

Chủ đề 18: BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN

➤ Dạng 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm trên đường thẳng hoặc mặt phẳng

Phương pháp giải:

- **Loại 1:** Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm A lên đường thẳng Δ

Tham số hóa điểm $H \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}$. Do $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$, giải phương trình tìm giá trị của tham số, từ đó suy ra tọa độ của điểm H .

Chú ý: Nếu A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ thì H là trung điểm của AA' .

Từ công thức trung điểm suy ra tọa độ của điểm A' .

- **Loại 2:** Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P)

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) , khi đó $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(P)}}$ từ đó ta viết được phương trình đường thẳng d suy ra $H = d \cap (P)$.

Chú ý: Nếu A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì H là trung điểm của AA' .

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -3; 1)$ lên đường thẳng Δ .

Lời giải:

Gọi $H(-1+2t; -2-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-3; 1-t; 2t-1)$

Cho $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow (2t-3; 1-t; 2t-1) \cdot (2; -1; 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2(2t-3) + (t-1) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H = (1; -3; 2)$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có

$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện.

Lời giải:

PT mặt phẳng $(ABC): x + y + z - 1 = 0$, phương trình đường thẳng qua D và vuông góc với (ABC) có

vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 1; 1) \Rightarrow d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

$\Rightarrow H = d \cap (ABC)$. Gọi $H(-2+t; 1+t; -1+t) \in d$

Do $H \in (P) \Rightarrow -2+t+1+t-1+t-1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $H(-1; 2; 0)$.

Ví dụ 3: Hình chiếu vuông góc của $M(2;0;0)$ lên đường thẳng $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ có tọa độ là:

- A. $(-2;2;1)$. B. $(-2;0;0)$. C. $(2;1;-1)$. D. $(1;2;-1)$.

Lời giải:

Gọi $H(-t;3+t;1+t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (-t-2;3+t;1+t); \overrightarrow{u_d} = (-1;1;1)$

Cho $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t+2+3+t+1+t=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(2;1;-1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Hình chiếu vuông góc của $M(1;4;2)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$ có tọa độ là:

- A. $(-1;2;0)$. B. $(2;-1;0)$. C. $(-2;3;1)$. D. $(3;2;-1)$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng qua M vuông góc với (α) là: $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$

$H = d \cap (\alpha)$, gọi $H(1+t;4+t;2+t) \in d \Rightarrow 1+t+4+t+2+t-1=0 \Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow H(-1;2;0)$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y-z-27=0$. Điểm đối xứng với điểm $M(2;1;0)$ qua mặt phẳng (α) có tọa độ là:

- A. $(2;-1;0)$. B. $(-2;-1;0)$. C. $(13;6;-4)$. D. $(6;13;-4)$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng qua M vuông góc với (α) là: $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$

$H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H(4;7;-2)$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(6;13;-4)$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Điểm đối xứng với điểm $A(1;-2;-5)$ qua đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-t \\ z = 2t \end{cases}$ có tọa độ là:

- A. $(-2;-1;7)$. B. $(-1;-2;5)$. C. $(-3;2;1)$. D. $(1;2;-4)$.

Lời giải:

Gọi A' là điểm đối xứng qua A qua d .

Gọi $H(1+2t;-1-t;2t)$ ta có: $\overrightarrow{AH} = (2t;1-t;2t+5)$

Cho $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 4t+t-1+4t+10=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(-1;0;-2) \Rightarrow A'(-3;2;1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1), B(0;-1;2), C(1;0;3)$. Tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC là :

- A. $(3;1;0)$. B. $(1;0;3)$. C. $(-2;-3;1)$. D. $(3;2;-1)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1;1)$

Phương trình đường thẳng BC là $BC: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Gọi $H(t; -1+t; 2+t) \in BC$ ta có: $\overrightarrow{AH} = (t-2; t-4; t+3); \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1;1) = 0$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_{BC}} = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1;0;3)$. **Chọn B.**

Dạng 2: Tìm điểm M thuộc đường thẳng d thỏa mãn điều kiện K cho trước

Phương pháp giải:

Tham số hóa tọa độ điểm $M \in d$ và thế vào điều kiện K để tìm giá trị của tham số. Từ đó suy ra tọa độ điểm M .

