

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\Sigma \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 9)

TRUNG ĐOÀN TRẦN KHÁT CHÂN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG HAI HAY NHIỀU ẨN PHỤ
QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN THỨ 2)

- ĐẶT ẨN PHỤ QUY VỀ HỆ ĐỐI XỨNG – GÀN ĐỐI XỨNG (TIẾP THEO).
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA XUÂN 2015

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“Những chàng trai sống chết trận này ơi
Máu đổ xuống ông trời tuôn nước mắt,
Ôn nhớ mãi thân người đi giữ đất,
Người trở về ăn, sống, ở ra sao...”*

[Bình độ 400 – Nguyễn Mạnh Hùng; 1981].

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẮN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 9)****TRUNG ĐOÀN TRẦN KHÁT CHÂN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH**

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và chạy dọc chiều dài chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ắnn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán công kênh. Tiếp theo lý thuyết sử dụng ắnn phụ căn thức (các phần 1 đến 8), phần 9 mang tính kế thừa và phát huy với phương châm chủ đạo là dùng hai ắnn phụ đưa phương trình cho trước về hệ phương trình, bao gồm hệ cơ bản, hệ đối xứng và gần đối xứng (tiếp theo), xoay quanh các bài toán với căn bậc ba. Đây vẫn là một trong những phương án hữu tỷ hóa phương trình chứa căn, giảm thiểu đại bộ phận sự công kênh và sai sót trong tính toán. Kỹ năng này đồng hành cùng việc giải hệ phương trình hữu tỷ đồng bậc – đẳng cấp, hệ phương trình chứa căn quy về đẳng cấp, ngày một nâng cao kỹ năng giải phương trình – hệ phương trình cho các bạn học sinh.

Lý do tài liệu có sử dụng kiến thức về hệ phương trình nên đòi hỏi một nền tảng nhất định của các bạn đọc, thiết nghĩ nó phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ắnn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số, giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, giải hệ phương trình đối xứng loại 1, loại 2; hệ phương trình đồng bậc; hệ phương trình đa ắnn.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x+6} = y \Rightarrow y^3 = x+6$. Phương trình đã cho trở thành $x^3 - 6 = y$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 = x+6 \\ x^3 = y+6 \end{cases} \Rightarrow y^3 - x^3 = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

$$\bullet \quad x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x = x + 6 + \sqrt[3]{x+6} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{x+6}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+6} \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x = x + 6 + \sqrt[3]{x+6}$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x+6} = t \text{ thu được phương trình } x^3 + x = t^3 + t \Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + xt + t^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = t \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

$$\bullet \quad x^2 + xt + t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 = -1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

- Phương trình ban đầu có chứa căn thức bậc ba, lời giải 1 sử dụng ắnn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 bậc ba. Dạng tổng quát của bài toán $(mx+n)^3 + b = a\sqrt[3]{a(mx+n)-b}$ trong đó các biểu thức vẫn thuộc dạng đơn giản, cụ thể là $a=1; b=-6; mx+n \equiv x$.
- Lời giải 2 và 3 có cùng ý tưởng, tuy nhiên cách trình bày và kiến thức sử dụng khác nhau. Với phép đặt ắnn phụ $\sqrt[3]{x+6} = t$ lời giải 3 sử dụng biến đổi hằng đẳng thức thuần túy để phân tích đa thức thành nhân tử, hệ quả cho ta hai trường hợp rất đẹp, trong đó có một trường hợp vô nghiệm. Lời giải 2 rất độc đáo, ngắn gọn và đầy bất ngờ, có sử dụng kiến thức đạo hàm và tính đơn điệu hàm số thuộc phạm vi chương trình giải tích lớp 11 – 12 THPT, hoặc có thể chỉ sử dụng kiến thức hàm số lớp 9 THCS. Về vấn đề này, tác giả xin trình bày tại Lý thuyết sử dụng đánh giá – bất đẳng thức – hàm số.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x-1} = y \Rightarrow 2x-1 = y^3 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 2y - 2x \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét hai trường hợp

- $x = y \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
- $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ liên tục, đồng biến.

Khi đó (1) trở thành $f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1}$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó (1) trở thành $f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1})$.

Nếu $x > \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) > f(\sqrt[3]{2x-1})$ và nếu $x < \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) < f(\sqrt[3]{2x-1})$.

Nếu $x = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1})$.

$$\text{Suy ra } x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Nhận xét.

Lời giải 3 sử dụng kiến thức hàm số bậc trung học cơ sở, kèm theo đánh giá cơ bản. Lưu ý lớp 9 THCS các em học sinh chưa được học đạo hàm nên thao tác chứng minh tính đơn điệu hàm số bắt buộc phải làm theo định nghĩa, đảm bảo nội dung bám sát chương trình sách giáo khoa, nâng cao năng lực. Đôi khi chúng ta vô tình làm mất đi những tư duy đột phá, thân thương bằng cách lạm dụng những công cụ mạnh, những thứ mang tính “mới lạ” chưa xứng với tầm với thực tế. Tuổi nhỏ làm việc nhỏ, tùy theo sức của mình!

Bài toán 3. Giải phương trình $x = \sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{2 + 3x}$ (*)

Đặt $\sqrt[3]{2 + 3x} = y \Rightarrow 2 + 3x = y^3$. Phương trình (*) trở thành $x^3 = 2 + 3y$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 + 3x = y^3 \\ 2 + 3y = x^3 \end{cases} \Rightarrow 3x - 3y = y^3 - x^3 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}.$$

$$\bullet \quad x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 2\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{2 + 3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x = 2 + 3x + 3\sqrt[3]{2 + 3x}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{2 + 3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2 + 3x} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}.$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 2\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình $x^3 + x + 5 = 7\sqrt[3]{6x - 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + (x + 5) = 7\sqrt[3]{7x - (x + 5)}$.

Đặt $x + 5 = t$ thu được phương trình $x^3 + t = 7\sqrt[3]{7x - t}$ (*)

Đặt $\sqrt[3]{7x - t} = y \Rightarrow 7x - t = y^3$. Phương trình (*) trở thành $x^3 + t = 7y$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + t = 7y \\ y^3 + t = 7x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 7y - 7x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y \Rightarrow x^3 + x + 5 = 7x \Leftrightarrow x^3 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right\}.$$

$$\bullet \quad x^2 + xy + y^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -7 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x = 6x - 5 + 7\sqrt[3]{6x - 5}$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 7 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{6x-5}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6x-5} \Leftrightarrow x^3 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Bài toán 5. Giải phương trình $8x^3 - 5x + 1 = 2\sqrt[3]{9x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 4x = 9x - 1 + 2\sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2.2x = (\sqrt[3]{9x-1})^3 + 2\sqrt[3]{9x-1} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0 \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt[3]{9x-1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow 8x^3 - 9x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 + 8x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x)^3 - (5x-1) = 2\sqrt[3]{2.2x+5x-1}$.

Đặt $2x = t; \sqrt[3]{9x-1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 = 5x - 1 + 2y \\ y^3 = 2t + 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = 2y - 2t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + yt + t^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow 8x^3 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 + 8x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}.$

- $t^2 + yt + t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}$.

Bài toán 6. Giải phương trình $x^3 + 7x = 5 + 3\sqrt[3]{5-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x - 5 = 3\sqrt[3]{3x - (7x - 5)}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{5 - 4x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 7x - 5 = 3v \\ v^3 + 7x - 5 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5 - 4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 7. Giải phương trình $2x^3 + 11x = 8 + 5\sqrt[3]{4 - 3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 44x &= 32 + 20\sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow 8x^3 + 44x - 32 = 10\sqrt[3]{32 - 24x} \\ &\Leftrightarrow (2x)^3 + 44x - 32 = 10\sqrt[3]{10 \cdot 2x - 44x + 32} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{32 - 24x} = v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 44x - 32 = 10v \\ v^3 + 44x - 32 = 10u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 10v - 10u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 10) = 0.$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{32 - 24x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -10$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 5x = 2(4 - 3x) + 5\sqrt[3]{4 - 3x}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục, đồng biến.

Khi đó thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt[3]{4 - 3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 7, các bạn dễ dàng nhận thấy sử dụng phương pháp đánh giá – hàm số, cách nhìn nhận và các bước thao tác trở nên dễ dàng. Kỹ thuật này rất cơ bản, các vấn đề liên quan tác giả xin trình bày sau. Nếu sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình, quy trình thực hiện có vẻ khó khăn hơn một chút.

Các bạn chú ý dạng thức $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}$.

Đây chỉ là dạng cơ bản khi các biểu thức ở dạng bậc nhất, bậc không quá cao. Rõ ràng biểu thức phía ngoài căn thường có dạng lũy thừa bậc ba “đẹp đẽ” sẽ thuận lợi cho chúng ta, nhưng trong bài toán 7 lại là $2x^3$. Có nhiều cách để biến đổi phá bỏ sự xấu xí này, bằng cách nhân hoặc chia hằng số đưa về $x^3, 8x^3, 64x^3, 81x^3, \dots$. Tất nhiên chúng ta chọn $8x^3$ đảm bảo cho gần “thánh giáo”, và thực tế là thành công đã mỉm cười. Tùy theo hướng tư duy, để giải quyết một bài toán có thể có rất nhiều phương án, có phương án hay, độc đáo, có phương án rủi ro và thất bại cao. Trong cái rủi vẫn có cái may, đôi khi chúng ta nhận ra những sai lầm nghiêm trọng và bứt phá ý tưởng trong quá trình giải, phản biện bài toán. Thiết nghĩ, chúng ta làm toán, dù chỉ là những lĩnh vực toán sơ cấp nhẹ nhàng, nhằm bước đầu tăng cường động não, tư duy, hoàn toàn không giống một cái máy, lúc nào cũng chính xác và gọn gàng được. Sự đời vẫn thay đổi không ngừng, tình lộn xộn vô tổ chức khởi phát từ đó, mục tiêu chẳng phải sắp xếp lại nó, vì vô cùng khó, mà trước tiên là giữ lấy cái nguyên bản, cái căn cơ, và nhiệm vụ đấu tranh cho sự trường tồn giá trị ban đầu.

Bài toán 8. Giải phương trình $4x^3 - 9x + 8 = 3\sqrt[3]{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $4x^3 + 3x = 4(3x-2) + 3\sqrt[3]{3x-2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + 3t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm liên tục, đồng biến.

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt[3]{3x-2}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho biến đổi về

$$\begin{aligned} 8x^3 - 18x + 16 &= 6\sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow (2x)^3 - 18x + 16 = 3\sqrt[3]{24x-16} \\ &\Leftrightarrow (2x)^3 - 18x + 16 = 3\sqrt[3]{3 \cdot 2x + 18x - 16} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{24x-16} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 18x + 16 = 3v \\ v^3 - 18x + 16 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{24x-16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Loại)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Bài toán 9. Giải phương trình $6x^3 - 17x + 12 = \sqrt[3]{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 (6x)^3 - 612x + 432 &= 36\sqrt[3]{3x-2} \\
 \Leftrightarrow (6x)^3 - 612x + 432 &= 6\sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} \\
 \Leftrightarrow (6x)^3 - 612x + 432 &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 6x + 612x - 432}
 \end{aligned}$$

Đặt $6x = u; \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 612x + 432 = 6v \\ v^3 - 612x + 432 = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned}
 \diamond u = v &\Leftrightarrow 6x = \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1.
 \end{aligned}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $6x^3 + x = 6(3x - 2) + \sqrt[3]{3x - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 6t^3 + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 18t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số liên tục, đồng biến.

Phương trình (1) khi đó trở thành

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(\sqrt[3]{3x - 2}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1
 \end{aligned}$$

Vậy bài toán ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Hai bài toán 8 và 9 lại lặp lại tương tự, để dễ dàng đưa được về hệ phương trình, các bạn phải nhân thêm hệ số, ví dụ bài toán 9 nhân hai vế với hằng số 36, cốt yếu tạo ra $(6x)^3$. Cụ thể thu được $(6x)^3 - 612x + 432 = 36\sqrt[3]{3x - 2}$.

Sau bước đó, tác giả xin trình bày quá trình tách ghép như sau

- Để đưa được về hệ phương trình đối xứng loại 2, phía trong căn cần xuất hiện biểu thức $612x - 432$, chú ý số tự do -432 , suy ra thừa số đưa vào căn phải là 6 vì $6^3 \cdot (-2) = -432$. Tất yếu ngoài căn còn lại thừa số 6.
- Lúc này chúng ta đã có $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432}$. Tiếp tục tách ghép làm xuất hiện biểu thức $612x - 432$, suy ra rằng $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{6 \cdot 6x + 612x - 432}$, và hiển nhiên đã thành công với thừa số 6 bên ngoài khi $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{6 \cdot 6x + 612x - 432}$.
- Đặt $6x = u; \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} = v$ ta có ngay hệ phương trình với các bước giải thông thường

$$\begin{cases} u^3 - 612x + 432 = 6v \\ v^3 - 612x + 432 = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Ngoài ra để phức tạp thêm một chút, các bạn có thể tham khảo thêm các bài toán sau

Bài toán 10. Giải phương trình $2x^3 = 2x + 10 + \sqrt[3]{\frac{3x + 10}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x+5) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}x + x + 5}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{3x+10}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x - 5 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - x - 5 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x^3 = 3x + 10 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2(x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- $2(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow (u+v)^2 + u^2 + v^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 11. Giải phương trình $3x^3 = 12x + 42 + \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^3 - 12x - 42 = \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} \Leftrightarrow x^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}x + 4x + 14}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $3(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} \Leftrightarrow 3x^3 - 13x - 42 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(3x^2 + 9x + 14) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 12. Giải phương trình $3x^3 - 21x - 12 = 2\sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 7x + 4}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3(u^2 + uv + v^2) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}} \Leftrightarrow 3x^3 - 23x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(3x^2 + 9x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 3; \frac{-9+\sqrt{33}}{6}; \frac{-9-\sqrt{33}}{6} \right\}.$$

$$\diamond 3(u^2 + uv + v^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 13. Giải phương trình $2x^3 + 2x = 14 + 3\sqrt[3]{\frac{x+14}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x - 7 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+14}{2}}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{x+14}{2}}$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + x - 7 = \frac{3}{2}v \\ v^3 + x - 7 = \frac{3}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{3}{2}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2(u^2 + uv + v^2) + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{x+14}{2}} \Leftrightarrow 2x^3 - x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\diamond 2(u^2 + uv + v^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{3}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Bài toán 14. Giải phương trình $2x^3 + 2 = 4x + 5\sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}v \\ v^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Xét các khả năng sau

- $u^2 + uv + v^2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}} \Leftrightarrow 2x^3 - 9x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm, $S = \left\{2; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Bài toán 15. Giải phương trình $3x^3 + 14x - 15 = 2\sqrt[3]{5-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Đặt $\sqrt[3]{5-4x} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^3 + 14x - 15 = 2y \\ 5 - 4x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 + 14x - 15 = 2y \\ 15 - 12x = 3y^3 \end{cases} \Rightarrow 3x^3 + 2x = 3y^3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 - y^3) + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 2) = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{9}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 + 126x - 135 = 18\sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow (3x)^3 - (135 - 126x) = 6\sqrt[3]{6.3x + (135 - 126x)}.$$

Đặt $3x = u; \sqrt[3]{5-4x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (135 - 126x) = 6v \\ v^3 = 6u + (135 - 126x) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Bài toán 16. Giải phương trình $2x^3 + 9x - 24 = 5\sqrt[3]{12-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 5x = 2(12 - 2x) + 5\sqrt[3]{12 - 2x}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 5 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{12 - 2x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $8x^3 + 36x - 96 = 20\sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow 8x^3 - (96 - 36x) = 10\sqrt[3]{10.2x + (96 - 36x)}$.

