

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
THANH HÓA**



**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH  
NĂM HỌC 2021 - 2022**

**Môn thi: TOÁN - THPT**

*Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)*

*Đề thi gồm 06 trang - 50 câu trắc nghiệm*

**MÃ ĐỀ: 106**

- Câu 1:** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$  thỏa mãn  $F(2) = 0$ . Tính số nghiệm phương trình  $F(x) = x$ .
- A. 2.                                      B. 0.                                      C. 3.                                      D. 1.
- Câu 2:** tập xác định của hàm số  $y = \log_2(x^2 - 7x + 10)$  là
- A.  $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$ .      B.  $[2; 5]$ .                                      C.  $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ .      D.  $(2; 5)$ .
- Câu 3:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-2021; 2021)$  để hàm số  $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 2$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; \infty)$ ?
- A. 2022.                                      B. 2019.                                      C. 2021.                                      D. 2020.
- Câu 4:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là
- A. 3.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. 4.
- Câu 5:** Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân với  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Mặt phẳng  $(AB'C')$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.
- A.  $V = \frac{a^3}{8}$ .                                      B.  $V = \frac{3a^3}{4}$ .                                      C.  $V = \frac{9a^3}{8}$ .                                      D.  $V = \frac{3a^3}{8}$ .
- Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết  $f(0) = \frac{3}{2}$  và  $f'(x) = x.e^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 xf(x)dx$ .
- A.  $I = \frac{e-3}{4}$ .                                      B.  $I = \frac{e+1}{4}$ .                                      C.  $I = \frac{e-1}{2}$ .                                      D.  $I = \frac{e+2}{4}$ .
- Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 2a$ . Tam giác  $SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .
- A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .                                      B.  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ .                                      C.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ .                                      D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .
- Câu 8:** Cho mặt cầu  $(S_1)$  có bán kính là  $a$ , mặt cầu  $(S_2)$  có bán kính là  $2a$ . Tỷ số diện tích của mặt cầu  $(S_1)$  và mặt cầu  $(S_2)$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B. 4.

C.  $\frac{1}{4}$ .

D. 2.

**Câu 9:** Cho hình đa diện đều loại  $\{4;3\}$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $S = 4a^2$ .

B.  $S = 6a^2$ .

C.  $S = 2\sqrt{3}a^2$ .

D.  $S = \sqrt{3}a^2$ .

**Câu 10:** Tập giá trị của hàm số  $y = 2 \sin 2x + 3$  là

A.  $[-2; 2]$ .

B.  $[1; 5]$

C.  $[-2; 5]$ .

D.  $[1; 2]$ .

**Câu 11:** Số cách xếp 5 người ngồi vào một hàng ghế dài là

A. 130.

B. 100.

C. 125.

D. 120.

**Câu 12:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 3$  và  $u_6 = 18$ . Số hạng  $u_{10}$  bằng

A. 27.

B. 30.

C. -24.

D. 21.

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên.

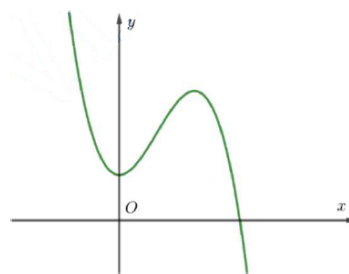
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

B.  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

C.  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .

D.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



**Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều,  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $B$  và vuông góc với đường thẳng  $SC$ . Thiết diện do  $mp(P)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  là:

A. Tam giác đều.

B. Tam giác cân.

C. Tam giác vuông

D. Hình thang vuông.

**Câu 15:** Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. Ba mặt.

B. Hai mặt.

C. Năm mặt.

D. Bốn mặt.

**Câu 16:** Bán kính đáy của khối trụ tròn xoay có thể tích bằng  $V$  và chiều cao bằng  $h$  là

A.  $r = \sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}$ .

B.  $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ .

C.  $r = \sqrt{\frac{2V}{\pi h}}$ .

D.  $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ .

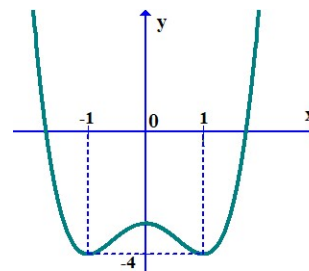
**Câu 17:** Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A.  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ .

B.  $y = x^4 - 2x^2 - 4$ .

C.  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ .

D.  $y = x^4 + 2x^2 - 3$ .



**Câu 18:** Giả sử khai triển  $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , biết rằng  $a_0 + a_1 + a_2 = 71$ . Tính hệ số  $a_5$

A. 672.

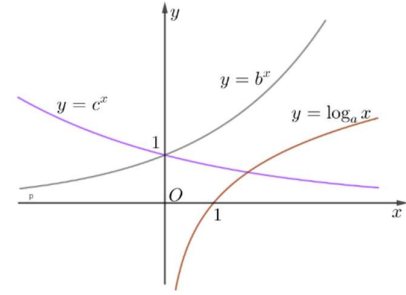
B. -627.

C. -672.

D. 627.

**Câu 19:** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  khác 1. Đồ thị các hàm số  $y = \log_a x, y = b^x, y = c^x$  được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $b < c < a$ .  
 B.  $c < b < a$ .  
 C.  $a < b < c$ .  
 D.  $a < c < b$ .



**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 4]$ ,

$$f(1) = 12 \text{ và } \int_1^4 f'(x) dx = 17. \text{ Khi đó } f(4) \text{ bằng}$$

- A. 29.                      B. 9.                      C. 5.                      D. 19.

**Câu 21:** Cho đa thức  $P(x)$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x) - 2}{x - 3} = 2$ . Tính giới hạn  $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x) - 2}{(x^2 - 9)(\sqrt{P(x) + 2} + 1)}$ .

- A.  $L = \frac{1}{9}$ .                      B.  $L = \frac{1}{6}$ .                      C.  $L = \frac{1}{12}$ .                      D.  $L = \frac{2}{9}$ .

**Câu 22:** Với mọi số thực  $m, n, p$  thỏa mãn  $p \log 2 = m \log 8 + n \log 4$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $2^p = 8^m + 4^n$                       B.  $p = \log(8^m + 4^n)$ .                      C.  $p = 3n + 2m$ .                      D.  $p = 3m + 2n$ .

**Câu 23:** Một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

- A.  $x^3 - \cos x + 2021$                       B.  $3x^3 - \cos x + 2021$ .                      C.  $x^3 + \sin x + 2021$ .                      D.  $x^3 + \cos x + 2021$ .

**Câu 24:** Cho hàm số  $f(x) = \ln \frac{2021x}{x+1}$  Tính tổng  $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022)$

- A.  $S = \ln 2021$                       B.  $S = \frac{2021}{2022}$ .                      C.  $S = \frac{2022}{2023}$ .                      D.  $S = 2022$ .

**Câu 25:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0 | - | 0 | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 3 | 1 | 2 | 0 | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình  $2.f(x - 2021) = 3$  là

- A. 4.                      B. 5.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 26:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 1$ ,  $AD = 2$  và  $AA' = 3$ . Gọi  $M, N, P, L$  lần lượt là tâm của các hình chữ nhật  $ABB'A'$ ,  $A'B'C'D'$ ,  $ADD'A'$ ,  $CDD'C'$  và gọi  $Q$  là trung điểm của đoạn  $BL$ . Thể tích của khối tứ diện  $MNPQ$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{3}{8}$ .

**Câu 27:** Để chuẩn bị cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam tham dự giải AFF Suzuki Cup 2020, một hội cổ động viên dự định sơn và trang trí cho 1000 chiếc nón lá như sau: Độ dài đường sinh của chiếc nón lá là  $40\text{cm}$ , theo độ dài đường sinh kể từ đỉnh nón cứ  $8\text{cm}$  thì sơn màu đỏ, màu vàng xen kẽ nhau, sau đó dán 20 ngôi sao màu vàng cho mỗi chiếc nón (như hình minh họa bên). Biết rằng đường kính của đường tròn đáy nón là  $40\text{cm}$ , mỗi ngôi sao màu vàng và công dán giá 400 đồng, tiền sơn và công sơn màu vàng giá  $30.000\text{ đồng/m}^2$  và tiền sơn và công sơn màu đỏ giá  $40.000\text{ đồng/m}^2$ . Hỏi giá thành để sơn và trang trí cho 1000 chiếc nón lá như trên là bao nhiêu?



A. 17.047.787 đồng. B. 16.545.123 đồng. C. 16.545.132 đồng. D. 17.047.778 đồng.

**Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong khoảng  $(-2021; 2021)$  để phương trình  $6.2^{2x-1} - (7m-48).2^x + 2m^2 - 16m = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1.x_2 > 15$ ?

A. 1997. B. 1996. C. 2021. D. 2020.

**Câu 29:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ,  $AC = 120$ ,  $AB = 40$  và khoảng cách giữa hai đáy là 45. Biết hình chiếu của  $A'$  lên mặt đáy  $(ABC)$  là điểm  $H$  thuộc cạnh  $BC$ . Hai mặt phẳng  $(ABB'A')$ ,  $(ACC'A')$  cùng tạo với mặt đáy góc bằng nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C$  gần nhất với số nào sau đây?

A. 10. B. 7. C. 32. D. 21.

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & ; x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x^2 + 3} + 2 & ; x < 0 \end{cases}$ . Biết rằng hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tích

phân  $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = ae + b\sqrt{3} + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Giá trị  $a + b - 9c$  bằng

A. 69. B. 33. C. 13. D. 25.

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 + 3x + 1$  ( $C$ ) và điểm  $M(1; -2)$ . Biết có hai giá trị  $m$  là  $m_1$  và  $m_2$  để đường thẳng  $\Delta: y = x + 1$  cắt đồ thị ( $C$ ) tại ba điểm phân biệt  $A(0; 1)$ ,  $B$  và  $C$  sao cho tam giác  $MBC$  có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$ . Hỏi tổng  $m_1^2 + m_2^2$  thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. (3; 5). B. (15; 17). C. (16; 18). D. (31; 33).