Ví dụ 1: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm $A(1;4;2); B(-1;2;4)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm điểm $M \in \Delta$ sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$.

Lời giải:

Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

Gọi $M(1-t; -2+t; 2t) \in \Delta$, ta có: $MA^2 + MB^2 = 28$

$$\Leftrightarrow t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 48t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(-1;0;4).$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên Ox điểm A sao cho A cách đều đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z = 0$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1;2;2)$.

$$\text{Gọi } A(a;0;0) \in Ox \Rightarrow d(A; (P)) = \frac{|2a|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2a|}{3}; d(A; d) = \frac{|\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3}$$

Theo giả thiết ta có: $d(A; (P)) = d(A; d) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8a^2 - 24a + 36}}{3} = \frac{|2a|}{3} \Leftrightarrow 4a^2 - 24a + 36 = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Vậy $A(3; 0; 0)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và hai điểm $A(2; -1; 1); B(0; 1; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

Lời giải:

Đường thẳng d có phương trình tham số $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Gọi M là điểm cần tìm. Do nếu M thuộc d thì M nên $M(t; 3-t; -1+2t)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t-2; 4-t; 2t-2) \\ \overrightarrow{BM} = (t; 2-t; 2t+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] = \left(\begin{vmatrix} 4-t & 2t-2 \\ 2-t & 2t+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2t-2 & t-2 \\ 2t+1 & t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} t-2 & 4-t \\ t & 2-t \end{vmatrix} \right) = (t+8; t+2; -4)$$

$$\text{Do đó } S_{ABM} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(t+8)^2 + (t+2)^2 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{2(t+5)^2 + 34} \geq \frac{1}{2} \sqrt{34}$$

Vậy $\min S = \frac{\sqrt{34}}{2}$ khi $t = -5 \Rightarrow M(-5; 8; -11)$.

Ví dụ 4: Cho hai điểm $A(1; -1; 2), B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm

$M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M(-1; 0; -3)$.

B. $M(2; 3; -3)$.

C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải:

Gọi $M(1+t; 2+t; 1+2t) \left(1+2t > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1}{2} \right)$

$$\text{Khi đó } MA^2 + MB^2 = t^2 + (t+3)^2 + (2t-1)^2 + t^2 + (2t-2)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 (\text{loại}) \\ t = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right). \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; 8; -11); B(3; 5; -4); C(2; 1; -6)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm M thuộc d sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính

$$P = x_M + y_M + z_M.$$

A. $P = -\frac{14}{9}.$

B. $P = \frac{14}{9}.$

C. $P = \frac{13}{9}.$

D. $P = -\frac{13}{9}.$

Lời giải:

Điểm M thuộc d nên $M(1+2t; 2+2t; 1+t)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (2t-4; 2t-6; t+12) \\ \overrightarrow{MB} = (2t-2; 2t-3; t+5) \\ \overrightarrow{MC} = (2t-1; 2t+1; t+7) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (-2t-1; -2t-4; -t)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(2t+1)^2 + (2t+4)^2 + t^2} = \sqrt{9t^2 + 20t + 17} = \sqrt{9\left(t + \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{53}{9}} \geq \frac{\sqrt{53}}{3}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } t = -\frac{10}{9} \Rightarrow M = \left(-\frac{11}{9}; -\frac{2}{9}; -\frac{1}{9}\right) \Rightarrow P = -\frac{14}{9}. \text{ Chọn A.}$$

Dạng 3: Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = MC$

Phương pháp giải:

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \text{giải hệ phương trình tìm tọa độ}$$

điểm M .

Ví dụ 1: Cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA = MB = MC$.

Lời giải:

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ M \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2; -3; -1)(x; y; z) = 2 \\ (-2; -1; -1)(x; y; z) = 0 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases} \text{ . Vậy } M(2; 3; -7).$$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(1; 3; 1), B(3; 1; 5), C(5; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - z - 8 = 0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA = MB = MC$.