Đặt $u = 2x; v = \sqrt[3]{96 - 16x}$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (96 - 36x) = 10v \\ v^3 = 10u + (96 - 36x) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 10v - 10u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -10$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{96 - 16x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Thử lại ta thu được tập nghiệm phương trình ban đầu: $S = \{2\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{12 - 2x} = y \Rightarrow y^3 = 12 - 2x$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 + 9x - 24 = 5y \\ 12 - 2x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 9x - 24 = 5y \\ 24 - 4x = 2y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế (cộng vế với vế) hai phương trình của hệ ta có

$$2x^3 + 5x = 2y^3 + 5y \Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) + 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + x^2 + y^2 = -5$ (Vô nghiệm).

Thử lại ta thu được tập nghiệm của phương trình đã cho: $S = \{2\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình $x(x^2 + 3x + 3) = 1 + 3\sqrt[3]{3x + 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 1 + 3\sqrt[3]{3x + 5} \Leftrightarrow (x + 1)^3 + 3(x + 1) = 3x + 5 + 3\sqrt[3]{3x + 5} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x + 1) = f(\sqrt[3]{3x + 5}) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{3x + 5} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \{-2; 1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 1 + 3\sqrt[3]{3x+5} \Leftrightarrow (x+1)^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3(x+1)+2}.$$

Đặt $x+1=t$; $\sqrt[3]{3x+5}=y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - 2 = 3y \\ y^3 = 3t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 3y + 2 \\ y^3 = 3t + 2 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = 3y - 3t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + 3) = 0$$

- $t = y \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{3x+5} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}.$
- $t^2 + yt + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \{-2; 1\}.$

Bài toán 18. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 4\sqrt[3]{2(3x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - 2x + 2 = 4\sqrt[3]{4(x+1) + 2x - 2}.$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{6x+2}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 2 = 4v \\ v^3 - 2x + 2 = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4v - 4u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -4 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- ✓ $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{6x+2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}.$
- ✓ $u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có các nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4x + 4 &= 6x + 2 + 4\sqrt[3]{6x+2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 4(x+1) &= 6x + 2 + 4\sqrt[3]{6x+2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t$ thì $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Ta thu được $f(x+1) = f(\sqrt[3]{6x+2}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{6x+2}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 1) &= 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm, $S = \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}.$

Bài toán 19. Giải phương trình $x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = 4\sqrt[3]{5x+8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x &= 4\sqrt[3]{4x + 8 + x} \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 - x &= 4\sqrt[3]{4(x + 2) + x}\end{aligned}$$

Đặt $x + 2 = u$; $\sqrt[3]{5x + 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x = 4v \\ v^3 - x = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}\checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{5x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 5x + 8 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 6x + 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}.\end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{0; -3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}$.

Bài toán 20. Giải phương trình $8x^3 + 12x^2 + x + 2 = 2\sqrt[3]{1 + 9x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 5x + 1 &= 2\sqrt[3]{4x + 2 + 5x - 1} \\ \Leftrightarrow (2x + 1)^3 - 5x + 1 &= 2\sqrt[3]{2(2x + 1) + 5x - 1}\end{aligned}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{1 + 9x} = v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 5x + 1 = 2v \\ v^3 - 5x + 1 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}\blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{1 + 9x} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 1 + 9x \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(8x^2 + 12x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{8}; \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{8}\right\}.\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{0; \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{8}; \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{8}\right\}$.

Bài toán 21. Giải phương trình $3(x^3 + 6x^2 + 7x - 3) = \sqrt[3]{\frac{46x + 35}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 15x - 11 &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x + 2}{3} + 15x + 11} \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 - 15x - 11 &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x + 2) + 15x + 11}\end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{\frac{46x+35}{3}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 15x - 11 = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 15x - 11 = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{\frac{46x+35}{3}} \Leftrightarrow 3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = 46x + 35 \Leftrightarrow 3x^3 + 18x^2 - 10x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 21x + 11) = 0 \Rightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-21 + \sqrt{309}}{6}; \frac{-21 - \sqrt{309}}{6} \right\}.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \left\{ 1; \frac{-21 + \sqrt{309}}{6}; \frac{-21 - \sqrt{309}}{6} \right\}.$

Bài toán 22. Giải phương trình $5(x^3 - 3x^2 + x + 1) = \sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x + 2 &= \frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{x-1+10x-10}{5}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - 2x + 2 &= \frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{1}{5}(x-1) + 2x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 2 = \frac{1}{5}v \\ v^3 - 2x + 2 = \frac{1}{5}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{5}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng

$$\bullet u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}} \Leftrightarrow 5(x-1)^3 = 11(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 5(x-1)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \sqrt{\frac{11}{5}}+1; -\sqrt{\frac{11}{5}}+1 \right\}.$$

$$\bullet u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{5} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 23. Giải phương trình $24x^3 + 36x^2 - 3x + 2 = 2\sqrt[3]{\frac{25x}{3}} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2(2x+1) + 21x + 1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}(2x+1) + 7x + \frac{1}{3}}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{\frac{25x}{3}} + 1 = v$ ta thu được hệ $\begin{cases} u^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{\frac{25x}{3}} + 1 \Leftrightarrow 3(2x+1)^3 = 25x+3 \Leftrightarrow 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 25x+3$
 $\Leftrightarrow 24x^3 + 36x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(24x^2 + 36x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-9 - \sqrt{123}}{12}; \frac{-9 + \sqrt{123}}{12}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 24. Giải phương trình $54x^3 - 54x^2 + 16x - 6 = 5\sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - x - 2 = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{5(3x-1) + 2x + 4}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 - x - 2 = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x-1) + x + 2}$$

Đặt $3x-1 = u; \sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x - 2 = \frac{5}{2}v \\ v^3 - x - 2 = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 3x-1 = \sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}} \Leftrightarrow 2(3x-1)^3 = 17x-1 \Leftrightarrow 2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) = 17x-1$
 $\Leftrightarrow 54x^3 - 54x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(54x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 25. Giải phương trình $2x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 8x^3 + 24x^2 + 24x + 4 &= 2\sqrt[3]{4x+8} \\
 \Leftrightarrow 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8 + 4x + 4 &= 4x + 8 + 2\sqrt[3]{4x+8} \\
 \Leftrightarrow (2x+2)^3 + 2(2x+2) &= 4x + 8 + 2\sqrt[3]{4x+8} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned}
 f(2x+3) &= f(\sqrt[3]{4x+8}) \Leftrightarrow 2x+2 = \sqrt[3]{4x+8} \\
 \Leftrightarrow 8(x+1)^3 &= 4(x+2) \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = x + 2 \\
 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 5x &= 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^3 + 3x^2 + 3x + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} \\
 \Leftrightarrow (x+1)^3 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v \\ v^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} \Leftrightarrow 2(x+1)^3 = (x+2) \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = x + 2 \\
 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 5x &= 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.
 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Bài toán 26. Giải phương trình $3x^3 + 9x^2 - 10 = \sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 - \frac{10}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}} \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x+1) + 3x + \frac{13}{3}}.$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}} \Leftrightarrow 3(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 10x + 14 \Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 - x - 11 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 12x + 11) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-6+\sqrt{3}}{3}; \frac{-6-\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 27. Giải phương trình $54x^3 - 54x^2 + 18x - 16 = \sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) - 14 = \sqrt[3]{\frac{3x-1+14}{2}} \Leftrightarrow (3x-1)^3 - 7 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3x-1)+7}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 7 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - 7 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

- $u = v \Leftrightarrow 3x-1 = \sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}} \Leftrightarrow 2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) = 3x + 13$
 $\Leftrightarrow 54x^3 - 54x^2 + 15x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(54x^2 + 15) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 28. Giải phương trình $2x^3 - 18x^2 + 56x - 42 + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 2(x + 6) + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^3 + x + 6 + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^3 - x - 6 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3-x}{2}} + x + 6$$

Đặt $3-x=u$; $\sqrt[3]{\frac{x+15}{2}}=v$ ta thu được
$$\begin{cases} u^3 - x - 6 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - x - 6 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Xét các khả năng sau đây

- $u=v \Leftrightarrow 3-x = \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + x + 15 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^3 - 18x^2 + 55x - 39 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 16x + 39) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2(x-4)^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow x=1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 29. Giải phương trình $3(x^3 - 3x^2 + 7) = 7\sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 7 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x + 8 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3x + 8 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7(x-1)}{2}} + 3x - 8 \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 3x + 8 = \frac{7}{3}v \\ v^3 - 3x + 8 = \frac{7}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{7}{3}(v-u) \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{7}{3}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 13x - 23$
 $\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2}; 3\right\}.$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 30. Giải phương trình $2(x^3 - 6x^2 + 10x - 7) = \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 10x - 7 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x + 1 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 - 2x + 1 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x-2) + 2x-1} \end{aligned}$$

Đặt $x-2 = u; \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 1 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - 2x + 1 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow (u-v) \left(u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 5x - 4 \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 19x - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)(2x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x-4)[2(x-1)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

$$\text{➤ } u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Nhận xét.

Thông qua 30 bài toán mở đầu, xin nhắc lại dạng thức đơn giản đã được đề cập

$$(mx+n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + g(x)}.$$

Trong đó $f(x) \equiv \text{const}$ (hằng số), tăng dần từ hằng số nguyên đến hằng số hữu tỷ, độ phức tạp của đa thức $g(x)$ cũng tăng dần từ hằng số đến nhị thức bậc nhất. Rõ ràng mọi thứ còn rất cơ bản, chưa đào sâu, chưa nâng cấp, và phát triển nhiều. Phía bên ngoài căn thức thường có dạng đa thức bậc ba, các bạn học sinh lưu ý cố gắng quy về dạng hằng đẳng thức lập phương (tổng – hiệu), chú ý thông thường chia hai vế cho hệ số của hạng tử chứa x^3 (hoặc tăng lên nếu hợp gu trình bày...), nhằm đơn giản hóa các chương ngại xấu xí. Bên ngoài phương pháp đặt ẩn phụ quy về hệ đối xứng, các bạn hoàn toàn có thể sử dụng đại lượng liên hợp hay kiến thức hàm số, đồ thị (Giải tích lớp 10 THPT hoặc Giải tích lớp 12 THPT). Lớp bài toán này để thành thạo cần xử lý nhiều bài tập, tính toán chính xác, cẩn thận, logic, và tất nhiên kiến thức không nên nằm ngoài sách giáo khoa, đồng thời phù hợp lứa tuổi. Sau đây là các bài tập tương tự, dành cho quý độc giả luyện tập.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.
2. $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6}$.
3. $x^3 + 4 = 5\sqrt[3]{5x-4}$.
4. $x^3 + 7 = 8\sqrt[3]{8x-7}$.
5. $x^3 + 5 = 6\sqrt[3]{6x-5}$.
6. $x = \sqrt[3]{10\sqrt[3]{10x-9}-9}$.
7. $x = \sqrt[3]{11\sqrt[3]{11x-10}-10}$.
8. $x = \sqrt[3]{20\sqrt[3]{10x-19}-19}$.
9. $x = \sqrt[3]{16\sqrt[3]{16x-15}-15}$.
10. $x = \sqrt[3]{17\sqrt[3]{17x-16}-16}$.
11. $x = \sqrt[3]{15+4\sqrt[3]{4x+15}}$.
12. $x = \sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{5x+12}}$.
13. $x = \sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{2x+4}}$.
14. $x = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{5x-2}-2}$.
15. $x = \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x-6}-6}$.
16. $(x+1)^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3(x+1)+2}$.
17. $(x+1)^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7(x+1)-6}$.
18. $(2x-1)^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9(2x-1)-8}$.
19. $(4x-3)^3 + 4 = 5\sqrt[3]{20x-195}$.
20. $(3x-2)^3 + 3 = 4\sqrt[3]{12x-11}$.
21. $x^3 - 3x + 3 = \sqrt[3]{4x-3}$.
22. $x^3 - x + 2 = 2\sqrt[3]{3x-2}$.
23. $x^3 - 4x + 8 = 5\sqrt[3]{9x-8}$.
24. $x^3 + 12x - 7 = 6\sqrt[3]{7-6x}$.
25. $x^3 - 11x + 13 = 3\sqrt[3]{14x-13}$.
26. $x^3 - x + 7 = 7\sqrt[3]{8x-7}$.
27. $x^3 + 12 = 3x + 10\sqrt[3]{13x-12}$.
28. $x^3 - x + 4 = 5\sqrt[3]{6x-4}$.
29. $x^3 + 2x + 2 = 7\sqrt[3]{5x-2}$.
30. $x^3 - 3x + 14 = 8\sqrt[3]{11x-14}$.
31. $3x^3 + 18 = 19x + 2\sqrt[3]{7x-6}$.
32. $x^3 + 25 = 7x + 4\sqrt[3]{11x-25}$.
33. $x^3 - x + 44 = 12\sqrt[3]{13x-44}$.
34. $x^3 - 4x + 19 = 5\sqrt[3]{9x-19}$.

