{g(x)} = 0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ mg(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m[m - (2m+1) + m - 2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

- A. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 5 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

$$\text{Lời giải.} \text{ Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{-2x+1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = (-x+m)(x+1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(1-m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = 1-m \end{cases}$. Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$\text{YCBT: } AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). Chọn A.}$$

Câu 61. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

- A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x-1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x = (x - m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta = m^2 - 2m + 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

$$\text{Ta có } AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m + 1)^2 - 8(m - 2) = 2(m - 1)^2 + 16 \geq 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$. **Chọn C.**

Câu 62. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

- A. $k = -4$. B. $k = -3$. C. $k = -1$. D. $k = -2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của (*). Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

$$\text{YCBT: } d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_2 + 2k + 1) \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1 \text{ (thỏa mãn)}. \quad \textbf{Chọn C.}$$

Câu 63. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

$$\begin{aligned} \text{YCBT } \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 &\Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(1 - m) + m(3 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2. \text{ Chọn A.} \end{aligned}$$

Câu 64. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{1}{5}$. D. $m = -\frac{11}{5}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (-3x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - (1 + m)x + m + 1 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 10m - 11 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{3}$ và $x_1 x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$ và $B(x_2; -3x_2 + m)$. Suy ra $G\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{YCBT: } G \in \Delta &\longrightarrow \frac{x_1 + x_2}{3} - 2 \cdot \frac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2 \cdot \frac{-(m+1) + 2m}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5} \text{ (thỏa mãn). Chọn D.} \end{aligned}$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB} = 15$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = \pm 5$. D. $m = 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-4}{x-1} = 2x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 = (2x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m - 4)x - m + 4 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{4-m}{2}$ và $x_1 x_2 = \frac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + m)$ và $B(x_2; 2x_2 + m)$.

$$\text{YCBT: } 4S_{IAB} = 15 \Leftrightarrow 2AB.d[I, AB] = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} = 15 \Leftrightarrow 4AB^2 \cdot m^2 = 1125$$

$$\Leftrightarrow 20(x_1 - x_2)^2 m^2 = 1125 \Leftrightarrow 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] m^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 16)m^2 = 225 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5 (\text{thỏa mãn}). \text{ Chọn C.}$$