Lời giải:

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ M \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2; -2; 4)(x; y; z) = 12 \\ (4; -2; -2)(x; y; z) = 8 \\ 3x - y - z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \text{ . Vậy } M(4; 2; 2).$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(1; 1; 3), B(3; -1; 1), C(2; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 4 = 0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA = MB = MC$.

Lời giải:

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ M \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2; -2; -2)(x; y; z) = 0 \\ (1; 1; -4)(x; y; z) = -1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ . Vậy } M(2; 1; 1).$$

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4; 3; 0); B(-2; 5; -2); C(0; -1; 0)$ và mặt phẳng

$(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Điểm $M(a; b; c) \in (P)$ và thỏa mãn $MA = MB = MC$, tính $a + b + c$.

A. $a + b + c = 1$.

B. $a + b + c = 0$.

C. $a + b + c = 2$.

D. $a + b + c = 3$.

Lời giải:

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ M \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-6; 2; -2)(a; b; c) = 4 \\ (-4; -4; 0)(a; b; c) = -12 \\ 2a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0. \text{ Chọn B.}$$

✎ **Dạng 4: Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB$ và điểm M thỏa mãn điều kiện K cho trước**

Phương pháp giải:

Cách 1: Do $MA = MB \Rightarrow$ điểm M thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của AB (mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB).

Khi đó $M \in d = (P) \cap (Q)$, ta tham số hóa điểm M theo ẩn t và thế vào điều kiện K để tìm tọa độ điểm M .

Để viết phương trình đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) ta có thể cho $x = t$ và tìm y và z theo ẩn t .

Cách 2: Gọi tọa độ $M(x; y; z)$ giải hệ phương trình 3 ẩn 3 phương trình $M \in (P); M \in (Q)$ và điều kiện K để tìm tọa độ điểm M .

Ví dụ 1: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 1), B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA = MB = 3$.

Lời giải:

Phương trình mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của AB đi qua $I(1; -1; 2)$ và có VTPT là

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2)$ suy ra $(Q): x + y - z + 2 = 0 \Rightarrow M \in (P) \cap (Q)$.

$$\text{Cho } x = t \Rightarrow \begin{cases} y + z = 2t + 4 \\ y - z = -t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}t + 1 \\ z = \frac{3}{2}t + 3 \end{cases} \Rightarrow M\left(t; \frac{t}{2} + 1; \frac{3t}{2} + 3\right)$$

$$\text{Ta có: } MA^2 = (t-2)^2 + \left(\frac{t}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{3t}{2}+2\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{7}{2}t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow M(0;1;3) \\ t=-\frac{6}{7} \Rightarrow M\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right) \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(3;1;2), B(-1;1;0), C(0;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): 3x+2z-5=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA=MB$ và $MC=\sqrt{11}$.

Lời giải:

Phương trình mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của AB đi qua $I(1;1;1)$ có VTPT:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-4;0;-2) = -2(2;0;1) \Rightarrow (Q): 2x+z-3=0.$$

$$\text{Khi đó điểm } M = (P) \cap (Q): \begin{cases} 3x+2z-5=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(1;t;1)$$

$$\text{Lại có: } MC^2 = 1 + (t-1)^2 + 9 = 11 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow M(1;0;1) \\ t=2 \Rightarrow M(1;2;1) \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(1;0;-2), B(-1;2;4), C(4;5;3)$ và mặt phẳng $(P): x+y+3z-10=0$.

Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA=MB$ và $MB \perp MC$.

Lời giải:

Trung điểm của AB là $I(0;1;1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-2;2;6) = -2(1;-1;-3)$

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là: $(Q): x-y-3z+4=0$

$$\text{Khi đó điểm } M = (P) \cap (Q). \text{ Cho } z=t \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3t+10 \\ x-y=3t-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3t+7 \end{cases} \Rightarrow M(3;-3t+7;t)$$

$$\text{Mặt khác } MB \perp MC \Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow (-4;3t-5;-t+4)(1;3t-2;3-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 + (3t-5)(3t-2) + (4-t)(3-t) = 0 \Leftrightarrow 10t^2 - 28t + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow M(3;4;1) \\ t=\frac{9}{5} \Rightarrow M\left(3;\frac{8}{5};\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho hai điểm $A(2;-1;1); B(0;3;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-z=0$.

Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) thỏa mãn $MA=MB=3\sqrt{10}$. Biết $x_M > 0$, tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-9$.

B. $T=14$.

C. $T=-12$.

D. $T=9$.

Lời giải:

Trung điểm của AB là $I(1;1;2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-2;4;2) = -2(1;-2;-1)$

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là: $(Q): x-2y-z+3=0$

Khi đó điểm $M = (P) \cap (Q)$. Cho $x = t \Rightarrow \begin{cases} 2t = z \\ 2y = x - z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2t \\ y = \frac{-t+3}{2} \end{cases}$ (với $x_M = t > 0$)

Suy ra $M\left(t; \frac{-t}{2} + \frac{3}{2}; 2t\right)$, lại có: $MA^2 = (t-2)^2 + \left(\frac{-t}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + (2t-1)^2 = 90$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{4}t^2 - \frac{21}{2}t - \frac{315}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \end{cases} \xrightarrow{t > 0} t = 5 \Rightarrow M(5; -1; 10)$$

Vậy $a + b + c = 14$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; 5; 4)$, $B(3; 1; 4)$ và mặt phẳng

$(P): x - y - z - 1 = 0$. Điểm C thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích bằng $2\sqrt{17}$. Biết điểm C có cao độ dương. Độ dài OC bằng:

A. $OC = 5$. B. $OC = 8$. C. $OC = \sqrt{67}$. D. $OC = \sqrt{65}$.

Lời giải:

$\overrightarrow{AB} = (0; -4; 0)$, gọi $I(3; 3; 4)$ là trung điểm của AB thì $CI \perp AB$ (do tam giác ABC cân tại C).

Do $CA = CB \Rightarrow C$ thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của AB có phương trình $(Q): y = 3$.

$$\text{Gọi } C \in (P) \cap (Q): \begin{cases} y = 3 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } C(t; 3; t-4) \text{ ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CI \cdot AB = \frac{1}{2} \sqrt{(t-3)^2 + (t-8)^2} \cdot 4 = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow (t-3)^2 + (t-8)^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 22t + 56 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 7 \end{cases} \Rightarrow C(7; 3; 3), C(4; 3; 0).$$

Vì $z_C > 0 \Rightarrow C(7; 3; 3) \Rightarrow OC = \sqrt{67}$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 7; 3)$, $B(4; 5; 3)$ và mặt phẳng

$(P): x - y - z = -4$. Điểm C trên (P) sao cho tam giác ABC đều. Tính $P = OC_{\max}$.

A. $P = \sqrt{66}$. B. $P = \sqrt{30}$. C. $P = \sqrt{76}$. D. $P = 2\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi M là trung điểm của AB ta có $M(3; 6; 3)$; $\overrightarrow{AB}(2; -2; 0)$

Do $CA = CB$ nên C thuộc mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $(Q): x - y = -3$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ đều nên } BC = AB \Rightarrow BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 8.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x - y = -3 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x + 3 = y \\ (x-4)^2 + (x-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1, x = 2, y = 5 \\ z = 1, x = 4, y = 7 \end{cases}$$

Vậy $C(2;5;1), C(4;7;1)$ là các điểm cần tìm suy ra $OC_{\max} = \sqrt{66}$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho hai điểm $A(0;1;-1); B(2;3;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 4 = 0$.

Điểm M có hoành độ nguyên nằm trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M và có diện tích bằng $4\sqrt{6}$. Tính $P = OM$.

- A. $P = 2\sqrt{5}$. B. $P = \sqrt{21}$. C. $P = 2\sqrt{21}$. D. $P = 2\sqrt{7}$.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm của AB ta có $I(1;2;0); \overrightarrow{AB} = (2;2;2) = 2(1;1;1) \Rightarrow \begin{cases} MI \perp AB \\ AB = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Do $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AB có phương trình $(Q): x + y + z - 3 = 0$.

