

A. TÌM CỰC TRỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN**- Định lý cực trị**

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

• **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

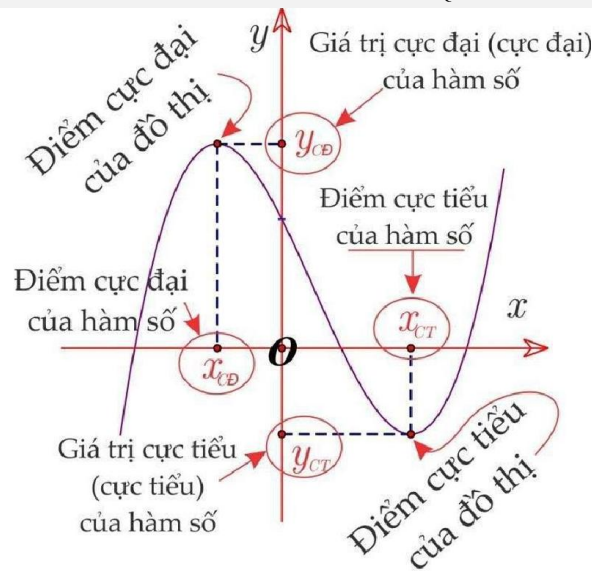
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay y_{CB} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

• Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$.

**CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA**

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2.
B. 3.
C. 0.
D. -4.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0.
B. 2.
C. 1.
D. 3.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$.
- B. $x = 2$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3.
- B. 0.
- C. 2.
- D. 1.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- D. Hàm số có ba điểm cực trị.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
- B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
- C. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
- D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm nào?

- A. $x = 2$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 0$.
- D. $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	-3	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
- D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

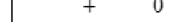
- A. $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = 2$.
- B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = -5$.
- C. $y_{CD} = 0$ và $y_{CT} = 2$.
- D. $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = -5$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng

- A. $y = 4$.
 B. $y = -2$.
 C. $y = 0$.
 D. $x = 3$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

- A. 1.
 B. 0.
 C. -1.
 D. 2.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$		0	$+$		$-$		0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-3;5)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Số điểm cực trị của hàm số trên khoảng $(-3;5)$ là

- A. 2.
 B. 3.
 C. 4.
 D. 1.

x	-3	0	3	5	
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$					

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

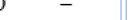
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:

- A. 3.
 B. 0.
 C. -1.
 D. 2.

x	$-\infty$	-1	0.5	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Hàm số đã cho đạt cực trị tại

- A. $y = 2$.
- B. $x = 0, x = 1$.
- C. $x = 0$.
- D. $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-			+	0	-
y		$+\infty$		-1		2	$-\infty$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 0.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		2	2	3		$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

- A. 1.
- B. 4.
- C. Hàm số không có cực tiểu.
- D. 2.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-		-	0	+

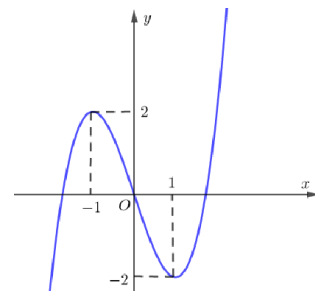
Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 21. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 2$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = -1$.
- D. $x = -2$.



Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		2		1		$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

- A. 1.
- B. 0.
- C. Hàm số không có cực tiểu.
- D. 2.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1		1	2		3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		-4		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	4	1	$-\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $(3;1)$. B. 1.
C. 3. D. Đồ thị hàm số không có điểm cực tiểu.

B. XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (không chứa tham số)

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✎ **Phương pháp:** Sử dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(3-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 3.** Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.
A. $y_{CD} = -1$ **B.** $y_{CD} = 4$ **C.** $y_{CD} = 1$ **D.** $y_{CD} = 0$
- Câu 4.** Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.
- Câu 5.** Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2
- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2
- Câu 7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5
- Câu 8.** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 11.** Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là:
A. $(-1; -2)$. **B.** $(1; 0)$. **C.** $(1; -2)$. **D.** $(-1; 0)$.
- Câu 12.** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng
A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1 .
- Câu 13.** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?
A. $y = \frac{x^2+1}{x}$ **B.** $y = \frac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y = x^2 - 2x + 1$ **D.** $y = -x^3 + x + 1$
- Câu 14.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây
 1) Hàm số có 3 điểm cực trị.
 2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$.
 3) Hàm số có 1 điểm cực trị.
 4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.
 Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 15.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

- Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là
A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.
- Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.
- Câu 19.** Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?
A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011
- Câu 20.** Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.
A. $y_{CT} = -6$ **B.** $y_{CT} = -1$ **C.** $y_{CT} = -2$ **D.** $y_{CT} = 1$

C. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

*Dạng toán này đề minh họa 2020 chưa xuất hiện, có điều các bạn học vẫn nên luyện tập nhé!
 Để đến khi BỘ QUAY XE chúng ta vẫn có thể NẾ ^^!*

- Câu 1.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
A. $m = -1$ **B.** $m = -7$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 1$
- Câu 2.** Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$
A. không tồn tại m . **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \{1; 2\}$.
- Câu 3.** Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.
- Câu 4.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
A. $m = 0$. **B.** $m > 4$. **C.** $0 \leq m < 4$. **D.** $0 < m \leq 4$.
- Câu 6.** Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.
A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 6$.
- Câu 7.** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là:
A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m < 0$. **C.** Không tồn tại m . **D.** $m > 0$.
- Câu 8.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
A. $\{5; 1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\emptyset$. **D.** $\{1\}$.

- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại m . D. $m = -1$.
- Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5$ đạt cực đại tại $x = 0$?
- A. 101. B. 2016. C. 100. D. 10.
- Câu 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 3 B. 2 C. Vô số D. 1
- Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3 \forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 6 B. 7 C. 5 D. 4
- Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- A. 8 B. Vô số C. 7 D. 9
- Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?
- A. 8 B. 9 C. Vô số D. 10

D. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ CÓ n CỰC TRỊ

- Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.
- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:
 - Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
 - Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
- Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.
 - Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$.
 - Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại?
- A. $1 < m \leq 3$ B. $m \leq 1$ C. $m \geq 1$ D. $1 \leq m \leq 3$
- Câu 2.** Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là
- A. $m \geq 3$. B. $m > 3$. C. $m < 3$. D. $m \leq 3$.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị
- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 0$.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?
- A. 2019. B. 2020. C. 2018. D. 2017.

- Câu 5.** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là
A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.
A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.
C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.
- Câu 7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?
A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.
A. $0 < m < 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m > 0$. **D.** $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.
- Câu 9.** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:
A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **C.** $(-1; 2)$ **D.** $[-1; 2]$
- Câu 10.** Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là
A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.
- Câu 11.** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 12.** Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị khi
A. $0 \leq m \leq 1$. **B.** $m \leq 0 \vee m \geq 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0 \vee m > 1$.
- Câu 13.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?
A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11
- Câu 14.** Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?
A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

E. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia y cho y'

- Câu 1.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?
A. $M(0; -1)$ **B.** $N(1; -10)$ **C.** $P(1; 0)$ **D.** $Q(-1; 10)$
- Câu 2.** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $m = \frac{1}{4}$

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{3}{4}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

A. $P(1;0)$. B. $M(0;-1)$. C. $N(1;-10)$. D. $Q(-1;10)$.

Câu 5. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $m = \frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 6. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}$. D. $m = 1$.

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y = 2x - 1$. B. $y = -2x + 1$. C. $y = -x + 2$. D. $y = x - 2$.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 9. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$. B. -9 . C. $-\frac{25}{9}$. D. 1 .

F. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✎ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

- Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B .
- Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (cùng phía, khác phía d):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhầm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (đối xứng và cách đều):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý:** Đề 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Câu 1. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 3 B. 6 C. -6 D. 0

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

- A. $\frac{40}{9}$ B. $\frac{22}{9}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{8}{3}$

Câu 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m \in (-1; 1]$. B. $m \in (-3; -1]$. C. $m \in (3; 5]$. D. $m \in (1; 3]$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

- A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 8. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

- A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. B. $m \in (3; 4)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (-1; 4)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4

- Câu 10.** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.
- A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. B. $m \in (1; 3)$. C. $m \in (3; 4)$. D. $m \in (-1; 4)$.
- Câu 11.** Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 đồng thời $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ là:
- A. -21 B. -39 C. -8 D. $3\sqrt{11} - 13$
- Câu 12.** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.
- A. $T = \sqrt{51} + 6$ B. $T = \sqrt{61} + 3$ C. $T = \sqrt{61} - 3$ D. $T = \sqrt{51} - 6$
- Câu 13.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng
- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.
- Câu 14.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$
- A. $m = 5$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = \frac{7}{2}$.
- Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.
- A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Câu 16.** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng
- A. $-\frac{49}{4}$ B. $-\frac{25}{4}$ C. $-\frac{841}{36}$ D. $-\frac{7}{6}$
- Câu 17.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là
- A. $\frac{4}{17}$. B. $\frac{14}{17}$. C. $-\frac{2}{17}$. D. $\frac{20}{17}$.
- Câu 18.** Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng
- A. $m_0 \in (3; 4)$. B. $m_0 \in (1; 2)$. C. $m_0 \in (0; 1)$. D. $m_0 \in (2; 3)$.
- Câu 19.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $k = -\frac{1}{3}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = -3$. D. $k = 3$.

Câu 20. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-1; 7)$. B. $m_0 \in (7; 10)$. C. $m_0 \in (-15; -7)$. D. $m_0 \in (-7; -1)$.

Câu 21. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

A. 3. B. 1. C. Không có m . D. 2.

Câu 22. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T = 2017$. B. $T = 2019$. C. $T = 2016$. D. $T = 2018$.

Câu 23. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $\emptyset$. B. $(-\infty; 3) \cup (3; 4]$. C. $(-\infty; 3) \cup (3; 4)$. D. $(-\infty; 4)$.

Câu 25. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = -\sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$.

G. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

*Một số công thức tính nhanh “thường gặp”
liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$*

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán

kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

- Câu 1.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là
- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.
- Câu 2.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?
- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân
- A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = 1$. C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = -1$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.
- A. $0 < m < 1$ B. $m > 0$ C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$ D. $m < 1$
- Câu 5.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là
- A. 2. B. 0. C. 4. D. 1.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng
- A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C. $2+\sqrt{5}$. D. $-1+\sqrt{5}$.
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?
- A. $m \in \{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ B. $m \in \{0; \sqrt[3]{3}; -\sqrt[3]{3}\}$ C. $m \in \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ D. $m \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
- Câu 8.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.
- A. $m = 1$. B. $m \in \{-1; 1\}$. C. $m \in \{-1; 0; 1\}$. D. $m \in \emptyset$.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .
- A. $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. B. $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$. C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. D. $m < -1$.
- Câu 10.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S .
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A , B , C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?
- A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

- A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = \frac{17}{2}$.

- Câu 13.** Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng
A. $m_0 \in (-1; 0]$. B. $m_0 \in (-2; -1]$. C. $m_0 \in (-\infty; -2]$. D. $m_0 \in (-1; 0)$.

H. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA ĐẦU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

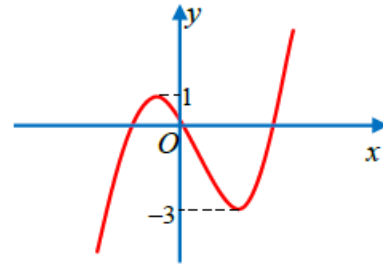
Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

- Câu 1.** Đồ thị (C) có hình vẽ bên.

Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$

có ba điểm cực trị là:

- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
D. $1 \leq m \leq 3$.



- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?
A. 5 B. 6 C. 4 D. 3

- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

Hàm số $y = f(|x - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 5
B. 6
C. 3
D. 1

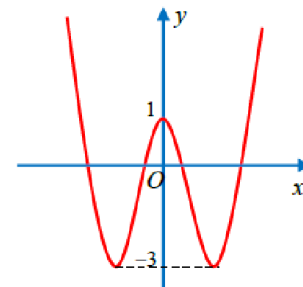
x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

- Câu 4.** Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tất cả các giá trị thực của tham số m để

hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị là:

- A. $-3 < m < 1$.
B. $-1 < m < 3$.
C. $m < -3$ hoặc $m > 1$.
D. $1 < m < 3$.



- Câu 5.** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị
A. 1. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) và $\begin{cases} a > 0, d > 2019 \\ a + b + c + d - 2019 < 0 \end{cases}$. Số cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ (với $g(x) = f(x) - 2019$) bằng

A. 4. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16 B. 44 C. 26 D. 27

Câu 9. Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

Câu 10. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là:

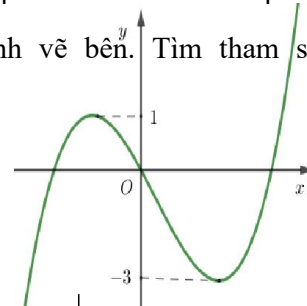
A. $(0; 6)$ B. $(6; 33)$ C. $(1; 33)$ D. $(1; 6)$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m \leq 2$. B. $-2 < m < \frac{5}{4}$. C. $-\frac{5}{4} < m < 2$. D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị?

A. $1 \leq m \leq 3$.
 B. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
 C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
 D. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.



Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. B. 9. C. 6. D. 4.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ
 Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

- A. $m \in (4; 11)$.
 B. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.
 C. $m = 3$.
 D. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

The graph shows a function $f(x)$ plotted against x . The function starts at $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$, increases to a local maximum at $x=1$ with value 11, decreases to a local minimum at $x=2$ with value 4, and then increases to $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Câu 16. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. 15. B. 18. C. 9. D. 12.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

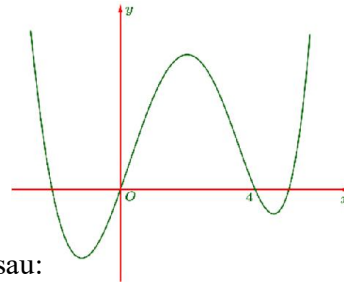
- A. 3. B. 0. C. 8. D. 6.

J. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM HẸP, HÀM ẨN

DẠNG CÂU NÀY XUẤT HIỆN NĂM 2019 VÀ CẢ ĐỀ MINH HỌA 2020 CŨNG CÓ
PHƯƠNG PHÁP: BẠN ĐỌC TỰ HIỂU ^^!

Câu 1. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

- A. 5.
B. 3.
C. 7.
D. 11.



Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 3.
B. 9.
C. 5.
D. 7.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(6 - 3x)$ là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$
		-3		-2	

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ là

- A. 7. B. 1.
C. 5. D. 4.

x	$-\infty$	-5	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$
		-5		-1	

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ là

- A. 5. B. 3.
C. 2. D. 4.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		4		$+\infty$
	$-\infty$		-2	

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

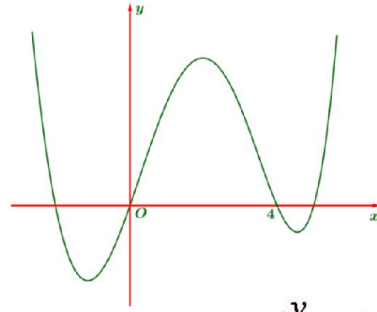
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ là

- A. 6. B. 2.
C. 1. D. 4.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		4		$+\infty$
	$-\infty$		-3	

Câu 7. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2)$ là

- A. 5.
B. 3.
C. 7.
D. 10.

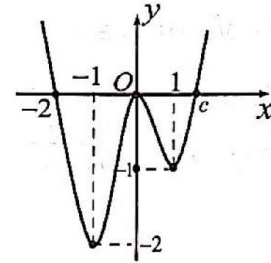


Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

và đồ thị có 3 điểm cực trị như hình bên.

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(f(x))$ bằng

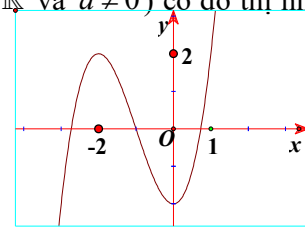
- A. 7.
B. 8.
C. 9.
D. 11.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$.

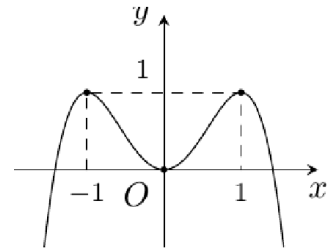
- A. 3.
B. 4.
C. 2.
D. 5.



Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ.

Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

- A. 5.
B. 10.
C. 4.
D. 7.

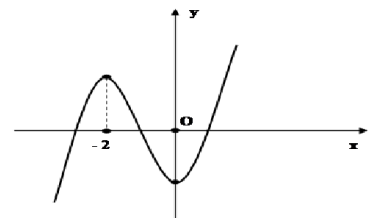


Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao

nhiều điểm cực tiểu?

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 1.



Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(1 - x^2)$ là

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

- A. 3.
B. 2.
C. 6.
D. 7.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

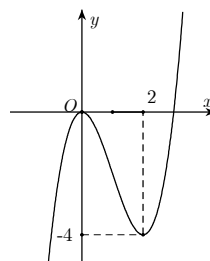
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-2	1		0
					3	
						$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x - 4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

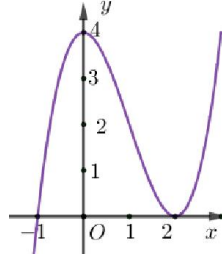
- A. 5. B. 1. C. 9. D. 2.

Câu 15. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



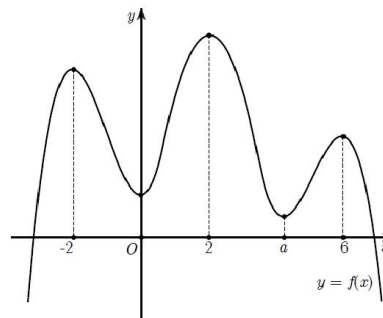
- A. 5.
B. 4.
C. 3.
D. 6.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



- A. 3.
B. 7.
C. 6.
D. 5.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

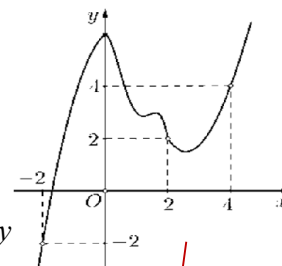


Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

- A. 8. B. 11.
C. 9. D. 7.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau

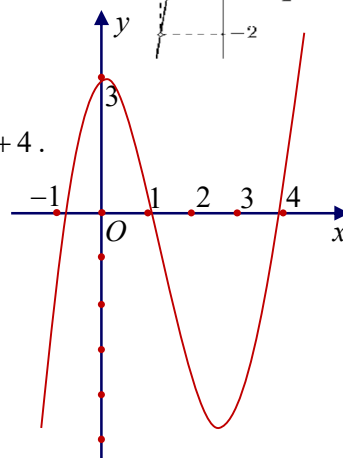


Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa

bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7 B. 5
C. 6 D. 3

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?

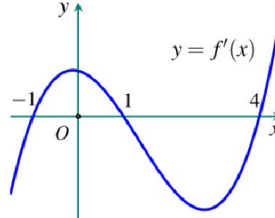
- A. 2. B. 8.
C. 10. D. 6.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

- A. $x = -1$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = 0$.
- D. $x = 2$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

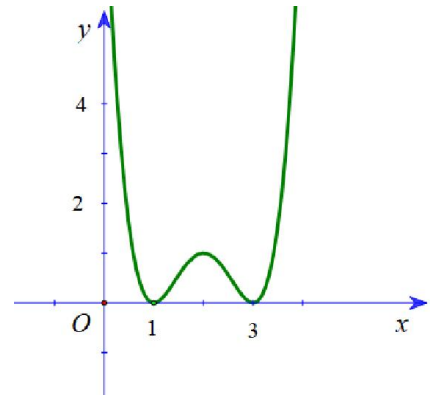
- A. 1.
- B. 2.
- C. 4.
- D. 3.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như

hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$

có bao nhiêu điểm cực trị?

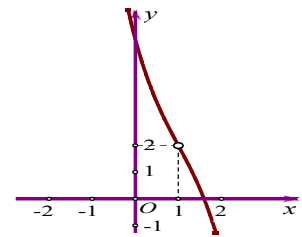
- A. 3.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 0.



Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.

Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 - 2x \cdot f(x) + 2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

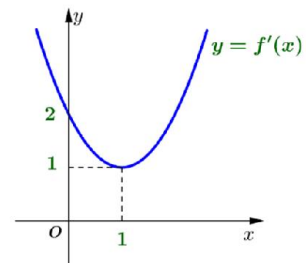
- A. Đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.
- B. Hàm số $y = h(x)$ không có cực trị.
- C. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.



Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol như hình bên dưới.

Hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu cực trị?

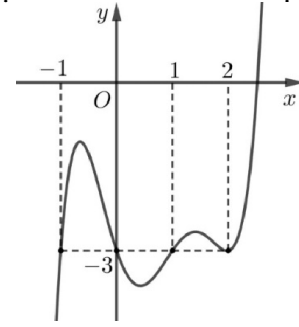
- A. 3.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 1.



Câu 25. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$.

Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?

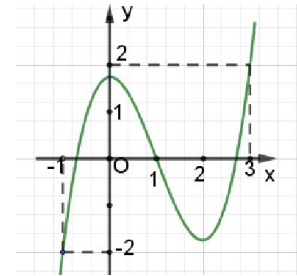
- A. 4.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 6.



Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

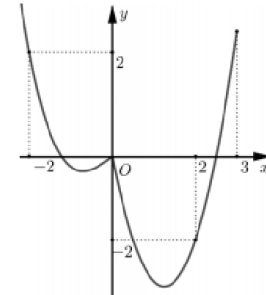
- A. 5.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 4.



Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.

Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

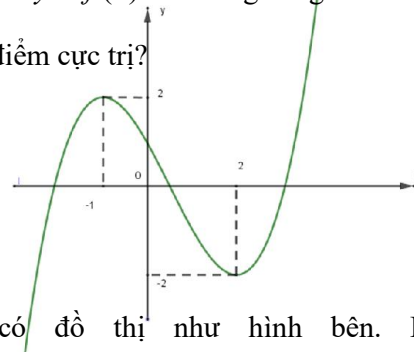
- A. 6.
- B. 2.
- C. 5.
- D. 3.



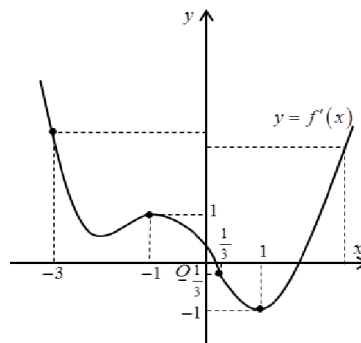
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ.

Hỏi hàm số $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 7.

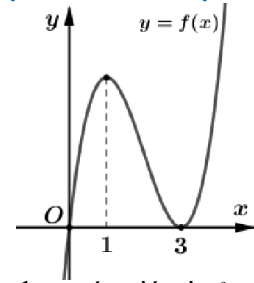


Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



- A. 9.
- B. 7.
- C. 6.
- D. 8.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

- A. $m > 1$ B. $m \geq 1$
C. $m \leq 2$ D. $m > 2$

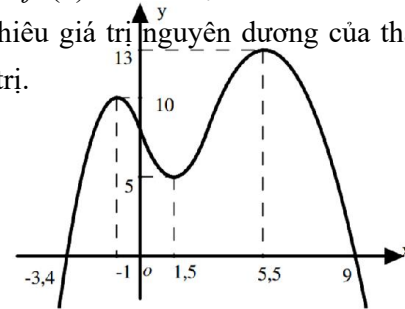
Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

- A. $\left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right] \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$. B. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$. C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \{0\}$. D. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15. B. 17. C. 16 D. 18

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có đúng hai điểm cực trị.

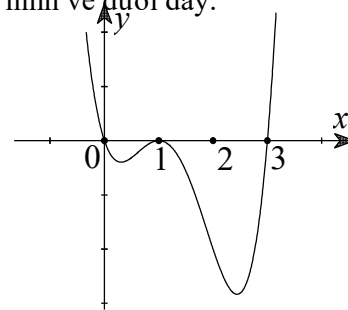


- A. 7.
B. 8.
C. 6.
D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \in (3; +\infty)$.
B. $m \in [0; 3]$.
C. $m \in [0; 3)$.
D. $m \in (-\infty; 0)$.



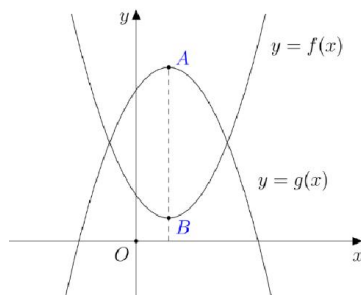
Câu 35. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 18. B. 16. C. 17. D. 15.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Câu 37. Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?

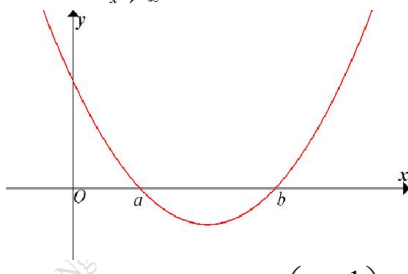


- A. 1. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

- A. $M = 40$. B. $M = 11$. C. $M = 31$. D. $M = 45$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |2f^2(x) + 3f(x) + m|$ có đúng 7 điểm cực trị, biết phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, $f(a) = 1, f(b) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



- A. $S = (-5; 0)$. B. $S = (-8; 0)$. C. $S = \left(-8; \frac{1}{6}\right)$. D. $S = \left(-5; \frac{9}{8}\right)$.

A. TÌM CỰC TRỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN**- Định lý cực trị**

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

• **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

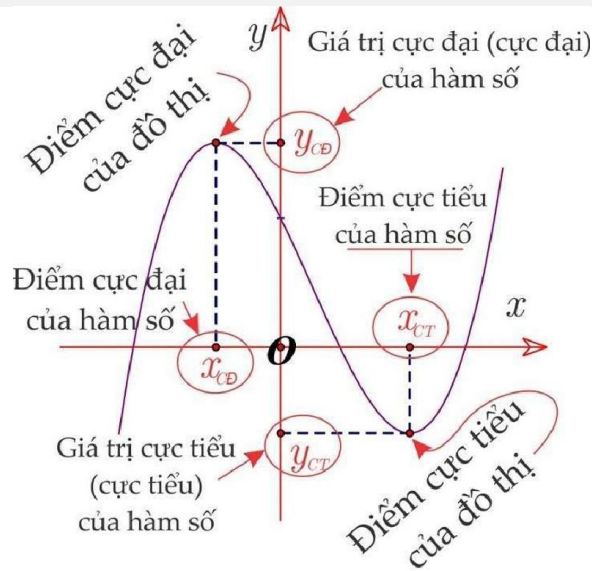
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay y_{CD} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

• Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$.

**CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA**

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$			2		$+\infty$
	$-\infty$			-4	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua nghiệm -1 và nghiệm 1; không đổi dấu khi x qua nghiệm 0 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2		2	$-\infty$	

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$		

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

C. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có ba điểm cực trị nên khẳng định D đúng.

Hàm số có 2 điểm cực tiểu nên khẳng định C đúng.

Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 nên khẳng định A đúng, khẳng định B sai.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = 2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0	+
y	$-\infty$	↗ 6 ↘	-3	↗ $+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số có đúng một cực trị.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	- 0	+
y	$-\infty$	↗ -1 ↘	-5	↗ $+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A.** $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = 2$. **B.** $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = -5$.
C. $y_{CD} = 0$ và $y_{CT} = 2$. **D.** $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = -5$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{CD} = -1$ và $y_{CT} = -5$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- 0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 4 ↘	-2	↗ $+\infty$

Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng

- A.** $y = 4$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định tại $x = 3$ và đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 3$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và giá trị cực tiểu là $f(3) = -2$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua nghiệm $x = 3$, nên hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy: $f'(x)$ đổi dấu khi x qua $-2, 1, 5$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-3; 5)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-3	0	3	5		
$f'(x)$		+	0	-		+
$f(x)$						

$\begin{array}{c} \nearrow 4 \\ -3 \quad \searrow -2 \end{array}$

Số điểm cực trị của hàm số trên khoảng $(-3;5)$ là

A. 2 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên $(-3;5)$.

Hàm số đã cho có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Hàm số đã cho có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=3$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Như vậy, số điểm cực trị của hàm số trên khoảng $(-3;5)$ là 2 điểm.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 .

B. 2 .

C. 0 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x=2$ và

$f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua nghiệm $x=3$, nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0.5	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

$\begin{array}{c} \nearrow 3 \\ -\infty \quad \searrow -\infty \end{array}$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:

A. 3 .

B. 0 .

C. -1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực trị tại

A. $y = 2$.

B. $x = 0, x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho không xác định tại $x = 0$ nên hàm số không đạt cực trị tại $x = 0$.

Hàm số đã cho có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Như vậy, hàm số đã cho đạt cực trị tại $x = 1$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua nghiệm $x = 1$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x = 3$ và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua nghiệm $x = 5$, nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2	2	3	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

A. 1.

B. 4.

C. Hàm số không có cực tiểu.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực tiểu.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

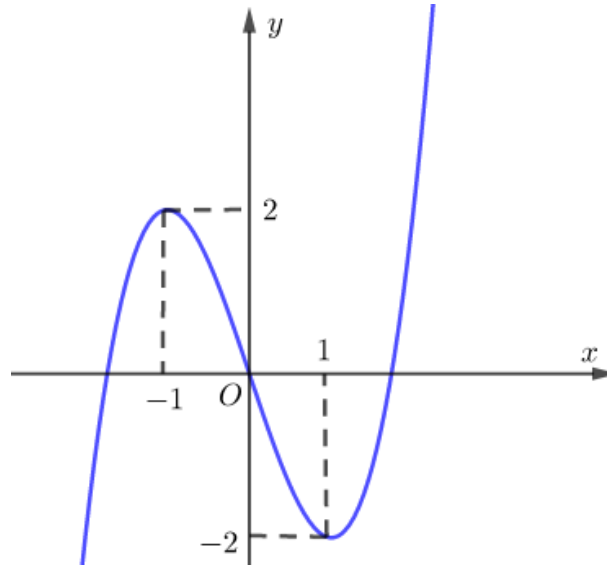
Lời giải

Chọn B

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ trừ sang cộng khi x qua -2 và 2 .

Vậy hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 21. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				1		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 2

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

A. 1.

B. 0.

C. Hàm số không có cực tiểu.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy: $f'(x)$ chỉ đổi dấu một lần từ cộng sang trừ khi x qua 1. Nên hàm số đã cho có một điểm cực đại.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		-4		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x = -2$, nên hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	4	1	$-\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

A. $(3;1)$.

B. 1.

C. 3.

D. Đồ thị hàm số không có điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(3;1)$.

B. XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (không chứa tham số)

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

☞ **Phương pháp:** Sử dụng 2 quy tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
 + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 + Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(3-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x+1 = 0 \\ 3-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{nghiệm kép}) \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y						

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị $x = -1$ và $x = 3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ x^2-3x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	-	0	-	0	+
y					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 3$.

Câu 3. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = -1$

B. $y_{CD} = 4$

C. $y_{CD} = 1$

D. $y_{CD} = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1 \text{ nên hàm số không có cực trị.}$$

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6

D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ **Cách 1.**

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

□ **Cách 2.**

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{8}{(x+1)^3}. \text{ Khi đó: } y''(1) = \frac{1}{2} > 0; y''(-3) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1

B. 3

C. 2

D. 5

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Do $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu qua ba nghiệm này nên hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2019^x (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } F'(x) = f(x) = 2019^x (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2).$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $F(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$							
	$-\infty$	$\nearrow F(-2)$	$\searrow F(1)$	$\nearrow F(2)$	$\nearrow +\infty$		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $F(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu, nghĩa là có 2 cực trị.

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

f_{CT}

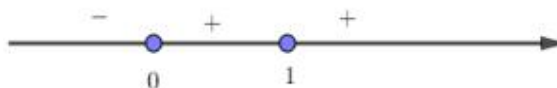
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x = 0$.

- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét dấu của đạo hàm:



Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị

- Câu 11.** Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là:
- A.** $(-1; -2)$. **B.** $(1; 0)$. **C.** $(1; -2)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Ta có:

$$+) y' = -3x^2 + 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$+) y'' = -6x$$

$$\square y''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{hàm số đạt cực đại tại } x = 1.$$

$$\square y''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{hàm số đạt cực tiểu tại } x = -1 \text{ và điểm cực tiểu là } (-1; -2).$$

- Câu 12.** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng
- A.** 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2+1}{x}$

B. $y = \frac{2x-2}{x+1}$

C. $y = x^2 - 2x + 1$

D. $y = -x^3 + x + 1$

Lời giải

+ Xét hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ không có cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

- 1) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- 2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$.
- 3) Hàm số có 1 điểm cực trị.
- 4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	+	-	+
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	1	0	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vì nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội lẻ và $x = -1$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y							

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 2$.B. $x = 3$.C. $x = 0$.D. $x = 1$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	+	0	-	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 19. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1008 B. 1010 C. 1009 D. 1011

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ \dots \\ x = 2019 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

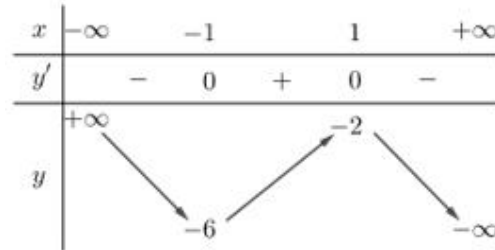
Câu 20. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

- A. $y_{CT} = -6$ B. $y_{CT} = -1$ C. $y_{CT} = -2$ D. $y_{CT} = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên



Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

C. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

Dạng toán này đề minh họa 2020 chưa xuất hiện, có điều các bạn học vẫn nên luyện tập nhé! Để đến khi BỘ QUAY XE chúng ta vẫn có thể NẾ ^^!

Câu 1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(L) \\ m=5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. không tồn tại m . **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \{1; 2\}$.

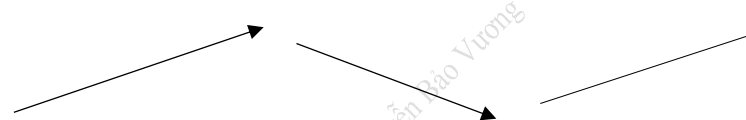
Lời giải

$$\text{Để } x=1 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Thử lại với $m=1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$.

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x=-1 \Rightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$$

Với $m=0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m=2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m=2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$, $y'' = 2x - 2m$.

Đề hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \Leftrightarrow m = 5.. \\ 3 < m \end{cases}$$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m > 4$.

C. $0 \leq m < 4$.

D. $0 < m \leq 4$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6x + m; y'' = 6x - 6.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 6. Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -6$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$$

$$\text{Đề hàm số đạt cực trị tại } x = 1 \text{ thì } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x = 1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 7. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là:

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m < 0$.

C. Không tồn tại m .

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^4 - mx^3.$$

Khi $m = 0$ thì $f'(x) = x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

$$\text{Khi } m \neq 0, \text{ xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}.$$

+ Trường hợp $m > 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	m	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$f(m)$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

+ Trường hợp $m < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(m)$	2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $m > 0$.

Câu 8. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $\{5; 1\}$.

B. $\{5\}$.

C. $\emptyset$.

D. $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2 \Rightarrow y'' = 6x + 6m - 2$.

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6m - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. Không tồn tại m .

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó

$$y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Với } m = -1, \text{ ta có } y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1.$$

$$y' = x^2 + 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5 \text{ đạt cực đại tại } x = 0?$$

A. 101.

B. 2016.

C. 100.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta xét: } m = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Ta có, bảng xét dấu $y' = 2x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m = 1$ (loại).

$$\text{Ta xét: } m \neq 1 \Rightarrow y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{cases}$$

Trường hợp 1: xét $m > 1$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$	$-\frac{m+2}{m-1}$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m > 1$ (loại).

Trường hợp 2: $-2 < m < 1$, suy ra $x_2 > x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		0		$-\frac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2 < m < 1$ (loại).

Trường hợp 3: $m < -2$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m < -2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m < -2$ mà m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$.

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3

B. 2

C. Vô số

D. 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

$$\text{*Nếu } m = -1 \text{ thì } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases}, \text{ nhưng } x = 0 \text{ là nghiệm bội chẵn nên không}$$

phải cực trị.

*Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)(x - \sqrt{9 - m^2})^3 \forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 6

B. 7

C. 5

D. 4

Lời giải

Điều kiện $9 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$

TH 1: $0 \leq m < 3$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	$\sqrt{9-m^2}$	$m+3$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

TH 2: $-3 \leq m < 0$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	$m+3$	$\sqrt{9-m^2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

TH 2: $m = 3$ ta có BTT

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$	
y'	-	0	-	0	+
y					

Từ đó suy ra $-3 \leq m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8

B. Vô số

C. 7

D. 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)] = x^3 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$.

• Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^4(x^3 - 5)$. Suy ra $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.

• Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì qua giá trị $x = 0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 8

B. 9

C. Vô số

D. 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 12x^{11} + 7(m-5)x^6 + 6(m^2-25)x^5$

TH1: $m = 5 \Rightarrow y' = 12x^{11}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y' đổi từ âm sang dương, nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số, do đó không thỏa mãn, $m = 5$ loại.

TH2: $m = -5 \Rightarrow y' = x^6(12x^5 - 70) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y' không đổi dấu khi đi qua $x = 0$, $m = -5$ loại.

TH3: $m \neq \pm 5 \Rightarrow y' = x^5[12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)] = x^5 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)$, ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$, xảy ra khi và

$$\text{chỉ khi } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6(m^2 - 25) < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$$

Vì m nguyên nên $m = \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

D. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ CÓ n CỰC TRỊ

- Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.
- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:
 - + Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
 - + Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
- Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.
 - + Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại?

A. $1 < m \leq 3$

B. $m \leq 1$

C. $m \geq 1$

D. $1 \leq m \leq 3$

Lời giải

Chọn D

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$.

Câu 2. Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m \geq 3$.

B. $m > 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -4x^3 - 2(m-3)x = -2x(2x^2 + m-3).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3-m}{2} \end{cases}$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \frac{3-m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

- A.** $m > 0$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

- A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị.
 $\Rightarrow m = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị
 $\Leftrightarrow -m^2 \cdot (m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019$.

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0.$$

Để hàm số không có cực trị thì

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$.

B. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.

C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x$.

+ TH1: $m = -1$, ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0(*) \end{cases}$

+ TH2: $m \neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình (*) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x) = x^2 + 2mx + 5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x = -1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x = -1$ Tức là

$$\left[\begin{array}{l} \Delta'_g < 0 \\ \begin{cases} g(-1) = 0 \\ \Delta'_g > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{b'}{a} = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 5 < 0 \\ \begin{cases} -2m + 6 = 0 \\ m^2 - 5 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -m = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m = 3 \end{array} \right]. \text{ Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài} \\ \text{toán là } S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

- A. $0 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $m > 0$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 9. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:

- A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ C. $(-1; 2)$ D. $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 10. Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0 (*) \end{cases}.$$

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 11. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 4x[x^2 + (m^2 - m - 6)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (m^2 - m - 6) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3.$$

Ta có: $m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 12. Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0 \leq m \leq 1$.B. $m \leq 0 \vee m \geq 1$.C. $m = 0$.D. $m < 0 \vee m > 1$.**Lời giải**

Trường hợp 1: $m = 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$. Hàm số này có 1 cực trị là cực đại $\Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$

$$\text{Ta có } y' = 4mx^3 + 2(m-1)x = 2x(2mx^2 + m-1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2mx^2 + m-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1-m}{2m} \end{cases} (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu một lần $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{1-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $0 \leq m \vee m \geq 1$.

$$\text{Giải nhanh: Với } a \text{ khác } 0 \text{ thì hàm số đã cho có 1 cực trị} \Leftrightarrow ab \geq 0 \Rightarrow m(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

A. 20

B. 10

C. Vô số

D. 11

Lời giải**Chọn D**

Ta có $y' = 4x[x^2 - (2m+1)] \quad \forall x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases} (*)$$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Do $m \in [-10; 10]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ

$$\text{khi } \begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}.$$

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m .

E. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia y cho y'

- Câu 1.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?
- A. $M(0; -1)$ B. $N(1; -10)$ C. $P(1; 0)$ D. $Q(-1; 10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

- Câu 2.** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0; 1)$, $B(2; -3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng

$$y = (2m - 1)x + 3 + m \text{ khi và chỉ khi } (2m - 1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

- Câu 3.** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$
- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{3}{4}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Hàm số } y = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ có TXĐ: } \mathbb{R}; y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3) \Rightarrow \overline{AB} = (2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = -2 \\ m+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A.** $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$$

Ta có $A(-1;6)$, $B(3;-26) \Rightarrow \overline{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB} = (8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 5. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m = \frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

$$\text{Có: } y' = 3x^2 - 6x, \quad y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1.$$

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 6. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

- A.** $m = -\frac{1}{3}$. **B.** $m = \frac{2}{3}$. **C.** $m = -\frac{2}{3}$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m), \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 1-2m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1 - 2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1 - 2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$. Do đó

$\overline{AB} = (1 - 3m; (3m - 1)^3)$. Do đó AB có vector pháp tuyến là $\vec{n} = ((3m - 1)^2; 1)$.

Do đó $AB: (3m - 1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m - 1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m - 1)^2 = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A , B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 2$.

D. $y = x - 2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x + 1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1) \cdot \left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1 + 1) = -2x_1 + 1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2) \cdot \left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2 + 1) = -2x_2 + 1 \end{cases}$$

Ta thấy, tọa độ hai điểm cực trị A và B thỏa mãn phương trình $y = -2x + 1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x + 1$.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{6}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

Có: $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m + 1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 9. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. -9 .

C. $-\frac{25}{9}$.

D. 1 .

Lời giải

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$ (d).

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c \Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P = -\frac{25}{9}$.

F. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

☞ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

📖 **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

- Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B .

- Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cùng phía, khác phía d**):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhầm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường

thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý:** Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Câu 1. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 3

B. 6

C. -6

D. 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right) \text{ và } B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$

B. $\frac{22}{9}$

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$

Theo bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m \in (-1; 1]$.

B. $m \in (-3; -1]$.

C. $m \in (3; 5]$.

D. $m \in (1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

$y' = -3x^2 + 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0; -3m-1), B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3), \vec{u}_d = (8; -1)$

$$+ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Với $m = 0$ loại

Với $m = 2$, ta có $I(2; 9) \Rightarrow I \in d$

Với $m = -2$, ta có $I(-2; -11) \Rightarrow I \notin d$

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

$$+ \text{Ta có: } y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m).$$

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?
- A. 2. B. 1.
C. 3. D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 8.** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. B. $m \in (3; 4)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -m+2 \end{cases}$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{nằm trong khoảng } (-2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 \neq -1 \\ -2 < -m+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

- Câu 9.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. B. 5. C. 3. D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó } A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x-0}{2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2 - 3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)^2(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1, m = 2$, tổng thu được là 3.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. **B.** $m \in (1; 3)$. **C.** $m \in (3; 4)$. **D.** $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3) \Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \text{ có 2 nghiệm thuộc khoảng } (-2; 3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 3) \\ x = 2 - m \end{cases}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

Câu 11. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ đồng thời $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11} - 13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$$y' = 9x^2 + 4(m+1)x - 3m \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 + 27m > 0$$

+) Xét $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ nên ta có $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ phải tiếp xúc với trục hoành

$$\Rightarrow 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5 = 0 \text{ phải có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[3x^2 + (2m+5)x - m+5] = 0 \text{ (1) phải có nghiệm kép}$$

$$\text{+) TH1: Phương trình } 3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0 \text{ có một nghiệm } x=1 \Rightarrow m_1 = -13$$

$$\text{+) TH2: Phương trình } 3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0 \text{ có nghiệm kép khác 1}$$

$$\Rightarrow \Delta = (2m+5)^2 - 12(5-m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0 \Rightarrow m_2 + m_3 = -8$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = -21$$

Câu 12. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

A. $T = \sqrt{51} + 6$

B. $T = \sqrt{61} + 3$

C. $T = \sqrt{61} - 3$

D. $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} (*)$$

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Câu 13. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

$$\text{Khi đó giả sử } x_1 < x_2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán trở thành } x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \frac{7}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7. \text{ Xét phương trình } 3x^2 + 8(m-2)x - 7 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = [4(m-2)]^2 + 21 > 0, \text{ với mọi } m \Rightarrow \text{hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị } x_1; x_2 \text{ với mọi } m.$$

*Ta thấy $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$$

$$*\text{Ta có } |x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \frac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m > 0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C(-\sqrt{m}; 2 + 2m\sqrt{m}); D(\sqrt{m}; 2 - 2m\sqrt{m})$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y = -2mx + 2$. Do

$$d(I, \Delta) = \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1 \text{ (vì } m > 0) \Rightarrow \Delta \text{ luôn cắt đường tròn tâm } I(1;1), \text{ bán kính } R = 1 \text{ tại 2}$$

điểm A, B phân biệt. Dễ thấy $m = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn do A, I, B thẳng hàng.

$$\text{Với } m \neq \frac{1}{2}: \Delta \text{ không đi qua } I, \text{ ta có: } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta IAB} \text{ lớn nhất bằng } \frac{1}{2} \text{ khi } \sin \widehat{AIB} = 1 \text{ hay } \Delta AIB \text{ vuông cân tại } I \Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ (H là trung điểm của AB)}$$

Câu 16. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng

A. $-\frac{49}{4}$

B. $-\frac{25}{4}$

C. $-\frac{841}{36}$

D. $-\frac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{Chia } y \text{ cho } y' \text{ ta được } y = y' \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x + c - \frac{ab}{9}.$$

$$\text{Do } M(x_1; y_1), N(x_2; y_2) \text{ là hai điểm cực trị nên } y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$$

$$\text{Do đó } y_1 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3}\right)x_1 + c - \frac{ab}{9}; y_2 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3}\right)x_2 + c - \frac{ab}{9}$$

$$\text{Theo giả thiết } x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3}\right)x_2 + c - \frac{ab}{9} \right] = x_2 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3}\right)x_1 + c - \frac{ab}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \left(c - \frac{ab}{9} \right) = x_2 \left(c - \frac{ab}{9} \right) \Leftrightarrow c - \frac{ab}{9} = 0 (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow ab = 9c$$

$$\text{Ta có: } P = abc + 2ab + 3c = 9c^2 + 21c = \left(3c + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = abc + 2ab + 3c \text{ bằng } -\frac{49}{4}$$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$.

B. $\frac{14}{17}$.

C. $-\frac{2}{17}$.

D. $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0.$$

Vì $\Delta' = 1 > 0 \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m \pm 1$.

Gọi $A(m+1; -4m-2), B(m-1; -4m+2)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} = (-2; 4) = -2(1; -2), \overrightarrow{IA} = (m-1; -4m), \overrightarrow{IB} = (m-3; -4m+4).$$

Phương trình đường thẳng AB qua $A(m+1; -4m-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1)$ là $AB: 2x + y + 2m = 0$.

$$\text{Suy ra } d(I, AB) = \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(I, AB) = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}} = |2 + 2m|.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\Delta IAB} = \frac{AB \cdot IA \cdot IB}{4R} \Leftrightarrow AB \cdot IA \cdot IB = 4\sqrt{5} |2 + 2m|.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20} \sqrt{17m^2 - 2m + 1} \sqrt{17m^2 - 38m + 25} = 4\sqrt{5} |2 + 2m|$$

$$\Leftrightarrow (17m^2 - 2m + 1)(17m^2 - 38m + 25) = 4(4m^2 + 8m + 4)$$

$$\Leftrightarrow 289m^4 - 680m^3 + 502m^2 - 120m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}.$$

Vậy $m_1 + m_2 = \frac{20}{17}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0 \in (3;4)$.

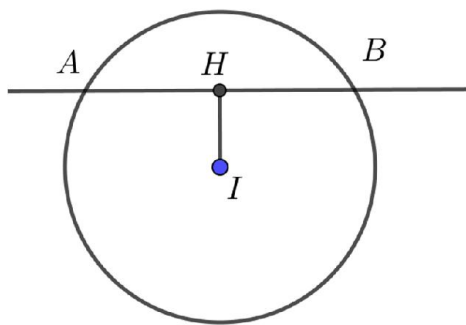
B. $m_0 \in (1;2)$.

C. $m_0 \in (0;1)$.

D. $m_0 \in (2;3)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = 3x^2 - 6m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m > 0$$

Gọi $A(\sqrt{2m}; 4 - 4m\sqrt{2m})$ và $B(-\sqrt{2m}; 4 + 4m\sqrt{2m})$

Phương trình đường thẳng $AB: 4mx + y - 4 = 0$

$$\text{Đặt } a = d(I, AB) \quad (0 < a < \sqrt{2}) \Rightarrow HB = \sqrt{2 - a^2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle IAB} = a\sqrt{2 - a^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + 2 - a^2) = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = \sqrt{2 - a^2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Khi đó } d(I, AB) = \frac{|4m + 0 - 4|}{\sqrt{16m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 1} = 4|m - 1|$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 1 = 16m^2 - 32m + 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$$

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $k = -\frac{1}{3}$.

B. $k = \frac{1}{3}$.

C. $k = -3$.

D. $k = 3$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$ và $y'' = 6x - 6m$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0.$$

$$\Delta' = 9m^2 - 9(m^2 - 1) = 9 \text{ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị } x = \frac{3m+3}{3} = m+1 \text{ và } x = \frac{3m-3}{3} = m-1.$$

$$y''(m-1) = 6(m-1) - 6m = -6 < 0 \Rightarrow x = m-1 \text{ là điểm cực đại của hàm số}$$

$$\Rightarrow A(m-1; -3m+2) \text{ là điểm cực đại của đồ thị } (C).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_A = m-1 \\ y_A = -3m+2 \end{cases} \Rightarrow y_A = -3x_A - 1$$

$$\Rightarrow A \text{ luôn thuộc đường thẳng } d \text{ có phương trình } y = -3x - 1.$$

$$\text{Do đó hệ số góc } k \text{ của đường thẳng } d \text{ là } -3.$$

Câu 20. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-1; 7)$. **B.** $m_0 \in (7; 10)$. **C.** $m_0 \in (-15; -7)$. **D.** $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 6x + m.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0; \Delta' = 9 - 3m.$$

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

$$\text{Hai điểm cực trị } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của } y' = 0 \text{ nên: } x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = \frac{m}{3}.$$

$$\text{Để } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9. \text{ Vậy } m_0 = -9 \in (-15; -7).$$

Câu 21. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m . **D.** 2.

Lời giải

$$\text{Có } y'(x) = x^2 - mx + 1, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \quad (1).$$

- Để hàm số có cực trị thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Điều này tương đương với } \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

- Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2 . Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$.

Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $|x_1|, |x_2|$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- A.** $T = 2017$. **B.** $T = 2019$. **C.** $T = 2016$. **D.** $T = 2018$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = -3x^2 + 3$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -6 \end{cases}$. Đặt $A(1; -2)$ và $B(-1; -6)$.

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'(1; 2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M} = (x_0 - 1; 2)$ và $\overrightarrow{A'B} = (-2; -8) \Rightarrow \frac{x_0 - 1}{-2} = \frac{2}{-8} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Vậy $T = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2015 = 2017$.

Câu 23. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0 . **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0 .

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (m + 4)x - m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

- A.** $\emptyset$. **B.** $(-\infty; 3) \cup (3; 4]$. **C.** $(-\infty; 3) \cup (3; 4)$. **D.** $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 5x^2 + (m + 4)x - m = (x - 1)(x^2 - 4x + m)$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Câu 25. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0; 2), B(2m; 2 - 4m^3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1; 4), \overrightarrow{MB} = (2m - 1; 4 - 4m^3)$.

Ba điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2m - 1}{-1} = \frac{4 - 4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m - 1}{-1} = \frac{1 - m^3}{1} \Leftrightarrow 2m - 1 = m^3 - 1 \Leftrightarrow m^3 = 2m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2} \text{ (do } m \neq 0 \text{)}.$$

G. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

*Một số công thức tính nhanh “thường gặp”
liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$*

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c + n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán kính

$$\text{đường tròn ngoại tiếp tam giác là } R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$$

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = \pm 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			2			1		$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$.

$$\text{Nhận xét } \triangle ABC \text{ cân tại } A. \text{ Vì vậy } S = \frac{1}{2} |y_A - y_B| \cdot |x_C - x_B| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Câu 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. $m = \pm \sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0; 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$.

$$BC = 4 \Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

- A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = 1$. C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0; 1)$; $B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$; $C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2); \overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2} + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ (vì $m < 0$)

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0 < m < 1$

B. $m > 0$

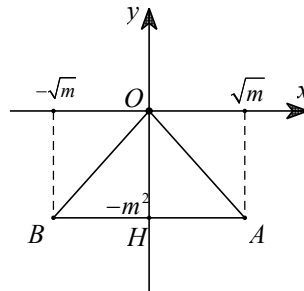
C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$

D. $m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$



Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$. $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là

$O(0;0)$, $A(\sqrt{m}; -m^2)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Do đó $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2 \sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

• $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$.

• Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m - 1 > 0$.

$\Leftrightarrow m < -1$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{m+1} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}$.

• Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow A(-\sqrt{m+1}; -2m-1), B(0; m^2), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; (m+1)^2), \overrightarrow{CB} = (-\sqrt{m+1}; (m+1)^2)$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $2 + \sqrt{5}$.

D. $-1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

➤ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

➤ $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

➤ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

➤ Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0; -m^2 + 1)$ là trung điểm BC .

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m + m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{2AI}{AB \cdot AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m + m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = 1 & (n) \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & (l) \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & (n) \end{cases}$$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m \in \{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

B. $m \in \{0; \sqrt[6]{3}; -\sqrt[6]{3}\}$

C. $m \in \{\sqrt[6]{3}; -\sqrt[6]{3}\}$

D. $m \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m + 4), B(|m|; -m^4 + m + 4),$

$C(-|m|; -m^4 + m + 4).$

Tam giác ABC có $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A , suy ra tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + m^8} = 2|m| \Leftrightarrow m^8 + m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \sqrt[6]{3} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $m \in \{-\sqrt[6]{3}; \sqrt[6]{3}\}.$

Câu 8. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m = 1$.

B. $m \in \{-1; 1\}.$

C. $m \in \{-1; 0; 1\}.$

D. $m \in \emptyset.$

Lời giải

$y = x^4 - 2m^2x^2 + 1.$

+ Cách 1:

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2m^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

$$y' = 4x^3 - 4m^2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4m^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = m \\ x_3 = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -m^4 + 1 \\ y_3 = -m^4 + 1 \end{cases}$$

Giả sử $A(0;1)$, $B(m; -m^4 + 1)$, $C(-m; -m^4 + 1)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\overline{AB} = (m; -m^4) \Rightarrow AB = \sqrt{m^2 + m^8}.$$

$$\overline{AC} = (-m; -m^4) \Rightarrow AC = \sqrt{m^2 + m^8}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -m^2 + m^8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m^2(1 - m^6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \quad (l) \\ m = 1 \quad (n) \\ m = -1(n) \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

+ Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ \frac{-8a}{b^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 < 0 \\ \frac{-8}{(-2m^2)^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \quad (n) \\ m = -1(n) \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .

A. $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$.

C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m < -1$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x(2x^2 + m+1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = -m-1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Khi đó

$$A(0; -2m-1), B\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m-1\right), C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m-1\right),$$

là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB = AC = \sqrt{-\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A .

Từ giả thiết suy ra $A = 120^\circ$.

Gọi H là trung điểm BC , ta có $H\left(0; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right)$

$$BH = AH \tan 60^\circ \Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(m+1)^4}{16} = -\frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 3(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S .

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $A(0; m^4 + 5)$, $B(m; 5)$, $C(-m; 5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng.

Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC \Rightarrow AB \perp OB \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{OB} = 0$.

Trong đó $\overline{AB} = (m; -m^4)$, $\overline{OB} = (m; 5)$. Ta có phương trình $m^2 - 5m^4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 11. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$.

B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^4 - 2m^2)$; $B(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$;

$C(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD . Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với

$$I(0; m^4 - 3m^2), J\left(0; \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right).$$

$$\text{ĐK: } m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 12. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

- A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-4)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{cases}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$A(0; m+5)$, $B(\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2)$, $C(-\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{17}{2} \end{cases}$.

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Câu 13. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $m_0 \in (-1; 0]$. B. $m_0 \in (-2; -1]$. C. $m_0 \in (-\infty; -2]$. D. $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} \quad (1).$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$ nên ta gọi $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$ với H là trung điểm của BC nên $H(0; -m^2 - 1)$.

Nên: $AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$ và $BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}$.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot 2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

H. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA ĐẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

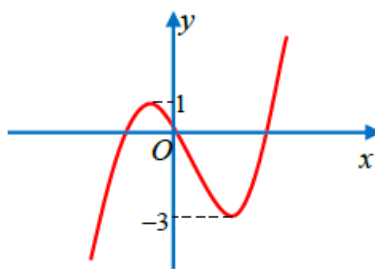
Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 1. Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **B.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **C.** $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \leq m \leq 3$.

Giải

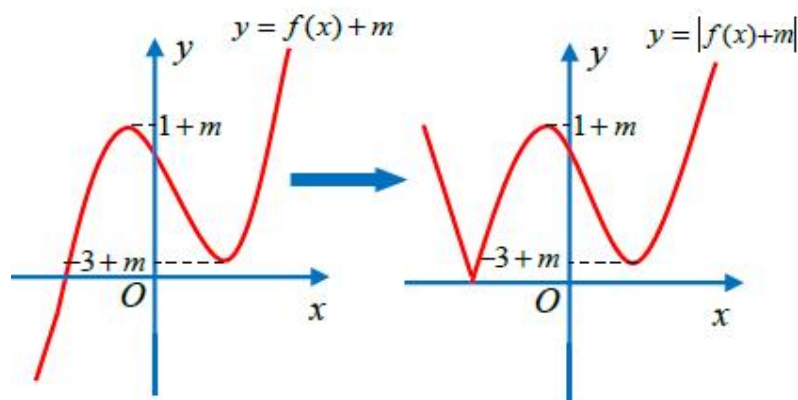
Cách 1:

Do $y = f(x) + m$ là hàm số bậc ba

Khi đó, hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \text{hàm số } y = f(x) + m \text{ có } y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} \geq 0$$

(hình minh họa)



$$\Leftrightarrow (1+m)(-3+m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases} \rightarrow \text{Đáp án A}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } y = |f(x) + m| = \sqrt{(f(x) + m)^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x) + m) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x) + m)^2}}.$$

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -m & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu.

Suy ra (1) có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác x_1, x_2 .

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -m$.

$$\text{Do đó để (2) có một nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: } \begin{cases} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Đáp án. A.

Chú ý:

Nếu $x = x_0$ là cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 5

B. 6

C. 4

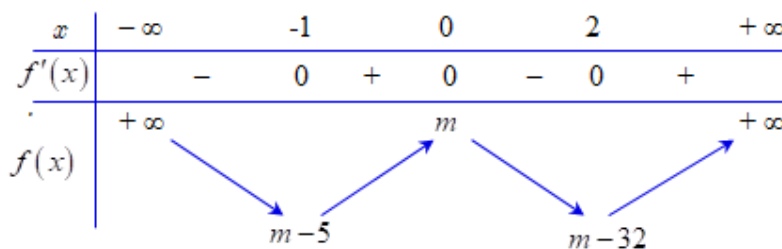
D. 3

Lời giải.

Chọn C

$$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.



Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \text{ có 4 nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m = 1; m = 2; m = 3; m = 4$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5

B. 6

C. 3

D. 1

Lời giải

Chọn C

$y = f(|x-3|)$ (1), Đặt $t = |x-3|, t \geq 0$ Thì (1) trở thành: $y = f(t) (t \geq 0)$

$$\text{Có } t = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t' = \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$$

$$\text{Có } y'_x = t'_x f'(t)$$

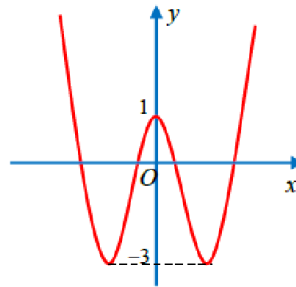
$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ t = -2(L) \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

Lấy $x=8$ có $t'(8)f'(5) > 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

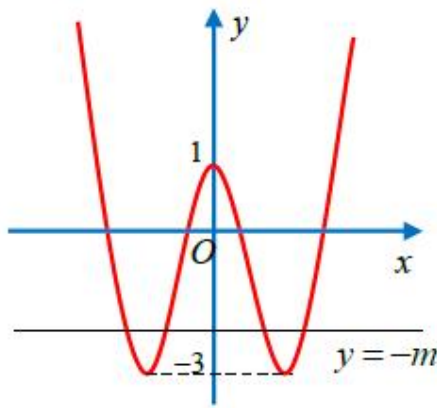
Câu 4. Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $-3 < m < 1$.B. $-1 < m < 3$.C. $m < -3$ hoặc $m > 1$.D. $1 < m < 3$.

Giải



$$\text{Ta có } y = |f(x) + m| = \sqrt{(f(x) + m)^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x) + m) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x) + m)^2}}$$

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -m & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có (1) có 3 nghiệm là 3 điểm cực trị.
Vậy để đồ thị hàm số có 7 cực trị thì (2) có 4 nghiệm khác với các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -m$.

Để (2) có 4 nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: $-3 < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \rightarrow$ **Đáp án B**

Câu 5. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

A. 1.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số

$y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \frac{-1 - \sqrt{97}}{4} \vee m > \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) và $\begin{cases} a > 0, d > 2019 \\ a + b + c + d - 2019 < 0 \end{cases}$. Số cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ (với $g(x) = f(x) - 2019$) bằng

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

+ Ta có

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) = d - 2019 > 0 \\ g(1) = a + b + c + d - 2019 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow g(x) = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt, mà } g(x) \text{ là hàm số}$$

bậc ba. Suy ra, hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

+ Vậy đồ thị của hàm số $y = g(x)$ là đồ thị của hàm số bậc ba, có hai điểm cực trị và cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt. Do đó, **số điểm cực trị** của hàm số $y = |g(x)|$ bằng 5 $\Rightarrow$ **số cực trị** của hàm số $y = |g(x)|$ bằng 2 hoặc bằng 3.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\nearrow 32$	$\searrow -\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 0 \\ 5 < m^2 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{5} < |m| < \sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{3; 4; 5; -3; -4; -5\}$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16

B. 44

C. 26

D. 27

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

Ta có: $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				m				$+\infty$
			$m-5$			$m-32$			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ m-5 > 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5 < m < 32 \end{cases}. \text{ Vì } m \text{ là số nguyên dương cho nên có 26 số } m \text{ thỏa đề bài}$$

Câu 9. Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 2

B. 4

C. 3

D. 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 4mx$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

+ **Trường hợp 1:** hàm số có một cực trị $\Rightarrow m \in [-2; 0]$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $A(0; 2m-1)$.

Do $m \in [-2; 0] \Rightarrow y_A = 2m-1 < 0$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

+ **Trường hợp 2:** hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m \in (0; 2]$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0; 2m-1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2m-1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m-1)$.

Do $a = 1 > 0$ nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị khi hàm số $y = f(x)$ có $y_B = y_C \geq 0$
 $\Leftrightarrow -m^2 + 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $y_B = y_C < 0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 10. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là:

A. (0; 6)

B. (6; 33)

C. (1; 33)

D. (1; 6)

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$m-1$				$+\infty$
				$m-6$			$m-33$		

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6 < 0 < m-1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m \leq 2$.

B. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 2$.

D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

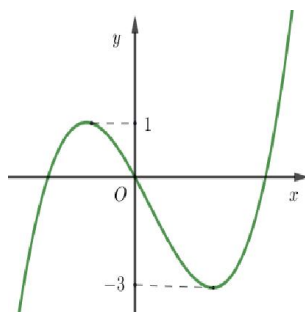
Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị?



A. $1 \leq m \leq 3$. **B.** $m = -1$ hoặc $m = 3$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **D.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị $y = f(x)$ tịnh tiến lên trên một đoạn bằng m khi $m > 0$, tịnh tiến xuống dưới một đoạn bằng $|m|$ khi $m < 0$.

Hơn nữa đồ thị $y = |f(x) + m|$ là:

+) Phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục Ox .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm dưới Ox qua Ox và bỏ đi phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm dưới Ox .

Vậy để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp:

+) Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục hoành hoặc có điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương. Khi đó $m \geq 3$.

+) Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía dưới trục hoành hoặc có điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương. Khi đó $m \leq -1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 9.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right| = \sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(12x^3 + 12x^2 - 24x) \left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)}{\sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 & (1) \\ 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0; 1; -2\}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{m}{2}$			$+\infty$
		$\swarrow$		$\searrow$		$\swarrow$	
			$-32+\frac{m}{2}$			$-5+\frac{m}{2}$	

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 + \frac{m}{2} < 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

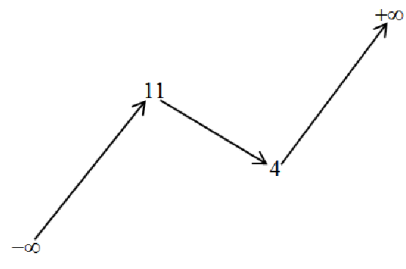
Xét bbt của hàm số $y = x^3 - 3x^2$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$		

Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

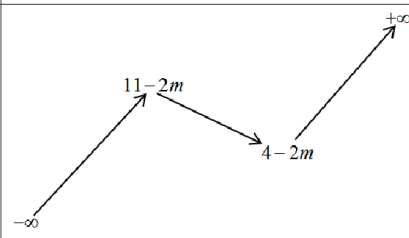
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

- A.** $m \in (4; 11)$. **B.** $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$[f(x)-2m]'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-2m$					

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ gồm hai phần:

- + Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.
- + Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox .

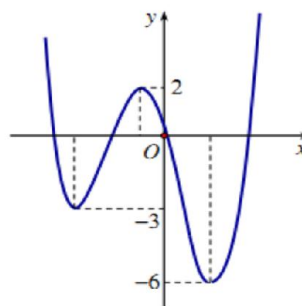
Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$(4 - 2m)(11 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{11}{2}\right).$$

Câu 16. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x - 2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A.** 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải



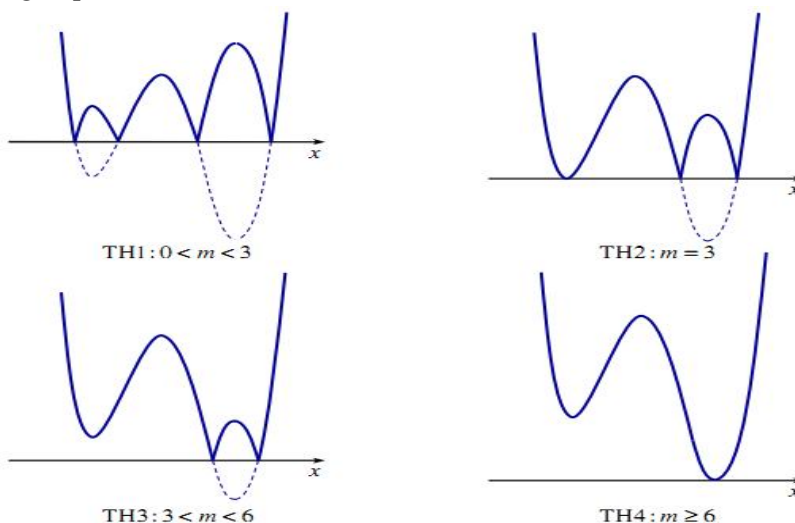
Cách 1: dùng đồ thị.

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox .

Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox .

- Ta xét các trường hợp sau:



+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).

+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

* **Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.

- Ta có: $y = |f(x-2) + m| = \sqrt{[f(x-2) + m]^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x-2) + m) \cdot f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2) + m]^2}}$

- Xét $f'(x-2) = 0$ (1)

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m$ (2)

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại : với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3.

B. 0.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	m	$-4+m$	$+\infty$	

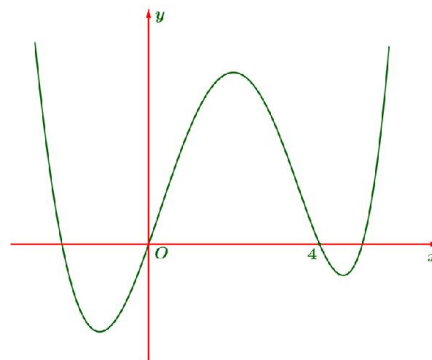
Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox .

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} m \leq 0 \\ -4+m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện $m \in [-5; 5]$ ta có $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 4; 5\}$. Vậy có 8 giá trị thỏa mãn.

J. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM HẠP, HÀM ẨN

DẠNG CÂU NÀY XUẤT HIỆN NĂM 2019 VÀ CẢ ĐỀ MINH HỌA 2020 CŨNG CÓ PHƯƠNG PHÁP: BẠN ĐỌC TỰ HIỂU ^^!

Câu 1. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

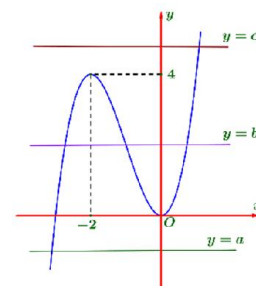
Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.



Câu 2. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3.

B. 9.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 + 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 + 2x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

* $x^2 + 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0 \quad \forall a \in (-\infty; -1)$ nên phương trình vô nghiệm.

* $x^2 + 2x - b = 0$ có $\Delta' = 1 + b > 0 \quad \forall b \in (-1; 0)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

* $x^2 + 2x - c = 0$ có $\Delta' = 1 + c > 0 \quad \forall c \in (0; 1)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

* $x^2 + 2x - d = 0$ có $\Delta' = 1 + d > 0 \quad \forall d \in (1; +\infty)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 7 cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	3	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(6 - 3x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = -3 \cdot f'(6 - 3x). \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x = -3 \\ 6 - 3x = 1 \\ 6 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Nhận xét: y' đổi dấu 3 lần khi đi qua các nghiệm nên phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(6 - 3x)$ có 3 cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-5	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-5	3	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ là

A. 7.

B. 1.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 5). \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = a, a < -5 \\ x^2 - 5 = b, -5 < b < -2 \\ x^2 - 5 = c, -2 < c < 3 \\ x^2 - 5 = d, d > 3 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 = a + 5 < 0, a < -5$ nên phương trình vô nghiệm.

Phương trình $x^2 = b + 5 > 0, -5 < b < -2$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2 = c + 5 > 0, -2 < c < 3$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2 = d + 5 > 0, d > 3$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có 7 cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f[(x+1)^2] = f(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+2) \cdot f'(x^2 + 2x + 1)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 1 = a, a < 0 \\ x^2 + 2x + 1 = b, 0 < b < 3 \\ x^2 + 2x + 1 = c, c > 3 \end{cases}$$

$x^2 + 2x + 1 - a = 0$ có $\Delta = 4a < 0, a < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

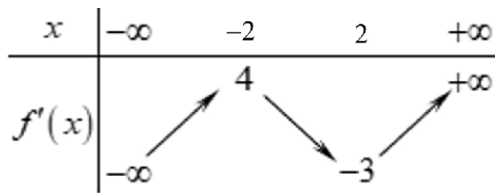
$x^2 + 2x + 1 - b = 0$ có $\Delta = 4b > 0, 0 < b < \frac{1}{2}$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$x^2 + 2x + 1 - c = 0$ có $\Delta = 4c > 0, c > 3$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 5 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ có 5 cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ là

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \\ f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \frac{x^2+1}{x} = a, a < -2 \\ \frac{x^2+1}{x} = b, -2 < b < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} = c, c > 2 \end{cases}$$

$x^2-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	-	0	+
$h(x)$						

The graph shows a function $h(x)$ plotted against x . The x-axis is marked with $-\infty$, -1 , 0 , 1 , and $+\infty$. The y-axis is marked with -2 and 2 . The function has a minimum at $x = -1$ with a value of -2 . The function is decreasing for $x < -1$ and increasing for $x > -1$. The graph is a V-shape with a vertex at $(-1, -2)$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

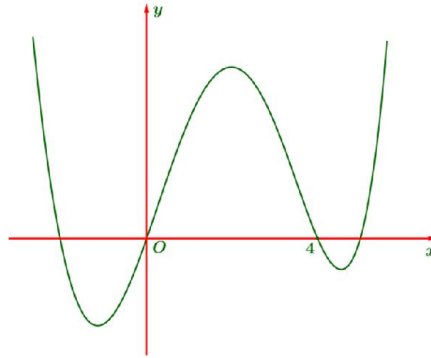
$h(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt, với $a < -2$

$h(x) = b$ vô nghiệm, với $-2 < b < 2$

$h(x) = c$ có 2 nghiệm phân biệt, với $c > 2$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2)$ là



A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Ta có $g(x) = f(-x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (-3x^2 + 6x) \cdot f'(-x^3 + 3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 \\ f'(-x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ -x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ -x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ -x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = -3x^2 + 6x$.

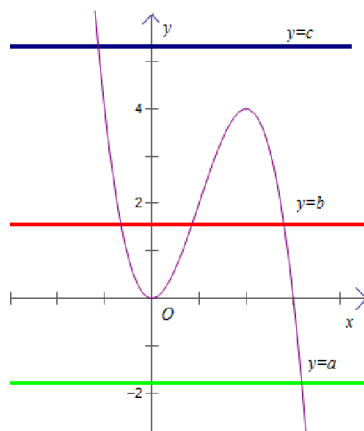
$$\text{Cho } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	
$h(x)$	$+\infty$			4		$-\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = -x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:



Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

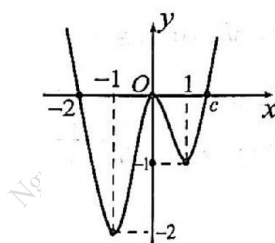
Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị có 3 điểm cực trị như hình bên.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(f(x))$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = f'(x)[f'(f(x))]$

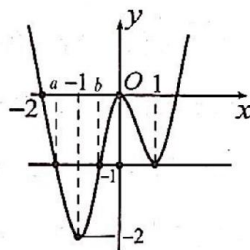
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình (1)} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} (I).$$

Xét phương trình

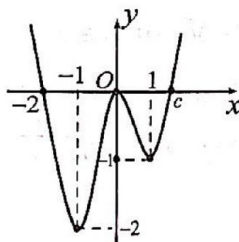
$$(2) \Leftrightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:



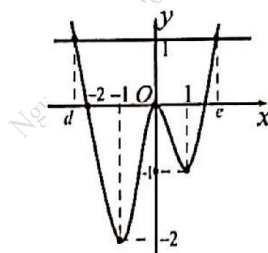
Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \end{cases} \text{ (II)}. \text{ (Trong đó } x = 1 \text{ là nghiệm bội 2)}$

Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = c > 1 \end{cases} \text{ (III)}, \text{ trong đó } x = 0 \text{ là nghiệm bội 2}.$

Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:

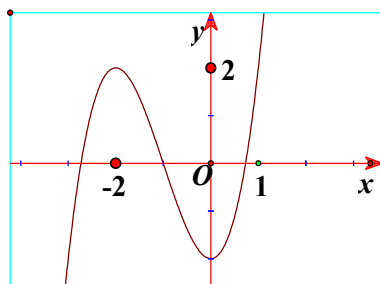


Phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = d < -2 \\ x = e > 1 \end{cases} \text{ (IV)}.$

$x = 1, x = 0$ là nghiệm bội chẵn ở (II) và (III) nhưng $x = 1, x = 0$ cũng là nghiệm đơn của (I) nên là nghiệm bội lẻ của y' .

Vậy $g'(x)$ có 9 nghiệm khác nhau trong đó có 2 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 9 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$.



A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, cực tiểu tại $x = 0$.

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 0$.

Ta có: $g'(x) = [f(-2x^2 + 4x)]' = (-4x + 4) \cdot f'(-2x^2 + 4x)$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(-2x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2x^2 + 4x = -2 \quad (1) \\ -2x^2 + 4x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

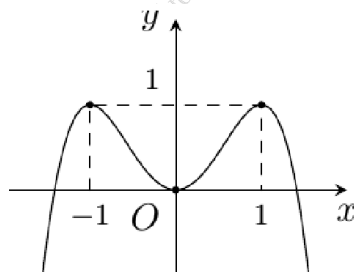
$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt đơn.

Vậy hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 5.

B. 10.

C. 4.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

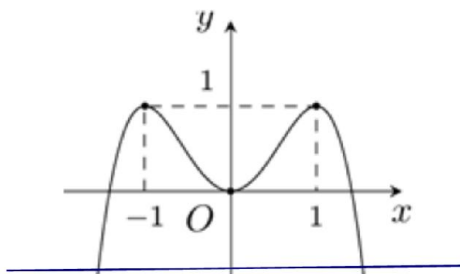
Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$+ \text{ Xét phương trình } (1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

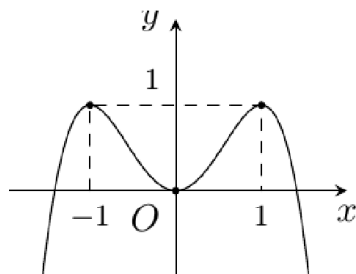
+ Xét phương trình (2) $\Leftrightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:



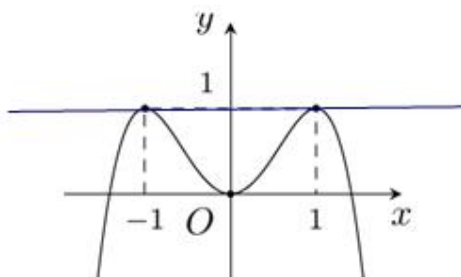
Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a < -1) \\ x = b \ (b > 1) \end{cases}$

+ Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \ (c < -1) \\ x = 0 \\ x = d \ (d > 1) \end{cases}$

+ Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:

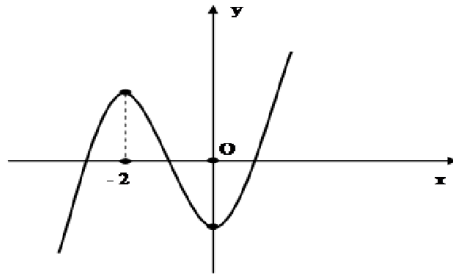


Phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, trong đó $x = \pm 1$; $x = 0$ là nghiệm bội lẻ.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = -2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \text{ (Tất cả đều là nghiệm đơn).}$$

Ta chọn $x = -2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2) = 2 \cdot (-3) \cdot f'(4)$.

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó: $f'(4) > 0$.