$$35. x^3 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$36. x^3 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2x+1}{3}}.$$

$$37. 5x^3 = 4 \sqrt[3]{\frac{4x+1}{5}} + 1.$$

$$38. 7x^3 = 3 \sqrt[3]{\frac{3x+4}{7}} + 4.$$

$$39. 5x^3 = 4 \sqrt[3]{\frac{4x+32}{5}} - 32.$$

$$40. 7x^3 = 6 \sqrt[3]{\frac{6x+44}{7}} - 44.$$

$$41. 5x^3 + 34 = \sqrt[3]{\frac{3x+34}{5}}.$$

$$42. (x+1)^3 - 7 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + 7.$$

$$43. 3(x+1)^3 - 22 = \sqrt[3]{\frac{x+23}{3}}.$$

$$44. 5(x+1)^3 - 38 = \sqrt[3]{\frac{x+39}{5}}.$$

$$45. 3(2x-1)^3 - 2 = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{3}}.$$

$$46. 5(3x-2)^3 - 4 = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{5}}.$$

$$47. 7(4x-3)^3 - 6 = \sqrt[3]{\frac{4x+3}{7}}.$$

$$48. 4(2x-1)^3 - 3 = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$$

$$49. x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{61}{9} = \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{x+70}{9}}.$$

$$50. x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{47}{7} = \sqrt[3]{\frac{x+55}{7}}.$$

$$51. 80x^3 - 120x^2 + 60x - 19 = \sqrt[3]{\frac{x+4}{5}}.$$

$$52. 7x^3 + 21x^2 + 21x - 47 = \sqrt[3]{\frac{x+55}{7}}.$$

$$53. x^3 + 3x^2 + 3x = \frac{7}{2} \sqrt[3]{\frac{7x+9}{2}}.$$

$$54. 3x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 11 \sqrt[3]{\frac{11x+13}{3}}.$$

$$55. 4x^3 + 12x^2 + 12x - 14 = 7\sqrt[3]{\frac{7x+25}{4}}.$$

$$56. 4x^3 + 12x^2 + 12x + 6 = 17\sqrt[3]{\frac{17x+15}{4}}.$$

$$57. 2x^3 + 6x^2 + 6x + 8 = 11\sqrt[3]{\frac{11x+15}{2}}.$$

$$58. (x+1)^3 - 3x + 2 = 2\sqrt[3]{2(x+1)+3x-2}.$$

$$59. (2x-1)^3 + x = 3\sqrt[3]{3(2x-1)-x}.$$

$$60. (3x-2)^3 + 5x - 2 = 4\sqrt[3]{4(3x-2)-5x+2}.$$

$$61. (x+1)^3 + 8x + 18 = 17\sqrt[3]{17(x+1)-8x-18}.$$

$$62. (x+1)^3 + 3x + 1 = 6\sqrt[3]{6(x+1)-3x-1}.$$

$$63. x^3 + 3x^2 + x = \sqrt[3]{3x+5}.$$

$$64. x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = \sqrt[3]{4x+4}.$$

$$65. x^3 + 3x^2 + 4 = 2\sqrt[3]{9x-1}.$$

$$66. x^3 + 3x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{6x+2}.$$

$$67. x^3 + 3x^2 = 4\sqrt[3]{11x-3}.$$

$$68. 8x^3 - 12x^2 + 9x = 5\sqrt[3]{7x-6}.$$

$$69. 8x^3 - 12x^2 + 12x - 1 = 7\sqrt[3]{8x-7}.$$

$$70. 8x^3 - 12x^2 + 7x = 3\sqrt[3]{5x-4}.$$

$$71. x^3 - 3x^2 - 2x + 14 = 6\sqrt[3]{11x-21}.$$

$$72. x^3 - 3x^2 + 8 = 4\sqrt[3]{7x-13}.$$

$$73. x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 3\sqrt[3]{x-1}.$$

$$74. 2(x^3 - 3x^2 - 2x + 9) = 3\sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}}.$$

$$75. 2(x^3 - 3x^2 + 9x - 10) = 17\sqrt[3]{\frac{5x+1}{2}}.$$

$$76. 2(x^3 + 3x^2 - 3x + 6) = \sqrt[3]{\frac{19x-3}{2}}.$$

$$77. x^3 + 3x^2 + 8x - 3 = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{17-x}{2}}.$$

$$78. x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = \frac{11}{2}\sqrt[3]{\frac{5x+11}{2}}.$$

$$79. x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = \frac{13}{2}\sqrt[3]{\frac{7x-5}{2}}.$$

$$80. x^3 - 6x^2 + 11x - 9 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}}.$$

$$81. x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{11x-17}{2}}.$$

Bài toán 31. Giải phương trình $x^3 + 3 = x(x+1) + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 - x + 3 = 2\sqrt[3]{2x + x^2 + x - 3}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 - x + 3 = 2v \\ v^3 - x^2 - x + 3 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -2 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$
- $u^2 + uv + v^2 = -2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - x^2 - x + 3 = 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 + 2x = x^2 + 3x - 3 + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = y$ ta thu được

$$x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau đây

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$
- $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Bài toán 32. Giải phương trình $x^3 + 6 = x^2 + 3x + 3\sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 - 3x + 6 = 3\sqrt[3]{3x + x^2 + 3x - 6}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 - 3x - 6 = 3v \\ v^3 - x^2 - 3x + 6 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -3 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}.$
- $u^2 + uv + v^2 = -3 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 33. Giải phương trình $x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{3x + x^2 - x - 2}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 + x + 2 = 3v \\ v^3 - x^2 + x + 2 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -3 \end{cases}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 = -3 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 3x = x^2 + 2x - 2 + 3\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 3(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 3)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 3 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên, $x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Bài toán 34. Giải phương trình $x^3 - x^2 + 7x - 5 = 2\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 + 7x - 5 = 2\sqrt[3]{2x + x^2 - 7x + 5}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 + 7x - 5 = 2v \\ v^3 - x^2 + 7x - 5 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 = -2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = x^2 - 5x + 5 + 2\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ liên tục, đồng biến.

$$\text{Do đó } f(x) = f\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả dễ dàng quan sát thấy các bài toán từ 31 đến 34, vẫn không nằm ngoài phạm vi lớp bài toán giải được bằng cách đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình. Nhắc lại dạng thức

$$(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}.$$

Mức độ khó các bài toán đã bước đầu tăng lên, khi đa thức $g(x)$ của chúng ta đã có dạng tam thức bậc hai, mặc dù $f(x)$ vẫn có dạng hằng số. Như vậy phía trong căn xuất hiện dạng tam thức bậc hai, để nhìn nhận hệ phương trình thuận lợi các bạn chú ý đặc biệt đến $f(x)$. Ngoài phương án đưa về hệ, những bài toán này bao giờ cũng có những cách làm khác, nhẹ nhàng hơn, như sử dụng hai ẩn phụ quy về phân tích nhân tử theo hằng đẳng thức (lời giải 2 bài toán 31), sử dụng tính chất đơn điệu hàm số thuộc chương trình lớp 10 THPT (lời giải 2 bài toán 33) hay lớp 12 THPT (lời giải 2 bài toán 34). Xin lưu ý với trình độ kiến thức đại số 10, các em học sinh vẫn có thể sử dụng kiến thức hàm số nhanh chóng, yêu cầu cơ bản, phù hợp lứa tuổi, không vượt quá nội dung sách giáo khoa. Nói tới vấn đề này, tác giả nhớ đến một bài toán bất đẳng thức, nằm trong chuyên mục Đề ra kỳ này, T2/253, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, tháng 7 năm 1998.

Đó là một bài toán đã quen thuộc với nhiều bạn học sinh, nguyên văn nằm trong Đề số 26 Bộ đề luyện thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng, trong cơ chế thi cử hiện hành thập niên 1990, nội dung như sau

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh $\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Với bài toán này, chúng ta có rất nhiều cách, đặc biệt với các bạn học sinh 12 THPT, khi đã có trong tay công cụ đạo hàm, có thể khảo sát trực tiếp hàm số $f(t) = \frac{x}{1-x^2}; x \in (0;1]$. Tạp chí THPT khi đó muốn giới thiệu đến bạn đọc THCS, mong muốn các em học sinh nhỏ tuổi tiến bộ, mà không sử dụng kiến thức lớp trên quá tầm với. Trong Giải đề kỳ trước, Số 257, Tháng 11 năm 1998, chuyên viên toà soạn, TS.Lê Thống Nhất phụ trách bài toán khi đó đã có lời bình luận rất hóm hỉnh: Tuy nhiên rất nhiều bạn các lớp 7, 8, 9 đã chơi rất ngon lành bằng công cụ đạo hàm, nên khen hay chê những lời giải như vậy?

Rõ ràng trong trường hợp này, công cụ đạo hàm là quá tầm với, đi trước chương trình, đã vô tình làm thui chột tư duy, làm gia tăng sự ỷ lại, giảm thiểu sự bứt phá của các em học sinh nhỏ tuổi, nói khác là vô hình chung phản giáo dục. Tác giả thiết nghĩ trong quá trình làm những bài toán nhẹ nhàng như thế này hoặc cao hơn, mà còn trong cư xử, trong cuộc sống, làm điều gì chúng ta cũng nên nhìn nhận lại, suy nghĩ kỹ, làm sao giữ được lẽ, giữ đúng căn nguyên đạo lý, chân lý lẽ phải, tuân theo một khuôn phép đúng đắn nào đó, tránh xảy ra những trường hợp đáng tiếc không cứu vãn nổi!

Bài toán 35. Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + 10x - 2 = 7\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x = 2x^2 - 3x + 2 + 7\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 7(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 7)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 7 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7x + 2x^2 - 10x + 2}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7v \\ v^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 = -7 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 36. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 13x - 3 = 8\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 8x = 3x^2 - 5x + 3 + 8\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 8t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 8(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 8)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 8 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[(x - 1)^2 + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 3x^2 + 13x - 3 = 8\sqrt[3]{8x + 3x^2 - 13x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Đặt $x = u; \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^2 - 13x + 3) = 8v \\ v^3 - (3x^2 - 13x + 3) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\bullet u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[(x - 1)^2 + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet u^2 + uv + v^2 = -8 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 37. Giải phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^3 - (7x^2 + 8x - 5) = \sqrt[3]{x+1 + (7x^2 + 8x - 5)}$.

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + (7x^2 + 8x - 5) = v \\ v^3 = u + (7x^2 + 8x - 5) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = v - u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0.$$

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{5; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}.$$

Thử lại, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{5; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Bài toán 38. Giải phương trình $2x^3 - 4x^2 + 9x - 4 = 3\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 3x = 2(2x^2 - 3x + 2) + 3\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = y$ ta thu được

$$2x^3 + 3x = 2y^3 + 3y \Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) + 3(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[2(x^2 + xy + y^2) + 3] = 0.$$

Xét các trường hợp sau

$$\diamond \quad x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamond \quad 2(x^2 + xy + y^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + x^2 + y^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 39. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^3 + 2x = 3(4x^2 - x - 2) + 2\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2}.$$

Đặt $x = u; \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 27x^3 - 108x^2 + 45x + 54 &= 18\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 3x + 108x^2 - 45x - 54} \end{aligned}$$

Đặt $3x = u; \sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (108x^2 - 45x - 54) = 6v \\ v^3 - (108x^2 - 45x - 54) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Xét hai khả năng

- ❖ $u = v \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - 3x + 2}$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.
- ❖ $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả có thể thấy bài toán 39 nếu sử dụng phương pháp đánh giá – hàm số, cụ thể sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số, cho chúng ta lời giải 1 hết sức ngắn gọn và dễ hiểu. Tuy nhiên lời giải sử dụng đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 tỏ ra khá khó khăn, thực tế đối với những bài toán hệ số không đẹp như thế này, khi các điều kiện hội tụ đầy đủ, luôn có hai phương án đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại 2, dù rằng bản chất của chúng là như nhau.

Tác giả xin đi sâu phân tích hai phương án này như sau

Phương án 1.

Để ý rằng đa thức phía bên ngoài căn là đa thức bậc ba nhưng các hệ số khá xấu xí. Nhớ lại dạng thức

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Để thuận tiện quy về hằng đẳng thức lập phương, chúng ta sẽ tạo ra hệ số 1

$$x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2}.$$

Trực quan dễ thấy $f(x) \equiv \frac{2}{3}$ và $g(x) = 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2$ nên dễ dàng quy về hệ phương trình.

Phương án 2.

Chú ý hệ số hạng tử lập phương thường là 1, 8, 27, 64,... và các số đối của chúng. Ngoài ngã rẽ đưa về hệ số 1, chúng ta có thể nâng lên để tạo ra hệ số đẹp dễ, rõ ràng bội số của 3 nên là 27. Như vậy

$$27x^3 - 108x^2 + 45x + 54 = 18\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}.$$

Trước hết chọn trường hợp đơn giản nhất, tức là $mx + n \equiv 3x$; $g(x) = (108x^2 - 45x - 54)$. Phía ngoài căn lúc này có dạng $(mx + n)^3 - g(x)$, trong căn thức bắt buộc xuất hiện $+g(x)$, tức là $(108x^2 - 45x - 54)$, như vậy hệ số cần

đưa vào trong căn thức phải là, $\sqrt[3]{\frac{-54}{-2}} = 3$, và ta thu được hệ quả

$$\begin{aligned} (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 3x + 108x^2 - 45x - 54} \end{aligned}$$

Đến đây có thể dễ dàng lắp ghép để thiết lập hệ phương trình đối xứng loại 2.

Bài toán 40. Giải phương trình $4x^3 - 8x^2 + 29x - 24 = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $4x^3 + x = 4(2x^2 - 7x + 6) + \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t$; $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 6) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (2x-1)^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 - 16x^2 + 58x - 48 &= 2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - (16x^2 - 58x + 48) &= \sqrt[3]{2x + (16x^2 - 58x + 48)} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u$; $2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (16x^2 - 58x + 48) = v \\ v^3 - (16x^2 - 58x + 48) = u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = v - u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x = 2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 7x - 6 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (2x-1)^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 41. Giải phương trình $5x^3 - 85x^2 + 33x + 50 = 3\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $5x^3 + 3x = 5(17x^2 - 6x - 10) + 3\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}$

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ thì ta có $f'(t) = 15t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} \Leftrightarrow x^3 - 17x^2 + 6x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 16x - 10) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{8 - \sqrt{104}}{2}; \frac{8 + \sqrt{104}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 17x^2 + \frac{33}{5}x + 10 = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{5}x + 17x^2 - \frac{33}{5}x + 10}$.

Đặt $\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} = y$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(17x^2 - \frac{33}{5}x + 10\right) = \frac{3}{5}y \\ y^3 - \left(17x^2 - \frac{33}{5}x + 10\right) = \frac{3}{5}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{5}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} \Leftrightarrow x^3 - 17x^2 + 6x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 16x - 10\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{8 - \sqrt{104}}{2}; \frac{8 + \sqrt{104}}{2}\right\}. \\ \diamond \quad x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{5} &= 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{5} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-5-(x-3)} = (2x-5)^3 + x-3.$$

Đặt $2x-5 = t; \sqrt[3]{x-2} = y$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y = t^3 + x - 3 \\ y^3 = t - (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t^3 + x - 3 \\ t = y^3 + x - 3 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = y - t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + yt + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 2x - 5 = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $t^2 + yt + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Thử lại các $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3$.

Đặt $\sqrt[3]{x-2} = 2y - 5 \Rightarrow x - 2 = (2y - 5)^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2 = (2y - 5)^3 \\ 2y - 5 = (2x - 5)^3 + x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (2y - 5)^3 \\ 2y - x - 2 = (2x - 5)^3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y = (2y - 5)^3 - (2x - 5)^3$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y) + 2(x - y)[(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2 + 1] = 0$$

- $x = y \Leftrightarrow 2x - 5 = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2 + 1 \Leftrightarrow \left(2x - 5 + \frac{2y - 5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2y - 5)^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Thử lại các $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3 \Leftrightarrow x - 2 + \sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + 2x - 5 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x-2}) = f(2x-5) \Leftrightarrow 2x-5 = \sqrt[3]{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Thử lại $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 43. Giải phương trình $6x^3 - 6x^2 + 13x - 6 = 7\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - x^2 + \frac{13}{6}x - 1 = \frac{7}{6}\sqrt[3]{\frac{7}{6}x + x^2 - \frac{13}{6}x + 1}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(x^2 - \frac{13}{6}x + 1\right) = \frac{7}{6}y \\ y^3 - \left(x^2 - \frac{13}{6}x + 1\right) = \frac{7}{6}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{7}{6}y - \frac{7}{6}x \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{7}{6}\right) = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $6(x^2 + xy + y^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{7}{6}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = y$ ta thu được $6x^3 + 7x = 6(x^2 - x + 1) + 7\sqrt[3]{x^2 - x + 1}.$

$$6x^3 + 7x = 6y^3 + 7y \Leftrightarrow 6(x^3 - y^3) + 7(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[6(x^2 + xy + y^2) + 7] = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $6(x^2 + xy + y^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{7}{6}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1.$

Bài toán 44. Giải phương trình $11x^3 - 11x^2 + 25x - 22 = 3\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương đương với $11x^3 + 3x = 11(x^2 - 2x + 2) + 3\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}.$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = y$ ta thu được hệ

$$11x^3 + 3x = 11y^3 + 3y \Leftrightarrow 11(x^3 - y^3) + 3(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[11(x^2 + xy + y^2) + 3] = 0.$$

- ✓ $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- ✓ $11(x^2 + xy + y^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương đương với

$$x^3 - x^2 + \frac{25}{11}x - 2 = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + \frac{25}{11}x - 11 = \frac{3}{11}\sqrt[3]{\frac{3}{11}x + x^2 - \frac{25}{11}x + 2}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(x^2 - \frac{25}{11}x + 2\right) = \frac{3}{11}y \\ y^3 - \left(x^2 - \frac{25}{11}x + 2\right) = \frac{3}{11}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{3}{11}y - \frac{3}{11}x \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{11}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{11} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Bài toán 45. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4x + 4 &= x^2 + 3x + 4 + 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 4(x+1) &= x^2 + 3x + 4 + 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục, đồng biến.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^2 + x &= 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - x^2 + x &= 4\sqrt[3]{4(x+1) + x^2 - x} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u; \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - x^2 + x = 4v \\ v^2 - x^2 + x = 4u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4v - 4u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u=v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 46. Giải phương trình $x^3 - 5x^2 + 10x - 6 = 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 &= 2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 + 2(x-1) &= 2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f(\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - 5x + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 7x - 5 &= 2\sqrt[3]{2x - 2 + 2x^2 - 7x + 5} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (2x^2 - 7x + 5) &= 2\sqrt[3]{2(x-1) + 2x^2 - 7x + 5} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 7x + 5) = 2v \\ v^3 - (2x^2 - 7x + 5) = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - 5x + 3 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.