**Câu 32:** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = \sqrt{6}$ ,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $A'C = 3$  và mặt phẳng  $(ACC'A')$  vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng  $(ACC'A')$  và  $(ABB'A')$  tạo với nhau góc  $\alpha$  với  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Thể tích  $V$  của khối tứ diện  $BDA'C'$  là

A.  $V = 16$ . B.  $V = 8$ . C.  $V = \frac{8}{3}$ . D.  $V = \frac{16}{3}$ .

- A.** 3.  
**B.** 5.  
**C.** 2.  
**D.** 4.

**D. 6.**

- A.**  $-225$ .                      **B.**  $-184$ .  
**C.**  $-154$ .                      **D.**  $-170$ .

**D. 6.**

**D. 5.**

**D.**  $\frac{53}{12}$ .

- Câu 39:** Cho hai hàm số bậc ba  $y = f(x)$  và  $y = g(x) = -f(mx + n)$ , (trong đó  $m, n \in \mathbb{Q}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng điểm cực tiểu của hàm số  $y = g(x)$  lớn hơn điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là 5 đơn vị và  $g(0) = -1$ . Khi đó giá trị biểu thức  $P = 3m + 2n$  là
- A.  $\frac{16}{5}$ .                      B.  $\frac{19}{2}$ .                      C.  $-\frac{11}{2}$ .                      D.  $\frac{4}{5}$ .
- Câu 40:** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  ( $C$ ) và điểm  $M \in (C)$ . Tiếp tuyến của ( $C$ ) tại  $M$  cắt đường tiệm cận ngang của đồ thị tại điểm  $A$ . Hỏi có bao nhiêu điểm  $M$  thuộc đồ thị ( $C$ ) có tọa độ là các số nguyên để điểm  $A$  cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn  $2\sqrt{10}$ ?
- A. 4                      B. 6                      C. 5                      D. 3.
- Câu 41:** Cho  $K$  là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số, chọn ngẫu nhiên một số từ  $K$ . Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là bội của 4.
- A.  $\frac{2243}{9000}$ .                      B.  $\frac{2226}{9000}$ .                      C.  $\frac{2250}{9000}$ .                      D.  $\frac{2249}{9000}$ .
- Câu 42:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng ( $SBC$ ) bằng
- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{13}}{4}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .
- Câu 43:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m-x-1}}$  ( $m$  là tham số). Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận là
- A.  $m \in (-5; 4] \setminus \{4\}$ .                      B.  $m \in [-5; 4] \setminus \{-4\}$ .                      C.  $m \in [-5; 4]$ .                      D.  $m \in (-5; 4) \setminus \{-4\}$ .
- Câu 44:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[0; 2021]$  để phương trình  $\ln^3(x+m) + m^3 + 3e^x \ln(x+m)^m = e^{3x}$  có nghiệm lớn hơn 6?
- A. 2021.                      B. 1010.                      C. 1624.                      D. 2020.
- Câu 45:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện  $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng tích phân  $I = \int_0^1 x.f'(x)dx = -\frac{a}{b}$  (với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính  $T = 3a - b$ .
- A.  $T = -48$ .                      B.  $T = 16$ .                      C.  $T = 0$ .                      D.  $T = 1$ .
- Câu 46:** Cho phương trình  $\sin^{2020} x + \cos^{2020} x = 2(\sin^{2022} x + \cos^{2022} x)$ . Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; 2021)$  bằng
- A.  $\left(\frac{1287}{2}\right)^2 \pi$ .                      B.  $(643)^2 \pi$ .                      C.  $\left(\frac{1287}{4}\right)^2 \pi$ .                      D.  $(644)^2 \pi$ .
- Câu 47:** Một tỉnh  $A$  đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ

ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 – 2021 ( 6 năm) là 9,9% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1”(tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỷ lệ giảm và tuyển dụng mỗi năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm(làm tròn đến 0,01%).

- A. 1,72% .                      B. 2,06% .                      C. 1,13% .                      D. 1,85% .

**Câu 48:** Có bao nhiêu bộ  $(x; y)$  với  $x, y$  là các số nguyên và  $1 \leq x, y \leq 2021$  đồng thời thỏa mãn điều

$$\text{kiện } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left( \frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left( \frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

- A. 2018.2021.                      B. 2.                      C. 4036.                      D. 2018.

**Câu 49:** Cho khối trụ  $(T)$  có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ . Xét hình chữ nhật  $ABCD$  có hai điểm  $A, B$  cùng thuộc đường tròn  $(O)$  và hai điểm  $C, D$  cùng thuộc đường tròn  $(O')$  sao cho  $AB = a\sqrt{3}, BC = 2a$  đồng thời mặt phẳng  $(ABCD)$  tạo với mặt đáy của hình trụ một góc  $60^\circ$ . Thể tích khối trụ  $(T)$  bằng

- A.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ .                      B.  $\pi a^3 \sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$ .                      D.  $2\pi a^3 \sqrt{3}$ .

**Câu 50:** Cho hình chóp  $S.ABC$ , có đáy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{5}$ . Hình chiếu của điểm  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Biết góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là

- A.  $\frac{a^3 \sqrt{30}}{12}$ .                      B.  $\frac{5a^3 \sqrt{10}}{12}$ .                      C.  $\frac{5a^3 \sqrt{6}}{12}$ .                      D.  $\frac{a^3 \sqrt{210}}{24}$ .

                    HẾT

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.D  | 2.C  | 3.D  | 4.A  | 5.D  | 6.B  | 7.C  | 8.C  | 9.B  | 10.B |
| 11.D | 12.B | 13.C | 14.C | 15.A | 16.B | 17.C | 18.C | 19.B | 20.A |
| 21.A | 22.D | 23.A | 24.C | 25.B | 26.B | 27.A | 28.B | 29.D | 30.B |
| 31.D | 32.C | 33.A | 34.A | 35.D | 36.B | 37.D | 38.A | 39.A | 40.D |
| 41.D | 42.C | 43.A | 44.C | 45.D | 46.A | 47.A | 48.C | 49.B | 50.A |

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 12**

<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1:** [Mức độ 2] Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$  thỏa mãn  $F(2) = 0$ .

Tính số nghiệm phương trình  $F(x) = x$ .

A. 2.

B. 0.

C. 3.

**D. 1.**

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Loan

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(8-x^2)}{\sqrt{8-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (8-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(8-x^2) = -(8-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\sqrt{8-x^2} + C \Rightarrow F(2) = 0 = c - 2 \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Phương trình: } 2 - \sqrt{8-x^2} = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 8 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy phương trình  $F(x) = x$  có một nghiệm

**Câu 2:** [Mức độ 1] tập xác định của hàm số  $y = \log_2(x^2 - 7x + 10)$  là

A.  $(-\infty; 2) \cup [5; +\infty)$ .

B.  $[2; 5]$ .

**C.  $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ .**

D.  $(2; 5)$ .

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Loan

$$\text{Đk: } x^2 - 7x + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy TXĐ của hàm số } D = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty).$$

**Câu 3:** [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-2021; 2021)$  để hàm

$$\text{số } y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 2 \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; \infty)?$$

A. 2022.

B. 2019.

C. 2021.

**D. 2020.**

Lời giải

FB tác giả: Minh Nguyễn Quang

$$\text{Hàm số } y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 2 \text{ có đạo hàm } y' = \frac{x}{x^2 + 4} - m.$$

$$\text{Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng } (-\infty; \infty) \text{ thì } y' = \frac{x}{x^2 + 4} - m \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } m \geq \frac{x}{x^2 + 4}, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{(-\infty; +\infty)} \frac{x}{x^2 + 4}.$$

$$\text{Mà } x^2 + 4 \geq 4|x|, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 4} \leq \frac{|x|}{x^2 + 4} \leq \frac{1}{4}, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow \max_{(-\infty; +\infty)} \frac{x}{x^2 + 4} = \frac{1}{4}.$$

Suy ra  $m \geq \frac{1}{4}$ . Thử lại ta có  $m = \frac{1}{4}$  thỏa mãn.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-2021; 2021)$  thỏa mãn.

**Câu 4:** [Mức độ 2] Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

FB tác giả: Minh Nguyễn Quang

$$\text{Ta có } f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1).$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases} \text{ nên ta có bảng xét dấu như sau}$$

|         |           |             |      |     |            |           |     |
|---------|-----------|-------------|------|-----|------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$         | $+$  | $0$ | $-$        | $0$       | $+$ |

Vậy hàm số  $y = f(x)$  có 3 điểm cực trị.

**Câu 5:** [Mức độ 2] Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân với  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Mặt phẳng  $(AB'C')$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

A.  $V = \frac{a^3}{8}$ .

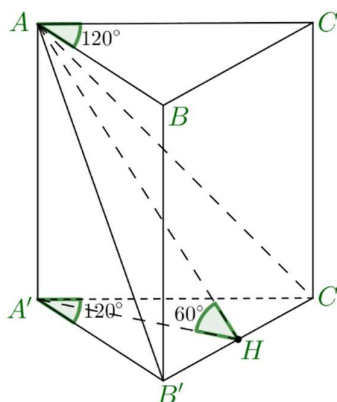
B.  $V = \frac{3a^3}{4}$ .

C.  $V = \frac{9a^3}{8}$ .

**D.  $V = \frac{3a^3}{8}$ .**

Lời giải

FB tác giả: Hanh Nguyen



Gọi  $H$  là trung điểm  $B'C'$ , ta có  $B'C' \perp A'H$ .

Vì  $AA' \perp (A'B'C')$  nên  $AA' \perp B'C'$ .

Từ đó  $B'C' \perp (AA'H)$  nên  $B'C' \perp AH$ . Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(A'B'C')$  và  $(ABC)$  bằng  $\widehat{AHA'}$ , nên  $\widehat{AHA'} = 60^\circ$ .

Vì tam giác  $A'B'C'$  cân tại  $A'$ ,  $\widehat{B'A'C'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{HA'C'} = 60^\circ \Rightarrow AH = A'C' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ .

Ta có  $AA' = A'H \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy  $V = S_{A'B'C'} \cdot AA' = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$ .

**Câu 6:** [Mức độ 2] Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết  $f(0) = \frac{3}{2}$  và  $f'(x) = x.e^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^1 xf'(x) dx.$$

A.  $I = \frac{e-3}{4}$ .

**B.  $I = \frac{e+1}{4}$ .**

C.  $I = \frac{e-1}{2}$ .

D.  $I = \frac{e+2}{4}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Hanh Nguyen**

Ta có  $\int f'(x) dx = \int x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ .

Mà  $f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + 1$ .

Do đó

$$I = \int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 x \left( \frac{1}{2} e^{x^2} + 1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 xe^{x^2} dx + \int_0^1 x dx = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) + \int_0^1 x dx = \left. \frac{e^{x^2}}{4} \right|_0^1 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{e+1}{4}.$$

**Câu 7:** [Mức độ 2] Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 2a$ . Tam giác  $SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

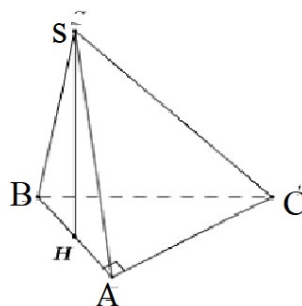
B.  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**C.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ .**

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Nguyễn Văn Phú**



Ta có  $AC = AB = a$ ,  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ , khi đó do  $\Delta SAB$  đều nên  $SH \perp AB$ , mà  $(SAB) \perp (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ .

Ta có  $\Delta SAB$  đều cạnh  $2a \Rightarrow SH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a^2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 8:** [Mức độ 2] Cho mặt cầu  $(S_1)$  có bán kính là  $a$ , mặt cầu  $(S_2)$  có bán kính là  $2a$ . Tỷ số diện tích của mặt cầu  $(S_1)$  và mặt cầu  $(S_2)$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B. 4.

**C.  $\frac{1}{4}$ .**

D. 2.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Văn Phú

- Diện tích mặt cầu  $(S_1)$  là  $S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi a^2$ .

- Diện tích mặt cầu  $(S_2)$  là  $S_2 = 4\pi R_2^2 = 4\pi (2a)^2 = 16\pi a^2$ .

- Tỷ số diện tích của mặt cầu  $(S_1)$  và mặt cầu  $(S_2)$  là:  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi a^2}{16\pi a^2} = \frac{1}{4}$ .

**Câu 9:** [Mức độ 1] Cho hình đa diện đều loại  $\{4;3\}$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $S = 4a^2$ .

**B.  $S = 6a^2$ .**

C.  $S = 2\sqrt{3}a^2$ .

D.  $S = \sqrt{3}a^2$ .

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Trinh

$\{4;3\}$  là hình lập phương cạnh  $a$

Vậy tổng diện tích 6 mặt của hình là  $S = 6a^2$ .

**Câu 10:** [Mức độ 1] Tập giá trị của hàm số  $y = 2\sin 2x + 3$  là

A.  $[-2; 2]$ .

**B.  $[1; 5]$**

C.  $[-2; 5]$ .

D.  $[1; 2]$ .

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Trinh

Ta có  $\sin 2x \in [-1; 1]$

$\Rightarrow 2\sin 2x + 3 \in [1; 5]$ .

**Câu 11:** [Mức độ 1] Số cách xếp 5 người ngồi vào một hàng ghế dài là

A. 130.

B. 100.

C. 125.

**D. 120.**

Lời giải

FB tác giả: Đinh Len

Số cách xếp 5 người ngồi vào một hàng ghế dài là  $5! = 120$  (cách).

**Câu 12:** [Mức độ 2] Cho cấp số cộng  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 3$  và  $u_6 = 18$ . Số hạng  $u_{10}$  bằng

A. 27.

**B. 30.**

C. -24.

D. 21.

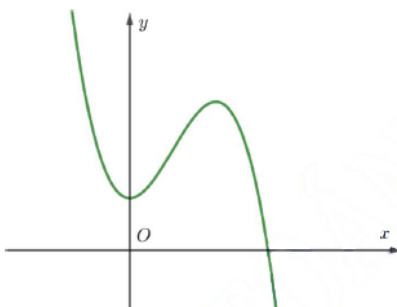
**Lời giải**

**FB tác giả: Đinh Len**

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_6 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 5d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } u_{10} = u_1 + 9d = 3 + 9 \cdot 3 = 30.$$

**Câu 13:** [Mức độ 2] Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

B.  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

**C.  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .**

D.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Nguyễn Công Thiện**

Ta thấy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$  nên  $a < 0$ .

Đồ thị cắt  $Oy$  tại điểm nằm phía trên  $Ox$  nên  $d > 0$ .

Ta có:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ,  $y' = 0$  có 1 nghiệm bằng 0 nên  $c = 0$ .

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2b}{3a} \end{cases} \text{ Ta thấy điểm cực đại nằm bên phải } Oy \text{ nên}$$

$$-\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0.$$

Vậy  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .

**Câu 14:** [Mức độ 1] Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều,  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $B$  và vuông góc với đường thẳng  $SC$ . Thiết diện do  $mp(P)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  là:

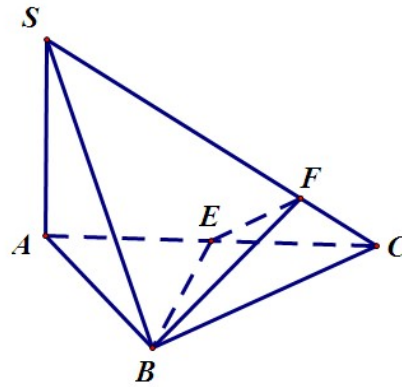
A. Tam giác đều.

B. Tam giác cân.

**C. Tam giác vuông**

D. Hình thang vuông.

**Lời giải**



**FB tác giả: Nguyễn Công Thiện**

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AC$ , ta có:  $\begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp SC$ .

Kẻ  $BF \perp SC$  ( $F \in SC$ ), khi đó  $(BEF)$  chính là mặt phẳng qua  $B$  và vuông góc với  $SC$ .

Vì  $BE \perp (SAC)$  nên  $BE \perp EF$  hay thiết diện là tam giác vuông  $BEF$ .

**Câu 15:** [Mức độ 1] Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

**A.** Ba mặt.

**B.** Hai mặt.

**C.** Năm mặt.

**D.** Bốn mặt.

**Lời giải**

**FB tác giả: Lê Cường**

Theo tính chất của hình đa diện, mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

**Câu 16:** [Mức độ 1] Bán kính đáy của khối trụ tròn xoay có thể tích bằng  $V$  và chiều cao bằng  $h$  là

**A.**  $r = \sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}$ .

**B.**  $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ .

**C.**  $r = \sqrt{\frac{2V}{\pi h}}$ .

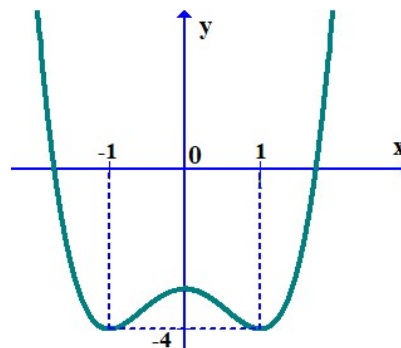
**D.**  $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Lê Cường**

$$\text{Vì } V = \pi r^2 h \Rightarrow r^2 = \frac{V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}.$$

**Câu 17:** [Mức độ 2] Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



**A.**  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ .

**B.**  $y = x^4 - 2x^2 - 4$ .

**C.**  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ .

**D.**  $y = x^4 + 2x^2 - 3$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Thu Nghĩa**

- + Đồ thị hàm số giao  $Oy$  tại điểm có tọa độ  $(0; -3)$  nên loại đáp án A và **B.**
- + Hàm số có 3 cực trị nên  $ab < 0$  suy ra loại **D.**
- + Vậy chọn **C.**

**Câu 18:** [Mức độ 2] Giả sử khai triển  $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , biết rằng  $a_0 + a_1 + a_2 = 71$ .

Tính hệ số  $a_5$ .

- A.** 672. **B.** -627. **C.** -672. **D.** 627.

Lời giải

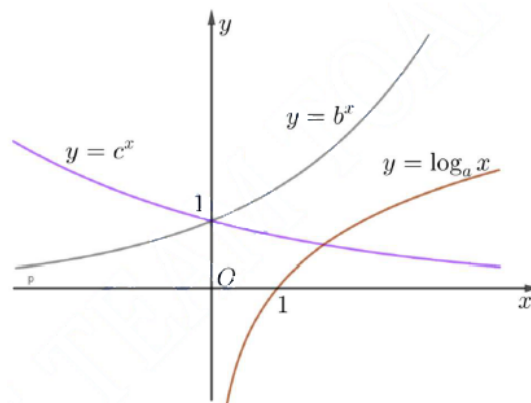
FB tác giả: Thu Nghĩa

Số hạng tổng quát  $T_{k+1} = C_n^k (1)^{n-k} (-2x)^k = C_n^k (-2)^k x^k$ .

$$a_0 + a_1 + a_2 = 71 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1(-2)^1 + C_n^2(-2)^2 = 71 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 35 = 0 \Rightarrow n = 7.$$

$$\text{Vậy } a_5 = C_7^5 (-2)^5 = -672.$$

**Câu 19:** [Mức độ 2] Cho ba số thực dương  $a, b, c$  khác 1. Đồ thị các hàm số  $y = \log_a x, y = b^x, y = c^x$  được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.**  $b < c < a$ . **B.**  $c < b < a$ . **C.**  $a < b < c$ . **D.**  $a < c < b$ .

Lời giải

FB tác giả: Mai Vĩnh Phú

Dựa vào đồ thị  $y = c^x$  nghịch biến  $\Rightarrow 0 < c < 1$ ,  $y = b^x$  đồng biến  $\Rightarrow 1 < b \Rightarrow c < b$

Và hàm số  $y = \log_a x$  đồng biến  $\Rightarrow 1 < a$ . Kẻ đường thẳng  $y = 1$  lên đồ thị ta thấy  $b < a$ .

Vậy  $c < b < a$ .

**Câu 20:** [Mức độ 2] Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 4]$ ,  $f(1) = 12$  và

$$\int_1^4 f'(x) dx = 17. \text{ Khi đó } f(4) \text{ bằng}$$

- A.** 29. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 19.