Khi đó $M = (P) \cap (Q)$, cho $x = t \Rightarrow \begin{cases} y - z = -2t - 4 \\ y + z = -t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{2}t - \frac{1}{2} \\ z = \frac{t}{2} + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(t; \frac{-3}{2}t - \frac{1}{2}; \frac{t}{2} + \frac{7}{2}\right)$

Lại có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}MI \cdot AB = \frac{1}{2}MI \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6} \Rightarrow MI = 4\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 + \left(-\frac{3t}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2} + \frac{7}{2}\right)^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{7t^2}{2} + 9t - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{25}{7} \end{cases}$$

Do M có hoành độ nguyên nên $M(1;-2;4) \Rightarrow OM = \sqrt{21}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - z - 5 = 0$ và các điểm

$A(3;-1;-3); B(5;1;1)$. Điểm C thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABC) vuông góc với (P) và diện tích tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$. Tính $P = OC_{\max}$

- A. $P = 5$. B. $P = \sqrt{26}$. C. $P = \sqrt{13}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Lời giải:

Mặt phẳng (Q) chứa AB vuông góc với (P) nên có VTPT là: $\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_P}] = (1;1;-1)$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là: $x + y - z - 5 = 0 \Rightarrow C \in (Q) \Rightarrow C = (P) \cap (Q)$.

Phương trình giao tuyến của (Q) và (P) xét hệ $\begin{cases} x + y - z - 5 = 0 \\ x - 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$. Cho $x = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$

$$\text{Gọi } C(t;0;t-5). \text{ Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{3(2t-8)^2} = \sqrt{3} |t-4| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} C(5;0;0) \\ C(3;0;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC=5 \\ OC=\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow P = OC_{\max} = 5. \text{ Chọn A.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A(1;1;1)$.

Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên d .

- A. $A'(2;3;1)$. B. $A'(-2;3;1)$. C. $A'(2;-3;1)$. D. $A'(2;-3;-1)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;-1;2)$ và $B(1;0;-2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm

$I(a;b;c)$ trên $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và $(P): 2x - y - 2z - 6 = 0$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $3 + \sqrt{2}$. B. $5 + \sqrt{3}$. C. 0. D. $4 + \sqrt{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$. Tìm tọa độ hình chiếu của M lên Ox .

- A. $(2;0;0)$. B. $(1;0;0)$. C. $(3;0;0)$. D. $(0;2;3)$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(2;-1;2)$ và $C(3;4;-4)$. Giao điểm M của trục Ox với mặt phẳng (ABC) là

- A. $M(1;0;0)$. B. $M(2;0;0)$. C. $M(3;0;0)$. D. $M(-1;0;0)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ và điểm $A(-7;-6;1)$.

Tìm tọa độ của A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) .

- A. $A'(1;2;-3)$. B. $A'(1;2;1)$. C. $A'(5;4;9)$. D. $A'(9;0;9)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm

$A(-1;3;1)$, $B(0;2;-1)$. Tìm tọa độ C thuộc d sao cho diện tích của tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$.

- A. $C(-5;-2;4)$. B. $C(-3;-2;3)$. C. $C(-1;0;2)$. D. $C(1;1;1)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4;0;0)$, $B(6;b;0)$ (với $b > 0$) và $AB = 2\sqrt{10}$. Điểm C thuộc tia Oz sao cho thể tích tứ diện $OABC$ bằng 8, tọa độ điểm C là

- A. $(0;1;2)$. B. $(0;0;-2)$. C. $(0;0;2)$. D. $(0;0;3)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-2;3;1)$, đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$. Tung độ điểm M trên Δ sao cho $MA = MB$ là

- A. $-\frac{19}{6}$. B. $-\frac{19}{12}$. C. $\frac{19}{7}$. D. $-\frac{19}{7}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm

$A(-2;1;1), B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (Δ) sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

- A. $M(-2;1;-5)$ hoặc $M(-14;-35;19)$. B. $M(-1;4;-7)$ hoặc $M(3;16;-11)$.
C. $M(-2;1;-5)$ hoặc $M(3;16;-11)$. D. $M(-1;4;-7)$ hoặc $M(-14;-35;19)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;0), B(2;2;2)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm tọa độ M trên Δ sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{1}{9}; \frac{26}{9}; \frac{7}{9}\right)$. B. $M\left(\frac{36}{29}; \frac{51}{29}; \frac{43}{29}\right)$. C. $M(4;-1;7)$. D. $M\left(\frac{5}{13}; \frac{25}{13}; -\frac{3}{13}\right)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và