Lưu ý để dễ dàng tạo dạng thức hàm số đơn điệu $f(u) = f(v)$ các bạn có thể sử dụng mẹo mực nho nhỏ, ký hiệu căn thức về phải là $\sqrt[3]{P}$. Nếu về trái quy có chứa $t(mx+n)^3$, thực hiện cộng cả hai vế của phương trình với một đại lượng tP , tất yếu thu được hàm số $t(mx+n)^3 + l(mx+n) = tP + l\sqrt[3]{P}$.

Bài toán 47. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 11x - 3 = 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x + 5 &= 2x^2 - 3x + 9 + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) &= 2x^2 - 3x + 9 + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t$; $t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số đang xét liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^2 - 3x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x+1)^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 + 8x - 4 &= 5\sqrt[3]{5(x+1) + 2x^2 - 8x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x^2 - 8x + 4) &= 5\sqrt[3]{5(x+1) + 2x^2 - 8x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 8x + 4) = 5v \\ v^3 - (2x^2 - 8x + 4) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^2 - 3x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x + 1)^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \diamond u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 &\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5 \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả dễ dàng nhận thấy từ bài toán 45, mức độ ẩn giấu bản chất của bài toán đã dần tăng lên, nguyên do có sự chuyển dịch đa thức từ $x \rightarrow mx + n$, trong dạng thức

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Dù rằng phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu hàm số là đơn giản hơn cả, nhưng rõ ràng việc phán đoán đa thức và thêm bớt, lắp ghép đã trở nên khó khăn hơn trước, nhiều khi mất thời gian, đặc biệt khi cố gắng sử dụng ẩn phụ quy về hệ phương trình đối xứng loại 2.

$$\text{Cụ thể là } \begin{cases} 45 : mx + n \equiv x + 1 \\ 46 : mx + n \equiv x - 1; \\ 47 : mx + n \equiv x + 1 \end{cases} g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}; f(x) = \text{const}.$$

Tuy nhiên chúng ta có thể xử lý như sau, để ý số hạng tự do phía trong và ngoài căn thức.

Trong trường hợp $g(x) = ax^2 + bx + c$ và $f(x)$ có hệ số tự do k , ta có các hệ số tự do là $\begin{cases} n^3 - c \\ nk + c \end{cases}$

$$\text{Bài toán 45, } k = 4; \begin{cases} n^3 - c = 1 \\ nk + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = 1 \\ 4n + c = 4 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 4n = 5 \Leftrightarrow n = 1.$$

$$\text{Bài toán 46, } k = 2; \begin{cases} n^3 - c = -6 \\ nk + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = -6 \\ 2n + c = 3 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 2n = -3 \Leftrightarrow n = -1.$$

$$\text{Bài toán 47, } k = 5; \begin{cases} n^3 - c = -3 \\ nk + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = -3 \\ 5n + c = 9 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 5n = 6 \Leftrightarrow n = -1.$$

Cũng dễ dàng nhận thấy phía trong căn thức dạng tam thức bậc hai nên $m = 1$ là phù hợp hơn cả. Từ đây đi đến phép đặt ẩn phụ quy về hệ thích hợp.

Bài toán 48. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 16x + 6 = 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x + 16 &= 5x^2 + 4x + 18 + 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18} \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 + 8(x + 2) &= 5x^2 + 4x + 18 + 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 8t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 8 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dễ dàng thấy

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f\left(\sqrt[3]{5x^2+4x+18}\right) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{5x^2+4x+18} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 = 5x^2+4x+18 \\ &\Leftrightarrow x^3+x^2+8x-10=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+10)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x+1)^2=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3+6x^2+12x+8-5x^2+4x-2 &= 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2} \\ &\Leftrightarrow (x+2)^3 - (5x^2-4x+2) = 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{5x^2+4x+18}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^2 - 4x + 2) = 8v \\ v^3 - (5x^2 - 4x + 2) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 8) = 0.$$

- $u=v \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{5x^2+4x+18} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 = 5x^2+4x+18$
 $\Leftrightarrow x^3+x^2+8x-10=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+10)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x+1)^2=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $u^2+uv+v^2+8=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Ngoài ra, đối với bài toán 48 và lớp bài toán tương tự, các bạn học sinh có thể phán đoán được nhị thức $mx+n \equiv x+2$ không theo hệ số tự do, mà theo hệ số của hạng tử chứa x^2 , hoặc đồng nhất đồng bộ cũng rất nhanh chóng. Để ý rằng đa thức trong căn là tam thức bậc hai, bên ngoài căn là đa thức bậc ba (không phải bậc 6) nên nhị thức $mx+n$ là tất yếu (loại bỏ trường hợp phức tạp ax^2+bx+c).

$$\text{Tức là ta có } (x+n)^3 - (5x^2 - 4x + 18 - 8n) = 8\sqrt[3]{8(x+n) + 5x^2 - 4x + 18 - 8n} \Rightarrow \begin{cases} n^3 + 8n - 18 = 6 \\ 3n - 5 = 1 \\ 3n^2 + 4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2. \text{ Do đó}$$

$$\begin{aligned} (x+2)^3 - (5x^2 - 4x + 2) &= 8\sqrt[3]{8(x+2) + 5x^2 - 4x + 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 5x^2 + 4x - 2 = 8\sqrt[3]{8(x+2) + 5x^2 - 4x + 2} \end{aligned}$$

Bài toán 49. Giải phương trình $2x^3+4x^2+11x+3=3\sqrt[3]{x^2-x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x^3+3x^2+3x+1)+3x+3 &= 2x^2-2x+2+3\sqrt[3]{x^2-x+1} \\ &\Leftrightarrow 2(x+1)^3+3(x+1) = 2(x^2-x+1)+3\sqrt[3]{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+3t$ thì $f'(t)=6t^2+3>0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Thu được

$$f(x+1) = f(\sqrt[3]{x^2 - x + 1}) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+1) + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$$

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}v \\ v^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{3}{2}v - \frac{3}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{3}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Nhận xét.

Phân tích lời giải 2. Để tạo ra hằng đẳng thức các bạn chia hai vế cho hệ số của hạng tử chứa x^3 .

$$2x^3 + 4x^2 + 11x + 3 = 3\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x+n)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1 - \frac{3}{2}n\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+n) + x^2 - \frac{5}{2}x + 1 - \frac{3}{2}n}$$

$$\text{Sử dụng đồng nhất hệ số đồng bộ} \begin{cases} n^3 + \frac{3}{2}n - 1 = \frac{3}{2} & (i) \\ 3n - 1 = 2 & (ii) \\ 3n^2 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} & (iii) \end{cases} \Leftrightarrow n = 1.$$

Chú ý có thể sử dụng một trong ba hệ thức (i), (ii), (iii), trừ khi phương trình đề bài không thể quy về hệ đối xứng loại 2! Ba hệ thức kiểm tra lẫn nhau đảm bảo bài toán khả thi đưa về hệ đối xứng loại 2. Để tự nhiên các bạn nên phân tích tuần tự

$$\begin{aligned}(x+1)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+1) + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Bài toán 50. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 28x - 28 = 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 4x - 4 &= 3(x^2 - 5x + 7) + 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \\ \Leftrightarrow 3(x-1)^3 + 4(x-1) &= 3(x^2 - 5x + 7) + 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}=v$ ta thu được

$$(1) \Leftrightarrow 3u^3 + 4u = 3v^3 + 4v \Leftrightarrow 3(u^3 - v^3) + 4(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 4] = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - 5x + 7$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $3(u^2 + uv + v^2) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{4}{3}$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 + \frac{28}{3}x - \frac{28}{3} &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}(x-1) + x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}(x-1) + x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}}\end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) = \frac{4}{3}v \\ v^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) = \frac{4}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{4}{3}v - \frac{4}{3}u \Leftrightarrow (u - v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{4}{3}\right) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - 5x + 7$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{4}{3}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Để xuất hiện ắn phụ đưa về hệ chúng ta tìm hệ số n .

$$x^3 - 4x^2 + \frac{28}{3}x - \frac{28}{3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow (x+n)^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + 7 - \frac{4}{3}n\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}(x+n) + x^2 - \frac{19}{3}x + 7 - \frac{4}{3}n}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 + \frac{4}{3}n - 7 = -\frac{28}{3} \\ 3n - 1 = -4 \\ 3n^2 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1.$

Bài toán 51. Giải phương trình $24x^3 - 42x^2 + 37x - 14 = 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) + 10x - 5 = 3(2x^2 - 3x + 2) + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 3(2x - 1)^3 + 5(2x - 1) = 3(2x^2 - 3x + 2) + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 9t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta thu được

$$f(2x - 1) = f(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 9x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(8x^2 - 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 8x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 - 14x^2 + \frac{37}{3}x - \frac{14}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x - 1) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x - 1) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}}$$

Đặt $2x - 1 = u; \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}v \\ v^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{3}v - \frac{5}{3}u \Leftrightarrow (u - v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{3}\right) = 0.$$

➤ $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).

➤ $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 - 3x + 2$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 9x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 8x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Để xuất hiện ẩn số phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, chúng ta tìm hệ số n .

$$8x^3 - 14x^2 + \frac{37}{3}x - \frac{14}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + 2 - \frac{5}{3}n\right) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x+n) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + 2 - \frac{5}{3}n}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 + \frac{5}{3}n - 2 = -\frac{14}{3} \\ 12n - 2 = -14 \\ 6n^2 + \frac{19}{3} = \frac{37}{3} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1.$$

Bài toán 52. Giải phương trình $54x^3 - 60x^2 + 35x - 19 = 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) + 15x - 5 = 2(3x^2 - x + 6) + 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-1)^3 + 5(3x-1) = 2(3x^2 - x + 6) + 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}=v$ ta thu được

$$2u^3 + 5u = 2v^3 + 5v \Leftrightarrow 2(u^3 - v^3) + 5(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)[2(u^2 + uv + v^2) + 5] = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{3x^2 - x + 6} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^2 - x + 6$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 30x^2 + 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(27x^2 - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x=1.$
- $2(u^2 + uv + v^2) + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 - 30x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{19}{2} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x-1) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}v \\ v^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - x + 6} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^2 - x + 6$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 30x^2 + 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(27x^2 - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Quy trình đưa về hệ phương trình đối xứng

$$27x^3 - 30x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{19}{2} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + 6 - \frac{5}{2}n\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x + n) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + 6 - \frac{5}{2}n}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 + \frac{5}{2}n - 6 = -\frac{19}{2} \\ 27n - 3 = -30 \\ 9n^2 + \frac{17}{2} = \frac{35}{2} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1 \Rightarrow (3x - 1)^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x - 1) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}}.$$

Các bài toán từ 53 trở đi, vẫn nằm trong dạng thức $(mx + n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}$ trong đó $f(x)$ vẫn có dạng hằng số, tuy nhiên mức độ khó đã nâng lên nguyên do $g(x)$ sẽ có dạng đa thức bậc ba, bậc bốn và cao hơn. Mời quý độc giả theo dõi các thí dụ điển hình tiếp theo

Bài toán 53. Giải phương trình $4x^2 - 3 = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + x + 3 + 4x^2 - 3 &= x^3 - 4x^2 + x + 3 + \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \\ \Leftrightarrow x^3 + x &= x^3 - 4x^2 + x + 3 + \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} = y$ ta thu được

$$x^3 + x = y^3 + y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0.$$

Xét hai khả năng

- ❖ $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- ❖ $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 4x^2 + x + 3$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}.$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 54. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} + 2 = 6x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$-x^3 - x^2 + 6x - 2 = 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow -x^3 - x^2 + 6x - 2 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} = y$ ta thu được

$$x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\blacksquare x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} \Leftrightarrow x^3 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\blacksquare x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$-x^3 - x^2 + 6x - 2 = 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2\sqrt[3]{2x + 2x^3 + x^2 - 6x + 2}$$

Đặt $x = u; \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2v \\ v^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau

$$\checkmark u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} \Leftrightarrow x^3 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$\checkmark u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v \right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 55. Giải phương trình $7x^3 + 3x^2 - 8 = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^3 + 3x^2 - 8 + x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = x^3 - 3x^2 + 2x + 8 + \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x + 8 + \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thu được

$$f(2x) = f\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}\right) \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 + 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(7x^2 + 10x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 56. Giải phương trình $5x^3 + x^2 + 10x - 2 = 7\sqrt[3]{3x^3 - x^2 + 4x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7.2x + 3x^3 + x^2 - 10x + 2}.$$

Đặt $2x = u; 3x^3 + x^2 - 10x + 2 = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7v \\ v^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

Xét các khả năng

- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{3x^3 - x^2 + 4x + 2} \Leftrightarrow 8x^3 = 3x^3 - x^2 + 4x + 2$
 $\Leftrightarrow 5x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $S = \{1\}$.

Nhận xét.

Trong trường hợp $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có dạng thức phức tạp hơn một chút

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Để ý rằng vẫn có sự đơn giản $f(x) \equiv 7$ nên

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 7\sqrt[3]{7(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Rõ ràng } a=3; b=1 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 3 = 5 \\ 7m + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó thu được } (2x+n)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + d) = 7\sqrt[3]{7(2x+n) + (3x^3 + x^2 - 10x + d)}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} n^3 - d = -2 \\ 7n + d = 2 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 7n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Rightarrow (2x)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7.2x + 3x^3 + x^2 - 10x + 2}.$$

Bài toán 57. Giải phương trình $46x^3 - 14x^2 - 9x - 8 = 5\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(3x)^3 + 5.3x = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4 + 5\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến. Ta thu được

$$\begin{aligned} f(3x) &= f\left(\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}\right) \Leftrightarrow 27x^3 = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4 \\ &\Leftrightarrow 23x^3 - 7x^2 - 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(23x^2 + 16x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$23x^3 - 7x^2 - \frac{9}{2}x - 4 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2} \cdot 3x + 4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4}$$

Đặt $3x = u$; $\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}v \\ v^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} \Leftrightarrow 27x^3 = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4$
 $\Leftrightarrow 23x^3 - 7x^2 - 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(23x^2 + 16x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 57, thao tác đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình cần chú ý một chút.