Lời giải

FB tác giả: Mai Vĩnh Phú

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x) dx = 17 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 17 + f(1) = 17 + 12 = 29.$$

**Câu 21:** [ **Mức độ 2** ] Cho đa thức  $P(x)$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{x-3} = 2$ .

Tính giới hạn  $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{(x^2-9)(\sqrt{P(x)+2}+1)}$ .

**A.**  $L = \frac{1}{9}$ .

**B.**  $L = \frac{1}{6}$ .

**C.**  $L = \frac{1}{12}$ .

**D.**  $L = \frac{2}{9}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Trần Thủy**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{x-3} = 2 \Rightarrow P(x)-2 = (x-3)Q(x)$  trong đó  $Q(x)$  là đa thức.

$\Rightarrow P(x) = (x-3)Q(x) + 2 \Rightarrow P(3) = 2$

Khi đó  $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{(x^2-9)(\sqrt{P(x)+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{(x-3)(x+3)(\sqrt{P(x)+2}+1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x)-2}{(x-3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{P(x)+2}+1)} = 2 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$

Vậy  $L = \frac{1}{9}$ .

**Câu 22:** [ **Mức độ 2** ] Với mọi số thực  $m, n, p$  thỏa mãn  $p \log 2 = m \log 8 + n \log 4$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $2^p = 8^m + 4^n$

**B.**  $p = \log(8^m + 4^n)$ .

**C.**  $p = 3n + 2m$ .

**D.**  $p = 3m + 2n$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Trần Thủy**

Ta có  $p \log 2 = m \log 8 + n \log 4 \Leftrightarrow \log 2^p = \log 8^m + \log 4^n$

$\Leftrightarrow \log 2^p = \log(8^m \cdot 4^n)$

$\Leftrightarrow 2^p = 2^{3m+2n} \Leftrightarrow p = 3m + 2n$

**Câu 23:** [ **Mức độ 1** ] Một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

**A.**  $x^3 - \cos x + 2021$

**B.**  $3x^3 - \cos x + 2021$ .

**C.**  $x^3 + \sin x + 2021$ .

**D.**  $x^3 + \cos x + 2021$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Trần Thủy**

Ta có  $\int f(x) dx = \int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C$

Vậy hàm số cần tìm là  $x^3 - \cos x + 2021$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$

**Câu 24:** [ **Mức độ 2** ] Cho hàm số  $f(x) = \ln \frac{2021x}{x+1}$  Tính tổng  $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022)$

**A.**  $S = \ln 2021$

**B.**  $S = \frac{2021}{2022}$ .

**C.**  $S = \frac{2022}{2023}$ .

**D.**  $S = 2022$ .

## Lời giải

FB tác giả: Trần Thủy

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\left(\frac{2021x}{x+1}\right)'}{\frac{2021x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Khi đó } S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

$$\text{Vậy đường thẳng là } S = \frac{2022}{2023}.$$

**Câu 25:** [Mức độ 2] Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | - | 0 | - | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 3 | 1 | 2 | 0 | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình  $2.f(x-2021)=3$  là

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

## Lời giải

Fb tác giả: Thái Huy

$$\text{Ta có: } 2.f(x-2021)=3 \Leftrightarrow f(x-2021)=\frac{3}{2}.$$

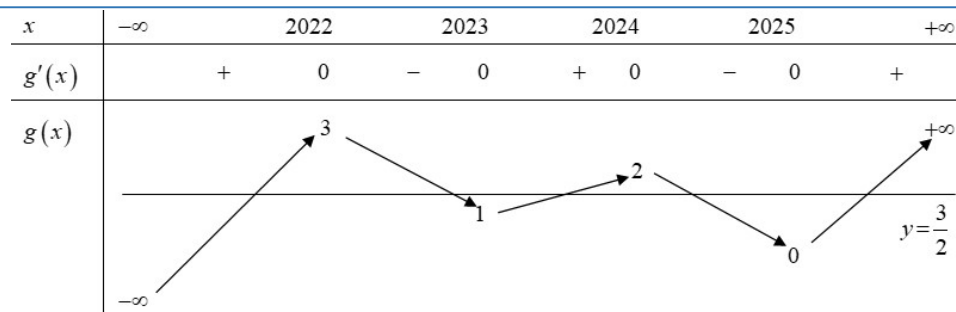
Số nghiệm của phương trình  $f(x-2021)=\frac{3}{2}$  chính là số giao điểm của đồ thị hàm số

$$g(x)=f(x-2021) \text{ và đường thẳng } y=\frac{3}{2}.$$

Xét hàm số  $g(x)=f(x-2021)$  có  $g'(x)=f'(x-2021)$ .

$$\text{Cho } g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-2021)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2021=1 \\ x-2021=2 \\ x-2021=3 \\ x-2021=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2022 \\ x=2023 \\ x=2024 \\ x=2025 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng  $y = \frac{3}{2}$  cắt hàm số  $g(x) = f(x-2021)$  tại 5 điểm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.

**Câu 26:** [Mức độ 3] Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 1$ ,  $AD = 2$  và  $AA' = 3$ . Gọi  $M, N, P, L$  lần lượt là tâm của các hình chữ nhật  $ABB'A'$ ,  $A'B'C'D'$ ,  $ADD'A'$ ,  $CDD'C'$  và gọi  $Q$  là trung điểm của đoạn  $BL$ . Thể tích của khối tứ diện  $MNPQ$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

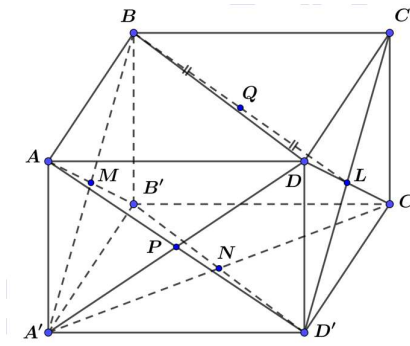
B.  $\frac{1}{4}$ .

C.  $\frac{1}{3}$ .

D.  $\frac{3}{8}$ .

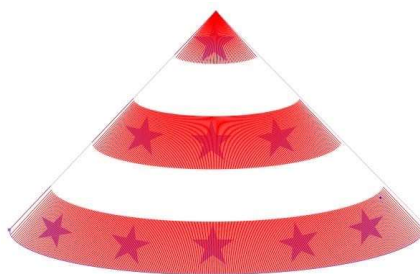
Lời giải

FB tác giả: Quang Trần



$$\text{Ta có: } BL \parallel D'M \Rightarrow BL \parallel (MNP) \Rightarrow V_{QMNP} = V_{BMNP} = \frac{1}{4}V_{B.AD'B'} = \frac{1}{4}V_{A'.AD'B'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{6} = \frac{1}{4}.$$

**Câu 27:** [Mức độ 3] Để chuẩn bị cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam tham dự giải AFF Suzuki Cup 2020, một hội cổ động viên dự định sơn và trang trí cho 1000 chiếc nón lá như sau: Độ dài đường sinh của chiếc nón lá là  $40\text{cm}$ , theo độ dài đường sinh kể từ đỉnh nón cứ  $8\text{cm}$  thì sơn màu đỏ, màu vàng xen kẽ nhau, sau đó dán 20 ngôi sao màu vàng cho mỗi chiếc nón (như hình minh họa bên). Biết rằng đường kính của đường tròn đáy nón là  $40\text{cm}$ , mỗi ngôi sao màu vàng và công dán giá 400 đồng, tiền sơn và công sơn màu vàng giá  $30.000 \text{ đồng/m}^2$  và tiền sơn và công sơn màu đỏ giá  $40.000 \text{ đồng/m}^2$ . Hỏi giá thành để sơn và trang trí cho 1000 chiếc nón lá như trên là bao nhiêu?



**A.** 17.047.787 đồng. **B.** 16.545.123 đồng. **C.** 16.545.132 đồng. **D.** 17.047.778 đồng.

**Lời giải**

**FB tác giả: Nguyễn Bá Long**

\*) Ta tính giá thành để sơn 1 chiếc nón.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón là  $S_{xq} = \pi \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,08\pi \text{ m}^2$

Phần màu vàng là 2 hình nón cụt, có tổng diện tích xung quanh của hai hình nón cụt màu vàng là

$$S_{xqv} = \left( \frac{0,32 \cdot 0,2}{0,4} + \frac{0,24 \cdot 0,16}{0,32} \right) \cdot \pi \cdot 0,08 + \left( \frac{0,16 \cdot 0,12}{0,24} + 0,04 \right) \cdot \pi \cdot 0,08 = 0,032\pi \text{ m}^2$$

Diện tích để sơn phần màu đỏ là  $S_{xqd} = 0,08\pi - 0,032\pi = 0,048\pi \text{ m}^2$

Giá thành để sơn và trang trí cho một nón là

$$400 \times 20 + 30.000 \times 0,032\pi + 40.000 \times 0,048\pi = 17047,787 \text{ đồng.}$$

Vậy để hoàn thiện 1000 chiếc nón cần 17.047.787 đồng.

**Câu 28:** [ **Mức độ 3** ] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong khoảng  $(-2021; 2021)$  để phương trình  $6 \cdot 2^{2x-1} - (7m-48) \cdot 2^x + 2m^2 - 16m = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 \cdot x_2 > 15$ ?

**A.** 1997. **B.** 1996. **C.** 2021. **D.** 2020.

**Lời giải**

**FB tác giả: Bá Thắng**

Đặt  $t = 2^x, t > 0$ .

Khi đó phương trình đã cho trở thành  $3t^2 - (7m-48)t + 2m^2 - 16m = 0(*)$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(m-8) \\ t = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  phương trình  $(*)$  có hai nghiệm dương và thỏa mãn

$$\log_2(2m-16) \cdot \log_2 \frac{m}{3} > 15.$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 25 \\ m \leq \frac{48}{5} \\ m > \frac{48}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 25 \\ 8 < m \leq \frac{48}{5} \end{cases} \cdot (1)$$

Ta có hàm  $y = f(m) = \log_2(2m-16) \cdot \log_2 \frac{m}{3}$  luôn đồng biến và có  $f(m) > 15 = f(24)$  suy ra

$$m > 24(2).$$

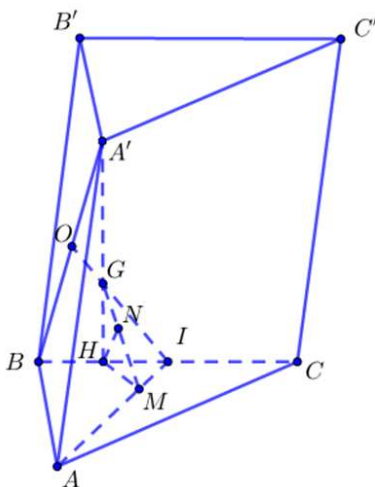
Từ (1) và (2) và giả thiết  $m \in (-2021; 2021), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{25; 26; \dots; 2020\}$ .