Suy ra: $g'(-2) < 0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{5}$	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(1 - x^2)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = [f(1-x^2)]' = -2x \cdot f'(1-x^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1-x^2 = a \in (-\infty; 1) \\ 1-x^2 = b \in (1; 3) \\ 1-x^2 = c \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1-a \in (0; +\infty) \\ x^2 = 1-b \in (-2; 0) \quad (\text{VN}) \\ x^2 = 1-c \in (-\infty; -2) \quad (\text{VN}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1-a} \neq 0 \end{cases} \text{ là ba nghiệm đơn phân biệt.}$$

Vậy hàm số $y = f(1-x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$	

Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{cases} \quad (1) .$$

$$x^3 - 3x = a > 2 \quad (2)$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x$, ta có $h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$		0		0
		$+$	$-$	$+$
$h(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $h(x)$ ta có:

☐ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

☐ Vì $a > 2$ nên (2) có 1 nghiệm.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x-4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó hàm số $y = f(x-4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x-4)$ là :

x	$-\infty$	2	3	7	9	$+\infty$
$y = f(x-4)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

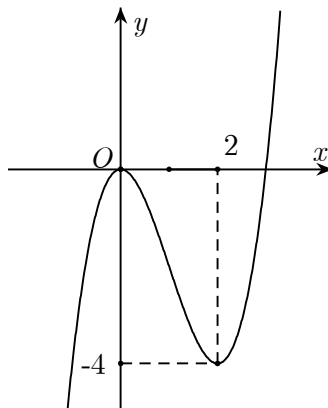
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x-4|)$ là

x	$-\infty$	-1	1	4	7	9	$+\infty$
$y = f(x-4)$							

Vậy hàm số $y = f(|x-4|)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y = g(x) = f(|x-4|) + 2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 15. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

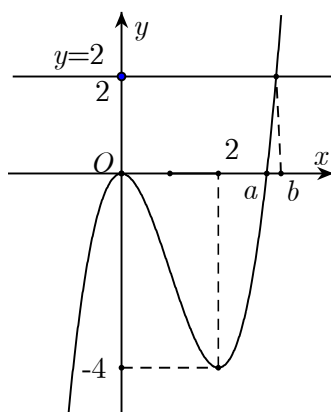
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x)); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

+ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$

+ $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$ và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

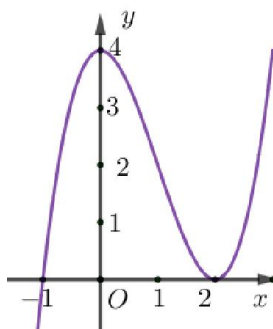
Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc

bội lẻ $x = b > a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(*) \\ f(x) = 2(**) \end{cases}$$

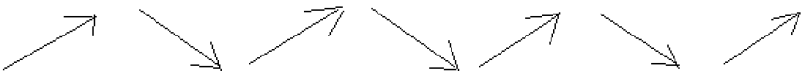
Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Phương trình (**) có ba nghiệm $\begin{cases} x = m(-1 < m < 0) \\ x = n(0 < n < 1) \\ x = p(p > 2) \end{cases}$

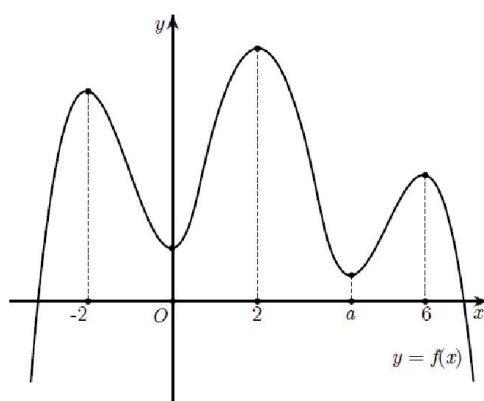
$g'(x) = 0$ có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	m	0	n	2	p	$+\infty$					
$f'(x)$	+		+		+	0	-		-	0	+		+
$f'(f(x))$	+	0	-	0	+		+	0	-	0	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$													

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 6 cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có $-2; 0; 2; a; 6$ là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

$$\text{Ta có: } y' = \left(f(x^6 - 3x^2) \right)' = (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x = \pm 1 \\ x = 0, x = \pm \sqrt[4]{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm m, m > \sqrt{2} \\ x = \pm n, n > m \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$

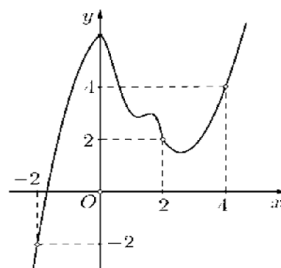
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$			0				$+\infty$
		-2			-2			

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = -2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = 0$. Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'(x^6 - 3x^2)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y' .

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7

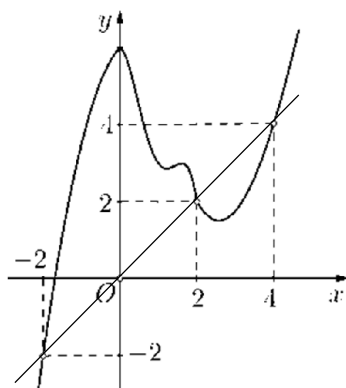
B. 5

C. 6

D. 3

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x$

Từ đồ thị ta thấy $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$

$$\int_{-2}^2 (2f'(x) - 2x) dx > \int_2^4 (2x - 2f'(x)) dx > 0$$

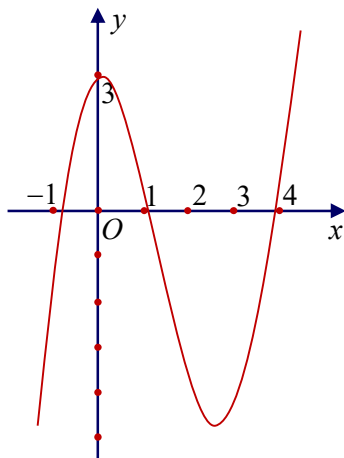
$$\Leftrightarrow h(x) \Big|_{-2}^2 > -h(x) \Big|_2^4 \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > -(h(4) - h(2)) \Leftrightarrow h(4) > h(-2)$$

Bảng biến thiên

x	-2	2	4
$h'(x)$	0	0	0
$h(x)$	$h(-2)$	$h(2)$	$h(4)$

Vậy $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa 7 cực trị

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



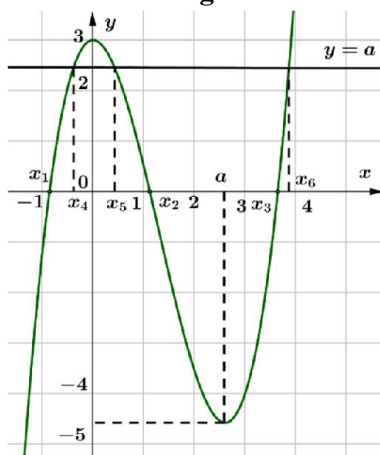
A. 2.

B. 8.

C. 10.

D. 6.

Lời giải



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a, (2 < a < 3). \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

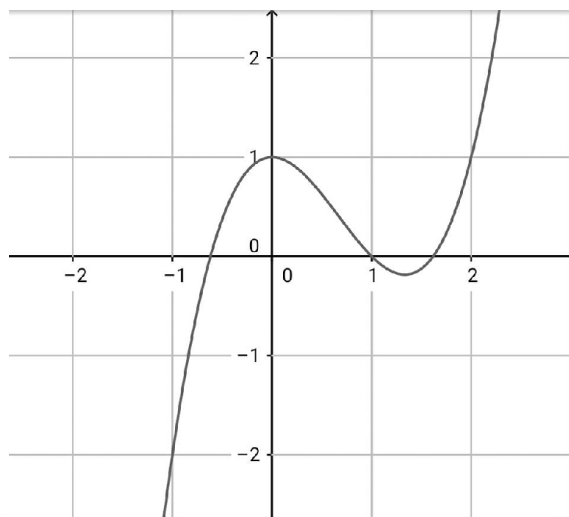
$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \text{ đạt cực đại tại điểm nào?}$$



A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

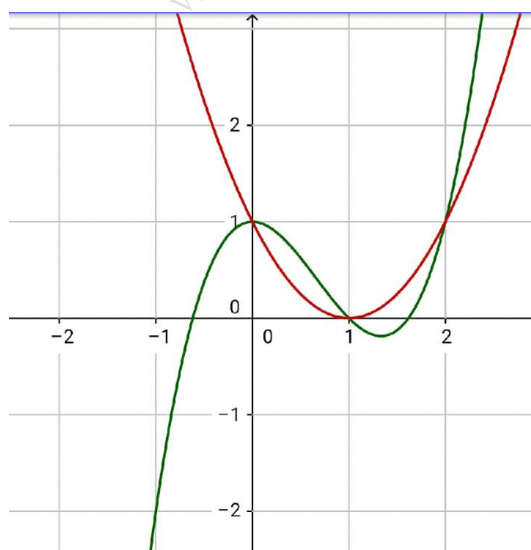
D. $x = 2$.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ tức là nghiệm của phương trình $f'(x) = (x-1)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:

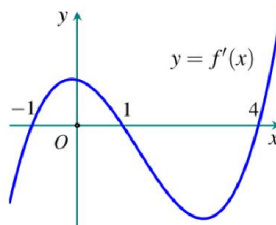


Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có điểm cực đại $x = 1$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$

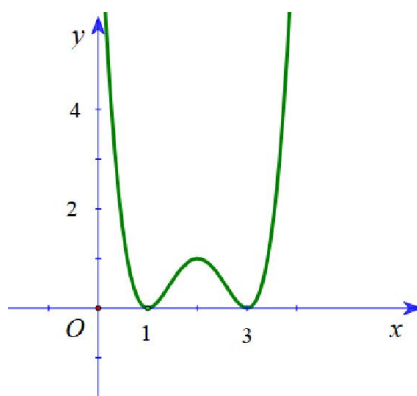
$$y' = 2f'(x) \cdot e^{2f(x)+1} + f'(x) \cdot 5^{f(x)} \ln 5 = f'(x)(2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \ln 5).$$

Nhận xét $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \ln 5 > 0, \forall x$ làm cho $f'(x)$ xác định nên dấu của y' phụ thuộc hoàn toàn vào $f'(x)$.

Vì vậy do $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là 3.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị?}$$



A. 3.

B. 1.

C. 2.

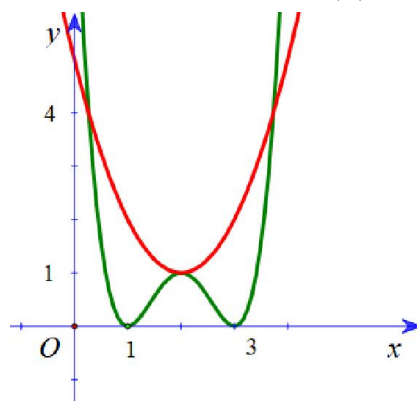
D. 0.

Lời giải

Chọn C

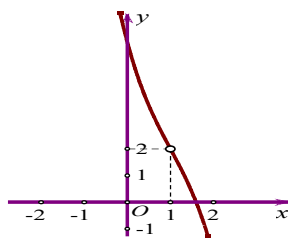
$$\text{Có } g'(x) = f'(x) - x^2 + 4x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 5$$

Ta có đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn. Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 - 2x.f(x) + 2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

B. Hàm số $y = h(x)$ không có cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

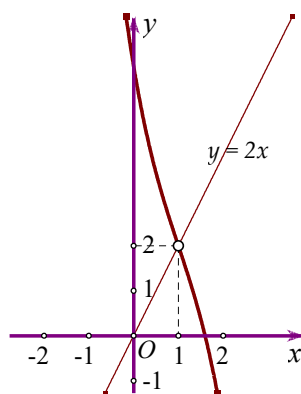
Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x).f(x) - 2f(x) + 2x.f'(x) + 4x = f'(x)(f(x) - 2x) - 2(f(x) - 2x) \\ &= (f'(x) - 2)(f(x) - 2x) \end{aligned}$$

Từ đồ thị ta thấy $y = f(x)$ nghịch biến nên $f'(x) < 0$ suy ra $f'(x) - 2 < 0$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0$.

Từ đồ thị dưới ta thấy $f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

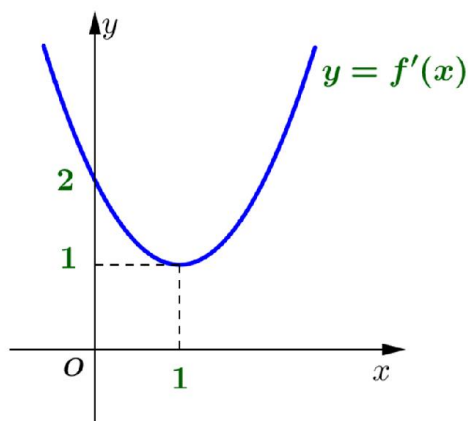


Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol như hình bên dưới.



Hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3.

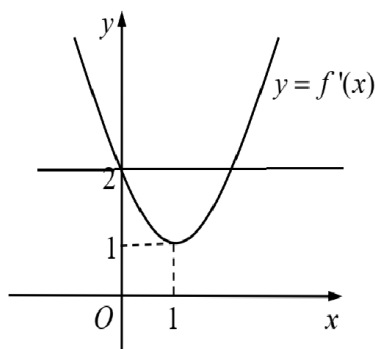
B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B



Ta có $y' = f'(x) - 2$.