Dạng thức $(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Do $f(x) \equiv 5 \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 5\sqrt[3]{5(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Các phương án đưa ra như sau

Phương án 1.

$$\text{Đồng nhất } a=4; b=7 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 4 = 46 \\ 5m + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 50 \\ 5m + c = 12 \end{cases} \text{ (Loại, hệ số } m \notin \mathbb{Z}).$$

Phương án 2.

Chia hai vế cho các ước của 46, chẳng hạn đơn giản giản ước cho 2 thu được

$$23x^3 - 7x^2 - \frac{9}{2}x - 4 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}.$$

$$\text{Để ý } f(x) \equiv \frac{5}{2} \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Đồng nhất } a=4; b=7 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 4 = 23 \\ \frac{5}{2}m + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thu được } (3x+n)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + d\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x+n) + \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + d\right)}.$$

$$\text{Tiếp tục tìm } n \text{ và } d, \text{ đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = -4 \\ \frac{5}{2}n + d = 4 \end{cases} \Rightarrow n^3 + \frac{5}{2}n = 0 \Rightarrow n = 0.$$

$$\text{Do đó ta có lắp ghép } (3x)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2} \cdot 3x + 4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4}.$$

Bài toán 58. Giải phương trình $21x^3 - 15x^2 + 11x - 3 = 7\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3(2x)^3 + 7.2x = 3(x^3 + 5x^2 + x + 1) + 7\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}.$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} = v$ ta thu được

$$3u^3 + 7u = 3v^3 + 7v \Leftrightarrow 3(u^3 - v^3) + 7(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 7] = 0.$$

- $3(u^2 + uv + v^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 + 5x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 7x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(7x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 + (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}.2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}.2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) = \frac{7}{3}v \\ v^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) = \frac{7}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{7}{3}(v - u) \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 7] = 0.$$

- $3(u^2 + uv + v^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 + 5x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 7x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(7x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 + (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Để xuất hiện ắn phụ ta xử lý tương tự bài toán số 57.

$$\text{Dạng thức } (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\text{Do } f(x) \equiv 7 \Rightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 7\sqrt[3]{7(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Các phương án đưa ra như sau

Phương án 1.

$$\text{Đồng nhất } a = 1; b = 5 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 21 \\ 7m + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 = 22 \\ 7m + c = 1 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}).$$

Phương án 2.

Chia hai vế cho các ước của 21, chẳng hạn đơn giản giản ước cho 3 thu được

$$7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 = \frac{7}{3} \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}.$$

$$\text{Để ý rằng } f(x) \equiv \frac{7}{3} \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3}(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Đồng nhất } a=1; b=5 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 7 \\ \frac{7}{3}m + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó thay vào, ta có } (2x+n)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + d\right) = \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3}(2x+n) + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + d}.$$

$$\text{Tìm } n \text{ và } d, \text{ đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = -1 \\ \frac{7}{3}n + d = 1 \end{cases} \Rightarrow n^3 + \frac{7}{3}n = 0 \Leftrightarrow n = 0. \text{ Do đó có biến đổi}$$

$$\begin{aligned} 7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3} \cdot 2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3} \cdot 2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \end{aligned}$$

Bài toán 59. Giải phương trình $24x^3 + 4x^2 + 10x - 16 = 11\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 4 &= \frac{11}{4} \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) &= \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4} \cdot 2x + 2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u$; $\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4}v \\ v^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{11}{4}v - \frac{11}{4}u \Leftrightarrow (u-v) \left(u^2 + uv + v^2 + \frac{11}{4}\right) = 0.$$

$$\text{➤ } u^2 + uv + v^2 + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{11}{4} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow 8x^3 = 2x^3 - x^2 + 3x + 4 \\ &\Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^2 + 7x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Đối với bài toán này, để xuất hiện ắnp phụ, chúng ta thao tác tương tự bài toán 58

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Do } f(x) \equiv 11 \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 11 \sqrt[3]{11(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Phương án 1. Đồng nhất $a = 2; b = -1 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - a = 24 \\ 11m + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 2 = 24 \\ 11m + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 26 \\ 11m + c = 3 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}).$

Phương án 2.

Thực hiện chia cả hai vế cho ước dương (khác 1 và 24) của số 24. Tuy nhiên 24 có khá nhiều ước dương bao gồm 2; 4; 6; 8; 12. Tuy nhiên thông qua một số bài toán điển hình có lẽ chúng ta đã mạnh mẽ được ý đồ nào đó. Để ý rằng luôn có $a = 2; m^3 - a = k \Rightarrow m^3 = k + 2$. Do đó định hình hướng đi xác định số nguyên k sao cho $k + 2$ là lập phương của một số tự nhiên và k là ước dương của 24. Rõ ràng thấy ngay $k = 6$. Do đó chia hai vế của phương trình cho 4 ta có

$$6x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 4 = \frac{11}{4} \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4}.$$

Do $f(x) \equiv \frac{11}{4} \Rightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4}(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Như vậy $\begin{cases} m = 2; a = 2 \\ \frac{11}{4}m + c = 3 \\ n^3 - d = -4 \\ \frac{11}{4}n + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2; a = 2 \\ c = -\frac{5}{2} \\ n = 0; d = 4 \end{cases} \Rightarrow (2x)^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4} \cdot 2x + 2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4}.$

Bài toán 60. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2(x + 1) = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 + 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^3 + 2(x - 1) = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 + 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x - 1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right) \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = y \Rightarrow -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = y \\ -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 = 2y \\ -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2(x + 1) = y^3 + 2y \Leftrightarrow (x - 1)^3 + 2(x - 1) = y^3 + 2y \quad (1).$$

$$\text{Đặt } x - 1 = t : (1) \Leftrightarrow t^3 + 2t = y^3 + 2y \Leftrightarrow (t^3 - y^3) + 2(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + ty + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + ty + y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\bullet \quad t^2 + ty + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 = 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 - (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) = 2\sqrt[3]{2(x-1) + (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13)} \end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u$; $\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) = 2v \\ v^3 = 2u + (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 - uv + v^2 + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 - uv + v^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Nhận xét.

- Lời giải 3 dựa theo motip sử dụng ắnn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, trước đó có nhân hai về phương trình ban đầu với hằng số 2, có sự khác biệt so với các phương trình tương tự trước, mặc dù về trái là đa thức có thể phân tích về dạng lập phương! Vì sao lại thế?

Thêm một lần các bạn chú ý dạng tổng quát $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}$.

Liên hệ với bài toán gốc $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$.

Ở đây $f(x) \equiv 1$ là một hằng số, giảm nhẹ tính toán cho chúng ta, nhưng thực tế có đơn giản hay không?

Giả dụ về trái phân tích dạng $(x+m)^3 - (ax^2 + bx + c)$. Suy ra trong căn cần có $1\sqrt[3]{1(x+m) + (ax^2 + bx + c)}$.

Như vậy không thể xuất hiện được đa thức bậc ba trong căn!

Điều này chứng tỏ rằng phương án $g(x)$ là một tam thức $ax^2 + bx + c$ bất khả thi, hợp lý hơn là một đa thức bậc ba, và $f(x)$ vẫn là nhị thức bậc nhất.

Để ý một chút biểu thức phía trong căn (đề bài), tối thiểu ta cần có $k\sqrt[3]{k(mx+n) + (-x^3 + ax^2 + bx + c)}$.

Trong đó k là hệ số nguyên sẽ nhân vào hai vế của phương trình gốc.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $k > 0$, cụ thể $k \neq 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 2$

Tiếp tục liên hệ về trái: $(mx+n)^3 - (-x^3 + ax^2 + bx + c)$.

Rõ ràng nếu $m \leq 0$ thì hệ số của hạng tử chứa x^3 nhỏ hơn 1, trong khi đó với $k \geq 2$ thì hệ số của hạng tử chứa x^3 bên vế trái tối thiểu bằng 2. Suy ra rằng $m \geq 1$, cũng tương đương với $k \geq 2$.

Sử dụng đồng nhất

$$(mx+n)^3 - (-x^3 + ax^2 + bx + c) = k\sqrt[3]{k(mx+n) + (-x^3 + ax^2 + bx + c)} = k(x^3 - 6x^2 + 12x - 7)$$

Ta thiết lập được hệ thức $m^3 + 1 = k$. Thử chọn lần lượt các giá trị $k = 2, 9, 28, \dots$ thấy ngay $k = 2$ thỏa mãn.

Kết quả là thu được lời giải 3 như trên.

- Nếu sử dụng đồng nhất tương tự các lời giải trước thì

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$f(x) \equiv 1; a = -1; b = 9 \Rightarrow (mx + n)^3 - (-x^3 + 9x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx + n) + (-x^3 + 9x^2 + cx + d)}.$$

Để thấy rằng $m^3 + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$ (Loại). Do vậy cần nhân hai vế của phương trình với hệ số k , tức là

$$k(x^3 - 6x^2 + 12x - 7) = k\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Rightarrow (mx + n)^3 - (-x^3 + 9x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (-x^3 + 9x^2 + cx + d)}$$

$$\text{Thiết lập đồng nhất thức} \begin{cases} m^3 + 1 = k \\ n^3 - d = -7k \\ km + c = -19 \\ kn + d = 11 \end{cases} \text{ tương tự ta thu được lời giải 3 phía trên.}$$

Tài liệu nhỏ này trọng tâm đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình và một số kiến thức cơ bản liên quan, một bài toán tất yếu còn nhiều hướng giải độc đáo và bất ngờ khác, các bạn tùy nghi lựa chọn và sáng tạo phù hợp cho mình, vì kho tàng kiến thức luôn luôn vô tận, chân trời khoa học mãi là bao la !

Bài toán 61. Giải phương trình $52x^3 + 61x - 107 = 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 54x^3 - 54x^2 + 27x - 5 &= 2(x^3 - 27x^2 - 17x + 51) + 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} \\ \Leftrightarrow 2(3x - 1)^3 + 3(3x - 1) &= 2(x^3 - 27x^2 - 17x + 51) + 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(3x - 1) = f(\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}) \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = x^3 - 27x^2 - 17x + 51 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Thử lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} = y \Rightarrow x^3 - 27x^2 - 17x + 51 = y^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 52x^3 + 61x - 107 = 3y \\ x^3 - 27x^2 - 17x + 51 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52x^3 + 61x - 107 = 3y \\ 2x^3 - 54x^2 - 34x + 102 = 2y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$54x^3 - 54x^2 + 27x - 5 = 3y + 2y^3 \Leftrightarrow 2(3x - 1)^3 + 3(3x - 1) = 2y^3 + 3y$$

Đặt $3x - 1 = t$ thì

$$2t^3 + 3t = 2y^3 + 3y \Leftrightarrow 2(t^3 - y^3) + 3(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y)(2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ 2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1.$
- $2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2ty + y^2 + t^2 + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (t - y)^2 + t^2 + y^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Thử lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 61 nếu để xuất hiện ẩn phụ đưa về hệ phương trình, chúng ta cần chia hệ số

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Do $a=1; m^3 - a = 52 \Rightarrow m^3 = 52 + 1 = 53$ (Loại).

Giả định $a=1; m^3 - a = k, k|52 \Rightarrow m^3 = k + 1$. Vì $k|52, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{2; 4; 13; 26\}$, dễ thấy $k = 26 \Rightarrow m = 3$. Như vậy chia hai vế cho hằng số 2 thu được

$$52x^3 + 61x - 107 = 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow 26x^3 + \frac{61}{2}x - \frac{107}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow (3x+n)^3 - (x^3 + 27x^2 + cx + d) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x+n) + (x^3 - 27x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = -\frac{107}{2} \\ \frac{3}{2}n + d = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + \frac{3}{2}n = -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}n + d = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ d = \frac{105}{2} \end{cases} \Rightarrow c = -\frac{43}{2}$. Suy ra

$$(3x-1)^3 - \left(x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x-1) + \left(x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - x^3 + 27x^2 + \frac{43}{2}x - \frac{105}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x-1) + x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}}$$

Bài toán 62. Giải phương trình $2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^3 + 9x^2 + 6x - 12 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x+1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x+1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3v \\ v^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

▪ $u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16$
 $\Leftrightarrow 6x^3 + 9x^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^2 + 15x + 17) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

▪ $u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 62 chúng ta vẫn sử dụng đồng nhất thức như thường lệ

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\Rightarrow (mx+n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx+n) + (2x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $\begin{cases} m^3 - 2 = 2 \\ m + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 4 \\ m + c = 6 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z})$. Trường hợp giữ nguyên bị loại.

Như vậy là có nguy cơ phải nhân thêm hằng số, sẽ phức tạp đây, cần hết sức bình tĩnh nhé, bình tĩnh nhé.

$$k(2x^3 + 3x^2 + 2x - 4) = k\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Rightarrow (mx + n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (2x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Ta có $m^3 - 2 = 2k \Rightarrow m^3 = 2k + 2$ nên m phải là số lập phương chẵn. Chọn $k = 3 \Rightarrow m = 2$. Thu được

$$6x^3 + 9x^2 + 6x - 12 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + d) = 3\sqrt[3]{3(2x + n) + 2x^3 + 3x^2 + d}$$

$$\text{Đồng nhất thức } \begin{cases} n^3 - d = -12 \\ 3n + d = 16 \\ 3 \cdot 4 \cdot n - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 3n = 4 \\ 12n = 12 \\ 3n + d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = 13 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x + 1)^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x + 1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}.$$

Bài toán 63. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^3 + 14x^2 + 7x - 7 = 7\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7\sqrt[3]{7(2x + 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 8)}$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7\sqrt[3]{7(2x + 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 8)}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7v \\ v^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = x^3 - 2x^2 + 13x + 15 \\ \Leftrightarrow 7x^3 + 14x^2 - 7x - 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 2) = 0.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Bài toán số 63 chúng ta vẫn sử dụng đồng nhất thức như thường lệ

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \\ \Rightarrow (mx + n)^3 - (x^3 - 2x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx + n) + (x^3 - 2x^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Ta có đồng nhất } a = 1; b = -2 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 1 \\ m + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 2 \\ m + c = 13 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}). \text{ Phương án thất bại.}$$

Xoay chuyển theo phương án nhân thêm hệ số k , $k(x^3 + 2x^2 + x - 1) = k\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$. Đưa về

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \\ \Rightarrow (mx + n)^3 - (x^3 - 2x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (x^3 - 2x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $a=1; b=-2; m^3-1=k \Leftrightarrow m^3=k+1$. Chọn lập phương nhỏ nhất bằng 8 (Loại trường hợp 0) thì

$$k=7 \Rightarrow m=2 \Rightarrow 7x^3+14x^2+7x-7=7\sqrt[3]{x^3-2x^2+13x+15}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3-(x^3-2x^2+cx+d)=7\sqrt[3]{7(2x+n)+(x^3-2x^2+cx+d)}$$

$$\text{Đồng nhất} \begin{cases} n^3-d=-7 \\ 7n+d=15 \\ 3.4.n+2=14 \\ 14+c=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3+7n=8 \\ n=1 \\ c=-1 \\ 7n+d=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ c=-1 \\ d=8 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x+1)^3-(x^3-2x^2-x+8)=7\sqrt[3]{7(2x+1)+(x^3-2x^2-x+8)}.$$