$(\Delta_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1

- A. $M(9;6;6)$ hoặc $M(6;3;3)$ B. $M(5;2;2)$ hoặc $M(2;0;0)$
C. $M(10;7;7)$ hoặc $M(0;-3;-3)$ D. $M(-2;-5;-5)$ hoặc $M(1;-2;-2)$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P) , M là thuộc Δ . Tìm M biết $MC = \sqrt{6}$

- A. $M(1;0;-2)$ hoặc $M(5;2;-4)$ B. $M(3;1;-3)$ hoặc $M(-3;-2;0)$
C. $M(1;0;-2)$ hoặc $M(-3;-2;0)$ D. $M(3;1;-3)$ hoặc $M(-1;-1;-1)$

Câu 13: Cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

- A. $M(-1;0;0)$ hoặc $M(2;0;0)$ B. $M(3;0;0)$ hoặc $M(1;0;0)$
C. $M(1;0;0)$ hoặc $M(-2;0;0)$ D. $M(4;0;0)$ hoặc $M(2;0;0)$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên Ox điểm M cách đều đường thẳng

$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z=0$

- A. $M(3;0;0)$ B. $M(-3;0;0)$ C. $M(2;0;0)$ D. $M(-2;0;0)$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

- A. $M(1; -2; 0)$ B. $M(2; -3; -2)$ C. $M(-1; 0; 4)$ D. $M(3; -4; -4)$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(7; -2; 3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{2}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. $M(-2; 4; 0)$ B. $M(2; 0; 4)$ C. $M(3; -2; 6)$ D. $M(4; -4; 8)$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 2), B(1; -1; 1), C(2; 2; -1)$ và đường

thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$ B. $M\left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$ C. $M\left(2; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ D. $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0)$ và mặt phẳng

$(P): x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P)

- A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$ B. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ C. $M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ D. $M(-1; 4; 6)$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(9; -3; 5), B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Biết M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị $a+b+c$ là

- A. -21. B. -15. C. 15. D. 21.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Gọi $A'(6-4t; -2-t; -1+2t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của A trên d .

Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (5-4t; -3-t; -2+2t)$ và $\overrightarrow{u_d} = (-4; -1; 2)$

Khi đó $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_d} = 16t - 20 + t + 3 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow 21t = 21 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A'(2; -3; 1)$. **Chọn C.**

Câu 2: Do $IB \perp (P) \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng qua B và vuông góc với (P)

$$\text{Ta có: } IB: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \Rightarrow I(1+2t; -t; -2-2t) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (2t+1; -t+1; -2t-4)$$

Mặt khác $\overrightarrow{u_\Delta} = (4; 1; -1)$ ta có $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 4(2t+1) + (-t+1) + 2t+4 = 0$

$$\Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1; 1; 0) \Rightarrow S = a + b + c = 0. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 3: Tọa độ hình chiếu của M lên Ox là $M'(1; 0; 0)$. **Chọn B.**

Câu 4: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1); \overrightarrow{AC} = (2; 3; -5) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; 7; 7) = 7(1; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y + z - 3 = 0$

Khi đó giao điểm M của trục Ox với mặt phẳng (ABC) là: $M(3; 0; 0)$. **Chọn C.**

Câu 5: Phương trình đường thẳng Δ qua A vuông góc với (P) có VTCP là $\vec{u} = \overrightarrow{n_{(P)}}(2; 2; -1)$

$$\text{Suy ra } \Delta: \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -6 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \text{ gọi } H(2t-7; 2t-6; 1-t) \in \Delta \text{ là hình chiếu vuông góc của } A' \text{ xuống } (P).$$

$$\text{Ta có: } H \in (P) \Rightarrow 4t - 14 + 4t - 12 + t - 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = 18 \Leftrightarrow t = 2.$$