Có 1996 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

- Câu 29:** [Mức độ 4] Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $\widehat{BAC} = 60^\circ, AC = 120, AB = 40$  và khoảng cách giữa hai đáy là 45. Biết hình chiếu của  $A'$  lên mặt đáy  $(ABC)$  là điểm  $H$  thuộc cạnh  $BC$ . Hai mặt phẳng  $(ABB'A'), (ACC'A')$  cùng tạo với mặt đáy góc bằng nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C$  gần nhất với số nào sau đây?
- A. 10.                      B. 7.                      C. 32.                      D. 21.

**Lời giải**

**FB tác giả: Toàn Hoàng**



Gọi  $O, I$  lần lượt là trung điểm của  $A'B, BC \Rightarrow A'C \parallel (AOI)$ .

Do hai mặt phẳng  $(ABB'A'), (ACC'A')$  cùng tạo với mặt đáy góc bằng nhau nên  $H$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ .

Ta có  $\frac{HC}{HB} = \frac{AC}{AB} = 3 \Rightarrow H$  là trung điểm của  $BI$ .

Gọi  $G = A'H \cap OI \Rightarrow GH = \frac{A'H}{3} = 15$ .

Khi đó  $d(A'C, AB') = d(C, (AIG)) = 2d(H, (AIG))$ .

Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  lên  $AI, MG \Rightarrow HN \perp (AIG)$ .

Theo định lý Cosin trong tam giác  $ABC$  có  $BC = 40\sqrt{7}$ .

Theo công thức độ dài đường trung tuyến có  $AI = 20\sqrt{3}$ .

Ta có  $HM = \frac{1}{2}d(B, AI) = \frac{S_{ABI}}{AI} = \frac{S_{ABC}}{2AI} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ .

Trong tam giác vuông  $GHM$  có  $\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HN = 6\sqrt{3}$

$$\text{Vậy } d(A'C, AB') = 2HN = 12\sqrt{3} \approx 21.$$

**Câu 30:** [Mức độ 3] Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & ; x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x^2 + 3} + 2 & ; x < 0 \end{cases}$ . Biết rằng hàm số  $f(x)$  liên tục trên

$\mathbb{R}$  và tích phân  $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = ae + b\sqrt{3} + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Giá trị  $a + b - 9c$  bằng

A. 69.

**B. 33.**

C. 13.

D. 25.

**Lời giải**

**FB tác giả: Huỳnh Nguyễn Luân Lưu**

Ta có

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e f(\ln x) d(\ln x) = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (2x\sqrt{x^2 + 3} + 2) dx = \int_{-1}^0 2(x^2 + 3) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx + \int_{-1}^0 2 dx = \int_{-1}^0 2(\sqrt{x^2 + 3})^2 \cdot d(\sqrt{x^2 + 3}) + \int_{-1}^0 2 dx \\ &= 2 \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^3}{3} \Big|_{-1}^0 + (2x) \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3} + 2 = \sqrt{3} - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + 1) dx = (e^x + x) \Big|_0^1 = (e + 1) - 1 = e.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + 2\sqrt{3} - \frac{10}{3} \Rightarrow a = 1; b = 2; c = -\frac{10}{3} \Rightarrow a + b - 9c = 33.$$

**Câu 31:** [Mức độ 3] Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 + 3x + 1$  ( $C$ ) và điểm  $M(1; -2)$ . Biết có hai giá trị  $m$  là  $m_1$  và  $m_2$  để đường thẳng  $\Delta: y = x + 1$  cắt đồ thị ( $C$ ) tại ba điểm phân biệt  $A(0; 1)$ ,  $B$  và  $C$  sao cho tam giác  $MBC$  có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$ . Hỏi tổng  $m_1^2 + m_2^2$  thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. (3; 5).

B. (15; 17).

C. (16; 18).

**D. (31; 33).**

**Lời giải**

**FB tác giả: Lê Văn Quý**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số ( $C$ ) và đường thẳng  $\Delta$ :

$$x^3 - mx^2 + 3x + 1 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - mx^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - mx + 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đường thẳng  $\Delta: y = x + 1$  cắt đồ thị  $(C)$  tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$  phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{cases} (*).$$

Do vậy điều kiện (\*) thì đường thẳng  $\Delta: y = x + 1$  cắt đồ thị  $(C)$  tại ba điểm phân biệt  $A(0;1)$ ,  $B$  và  $C$ .

Giả sử  $B(x_1; x_1 + 1)$ ,  $C(x_2; x_2 + 1)$ , với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có:  $x_1 + x_2 = m$ ;  $x_1 x_2 = 2$ .

$$\text{Ta có } S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} d(M; BC) \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{|1+2+1|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{m^2 - 8}$$

$$\Leftrightarrow 8 = m^2 - 8 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Do đó có hai giá trị  $m$  là  $m_1 = 4$  và  $m_2 = -4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Vậy } m_1^2 + m_2^2 = 32 \in (31; 33).$$

**Câu 32:** [Mức độ 4] Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = \sqrt{6}$ ,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $A'C = 3$  và mặt phẳng  $(ACC'A')$  vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng  $(ACC'A')$  và  $(ABB'A')$  tạo với nhau góc  $\alpha$  với  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Thể tích  $V$  của khối tứ diện  $BDA'C'$  là

**A.**  $V = 16$ .

**B.**  $V = 8$ .

**C.**  $V = \frac{8}{3}$ .

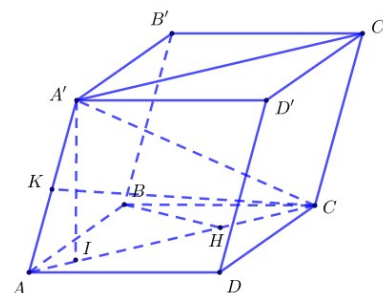
**D.**  $V = \frac{16}{3}$ .

**Lời giải**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  lên  $AC$ .

Khi đó  $\frac{HA}{HC} = \frac{AB^2}{BC^2} = 2$  nên  $H$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Khi

đó  $BH \perp (ACC'A')$ ,  $BH = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = 90^\circ - (\angle BH, (ABB'A'))$



**FB tác giả: Toàn Hoàng**

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \frac{d(H, (ABB'))}{BH} \Rightarrow d(C, (ABB')) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos \alpha.$$

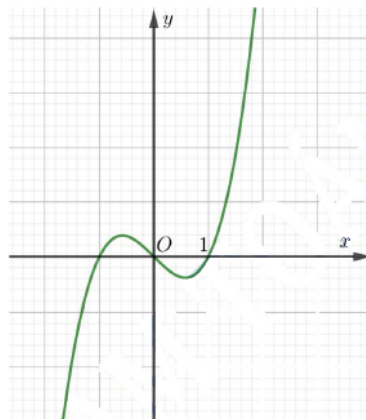
Gọi  $K$  là trung điểm của  $AA' \Rightarrow CK \perp AA'$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(C, (ABB'))}{CK} \Rightarrow CK = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AA' = 2 \Rightarrow A'I = \frac{CK \cdot AA'}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ với } I \text{ là hình chiếu của } A' \text{ lên } AC.$$

$$\text{Ta có } V_{A'C'D} = \frac{1}{3}V = \frac{8}{3}.$$

**Câu 33:** [ **Mức độ 3** ] Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d$  là các số thực). Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên và  $f(1) = 0$ . Số điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = f(1-2x)f(2-x)$  là



A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải**

**FB tác giả: Toàn Hoàng**

$$f'(x) = ax(x+1)(x-1) = a(x^3 - x) \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) + c.$$

$$\text{Theo bài } f(1) = 0 \Leftrightarrow a = 4c (x \neq 0) \Rightarrow f(x) = c(x^2 - 1)^2.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2f'(1-2x)f(2-x) - f(1-2x)f'(2-x) \\ &= -2c\left[(2-x)^2 - 1\right]^2 \cdot 4c(1-2x)(-2x)(2-2x) - c\left[(2-x)^2 - 1\right]^2 \cdot 4c(2-x)(1-x)(3-x) \\ &= 4.4c^2 \cdot 2x \cdot (x-3)(x-1)^3 [4x^2 - 11x + 3] \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = x_1 \\ x = 1 = x_3 \\ x = 3 = x_5 \\ x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8} = x_4 \\ x = \frac{11 - \sqrt{73}}{8} = x_2 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu ta có

| $x$     | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|---|
| $g'(x)$ |           | -     | 0     | +     | 0     | -     | 0         | + |

**Câu 34:** [Mức độ 4] Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $4(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left( \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = (xy - 4)^2$ .

Khi  $x + 4y$  đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của  $x - 2y$  bằng

**A.** 0.

**B.** 9.

**C.** -9.

**D.** 6.

**Lời giải**

**Tác giả FB: Việt Thịnh**

Ta có

$$\begin{aligned} 4(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left( \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) &= (xy - 4)^2 \\ \Leftrightarrow 4(x + y)^2 - 8xy + 16 + \log_2 \frac{2(x + y)}{xy} &= (xy - 4)^2 \\ \Leftrightarrow [2(x + y)]^2 + \log_2 2(x + y) &= (xy)^2 + \log_2 (xy). \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = t^2 + t, t > 0 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Do đó  $f[2(x + y)] = f(xy) \Leftrightarrow 2(x + y) = xy$  (\*).

$$\text{Nhận xét } xy = 2(x + y) \geq 4\sqrt{xy} \Rightarrow xy - 4\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} \geq 4 (tm) \\ \sqrt{xy} \leq 0 (l) \end{cases}.$$

Đặt  $P = x + 4y \Leftrightarrow x = P - 4y$  thay vào (\*) ta có

$$2(P - 4y + y) = y(P - 4y) \Leftrightarrow 4y^2 - (6 + P)y + 2P = 0. \quad (**)$$

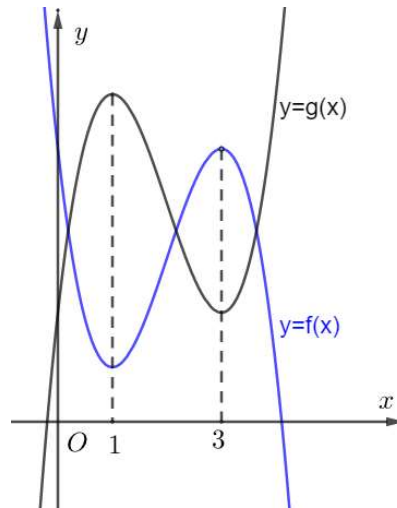
Xét bài toán phương trình (\*\*) phải có nghiệm.

$$\text{Ta có } \Delta = (6 + P)^2 - 32P \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 20P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P \geq 18 \\ P \leq 2 \end{cases}.$$

Mặt khác lại có  $P = x + 4y \geq 4\sqrt{xy} \Rightarrow P \geq 16$ .