Bài toán 64. Giải phương trình $4x^3-4x^2+x+1=\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$24x^3-24x^2+6x+6=6\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1-(3x^3-3x^2+3x-7)=6\sqrt[3]{18x-6+(3x^3-3x^2+3x-7)}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3-(3x^3-3x^2+3x-7)=6\sqrt[3]{6(3x-1)+(3x^3-3x^2+3x-7)}$$

Đặt $3x-1=u; \sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}=v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(3x^3-3x^2+3x)=6v \\ v^3-(3x^3-3x^2+3x)=6u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=6v-6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+6)=0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=3x^3-3x^2+21x-13 \\ &\Leftrightarrow 24x^3-24x^2-12x+12=0 \Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x+1=0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

$$\diamond u^2+uv+v^2+6=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2=-6 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 64 này, phương án nhân thêm hằng số cũng được lựa chọn

$$(mx+n)^3-(ax^3+bx^2+cx+d)=f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^3+bx^2+cx+d)}.$$

$$\text{Áp dụng } (mx+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=\sqrt[3]{(mx+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)}.$$

Dễ thấy $m^3-3=4 \Leftrightarrow m^3=7, m \notin \mathbb{Z}$. Nhân thêm hệ số ta có $k(4x^3-4x^2+x+1)=k\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$, quy về

$$(mx+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=k\sqrt[3]{k(mx+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)}.$$

Ta có $m^3-3=4k \Rightarrow m^3=4k+3$. Như vậy m là số lập phương lẻ, dễ thấy đơn giản nhất

$$k=6 \Rightarrow m=3 \Rightarrow \begin{cases} 24x^3-24x^2+6x+6=6\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13} \\ (3x+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=6\sqrt[3]{6(3x+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)} \end{cases}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} n^3 - d = 6 \\ 6n + d = -13 \\ 3.9n + 3 = -24 \\ 3.3n^2 - c = 6 \\ 18 + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 6n = -7 \\ c = 3 \\ 6n + d = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ c = 3 \\ d = -7 \end{cases}$$

Bài toán 65. Giải phương trình $x^3 + 7x^2 + 11x + 6 = \sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^3 + 35x^2 + 55x + 30 &= 5\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - (3x^3 + x^2 - x - 3) &= 5\sqrt[3]{10x + 15 + 3x^3 + x^2 - x - 3} \\ \Leftrightarrow (2x + 3)^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) &= 5\sqrt[3]{5(2x + 3) + 3x^3 + x^2 - x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $2x + 3 = u$; $\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) = 5v \\ v^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x + 3 = \sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \Leftrightarrow 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = 3x^3 + x^2 + 9x + 12$
 $\Leftrightarrow 5x^3 + 35x^2 + 45x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 7x^2 + 9x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; -3 + \sqrt{6}; -3 - \sqrt{6}\}$
- $u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} k(x^3 + 7x^2 + 11x + 6) &= k\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \\ \Leftrightarrow (mx + n)^3 - (3x^3 + x^2 + cx + d) &= k\sqrt[3]{k(mx + n) + (3x^3 + x^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Ta có $m^3 - 3 = k \Rightarrow m^3 = k + 3 \Rightarrow k \in \{-2; 5; 24; \dots\}$ nên chọn $k = 5 \Rightarrow m = 2$.

Bài toán 66. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 1 = \sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 60x^3 + 60x^2 + 60 &= 60\sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} \\ \Leftrightarrow 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) &= 60\sqrt[3]{60(4x + 1) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59)} \\ \Leftrightarrow (4x + 1)^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) &= 60\sqrt[3]{60(4x + 1) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59)} \end{aligned}$$

Đặt $4x + 1 = u$; $\sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) = 60v \\ v^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) = 60u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 60v - 60u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 60) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow 4x + 1 = \sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} \Leftrightarrow 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 = 4x^3 - 12x^2 + 252x + 1 \\ &\Leftrightarrow 60x^3 + 60x^2 - 240x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 60 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -60 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 67. Giải phương trình $x^3 - x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^3 - 16x^2 + 16x + 16 &= 16\sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16\sqrt[3]{48x - 16 + 11x^3 - 11x^2 - 7x - 17} \\ &\Leftrightarrow (3x - 1)^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16\sqrt[3]{16(3x - 1) + 11x^3 - 11x^2 - 7x - 17} \end{aligned}$$

Đặt $3x - 1 = u$; $\sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16v \\ v^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 16v - 16u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 16) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 11x^3 - 11x^2 + 41x - 33 \\ &\Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 - 32x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}\}. \\ \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 16 &= 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -16 \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{-\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}\}$.

Nhận xét.

Trong bài toán 66, để xuất hiện ắ phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 chúng ta đã nhân hai vế của phương trình ban đầu với hằng số 11. Chắc chắn các bạn học sinh đã rất quen thuộc.

$$m^3 - 11 = k \Leftrightarrow m^3 = k + 11 \Rightarrow k \in \{-10; -3; 16; \dots\} \Rightarrow k = 16.$$

Có thể nói nên ưu tiên chọn hằng số nguyên dương để giảm thiểu sự phức tạp tính toán.

Bài toán 68. Giải phương trình $x^3 + x^2 + x = \sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2 + 8x &= 8\sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9} \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (4x^2 - 2x + 1) = 8\sqrt[3]{8(2x + 1) + 4x^2 - 2x + 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8\sqrt[3]{8(2x + 1) + 4x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{4x^2+14x+9}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8v \\ v^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 8) = 0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{4x^2+14x+9} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 4x^2 + 14x + 9 \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 8x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}. \end{aligned}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán này được đề cập nhằm nhắc lại dạng đơn giản khi đa thức trong căn thức có dạng tam thức bậc hai, tuy nhiên có kết hợp nhân hai vế với hằng số 8. Chú ý đồng nhất hệ số $m^3 = k \Rightarrow m^3 = k \Rightarrow k \in \{-8; 1; 8; \dots\}$. Rõ ràng trường hợp $k = 1$ trùng bài toán, thử với $k = 8$ thì $m = 2$ nên thu được

$$\begin{aligned} 8(x^3 + x^2 + x) &= 8\sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9} \\ &\Leftrightarrow (2x+n)^3 - (4x^2 + cx + d) = 8\sqrt[3]{8(2x+n) + (4x^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = 0 \\ 8n + d = 9 \end{cases} \Rightarrow n = d = 1; \begin{cases} 3 \cdot 2n^2 - c = 8 \\ 16 + c = 14 \end{cases} \Rightarrow c = -2.$$

Bài toán 69. Giải phương trình $(x-1)(3x^2-4x-1) = \sqrt[3]{9x^2+36x-44}-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 - 7x^2 + 3x + 2 &= \sqrt[3]{9x^2 + 36x - 44} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 63x^2 + 27x + 18 = 9\sqrt[3]{9x^2 + 36x - 44} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - (9x^2 + 9x - 26) = 9\sqrt[3]{17x - 18 + 9x^2 + 9x - 26} \\ &\Leftrightarrow (3x-2)^3 - (9x^2 + 9x - 26) = 9\sqrt[3]{9(3x-2) + 9x^2 + 9x - 26} \end{aligned}$$

Đặt $3x-2=u$; $\sqrt[3]{9x^2+36x-44}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 + 9x - 26) = 9v \\ v^3 - (9x^2 + 9x - 26) = 9u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 9v - 9u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 9) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ u = v &\Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt[3]{9x^2+36x-44} \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 9x^2 + 36x - 44 \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 63x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow 9(x-1)(3x^2-4x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}; 1; 2\right\}. \end{aligned}$$

$$\circ u^2 + uv + v^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -9 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 70. Giải phương trình $\frac{(x-1)(4x^2-3x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+10x-11}-1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \neq \frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3 - 7x^2 + 4x - 1 &= 3\sqrt[3]{2x^2+10x-11} - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 7x^2 + 4x + 3 &= 3\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 8x + 6 &= 6\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^2 - 2x - 5) &= 6\sqrt[3]{12x - 6 + 2x^2 - 2x - 5} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^2 - 2x - 5) &= 6\sqrt[3]{6(2x-1) + 2x^2 - 2x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{2x^2+10x-11}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 2x - 5) = 6v \\ v^3 - (2x^2 - 2x - 5) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

- $u = v \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{2x^2+10x-11} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 + 10x - 11$
 $\Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 - 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(4x^2 - 3x - 5) \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{89}}{8}; \frac{3-\sqrt{89}}{8}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 71. Giải phương trình $-x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) &= 3\sqrt[3]{3x + 3 + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) &= 3\sqrt[3]{3(x+1) + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^3+4x^2+5x+2}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 3v \\ v^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

- $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^3+4x^2+5x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$

- $u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 72. Giải phương trình $8x^3 + 9x^2 + 21x + 9 = 6\sqrt[3]{3x^2 - 3x - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (3x^2 - 15x - 8) &= 6\sqrt[3]{12x + 6 + 3x^2 - 15x - 8} \\ \Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (3x^2 - 15x - 8) &= 6\sqrt[3]{6(2x + 1) + 3x^2 - 15x - 8} \end{aligned}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{3x^2 + 9x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^2 - 15x - 8) = 6v \\ v^3 - (3x^2 - 15x - 8) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{3x^2 + 9x + 4} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 3x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow 8x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = -\frac{5}{3}x^3 \Leftrightarrow x + 1 = -x\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 73. Giải phương trình $x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} = \sqrt[3]{x(5x^2 + 9x + 3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4 &= 3\sqrt[3]{5x^3 + 9x^2 + 3x} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) &= 3\sqrt[3]{6x + 3 + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 3} \\ \Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) &= 3\sqrt[3]{3(2x + 1) + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{5x^3 + 9x^2 + 3x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) = 3v \\ v^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{5x^3 + 9x^2 + 3x} \Leftrightarrow (2x + 1)^3 = 5x^3 + 9x^2 + 3x \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 5x^3 + 9x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x + 1 = -x\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 74. Giải phương trình $13x^3 - 3x^2 + 12x - 6 = 2\sqrt[3]{x^3 - 21x^2 - 3x + 7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 26x^3 - 6x^2 + 24x - 12 &= 4\sqrt[3]{x^3 - 21x^2 - 3x + 7} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (x^3 - 21x^2 - 15x + 11) &= 4\sqrt[3]{4(3x - 1) + x^3 - 21x^2 - 15x + 11} \\ \Leftrightarrow (3x - 1)^3 - (x^3 - 21x^2 - 15x + 11) &= 4\sqrt[3]{4(3x - 1) + x^3 - 21x^2 - 15x + 11} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{x^3-21x^2-3x+7}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 21x^2 - 3x + 7) = 4v \\ v^3 - (x^3 - 21x^2 - 3x + 7) = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4v - 4u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{x^3-21x^2-3x+7} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=x^3-21x^2-3x+7 \\ &\Leftrightarrow 26x^3-6x^2+12x-8=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=-25x^3 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3=-25x^3 \Leftrightarrow x-2=-x\sqrt[3]{25} \Leftrightarrow x=\frac{2}{1+\sqrt[3]{25}} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{1+\sqrt[3]{25}}$.

Bài toán 75. Giải phương trình $5x^3 + 3x^2 + 13x + 6 = 5\sqrt[3]{3x(x^2 + x + 3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 6x^2 + 12x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) &= 5\sqrt[3]{10x + 5 + 3x^3 + 3x^2 - x - 5} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) &= 5\sqrt[3]{5(2x+1) + 3x^3 + 3x^2 - x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{3x(x^2+x+3)}=v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) = 5v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u=v &\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt[3]{3x(x^2+x+3)} \Leftrightarrow 8x^3 + 6x^2 + 12x + 1 = 3x^3 + 3x^2 + 9x \\ &\Leftrightarrow 5x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -4x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Trong các bài toán 72 đến 75, dễ thấy vẫn không nằm ngoài dạng thức sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, tuy nhiên ngoài việc nhân thêm hằng số, tách ghép, thao tác giải phương trình hệ quả cũng hết sức lưu ý. Các phương trình đa thức bậc ba thu được không có nghiệm hữu tỷ nên sử dụng máy tính trở nên khó khăn, tác giả đã lưu ý tới quý độc giả phương án sử dụng hằng đẳng thức lập phương như các bài toán trên. Về sự đẹp đẽ và mức độ tư duy thì chưa cao, nhưng có thể nói nó rất cơ bản, rất đối thân thương, kiểu xấu xí gây sự chú ý.

Bài toán 76. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 29x + 3 = 17\sqrt[3]{9x^2 - 9x + 15}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (9x^2 - 26x - 2) &= 17\sqrt[3]{17x + 17 + 9x^2 - 26x - 2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (9x^2 - 26x - 2) &= 17\sqrt[3]{17(x+1) + 9x^2 - 26x - 2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{9x^2-9x+15}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 26x - 2) = 17v \\ v^3 - (9x^2 - 26x - 2) = 17u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 17v - 17u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 17) = 0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{9x^2-9x+15} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 9x^2 - 9x + 15 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x = 14 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} + 2. \end{aligned}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -17 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{6} + 2$.

Bài toán 77. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 16x + 40 = 13\sqrt[3]{9x^2 + 9x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (9x^2 - 4x - 32) &= 13\sqrt[3]{13x + 26 + 9x^2 - 4x - 32} \\ \Leftrightarrow (x+2)^3 - (9x^2 - 4x - 32) &= 13\sqrt[3]{13(x+2) + 9x^2 - 4x - 32} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{9x^2+9x-6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 4x - 32) = 13v \\ v^3 - (9x^2 - 4x - 32) = 13u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 13v - 13u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 13) = 0.$$

$$\begin{aligned} \triangleright u = v &\Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{9x^2+9x-6} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 9x - 6 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -15 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -15 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{15}. \end{aligned}$$

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -13 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1 - \sqrt[3]{15}$.

Bài toán 78. Giải phương trình $x(x^2 + 5x + 7) = \sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 20x^3 + 100x^2 + 140x &= 20\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144} \\ \Leftrightarrow 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) &= 20\sqrt[3]{60x + 80 + (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64)} \\ \Leftrightarrow (3x+4)^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) &= 20\sqrt[3]{20(3x+4) + 7x^3 + 8x^2 + 4x + 64} \end{aligned}$$

Đặt $3x+4=u$; $\sqrt[3]{7x^3+8x^2+64x+144}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) = 20v \\ v^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) = 20u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 20v - 20u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 20) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare u = v &\Leftrightarrow 3x+4 = \sqrt[3]{7x^3+8x^2+64x+144} \Leftrightarrow 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 = 7x^3 + 8x^2 + 64x + 64 + 80 \\ &\Leftrightarrow 20x^3 + 100x^2 + 80x - 80 = 0 \Leftrightarrow 20(x+2)(x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -20 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thao tác nhân thêm hằng số 20 trong bài toán 78 có lẽ các bạn đã khá quen thuộc với nhiều bạn

$$k(x^3 + 5x^2 + 7x) = k\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$$

$$\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (7x^3 + 8x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (7x^3 + 8x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $m^3 - 7 = k \Rightarrow m^3 = k + 7 \Rightarrow k \in \{1; 20; 57; \dots\}$, $k = 1$ thì trùng bài toán. Chọn giá trị liền kề $k = 20$, $m = 3$ và tiếp tục xông pha chiến hào, kéo pháo lên Điện Biên Phủ, lần lượt thay thế và sử dụng đồng nhất thức

$$20(x^3 + 5x^2 + 7x) = 20\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - (7x^3 + 8x^2 + cx + d) = 20\sqrt[3]{20(3x + n) + (7x^3 + 8x^2 + cx + d)}$$

$$\text{Ta có hệ thức } \begin{cases} n^3 - d = 0 \\ 20n + d = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^3 + 20n = 144 \\ 20 + n = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ d = 64 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.3n^2 - c = 140 \\ 20.3 + c = 64 \end{cases} \Leftrightarrow c = 4.$$

Bài toán 79. Giải phương trình $x^2 + 1 = \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + 1)(x + 1) = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 + 24x + 24 = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24.3x + 24 + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24(3x + 1) + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

Đặt $3x + 1 = u$; $\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 24v - 24u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 24) = 0.$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\blacksquare \quad u = v \Leftrightarrow 3x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 3x^3 + 3x^2 + 57x + 1 \\ \Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 - 48x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1\}.$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -24 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Đôi chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \{-2; 0; 1\}$.