Do đó: $H(-3; -2; -1)$, điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) nên H là trung điểm của

$$AA' \Rightarrow A'(1; 2; -3). \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 6: Gọi $C(-1-2t; -t; 2+t) \in d$ suy ra $\overrightarrow{AC} = (-2t; -t-3; t+1); \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ABC} &= \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} |(3t+7; -3t+1; 3t+3)| = \frac{1}{2} \sqrt{(3t+7)^2 + (-3t+1)^2 + (3t+3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 + 54t + 59} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 27t^2 + 54t + 27 = 0 \Leftrightarrow 27(t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1. \end{aligned}$$

Do đó $C(1; 1; 1)$. **Chọn D.**

Câu 7: Ta có: $AB = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow AB^2 = 2^2 + b^2 = 40 \Leftrightarrow b^2 = 36 \xrightarrow{b>0} b = 6$.

Vì C thuộc tia Oz nên $C(0; 0; t)(t > 0) \Rightarrow (OAC): y = 0$

Lại có: $V_{O.ABC} = \frac{1}{3}d(B;(OAC)).S_{OAC} = \frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.4.t = 8 \Leftrightarrow t = 2$

Ngoài ra các bạn có thể sử dụng công thức $V_{OABC} = \frac{1}{6}|\left[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right] \overrightarrow{OC}| \rightarrow$ tham số t .

Vậy $C(0;0;2)$. **Chọn C.**

Câu 8: Gọi $M(1+3t; 2t; -2+t) \in \Delta$ ta có: $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + (2t-2)^2 + (t-2)^2 = (3t+3)^2 + (2t-3)^2 + (t-3)^2$$

$$\Leftrightarrow -8t - 4t + 8 = 18t - 12t - 6t + 27 \Leftrightarrow 12t = -19 \Rightarrow t = \frac{-19}{12} \Rightarrow y_M = 2t = \frac{-19}{6}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 9: Gọi $M(-2+t; 1+3t; -5-2t) \in \Delta$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6-2t); \overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right]| = \frac{1}{2}|(-t-12; t+6; t)| = \frac{1}{2}\sqrt{(t+12)^2 + (t+6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 36t + 180 = 180 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-12 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 1; -5) \text{ hoặc } M(-14; -35; 19). \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 10: Gọi $M(t; 3-t; -1+2t) \in \Delta$ ta có: $\overrightarrow{AM} = (t; 2-t; -1+2t); \overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$

Khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right]| = \frac{1}{2}|(-4t+5; 2t-1; 3t-4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(4t-5)^2 + (2t-2)^2 + (3t-4)^2}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{29t^2 - 72t + 45}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = \frac{-b}{2a} = \frac{72}{2.29} = \frac{36}{29} \Rightarrow M\left(\frac{36}{29}; \frac{51}{29}; \frac{43}{29}\right). \text{ **Chọn B.**}$

Câu 11: Gọi $M(3+t; t; t) \in \Delta_1$

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $A(2; 2; 0)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; 2)$

Ta có: $d(M; \Delta_2) = \frac{|\left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_2}\right]|}{|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{|\left[(t+1; t-2; t); (2; 1; 2)\right]|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{(t-4)^2 + 4 + (t-5)^2}}{3} = 1$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 18t + 45 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(9; 6; 6) \\ M(6; 3; 3) \end{cases}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 12: Gọi $C(1+2t; t; -2-t) \in \Delta$, vì $C \in (P)$ nên $2t+1-2t-2-t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow C(-1; -1; -1)$.