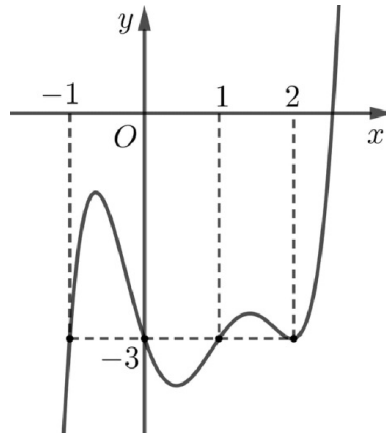
$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1 > 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		x_1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x) - 2x$ có hai điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) + 3x$$

$$h'(x) = f'(x) + 3$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$$

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có 4 nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	+	
$h(x)$	$+\infty$				$f(0)$					$+\infty$	

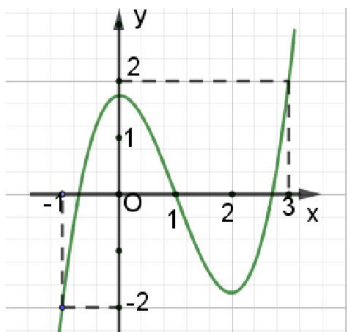
Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$)

Khi đó ta có

x	$-\infty$	x_1	-1	0	1	x_2	$+\infty$
$g(x) = h(x) $	$+\infty$						$+\infty$
		0		$ f(0) $		0	

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có 5 cực trị.

- Câu 26.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

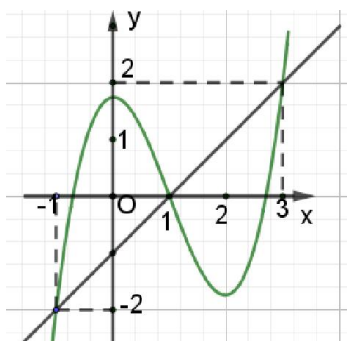
D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$* \quad g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$$

Đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2), (1; 0), (3; 2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y = g'(x)$ như sau

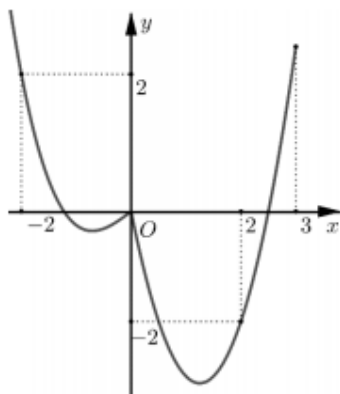
x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$	

* Đồ thị hàm số $y = g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y = g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$g(3)$	$g(1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$	

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

A. 6.

B. 2.

C. 5.

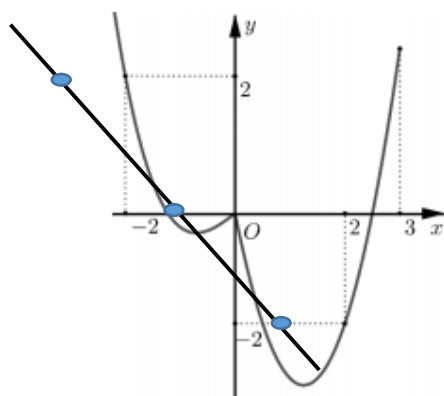
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$ trên khoảng $(-2; 3)$.

$$g'(x) = f'(x) + x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$



$$g(0) = f(0) + \frac{1}{2} \cdot 0 - f(0) = 0$$

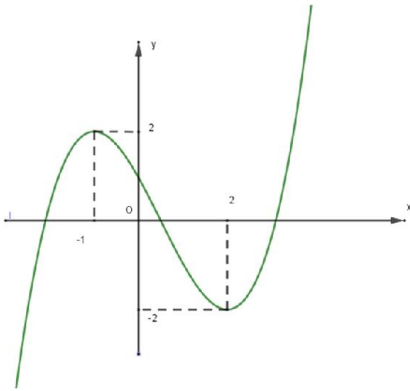
Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	0	2	3
$g'(x)$	-	0	-	+
$g(x)$	$g(-2)$	$g(0)$	$g(2)$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(-2; 3)$ thì $g(x)$ có duy nhất một điểm cực trị $x = 2$.

Do đó phương trình $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên khoảng $(-2; 3)$. Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có nhiều nhất $1 + 2 = 3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$.

$$\text{Khi đó, } g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do đó, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		a		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

-3

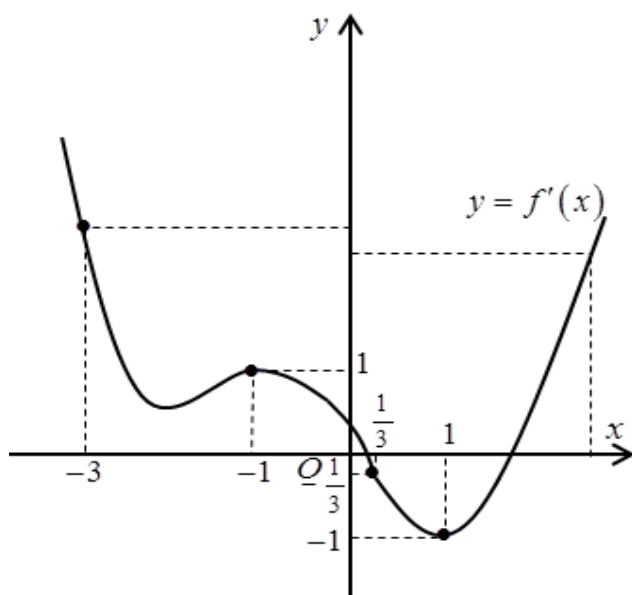
13

$g(2) < 0$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox .

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có số cực trị là $3 + 4 = 7$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



A. 9.

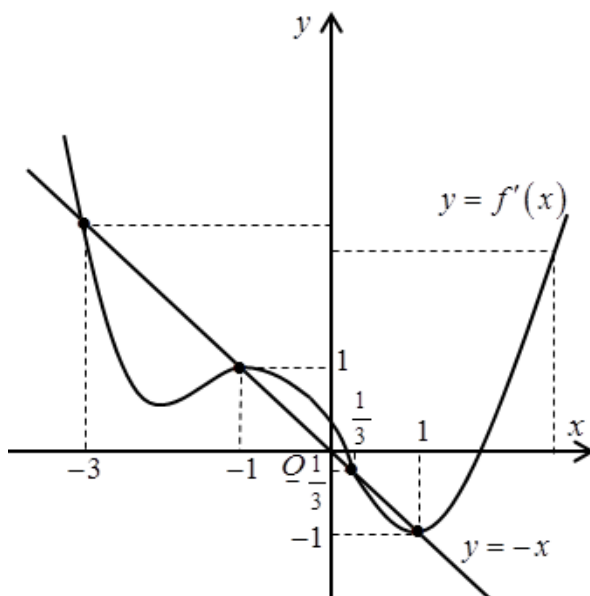
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g'(x) = 5 \cos x f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1).$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 \cos x f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) = -\frac{5 \sin x - 1}{2} \end{cases}$$

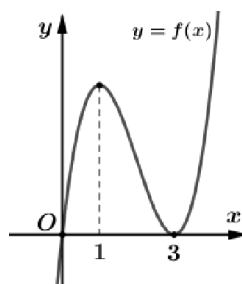
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -3 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -1 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \sin x - 1 = -6 \\ 5 \sin x - 1 = -2 \\ 5 \sin x - 1 = \frac{2}{3} \\ 5 \sin x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right), (\forall 0 < x < 2\pi) \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \\ x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

Suy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > 1$

B. $m \geq 1$

C. $m \leq 2$

D. $m > 2$

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ bằng số cực trị của hàm

số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số

$y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ và $y = 0$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \alpha (\alpha < 0) \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	α	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$-1+2m$	$2m$		$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right] \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Lời giải

$$y' = f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - a\right) \left(13 \frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3$$

$$= \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{25x^2}{(x^2+4)^2} \left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right) \left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \\ -ax^2 + 5x - 4a = 0 \end{cases} \quad (x=0 \text{ là nghiệm kép}). \quad (1)$$

đặt $g(x) = -ax^2 + 5x - 4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2; 0; 1; 4$. (Nếu $g(0) = 0$ thì $y' = 0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a \cdot 4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq \pm \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases}.$$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 17.

C. 16

D. 18

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 - 8x + m)$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m-2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

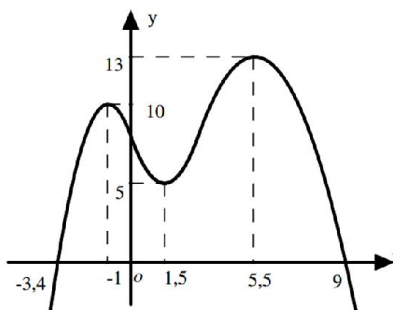
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có đúng hai điểm cực trị.



A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

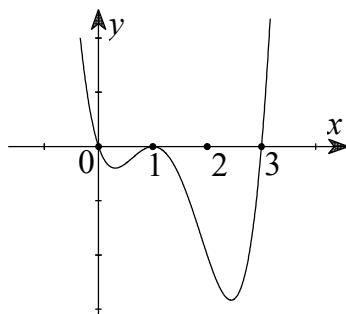
$$g'(x) = f'(x) - m$$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m$.

Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $\begin{cases} 0 < m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m \in (3; +\infty)$.

B. $m \in [0; 3]$.

C. $m \in [0; 3)$.

D. $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ (nếu có) không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực

trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \leq 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

Câu 35. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên

đương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 16.

C. 17.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 2 \text{ là nghiệm kép nên khi qua giá trị } x = 2 \text{ thì } f'(x) \\ x = 3 \end{cases}$$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 10x + m + 9)$ khi đó $g'(x) = f'(u) \cdot (2x - 10)$ với $u = x^2 - 10x + m + 9$.

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 8 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + m + 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}, \text{ (Với } h(x) = x^2 - 10x + m + 8 \text{ và } p(x) = x^2 - 10x + m + 6).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 - m > 0 \\ 19 - m > 0 \\ -17 + m \neq 0 \\ -19 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số

$g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (TM)}$

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

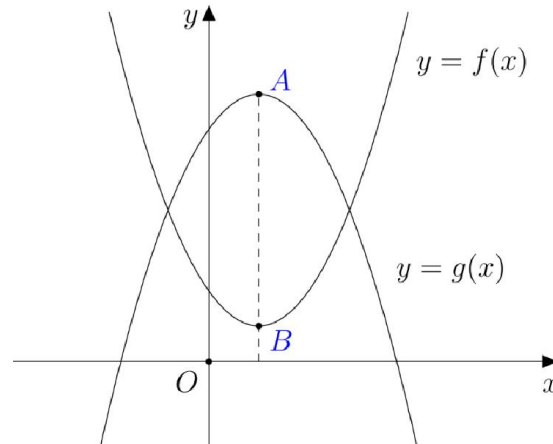
Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 37. Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1.

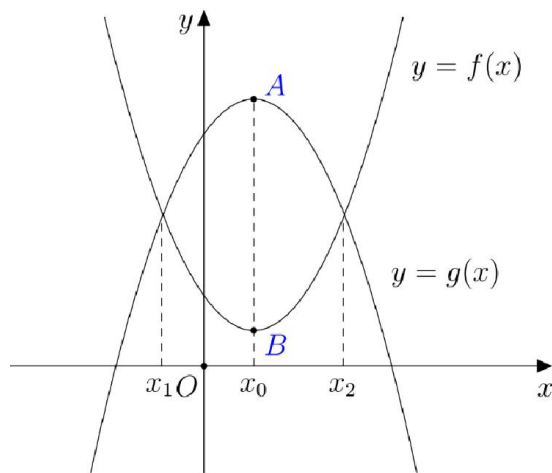
B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ ($x_1 < x_0 < x_2$);

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -\frac{7}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = k(x) = |f(x) - g(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Do đó, hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y = |k(x) + m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = k(x) + m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x) + m = 0$, mà hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y = ||f(x) - g(x)| + m|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = k(x)$, phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq -\frac{7}{4}$ và $m \in (-5; 5)$ nên $m \in \{-4; -3; -2\}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số

m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số

tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

A. $M = 40$.

B. $M = 11$.

C. $M = 31$.

D. $M = 45$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có đạo hàm là

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$$

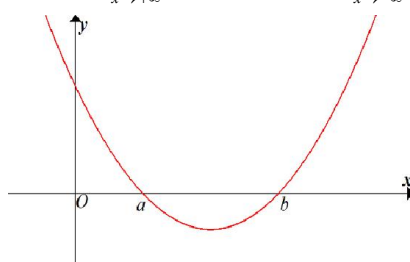
- Để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2

đương. Tương đương với phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M = a^2 + b^2 + c^2 = 45.$$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |2f^2(x) + 3f(x) + m|$ có đúng 7 điểm cực trị, biết phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, $f(a) = 1, f(b) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



A. $S = (-5; 0)$.

B. $S = (-8; 0)$.

C. $S = \left(-8; \frac{1}{6}\right)$.

D. $S = \left(-5; \frac{9}{8}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ gt ta có BBT của $f(x)$

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = 2f^2(x) + 3f(x)$, có $h'(x) = 4f(x) \cdot f'(x) + 3f'(x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4f(x) \cdot f'(x) + 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \vee 4f(x) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a \vee x = b \vee f(x) = -3/4$$

$$f(x) = -3/4 \Leftrightarrow x = c < a \text{ (theo BBT)}$$

BBT của $h(x)$

x	$-\infty$	c		a		b	$+\infty$	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$-\infty$				5			$+\infty$
			$-\frac{9}{8}$			0		

Đề hàm số $g(x) = |2f^2(x) + 3f(x) + m| = |h(x) + m|$ có đúng 7 điểm cực trị thì phương trình

$$h(x) = -m \text{ phải có 4 nghiệm phân biệt, hay } 0 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 0$$