Nhận xét.

Phép nhân hai vế của phương trình đã cho với hằng số 24 cũng không mấy khó khăn nhưng hết sức lưu ý

$$k(x^3 + x^2 + x + 1) = k\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $m^3 - 3 = k \Rightarrow m^3 = k + 3 \Rightarrow k \in \{-11; -2; 5; 24; 61; \dots\}$. Chọn các hằng số dương

Phương án 1. Với $k = 5 \Rightarrow m = 2$, quy về

$$5(x^3 + x^2 + x + 1) = 5\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = 5\sqrt[3]{5(2x + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = 5 \\ 5n + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3.2n^2 - c = 5 \\ 10 + c = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 47 \end{cases} \Rightarrow c \in \emptyset$ (Trường hợp bị loại).

Phương án 2. Với $k = 24 \Rightarrow m = 3$, quy về

$$24(x^3 + x^2 + x + 1) = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = 24\sqrt[3]{24(3x + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = 24 \\ 24n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -23 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3.3n^2 - c = 24 \\ 24.3 + c = 57 \end{cases} \Leftrightarrow c = -15$.

Từ đây có biến đổi tuần tự để đảm bảo tính chất logic, tự nhiên

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 + 24x + 24 = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24.3x + 24 + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24(3x + 1) + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

Đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 24v - 24u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 24) = 0.$$

Bài toán 80. Giải phương trình $x + 1 = \frac{\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}}{1 + x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 17x^3 + 17x^2 + 17x + 17 = 17\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17\sqrt[3]{17.3x + 17 + (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16)}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17\sqrt[3]{17(3x + 1) + (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16)}$$

Đặt $3x + 1 = u$; $\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17v \\ v^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 17v - 17u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 17) = 0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow 3x + 1 = \sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 10x^3 + 10x^2 + 43x + 1 \\ &\Leftrightarrow 17x^3 + 17x^2 - 34x = 0 \Leftrightarrow 17x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1\}. \end{aligned}$$

$$\diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -17 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 81. Giải phương trình $x^4 + \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x^3 - x^2 - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 + x^2 + x - 2 + \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x^3 + x \quad [1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thu được

$$\begin{aligned} [1] &\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + x^2 + 2) = \sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + x^2 + 2) = y \\ y^3 - (x^4 + x^2 + 1) = x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2} \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm.

Bài toán 82. Giải phương trình $x^4 + 1 + 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 + x^3 + x + 1 + 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = x^3 + 4x \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = x \\ &\Leftrightarrow x^4 + x^3 + x + 1 = x^3 \Leftrightarrow x^4 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 = -2 \quad (2) \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 83. Giải phương trình $x^3 + \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} = 2x^4 - x^2 + 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2\sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} &= 4x^4 - 2x^2 + 6x - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) &= 2\sqrt[3]{2x + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) = 2y \\ y^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 2y - 2x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} \Leftrightarrow x^3 = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\ &\Leftrightarrow 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1). Với $x \neq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2. \text{ Ta thu được } t^2 - 2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

$$\text{Nếu } t = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \right\}.$$

$$\text{Nếu } t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 = 0, \Delta = -1 - 2\sqrt{2} < 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\circ \quad x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 84. Giải phương trình $4x^4 + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} = x^2 + 5x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến. Thu được

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f\left(\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x}\right) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x \Leftrightarrow 4x^4 = x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (2x^2)^2 &= (x+1)^2 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 85. Giải phương trình $2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 13x + 13 + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 5x - 5 = 2(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3) + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

$$2(x-1)^3 + 5(x-1) = 2(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3) + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta thu được

$$f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}\right) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 86. Giải phương trình $5x^4 + 14x + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2} = 15x^2 + 21 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 6(x+1) = 5(x^4 + x^3 + 7x - 2) + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)^3 + 6(x+1) = 5(x^4 + x^3 + 7x - 2) + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 + 6t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 15t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thu được

$$f(x+1) = f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}\right) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 7x - 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $7x^3 - 42x^2 - 5x + 49 = 9\sqrt[3]{6x^2 + 2x - 7}.$

2. $x^3 + 2x^2 + 7x = 5\sqrt[3]{x^2 + x + 6}.$

3. $8x^3 - 55 = 3\sqrt[3]{-12x^2 + 12x + 51}.$

4. $x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2\sqrt[3]{x^2 - x + 1}.$

5. $x^3 + 7x^2 + 10x - 6 = 4\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}.$

6. $x^3 + x^2 - 3x = 6\sqrt[3]{-2x^2 + 6x - 7}.$

7. $3x^3 - 24x^2 + 16x + 12 = 7\sqrt[3]{8x^2 - 3x - 4}.$

8. $27x^3 + 9x - 28 = 4\sqrt[3]{-27x^2 + 12x + 23}.$

9. $x^3 + 4x^2 + 12x + 11 = 2\sqrt[3]{2x^2 + 2x + 1}.$

10. $x^3 + 6x - 1 = 3\sqrt[3]{3x^2 + 5}.$

11. $x^3 + 3x + 10 = 7\sqrt[3]{3x^2 + 7x - 2}.$

12. $x^3 + x + 8 = 5\sqrt[3]{3x^2 + 7x - 2}.$

13. $x^3 + 5x^2 + 12x + 1 = \sqrt[3]{x^2 + x + 8}.$

14. $\frac{3}{2}x^2 + \sqrt[3]{3x - \frac{63}{8}} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x.$

15. $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2.$

16. $2x^3 + 13x = 15 + 3\sqrt[3]{5 - 2x - 3x^2}.$

17. $2x^3 - 8x^2 - 5x + 16 = 5\sqrt[3]{4x^2 + 5x - 8}.$

18. $x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 6\sqrt[3]{3x^2 + 2x - 4}.$

19. $4x^3 + 17x^2 + 28x + 2 = \sqrt[3]{2x^2 + 2x + 23}.$

20. $x^3 - 9x^2 - 7x - 5 = 2\sqrt[3]{6x^2 + 12x + 2}.$

21. $2x^3 - 6x^2 + 9x + 15 = 3\sqrt[3]{6x^2 - 5}.$

22. $x^3 - 3x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{2(3x^2 + 3x + 1)}.$

23. $x^3 + 5x^2 + 6x + 9 = 7\sqrt[3]{x^2 + 13x + 13}.$

24. $2x^3 + 2x^2 - 1 = \sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9}.$

25. $5x + 2 = x^3 + x^2 + 5\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 2}.$

26. $3x^2 + 8x + 11 = 2\sqrt[3]{x^3 - 3x + 12}.$

27. $-2x^2 + 12x - 6 = 3\sqrt[3]{x^3 - 4x - 8}.$

28. $9x^2 - 18x + 5 + 2\sqrt[3]{27x^3 - 9x^2 - 15x + 5} = 0.$

29. $3x^3 - 6x + 7 + 5\sqrt[3]{8x^3 + 15x^2 + 10x + 13}.$

30. $4x^2 - 28x + 36 + 3\sqrt[3]{8x^3 - 16x^2 - 20x + 52}.$

31. $3x^3 - x - 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 6x + 7}.$

32. $6x^2 + 5x + 1 = \sqrt[3]{8x^3 + 1}.$

$$33. x^2 + 3x = 2\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}.$$

$$34. \frac{(x-1)(7x-5)}{5\sqrt[3]{x^3 + 11x - 7} - 1} = \frac{1}{x}.$$

$$35. -x^4 + x^3 + 6x^2 - 6x + 33 = 2\sqrt[3]{x^4 + 20x - 21}.$$

$$36. x^3 - 27x^2 + 18x - 2 = \sqrt[3]{25x^3 + 6x - 8}.$$

$$37. 2x^3 + 13x + 3 = 6\sqrt[3]{6x^3 + 12x^2 + 5x + 4}.$$

$$38. \frac{10x^3 - x - 3}{\sqrt[3]{7x^3 + 14x + 6}} = 2.$$

$$39. -x^3 + 3x + 4 = 4\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}.$$

$$40. -2x^3 + 4x^2 + 9x + 3 = 3\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 1}.$$

$$41. -x^3 + 5x^2 + 15x + 6 = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 8}.$$

$$42. -2x^3 - 3x^2 + x + 3 = 4\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 + 6x + 2}.$$

$$43. -2x^3 - 9x^2 - 7x - 5 = 2\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 + 12x + 2}.$$

$$44. -x^3 - 3x^2 + x - 2 = 4\sqrt[3]{2x^3 + 6x^2 + 6x + 7}.$$

$$45. -x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 3\sqrt[3]{4x^3 + 12x^2 + 12x + 7}.$$

$$46. \frac{-5x^3 + 3x^2 + 2x + 21}{\sqrt[3]{6x^3 + 3x^2 + 15x + 7}} = 5.$$

$$47. -6x^3 + 3x^2 + 7 = 3\sqrt[3]{7x^3 + 3x^2 + 15x + 7}.$$

$$48. 5x^3 + 6x^2 + 16x + 7 = 5\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 - 1}.$$

$$49. 2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 2\sqrt[3]{4x^3 + 6x^2 - 1}.$$

$$50. \frac{x^3 + (x+1)^2}{\sqrt[3]{3x^3 + 7x^2 + 6x + 1}} = 1.$$

$$51. (x+1)^3 - x = \sqrt[3]{(x+1)^3 + 4x^3 + 3x}.$$

$$52. x^3 + (x+1)^2 = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 6x + 1}.$$

$$53. \frac{\sqrt[3]{x^3 + 14x^2 - 4x + 1}}{2x^3 + x^2 + 7x + 2} = \frac{1}{2}.$$

$$54. 6x^2(x+1) + 5x + 1 = \sqrt[3]{(x+1)(3x^2 + 1)}.$$

$$55. x^3 + x^2 + 4x + 1 = \sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 16x + 1}.$$

$$56. x^2(1+x) + 4x + 1 = \sqrt[3]{3x^2(1+x) - 15x + 1}.$$

$$57. -x^4 - x^3 + 9x + 3 = 3\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1}.$$

$$58. \frac{x^4 - 6x - 3}{\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 3x^2 + 1}} + 3 = 0.$$

$$59. -x^4 + 3x - 5 = 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x}.$$

$$60. -x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 3x - 5}.$$

$$61. -2x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = 2\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 9x + 7}.$$

Bài toán 87. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - 1 = (x+1)\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x-1)^3 - 3x = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x-1)+3x}$.

Đặt $x-1=t$; $\sqrt[3]{x^2+3x-1}=y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - 3x = (x+1)y \\ (x+1)t + 3x = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+1)t = y^3 + (x+1)y \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + x + 1) = 0$$

Xét hai trường hợp

- $t = y \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2+3x-1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$.
- $t^2 + yt + y^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 4\}$.

Nhận xét.

Đối với lớp bài toán này, chúng ta sử dụng đồng nhất thức như thường lệ. Lưu ý mức độ bài toán đã phức tạp hơn nguyên do dạng thức $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}$ xuất hiện với $f(x)$ có dạng đa thức thay vì hằng số, do đó phương án sử dụng hàm số tỏ ra vô hiệu. Phía trong căn thức tam thức bậc hai có hệ số x^2 là 1 nên giả định

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 1 &= (x+1)\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} \\ \Leftrightarrow (x+m)^3 - (ax+b) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x+m)+ax+b} \\ \Rightarrow \begin{cases} m^3 - b = -1 \\ m + b = -1 \end{cases} &\Rightarrow m^3 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1; b = 0; a = -3 \end{aligned}$$

Bài toán 88. Giải phương trình $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x+3} = \sqrt[3]{(x-2)(x+4)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x+3)\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 - x + 2 &= (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x-2)+x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x-2=u$; $\sqrt[3]{x^2+2x-8}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x + 2 = (x+3)v \\ v^3 - x + 2 = (x+3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+3)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\Rightarrow u^2 + uv + v^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3}$$

$$u = v \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 5\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thao tác đồng nhất hệ số khá đơn giản, chú ý hệ số của hạng tử chứa x^2 bằng 1 nên

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x+3)\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8}$$

$$\Leftrightarrow (x+m)^3 - (ax+b) = (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x+m) + ax+b}$$

Đồng nhất đa thức gắn với căn $\begin{cases} m^3 - b = -6 \\ 3m + b = -8 \end{cases} \Rightarrow m^3 + 3m = -14 \Leftrightarrow (m+2)(m^2 + 2m + 7) = 0 \Leftrightarrow m = -2.$

Khi đó $m = -2 \Rightarrow b = -2; m+3+a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (x-2)^3 - x + 2 = (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x-2) + x-2}.$

Bài toán 89. Giải phương trình $x^3 + 5x^2 + 11x + 10 = (x+5)\sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với $(x+2)^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+2) + x^2 + x - 2}.$

Đặt $x+2 = t; \sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)y \\ (x+5)t + x^2 + x - 2 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+5)t = (x+5)y + y^3 \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + x+5) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $t = y \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^2 + 5x + 8$
 $\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- $t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + x + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0.$

Nhận xét.

- Lưu ý hệ số của hạng tử chứa x^2 của tam thức trong căn thức bằng 2 nên ta sử dụng đồng nhất thức theo hướng

$$x^3 + 5x^2 + 11x + 10 = (x+5)\sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8}$$

$$\Leftrightarrow (x+m)^3 - (x^2 + ax + b) = (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+m) + (x^2 + ax + b)}$$

Đồng nhất thức $\begin{cases} m^3 - b = 10 \\ 5m + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 + 5m = 18 \\ b = 8 - 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 11 \\ m + 5 + a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$

Suy ra $(x+2)^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+2) + x^2 + x - 2}.$

- Bài toán 89 sau khi quy về hệ phương trình thu được hai hệ quả, trong đó hệ quả thứ hai tỏ ra khó khăn cho không ít bạn học sinh. Lưu ý biến đổi theo hai phương án đưa về tổng của các bình phương để chứng minh tính vô nghiệm

Phương án 1.

$$t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x^2 + 8x + 8)^2} + x + 5 = 0 \quad (1).$$

Phương án 2

$$\begin{aligned}
 t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + x + 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \quad (2).
 \end{aligned}$$

Rõ ràng ẩn y là hàm số theo x , hai phương án đều là phân tích hằng đẳng thức nhưng có thể thấy việc chứng minh phương trình (1) vô nghiệm khó khăn, thậm chí bất khả thi, trong khi phương án 2 tỏ ra hiệu quả khi (2) dễ thấy vô nghiệm do vậy chúng ta chọn con đường ngắn hơn với ẩn t .