Gọi $M(1+2u; u; -2-u) \in \Delta$ ta có: $MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2u+2)^2 + (u+1)^2 + (u+1)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow 6(u+1)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-3; -2; 0) \\ M(1; 0; -2) \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 13: Gọi $M(t; 0; 0)$ ta có: $OM = |t|$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;2)$ do đó

$$d(M; \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{MA}; \vec{u} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \left[(t; -1; 0); (2; 1; 2) \right] \right|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{4+4t^2+(t+2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{5t^2+4t+8}}{3}$$

$$\text{Do } OM = d(M; \Delta) \Leftrightarrow t^2 = \frac{5t^2+4t+8}{9} \Leftrightarrow 4t^2-4t-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

Do đó $M(-1;0;0)$ hoặc $M(2;0;0)$. **Chọn A.**

Câu 14: Gọi $M \in Ox \rightarrow M(t;0;0) \Rightarrow d[M; (P)] = \frac{2}{3}|t|$

Lấy $A(1;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t-1;0;2) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] = (-4; 4-2t; 2t-2)$

Khi đó, khoảng cách từ điểm $M \rightarrow (d)$ là $d[M; (d)] = \frac{\left| [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|}$

Theo bài ra, ta có $\frac{\sqrt{(-4)^2+(4-2t)^2+(2t-2)^2}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3}|t| \Leftrightarrow t=3$. Vậy $M(3;0;0)$. **Chọn A.**

Câu 15: Gọi $M \in \Delta \rightarrow M(1-t; -2+t; 2t)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (t; 6-t; 2-2t)$ và $\overrightarrow{MB} = (-2+t; 4-t; 4-2t)$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } MA^2 + MB^2 &= t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2 + (-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2 \\ &= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t^2 - 4t + 4) + 28 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28 \Rightarrow \{MA^2 + MB^2\}_{\min} = 28 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=2 \rightarrow M(-1;0;4)$. **Chọn C.**

Câu 16: Gọi $M \in d \rightarrow M(2+3t; -2t; 4+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1-3t; 2+2t; -5-2t)$ và $\overrightarrow{MB} = (5-3t; -2+2t; -1-2t)$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } MA + MB &= \sqrt{17t^2 + 34t + 30} + \sqrt{17t^2 - 34t + 30} \\ &= \sqrt{17(t-1)^2 + 13} + \sqrt{17(t+1)^2 + 13} \geq \sqrt{(2\sqrt{17})^2 + (2\sqrt{13})^2} = \sqrt{120} \end{aligned}$$

Suy ra $\{MA + MB\}_{\min} = \sqrt{120}$. Dấu bằng xảy ra khi $t=0 \rightarrow M(2;0;4)$. **Chọn B.**

Câu 17: Gọi $M \in \Delta \rightarrow M(1+2t; t; 2+t)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1-2t; -t; -t)$, $\overrightarrow{MB} = (-2t; -1-t; 1-t)$, $\overrightarrow{MC} = (1-2t; 2-t; -3-t)$

Khi đó $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (-3-2t; -6-t; 8-t)$

$$\text{Suy ra } T = \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{6t^2 + 8t + 109} = \sqrt{\frac{2}{3}(3t+2)^2 + \frac{319}{3}} \geq \sqrt{\frac{319}{3}}$$

Do đó $T_{\min} = \sqrt{\frac{319}{3}}$. Dầu bằng xảy ra khi $t = -\frac{2}{3}$. Vậy $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. **Chọn D.**

Câu 18: Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua C và song song với (P)

Vì $(Q) // (P)$ nên $(Q): x + y + z + c = 0$. Mà $C \in (Q) \Rightarrow 1 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

Do đó, phương trình mặt phẳng (Q) là $x + y + z - 2 = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

Vậy $D = (Q) \cap AB \rightarrow D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$. **Chọn C.**

Câu 19: Ta có A, M, N, P, B thẳng hàng và $AM = MN = NP = PB$ nên N là trung điểm của AB , điểm M và P lần lượt là trung điểm của AN và NB .

Ta có: $N\left(\frac{a+9}{2}; \frac{b-3}{2}; \frac{c+5}{2}\right) \in (Oxz) \Rightarrow \frac{b-3}{2} = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

Suy ra $M\left(\frac{9 + \frac{a+9}{2}}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{\frac{c+5}{2} + 5}{2}\right) \in (Oxy) \Rightarrow z_N = 0 \Leftrightarrow c = -15$.

Mặt khác $P\left(\frac{\frac{a+9}{2} + a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{\frac{c+5}{2} + c}{2}\right) \in (Oyz) \Rightarrow x_P = 0 \Leftrightarrow A = -3$.

Do đó $a + b + c = -15$. **Chọn B.**