Vậy  $x + 4y$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 18 khi  $\begin{cases} 2(x + y) = xy \\ x + 4y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$ .

**Câu 35:** [Mức độ 4] Cho hai hàm số bậc ba  $y = f(x), y = g(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng  $x = 1, x = 3$  đều là các điểm cực trị của hai hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  đồng thời  $3f(1) = g(3) + 1, 2f(3) = g(1) + 4$  và  $f(-2x+7) = g(2x-3) - 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $S(x) = f^2(x) \cdot g(x) - g^2(x) - 27f(x) - 4g(x) + 2$  trên đoạn  $[1; 3]$ . Tính  $M + m$ .

A. -225.

B. -184.

C. -154.

**D. -170.**

**Lời giải**

**FB tác giả: Toàn Hoàng**

Từ  $f(-2x+7) = g(2x-3) - 1$ :

$$+ \text{Thay } x = 2 \text{ vào ta được } f(3) = g(1) - 1 \text{ kết hợp với } 2f(3) = g(1) + 4 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 5 \\ g(1) = 6 \end{cases}.$$

$$+ \text{Thay } x = 3 \text{ vào ta được } f(1) = g(3) - 1, \text{ kết hợp với } 3f(1) = g(3) + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ g(3) = 2 \end{cases}.$$

Ta có  $f'(x) = 3a(x-1)(x-3) \Rightarrow f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x) + b$  qua  $(1; 1), (3; 5) \Rightarrow a = -1, b = 5$

$$\Rightarrow f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5.$$

Tương tự có  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ .

Đặt  $t = f(x) \in [1; 5], \forall x \in [1; 3] \Rightarrow g(x) = 7 - t$ .

Xét  $S(x) = h(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t - 75, t \in [1; 5]$ .

$$\text{Ta có } h'(t) = -3t^2 + 12t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \max_{[1; 3]} S(x) = \max_{[1; 5]} h(t) = -75 \\ \min_{[1; 3]} S(x) = \min_{[1; 5]} h(t) = -95 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -75 \\ m = -95 \end{cases} \Rightarrow M + m = -170.$$

Vậy  $M + m = -170$ .

- Câu 36:** [Mức độ 3] Cho hàm số  $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị ở về hai phía của trục  $Ox$ ?
- A. 8.      **B. 5.**      C. 7.      D. 6.

**Lời giải**

**FB tác giả: Loan Minh**

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$  ở về hai phía của trục  $Ox$  khi và chỉ khi đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt hay phương trình  $x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0$  (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\begin{aligned} \text{Có (1)} &\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 11x + 2 + m^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x - 1 + m^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x - 1 + m^2 = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt khác 2  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - m^2 > 0 \\ 9 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}$ .

Do  $m$  nguyên nên  $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ . Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 37:** [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  nhỏ hơn 10 để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ?
- A. 3.      B. 4.      C. 6.      **D. 5.**

**Lời giải**

**FB tác giả: Quang Trần**

Xét  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$  có  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |           |     |          |     |     |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|----------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$     |     | $0$ |           | $2$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$      | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |          |     | $m$ |           |     |     | $+\infty$ |
|         |           |     | $-5 + m$ |     |     | $-32 + m$ |     |     |           |

Ta thấy hàm số  $y = |f(x)|$  nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$  khi  $-5 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$

Do  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m < 10$  nên ta có  $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$ .

**Câu 38:** [Mức độ 3] Cho ba mặt cầu  $(S_1), (S_2), (S_3)$  có bán kính lần lượt là  $R_1, R_2, R_3$  đôi một tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng  $(P)$ . Các tiếp điểm của ba mặt cầu với mặt phẳng  $(P)$  lập thành một tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Tính tổng  $R_1 + R_2 + R_3$ ?

**A.**  $\frac{61}{12}$ .

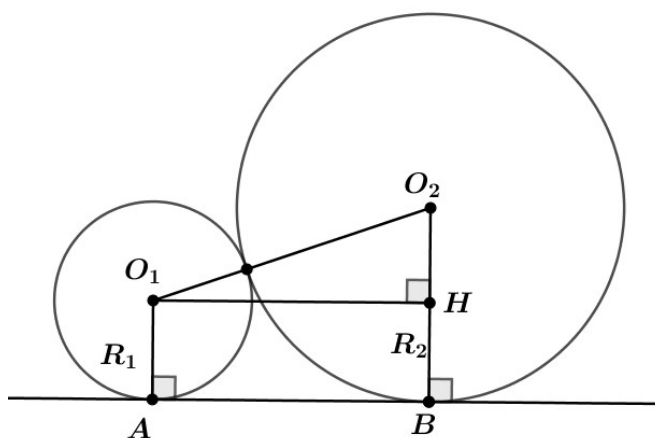
**B.**  $\frac{59}{12}$ .

**C.**  $\frac{67}{12}$ .

**D.**  $\frac{53}{12}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Quang Trần.**



Gọi  $A, B, C$  lần lượt là tiếp điểm của các mặt cầu  $(S_1), (S_2), (S_3)$  với mặt phẳng  $(P)$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $AB = 2, BC = 3, AC = 4$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O_1$  trên  $O_2B$ . Khi đó ta có

$$(R_1 + R_2)^2 = O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2 = AB^2 + (R_2 - R_1)^2$$

Suy ra  $4R_1R_2 = AB^2$  hay  $R_1R_2 = 1$ .

Tương tự ta cũng chứng minh được  $R_2R_3 = \frac{9}{4}$ ,  $R_1R_3 = 4$ .

Ta có

$$\begin{cases} R_1R_2 = 1 \\ R_2R_3 = \frac{9}{4} \\ R_1R_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1R_2 = 1 \\ R_2R_3 = \frac{9}{4} \\ R_1R_3 = 4 \\ R_1R_2R_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{4}{3} \\ R_2 = \frac{3}{4} \\ R_3 = 3 \end{cases}$$

Suy ra  $R_1 + R_2 + R_3 = \frac{61}{12}$ .

**Câu 39:** [Mức độ 3] Cho hai hàm số bậc ba  $y = f(x)$  và  $y = g(x) = -f(mx + n)$ , (trong đó  $m, n \in \mathbb{Q}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng điểm cực tiểu của hàm số  $y = g(x)$  lớn hơn điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là 5 đơn vị và  $g(0) = -1$ . Khi đó giá trị biểu thức  $P = 3m + 2n$  là

**A.**  $\frac{16}{5}$ .

**B.**  $\frac{19}{2}$ .

**C.**  $-\frac{11}{2}$ .

**D.**  $\frac{4}{5}$ .

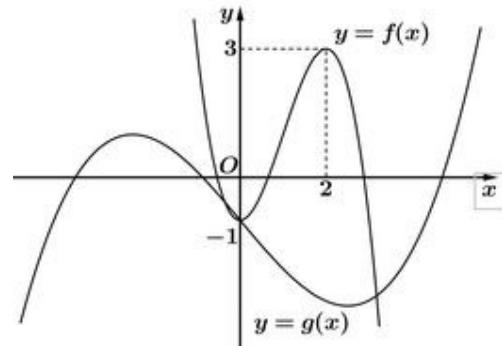
**Lời giải**

**FB tác giả: Cao Bá Duyệt**

Do  $y = f(x)$  là hàm số bậc ba nên

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Theo đồ thị ta có: 
$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(2) = 3 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}.$$



Do đó  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ .

Ta có  $g(x) = -f(mx+n) \Rightarrow g(x) = (mx+n)^3 - 3(mx+n)^2 + 1$

Do  $g(0) = -1 \Rightarrow n^3 - 3n^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \text{ (TM)} \\ n = 1 + \sqrt{3} \text{ (L)} \\ n = 1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) = (mx+1)^3 - 3(mx+1)^2 + 1 = m^3x^3 - 3mx + 2$ .

Dựa vào đồ thị hàm số  $g(x)$  thì  $m > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{Q}^+$ .

$$g'(x) = 3m^3x^3 - 3m = 0 \Leftrightarrow m^2x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ x = -\frac{1}{m} \end{cases}.$$

Do  $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{CD} = -\frac{1}{m} \\ x_{CT} = \frac{1}{m} \end{cases}.$

Theo bài ra ta có:  $x_{CT} - x_{CD} = 5 \Rightarrow \frac{2}{m} = 5 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$ .

Vậy  $P = 3m + 2n = \frac{6}{5} + 2 = \frac{16}{5}$ .

**Câu 40:** [Mức độ 3] Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  ( $C$ ) và điểm  $M \in (C)$ . Tiếp tuyến của ( $C$ ) tại  $M$  cắt đường tiệm cận ngang của đồ thị tại điểm  $A$ . Hỏi có bao nhiêu điểm  $M$  thuộc đồ thị ( $C$ ) có tọa độ là các số nguyên để điểm  $A$  cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn  $2\sqrt{10}$ ?

**A.** 4

**B.** 6

**C.** 5

**D.** 3

**Lời giải****Tác giả: Nguyễn Văn Khoa; Fb: Khoa Nguyen**

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Giả sử } M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C), x_0 \neq 1, x_0 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M: y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}(\Delta).$$

$$\text{Đường tiệm cận ngang của đồ thị } (C): y = 2.$$

$$\text{Xét phương trình: } 2 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow 2(x_0-1)^2 = -3(x-x_0) + (2x_0+1)(x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow x = 2x_0 - 1.$$

$$\text{Tiếp tuyến } \Delta \text{ cắt tiệm cận ngang tại điểm } A(2x_0-1; 2).$$

$$\text{Ta có } OA < 2\sqrt{102} \Leftrightarrow OA^2 < 40 \Leftrightarrow (2x_0-1)^2 + 4 < 40 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x_0 < \frac{7}{2}.$$

$$\text{Do } x_0 \in \mathbb{Z}, x_0 \neq 1 \Rightarrow x_0 = -2; -1; 0; 2; 3.$$

$$\text{Do tọa độ điểm } M \text{ là các số nguyên nên } M(-2; 1), M(0; -1), M(2; 5).$$

**Câu 41:** [ **Mức độ 4** ] Cho  $K$  là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số, chọn ngẫu nhiên một số từ  $K$ .

Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là bội của 4.

**A.**  $\frac{2243}{9000}.$

**B.**  $\frac{2226}{9000}.$

**C.**  $\frac{2250}{9000}.$

**D.**  $\frac{2249}{9000}.$

**Lời giải****Fb tác giả: Lê Minh Huệ**

Không gian mẫu có 9000 phần tử.

Gọi số có 4 chữ số mà tổng các chữ số chia hết cho 4 là  $\overline{abcd}$ .

Xét nhóm các chữ số khi chia cho 4 có 4 nhóm khác nhau về số dư

$$\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}.$$

**TH1:**  $a \neq 9$ Lập số  $\overline{bcd}$  có  $10^3$  cách.Tiếp theo chọn  $a$  sao cho  $(a+b+c+d):4$  có 2 cách. $\Rightarrow$  Có 2000 số.

**TH2:**  $a = 9$  và  $\begin{cases} b \neq 9 \\ b \neq 8 \end{cases}$

Lập số  $\overline{cd}$  có  $10^2$  cách.

Chọn  $b$  để  $b + c + d$  chia cho 4 dư 3 có 2 cách.

$\Rightarrow$  Có 200 số.

**TH3:**  $a = 9, b = 9$

Nếu  $\begin{cases} c \neq 8 \\ c \neq 9 \end{cases}$  thì chọn  $d$  có 10 cách, chọn  $c$  có 2 cách.

Nếu  $c = 8$  thì  $d$  chia 4 dư 2 nên có 2 cách chọn.

Nếu  $c = 9$  thì  $d$  chia 4 dư 1 nên có 3 cách chọn.

$\Rightarrow$  Có  $2 \cdot 10 + 2 + 3 = 25$  số.

**TH4:**  $a = 9, b = 8$

Nếu  $\begin{cases} c \neq 8 \\ c \neq 9 \end{cases}$  thì chọn  $d$  có 10 cách, chọn  $c$  có 2 cách.

Nếu  $c = 8$  thì  $d$  chia 4 dư 3 nên có 2 cách chọn.

Nếu  $c = 9$  thì  $d$  chia 4 dư 2 nên có 2 cách chọn.

$\Rightarrow$  Có  $2 \cdot 10 + 2 + 2 = 24$  số.

Vậy có  $2000 + 200 + 25 + 24 = 2249$  số.

Xác suất cần tìm là  $\frac{2249}{9000}$ .

**Câu 42:** [Mức độ 3] Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(SBC)$  bằng

A.  $\frac{1}{4}$ .

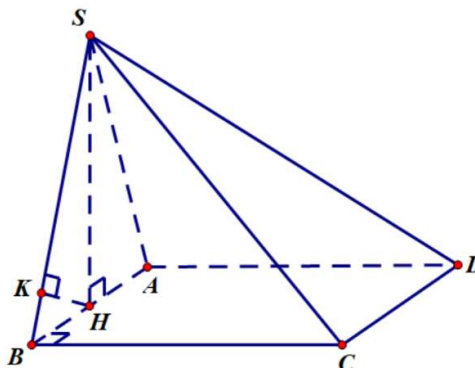
B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

C.  $\frac{\sqrt{13}}{4}$ .

D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Lời giải

FB tác giả: Ngo Yen



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

Do mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy  
 $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ .

$$\text{Gọi } \alpha = \left( \overline{SD}, (SBC) \right) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(D, (SBC))}{SD}.$$

$$\text{Do } AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2HK.$$

Với  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  lên  $SB$ .

$$\text{Ta có } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{a}{2} \text{ mà } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(D, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SHD \text{ vuông tại } H \Rightarrow SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{SH^2 + AH^2 + AD^2} = 2a.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{d(D, (SBC))}{SD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

**Câu 43:** [Mức độ 3] Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$  ( $m$  là tham số). Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận là

**A.**  $m \in (-5; 4] \setminus \{4\}$ . **B.**  $m \in [-5; 4] \setminus \{-4\}$ . **C.**  $m \in [-5; 4]$ . **D.**  $m \in (-5; 4) \setminus \{-4\}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Cao Bá Duyệt**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{-\sqrt{2}-1}$  nên đường thẳng  $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$  và  $y = \frac{1}{-\sqrt{2}-1}$  là các đường tiệm cận ngang của ĐTHS.

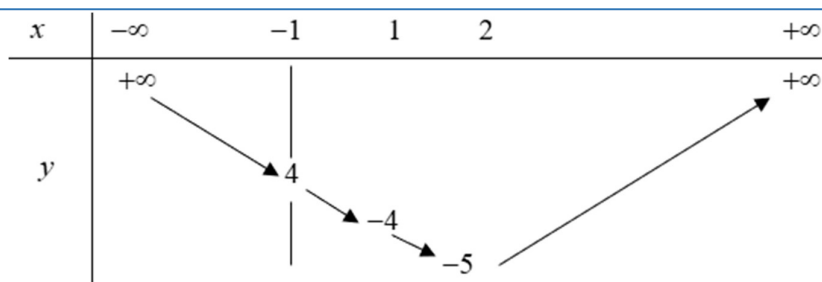
Nhận xét: Phương trình  $\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0$  có nhiều nhất 2 nghiệm.

Do đó để ĐTHS có 4 tiệm cận thì phương trình  $\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0$  (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Ta có } \sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x-m}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2-2x-m=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-4x-1=m \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm  $y = x^2 - 4x - 1$



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 khi  $m \in (-5; 4] \setminus \{4\}$

**Câu 44:** [ Mức độ 4] Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[0; 2021]$  để phương trình

$$\ln^3(x+m) + m^3 + 3e^x \ln(x+m)^m = e^{3x} \text{ có nghiệm lớn hơn 6?}$$

A. 2021.

B. 1010.

C. 1624.

D. 2020.

**Lời giải**

**FB tác giả: Cao Bá Duyệt**

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \ln^3(x+m) + m^3 - e^{3x} + 3m.e^x \ln(x+m) = 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} \ln(x+m) = a \\ m = b \\ -e^x = c \end{cases}.$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b+c) \left[ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+m) + m - e^x = 0 \quad (1) \\ \ln(x+m) = m = e^x \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Xét (2): } \ln(x+m) = m = e^x \Rightarrow \ln(x - e^x) = -e^x.$$

Xét  $f(x) = x - e^x$ . Có  $f'(x) = 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Ta có Bảng biến thiên:

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-1$ | $-\infty$ |

Do  $x - e^x \leq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Phương trình  $\ln(x - e^x) = -e^x$  vô nghiệm.

$$\text{Xét (1): } \ln(x+m) + m - e^x = 0.$$

$$\text{Đặt } \ln(x+m) = t \Rightarrow \begin{cases} t+m=e^x \\ e^t=x+m \end{cases} \Rightarrow t-x=e^x-e^t \Leftrightarrow e^x+x=e^t+t.$$

Hàm  $g(u) = e^u + u$ . Có  $g'(u) = e^u + 1 > 0 \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow g(u)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

Mà  $g(x) = g(t) \Rightarrow x = t \Leftrightarrow x = \ln(x+m) \Leftrightarrow m = e^x - x$ .

Xét  $h(x) = e^x - x$ . Xét  $h'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Ta có Bảng biến thiên:

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 6 | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | - | 0 | +         |
| $h(x)$  | $+\infty$ |   | 1 | $+\infty$ |

Để PT đã cho có nghiệm  $x > 6$  thì phương trình  $h(x) = m$  có nghiệm  $x > 6$ .

Từ Bảng biến thiên  $\Rightarrow m > e^6 - 6$ .

Mà  $m \in [0; 2021]$ ;  $m$  nguyên  $\Rightarrow m \in \{398; 399; \dots; 2021\}$ .  $\Rightarrow$  Có 1624 giá trị của  $m$ .

**Câu 45:** [ **Mức độ 3** ] Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện

$5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng tích phân  $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b}$  (với  $a, b$  là

các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính  $T = 3a - b$ .

**A.**  $T = -48$ .

**B.**  $T = 16$ .

**C.**  $T = 0$ .

**D.**  $T = 1$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Thành Đức Trung**

Ta có  $I = \int_0^1 x d(f(x)) = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$

Từ điều kiện  $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$

Cho  $x = 0$ , ta có  $5f(0) - 7f(1) = 0$

Cho  $x = 1$ , ta có  $-7f(0) + 5f(1) = -3$

Từ đó suy ra  $f(1) = \frac{5}{8}$

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$

Cũng từ điều kiện  $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$ , ta suy ra

$\int_0^1 [5f(x) - 7f(1-x)] dx = \int_0^1 (3x^2 - 6x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1$ .

Ta có  $I = \frac{5}{8} - 1 = \frac{-3}{8}$  nên  $a = 3, b = 8$ .

Vậy  $T = 3a - b = 1$

**Câu 46:** [Mức độ 3] Cho phương trình  $\sin^{2020} x + \cos^{2020} x = 2(\sin^{2022} x + \cos^{2022} x)$ . Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; 2021)$  bằng

**A.**  $\left(\frac{1287}{2}\right)^2 \pi$ .

**B.**  $(643)^2 \pi$ .

**C.**  $\left(\frac{1287}{4}\right)^2 \pi$ .

**D.**  $(644)^2 \pi$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Trương Thị Tuyền**

Ta có:

$$\sin^{2020} x + \cos^{2020} x = 2(\sin^{2022} x + \cos^{2022} x) \Leftrightarrow \sin^{2020} x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2020} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2020} x \cdot \cos 2x - \cos^{2020} x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan^{2020} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình là:  $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ .

Để tổng các nghiệm trong khoảng  $(0; 2021) \Leftrightarrow k = \{0, 1, \dots, 1286\}$ .

Khi đó tổng các nghiệm bằng  $\frac{\pi}{4} \cdot 1287 + \frac{\pi}{2}(1 + 2 + \dots + 1286) = \left(\frac{1287}{2}\right)^2 \pi$ .

**Câu 47:** [Mức độ 3] Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 – 2021 (6 năm) là 9,9% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỷ lệ giảm và tuyển dụng mỗi năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%).

**A.** 1,72%.

**B.** 2,06%.

**C.** 1,13%.

**D.** 1,85%.

**Lời giải**

**FB tác giả: Trương Thị Tuyền**

Gọi  $x$  là số cán bộ công chức, viên chức tỉnh A năm 2015 ( $x \in \mathbb{N}^*$ )

$r$  là tỷ lệ giảm hàng năm.

Ta có số người mất việc năm thứ nhất  $xr$

Số người mất việc còn lại sau năm thứ nhất  $x - xr = x(1 - r)$

Tương tự số người mất việc sau năm thứ sáu là  $x(1 - r)^5 r$

Suy ra tổng số người mất việc là:  $xr + x(1 - r)r + \dots + x(1 - r)^5 r = 9,9\%x$

$$\Leftrightarrow r + (1-r)r + \dots + (1-r)^5 r = 0,099$$

$$\Leftrightarrow \frac{r[1-(1-r)^6]}{1-(1-r)} = 0,099 \Leftrightarrow (1-r)^6 = 0,901 \Leftrightarrow r \approx 0,0172 = 1,72\%$$

Tỷ lệ tuyển dụng mới hàng năm chính là tỷ lệ giảm hàng năm.

Vậy tỷ lệ tuyển dụng hàng năm là 1,72%.

**Câu 48:** [Mức độ 4] Có bao nhiêu bộ  $(x; y)$  với  $x, y$  là các số nguyên và  $1 \leq x, y \leq 2021$  đồng thời

$$\text{thỏa mãn điều kiện } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left( \frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left( \frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 2018.2021.

B. 2.

C. 4036.

D. 2018.

**Lời giải**

**FB Tác giả Toàn Hoàng, Kiều Thanh Bình**

**Cách 1: Thầy Hoàng Thanh Toàn**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2021 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2021 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (x+4)(y+2) \cdot \log_3 \frac{2y}{y+2} \leq (x-3)(2-y) \cdot \log_2 \frac{2x+1}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \left( \log_3 \frac{2y}{y+2} - \log_3 1 \right) + (y-2) \cdot (x-3) \cdot \left( \log_2 \frac{2x+1}{x-3} - \log_2 1 \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \cdot \frac{2y-y-2}{y+2} \cdot m + (y-2)(x-3) \cdot \frac{2x+1-x+3}{x-3} \cdot n \leq 0, (m, n > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y-2)(m+n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{4, 5, \dots, 2021\} \Rightarrow \text{có 4036 bộ số } (x; y).$$

**Cách 2: Thầy Kiều Thanh Bình**

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2021 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2021 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{BPT cho có dạng } (x-3)(y-2) \log_2 \left( \frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left( \frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0 (*).$$

$$+ \text{Xét } y=1 \text{ thì } (*) \text{ thành } -(x-3) \log_2 \left( \frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0, \text{ rõ ràng BPT này}$$

nghiệm đúng với mọi  $x > 3$  vì

$$-(x-3) < 0, \log_2 \left( \frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3 \frac{2}{3} < 0.$$

Trường hợp này cho ta đúng 2018 bộ  $(x; y) = (x; 1)$  với  $4 \leq x \leq 2021, x \in \mathbb{N}$ .

+ Xét  $y = 2$  thì (\*) thành  $4(x+4)\log_3 1 \leq 0$ , BPT này cũng luôn đúng với mọi  $x$  mà  $4 \leq x \leq 2021, x \in \mathbb{N}$ .

Trường hợp này cho ta 2018 cặp  $(x; y)$ .

+ Với  $y > 2, x > 3$  thì  $VT(*) > 0$  nên (\*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4036 bộ số  $(x; y)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 49:** [Mức độ 3] Cho khối trụ  $(T)$  có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ . Xét hình chữ nhật  $ABCD$  có hai điểm  $A, B$  cùng thuộc đường tròn  $(O)$  và hai điểm  $C, D$  cùng thuộc đường tròn  $(O')$  sao cho  $AB = a\sqrt{3}, BC = 2a$  đồng thời mặt phẳng  $(ABCD)$  tạo với mặt đáy của hình trụ một góc  $60^\circ$ . Thể tích khối trụ  $(T)$  bằng

A.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ .

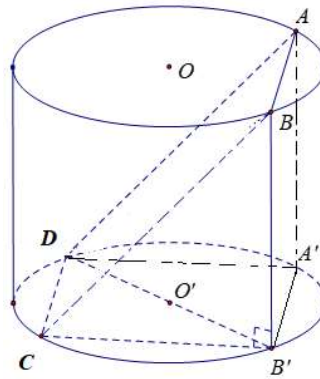
B.  $\pi a^3 \sqrt{3}$ .

C.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$ .

D.  $2\pi a^3 \sqrt{3}$ .

Lời giải

FB tác giả: Việt Thịnh, word Quốc Thép



Gọi  $A', B'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A, B$  lên đường tròn  $(O')$ . Dễ thấy  $ABB'A'$  là hình chữ nhật. Do vậy  $AB \parallel A'B', AB = A'B'$  (1)

Ta có  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $AB \parallel CD, AB = CD$  (2).

Từ hai điều trên suy ra  $DCB'A'$  là hình bình hành, nhưng vì tứ giác này nội tiếp đường tròn  $(O')$  nên nó là hình chữ nhật.

Ta có  $B'C$  là hình chiếu vuông góc của  $BC$  trên  $(A'B'CD)$  nên ta có:

$$\begin{cases} CD \perp B'C \\ CD \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABCD), (A'B'CD)) = (BC; B'C) = \widehat{BCB'} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow BB' = 2a \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3} = h; B'C = 2a \cos 60^\circ = a$$

$$\Rightarrow DB' = \sqrt{DC^2 + CB'^2} = 2a \Rightarrow r = a$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi a^3 \sqrt{3}$$

**Câu 50:** [Mức độ 4] Cho hình chóp  $S.ABC$ , có đáy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AC = a\sqrt{5}$ . Hình chiếu của điểm  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Biết góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là

**A.**  $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$ ;

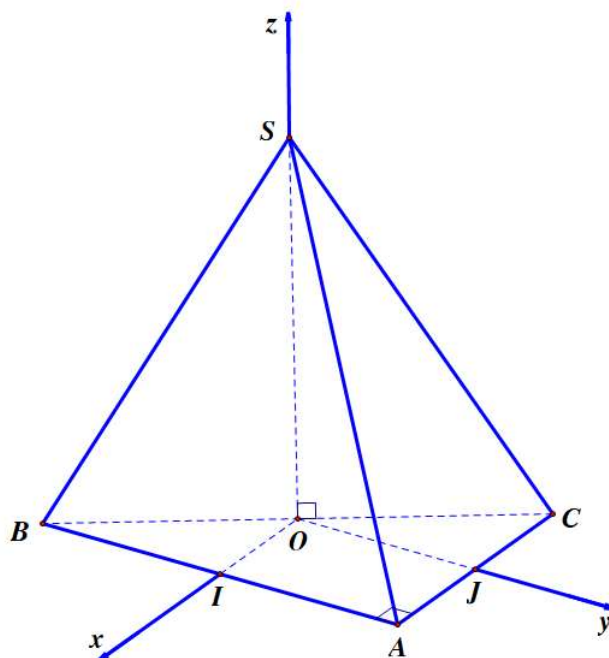
**B.**  $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$ .

**C.**  $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$ .

**D.**  $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$ .

**Lời giải**

**FB tác giả: Minh Phạm**



Ta có  $SA \perp (ABCD)$  suy ra  $SA \perp CD$ , cùng với  $CD \perp AD$  ta được  $CD \perp (SAD)$  vì vậy góc tạo bởi  $SC$  với mặt phẳng  $(SAD)$  là  $\widehat{CSD}$  hay ta có  $\widehat{CSD} = 30^\circ$ .

Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $O$  là trung điểm của  $BC$  lúc đó ta có  $OI, OJ, OS$  đôi một vuông góc với nhau, do đó ta chọn hệ trục tọa độ  $(Oxyz)$  với  $Ox, Oy, Oz$  là các tia trùng

với  $OI, OJ, OS$ . Đặt  $SO = ha$ , tọa độ các điểm  $A\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ,

$C\left(-\frac{a\sqrt{5}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$  và  $S(0; 0; ha)$ .

Tọa độ các vector  $\overrightarrow{AB} = (0; -a\sqrt{2}; 0) = a\vec{u}$  với  $\vec{u} = (0; -\sqrt{2}; 0)$ ,

$\overrightarrow{AC} = (a\sqrt{5}; 0; 0) = a\vec{v}$  với  $\vec{v} = (\sqrt{5}; 0; 0)$ ,

$\overrightarrow{AS} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}a; -\frac{\sqrt{2}}{2}a; ha\right) = a\vec{k}$  với  $\vec{k} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; h\right)$ .

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(SAB)$  là  $\vec{n}_1 = [\vec{u}, \vec{k}] = \left(-\sqrt{2}h; 0; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$  và pháp tuyến của mặt phẳng  $(SAC)$  là  $\vec{n}_2 = [\vec{v}, \vec{k}] = \left(0; -\sqrt{5}h; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ .

Theo giả thiết góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $60^\circ$  nên ta có

$$\frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đây ta có thể tích khối chóp  $S.ABC$  là  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5} = \frac{a^3\sqrt{30}}{12}$ .

**HẾT**