Bài toán 90. Giải phương trình $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 8}{x + 8} = \sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -8$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 8 = (x + 8)\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + 1) + (x^2 - 7)}.$$

Đặt $x + 1 = t$; $\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)y \\ (x + 8)t + x^2 - 7 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x + 8)t = (x + 8)y + y^3 \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + ty + y^2 + x + 8) = 0.$$

- $t = y \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 2\}$.
- $t^2 + yt + y^2 + x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x + 1)^2 + x + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{20}{3}$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; 0; 2\}$.

Nhận xét.

Bài toán số 90 này tương tự bài toán 89, quy trình xử lý đồng nhất thức

$$\begin{aligned}
 x^3 + 2x^2 + 3x + 8 &= (x + 8)\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \\
 &\Leftrightarrow (x + m)^3 - (x^2 + ax + b) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + m) + x^2 + ax + b}
 \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 8 \\ 8m + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 8m = 9 \\ b = 1 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ b = -7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 3 \\ m + 8 + a = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Do đó ta thu được $(x + 1)^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + 1) + (x^2 - 7)}$.

Bài toán 91. Giải phương trình $x(x^2 + 2) = 4x^2 + 11 + (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^3 - 4x^2 + 2x - 11 &= (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x - 1) + x^2 + x + 10}
 \end{aligned}$$

Đặt $x - 1 = t$; $\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)y \\ y^3 = (2x + 11)t + x^2 + x + 10 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = (2x + 11)(y - t) \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + yt + y^2 + 2x + 11) = 0$$

$$\bullet \quad t^2 + yt + y^2 + 2x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + 2x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{35}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x^2 + 10x - 1 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 7\}.$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{-1; 0; 7\}$.

Nhận xét.

Do hệ số hạng tử chứa x^2 của tam thức bậc hai phía trong căn bằng 3 nên ta định hướng

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x - 11 &= (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \\ \Leftrightarrow (x + m)^3 - (x^2 + ax + b) &= (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x + m) + x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} m^3 - b = -11 \\ 11m + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 11m = -12 \\ b = -1 - 11m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = 10 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 2 \\ 2m + 11 + a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Thu được $(x - 1)^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x - 1) + x^2 + x + 10}$. Thao tác đặt ẩn phụ là cơ bản.

Bài toán 92. Giải phương trình $x^3 + 7x^2 + 16x + 5 = (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x - 3 &= (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 + x^2 + 4x - 3 &= (1 - 2x)\sqrt[3]{(1 - 2x)(x + 2) - x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $x + 2 = u; \sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)v \\ v^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (1 - 2x)(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x) = 0.$$

Xét các khả năng

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = -3x^2 - 7x + 5 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 19x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; -3 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}\}. \\ \blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 1 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{11}{3} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Nhận xét.

Sử dụng phương án đồng nhất thức

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 16x + 5 &= (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \\ \Leftrightarrow (x + m)^3 + x^2 - ax - b &= (1 - 2x)\sqrt[3]{(1 - 2x)(x + m) - x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m^3 - b = 5 \\ m + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + m = 10 \\ b = 5 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 16 \\ -2m + 1 + a = -7 \end{cases} \Rightarrow a = -4.$$

Từ đó thu được phép ẩn đặt ẩn phụ như trên.

Bài toán 93. Giải phương trình $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2} = 8x^2 - 13x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 - 13x^2 + 7x &= (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - x^2 + x + 1 &= (x+1)\sqrt[3]{2x^2 + x - 1 + x^2 - x - 1} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1 = u; \sqrt[3]{3x^2 - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + x+1) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 3x^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{8}; 1\right\}. \\ \diamond u^2 + uv + v^2 + x+1 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3x^2 - 2x + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + (x-1)^2 + 2x^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 1; x = -\frac{1}{8}$.

Nhận xét.

Thao tác xử lý ẩn phụ như sau

$$\begin{aligned} 8x^3 - 13x^2 + 7x &= (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow (2x+m)^3 - (x^2 + ax + b) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x+m) + x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất theo thứ tự } \begin{cases} m^3 - b = 0 \\ m + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + m = -2 \\ b = m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 6m^2 - a = 7 \\ m + 2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

Do đó thu được $(2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1}$.

Bài toán 94. Giải phương trình $9x^2 + \frac{12}{x} + 1 = 12x + \left(1 + \frac{4}{x}\right)\sqrt[3]{(x-1)(18x+57)+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9x^3 - 12x^2 + x + 12 &= (x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 36x^2 + 3x + 36 &= 3(x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(3x^2 + 11x - 4) + 9x^2 + 6x - 37} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x-1) + 9x^2 + 6x - 37} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1 = u; \sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 + 6x - 37) = 3(x+4)v \\ v^3 - (9x^2 + 6x - 37) = 3(x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x + 12 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 18x^2 + 39x - 49 \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 45x^2 - 30x + 48 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x^2 - 6x - 16) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3-3\sqrt{17}}{9}; \frac{3+3\sqrt{17}}{9}; 1 \right\}. \\ \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 3x + 12 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{27}{4} \left(x - \frac{10}{9} \right)^2 = -\frac{53}{12} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Bài toán này đã xuất hiện thao tác nhân hai vế của phương trình với hằng số 3. Sở dĩ như vậy để làm xuất hiện hằng đẳng thức lập phương đẹp hơn với số 27. Ta chú ý

$$\begin{aligned} 9x^3 - 12x^2 + x + 12 &= (x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 36x^2 + 3x + 36 &= 3(x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow (3x+m)^3 - (9x^2 + ax + b) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x+m) + 9x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 36 \\ 12m + b = -49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 12m = -13 \\ b = -49 - 12m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = -37 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 9m^2 - a = 3 \\ 3(m+12) + a = 39 \end{cases} \Leftrightarrow a = 6$$

Do đó ta thu được

$$\begin{aligned} 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(3x^2 + 11x - 4) + 9x^2 + 6x - 37} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x-1) + 9x^2 + 6x - 37} \end{aligned}$$

Bài toán 95. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 2x + 11 = \sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 27x^3 - 36x^2 + 18x + 99 &= 9\sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 - 9x - 100) &= 9(x+5)\sqrt[3]{9(3x^2 + 10x - 5) + 9x^2 - 9x - 100} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 - 9x - 100) &= 9(x+5)\sqrt[3]{9(x+5)(3x-1) + 9x^2 - 9x - 100} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1 = u$; $\sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 9x - 100) = 9(x+5)v \\ v^3 - (9x^2 - 9x - 100) = 9(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 9(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 9(x+5) = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 9(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 9(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 9x + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{183}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+3)^2 = -39 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{36x^2+117x-145} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=36x^2+117x-145 \\ &\Leftrightarrow 27x^3-63x^2-108x+144=0 \Leftrightarrow 3x^3-7x^2-12x+16=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-4x-16)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{2+2\sqrt{13}}{3}; \frac{2-2\sqrt{13}}{3}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 96. Giải phương trình $x(x-1)^2 = \sqrt[3]{4x^2+14x-17} - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x + 1 &= \sqrt[3]{4x^2+14x-17} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 8 &= 8\sqrt[3]{4x^2+14x-17} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^2 - 2x - 9) &= 8\sqrt[3]{16x-8+(4x^2-2x-9)} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^2-2x-9) &= 8\sqrt[3]{8(2x-1)+(4x^2-2x-9)} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{4x^2+14x-17}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x + 7) = 8v \\ v^3 - (4x^2 - 2x + 7) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 8 &= 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \blacksquare \quad 2x-1 &= \sqrt[3]{4x^2+14x-17} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 4x^2 + 14x - 17 \\ &\Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=-1; x=1; x=2$.

Bài toán 97. Giải phương trình $(x+7)(x^2-9x+1-\sqrt[3]{20x^2+102x-121})+63x+1=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+7)(x^2-9x+1) + 63x + 1 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x + 8 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 64 &= 8(x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^2 - 2x - 65) &= 8(x+7)\sqrt[3]{8(2x^2+13x-7)+4x^2-2x-65} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^2-2x-65) &= 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(2x-1)+4x^2-2x-65} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{20x^2+102x-121}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)v \\ v^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8(x+7)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8(x+7) = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 20x^2 + 102x - 121 \Leftrightarrow 8x^3 - 32x^2 - 96x + 120 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 12x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 15) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{69}}{2}; \frac{3-\sqrt{69}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u^2 + uv + v^2 + 8(x+7) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 8(x+7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 8(x+7) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{164}{3} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thoạt tiên bài toán số 97 hình thức đôi chút mù mịt, khủng bố, mất định hướng. Tuy nhiên các bạn học sinh nên mạnh dạn, xông pha khai triển thu được

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x + 8 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (x+m)^3 - (19x^2 + ax + b) = (x+7)\sqrt[3]{(x+7)(x+m) + 19x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Trước hết đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 8 \\ 7m + b = -121 \end{cases} \Rightarrow m \notin \mathbb{Z} \text{ (Loại).}$$

Thoái chuyển qua phương án 2, nhân thêm hằng số k

$$\begin{aligned} k(x^3 - 2x^2 + x + 8) &= k(x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (mx+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = k(x+7)\sqrt[3]{k(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng } m^3 = k \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = m^3(x+7)\sqrt[3]{m^3(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c}.$$

Nếu $m=1$ thì trở lại biến đổi ban đầu. Thử nghiệm với m tăng dần ta có

$$\begin{aligned} m=2 &\Rightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 64 = 8(x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (2x+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} n^3 - c = 64 \\ 56n + c = -121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 56n = -57 \\ c = n^3 - 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ c = -65 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.4n^2 - a = -16 \\ 3.2n - b = 8 \\ 8m + a = 20 \\ 8(n+7m) + b = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x-1)^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(2x-1) + 4x^2 - 2x - 65}.$$

Bài toán 98. Giải phương trình $(x-1)^3 + 9 = 2x + (x+6)\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x + 8 &= (x+6)\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 81x^2 + 27x + 216 = 27\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)\sqrt[3]{27(3x^2 + 16x - 12) + 27x^2 + 9x - 224}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)\sqrt[3]{27(x+6)(3x-2) + 27x^2 + 9x - 224}$$

Đặt $3x-2=u$; $\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)v \\ v^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = 27(x+6)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 27(x+6) = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 108x^2 + 441x - 548$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 162x^2 - 405x + 540 = 0 \Leftrightarrow 27(x-1)(x^2 - 5x - 20) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{5+\sqrt{105}}{2}; \frac{5-\sqrt{105}}{2}\right\}$
- $u^2 + uv + v^2 + 27(x+6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(3x-2)^2 + 27(x+6) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{27}{4}x^2 - 9x + 165 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{27}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = -162$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \left\{1; \frac{5+\sqrt{105}}{2}; \frac{5-\sqrt{105}}{2}\right\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $(x-1)(2x^2+1)+24=(x+7)\sqrt[3]{144x^2+844x-961}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 + x + 23 &= (x+7)\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \\ \Leftrightarrow 64x^3 - 64x^2 + 32x + 736 &= 32(x+7)\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \\ \Leftrightarrow 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 - (16x^2 - 20x - 737) &= 32(x+7)\sqrt[3]{32(4x^2 + 27x - 7) + 16x^2 - 20x - 737} \\ \Leftrightarrow (4x-1)^3 - (16x^2 - 20x - 737) &= 32(x+7)\sqrt[3]{32(x+7)(4x-1) + 16x^2 - 20x - 737} \end{aligned}$$

Đặt $4x-1=u$; $\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (16x^2 - 20x - 737) = 32(x+7)v \\ v^3 - (16x^2 - 20x - 737) = 32(x+7)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = 32(x+7)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 32(x+7) = 0 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 4x-1 = \sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \Leftrightarrow 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = 144x^2 + 844x - 961$
 $\Leftrightarrow 64x^3 - 192x^2 - 832x + 960 = 0 \Leftrightarrow 32(x-1)(x+3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1; 5\}$.
- $u^2 + uv + v^2 + 32(x+7) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(4x-1)^2 + 32(x+7) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + 12x^2 + 26x + \frac{899}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + 12\left(x+\frac{13}{12}\right)^2 = -\frac{632}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 100. Giải phương trình $8x^2 - 45x + 187 = \frac{773}{x+4} + 4\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+4)(8x^2 - 45x + 187) - 773 &= 4(x+4)\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7x - 25 &= 4(x+4)\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (x^2 - x + 24) &= 4(x+4)\sqrt[3]{4(2x^2 + 7x - 4) + x^2 - x + 24} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x + 24) &= 4(x+4)\sqrt[3]{4(x+4)(2x-1) + (x^2 - x + 24)} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x + 24) = 4(x+4)v \\ v^3 - (x^2 - x + 24) = 4(x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 4(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 4(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + \frac{67}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{197}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 2x-1 &= \sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 9x^2 + 27x + 8 \\ \Leftrightarrow 8x^3 &= 21x^2 + 21x + 7 \Leftrightarrow \frac{8}{3}x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{11}{3}x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{11}{3}x^3 &= (x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{\frac{11}{3}} = x+1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{\frac{11}{3}} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 101. Giải phương trình $2(2x^2 - 13x + 86) = 3\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} + \frac{876}{x+5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x+5)(2x^2 - 13x + 86) - 876 &= 3(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 21x - 16 &= 3(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 42x - 32 &= 6(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 36x - 31 &= 6(x+5)\sqrt[3]{6(2x^2 + 9x - 5) - 36x + 31} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 36x - 31 &= 6(x+5)\sqrt[3]{6(x+5)(2x-1) - 36x + 31} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{12x^2+12x+1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3+6x-13=6(x+5)v \\ v^3+6x-13=6(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=6(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+6(x+5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond u=v &\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{12x^2+12x+1} \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=12x^2+18x+1 \\ &\Leftrightarrow 8x^3=24x^2+12x+2 \Leftrightarrow 4x^3=12x^2+6x+1 \Leftrightarrow 12x^3=8x^3+12x^2+6x+1 \\ &\Leftrightarrow 12x^3=(2x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{12}=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{12}-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond u^2+uv+v^2+6(x+5)=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+6(x+5)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+6(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-30 \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt[3]{12}-2}$.

Bài toán 102. Giải phương trình $\frac{x^3-6x^2+21x+50}{\sqrt[3]{18x^2+24x+12}}=3(2x+9) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $18x^2+24x+12 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+21x+50 &= 3(2x+9)\sqrt[3]{18x^2+24x+12} \\ &\Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8-(12x^2-9x-42)=3(2x+9)\sqrt[3]{3(2x^2+13x+18)+12x^2-9x-42} \\ &\Leftrightarrow (x+2)^3-(12x^2-9x-42)=3(2x+9)\sqrt[3]{3(2x+9)(x+2)+12x^2-9x-42} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{18x^2+24x+12}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(12x^2-9x-30)=3(2x+9)v \\ v^3-(12x^2-9x-30)=3(2x+9)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=3(2x+9)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+3(2x+9)=0 \end{cases}$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare u^2+uv+v^2+3(2x+9)=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+3(2x+9)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(x+2)^2+3(2x+9)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(x+6)^2=-3 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \blacksquare u=v &\Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{18x^2+24x+12} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8=18x^2+24x+12 \Leftrightarrow x^3=12x^2+12x+4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3=3x^2+3x+1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=x+1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-1\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$.

Bài toán 103. Giải phương trình $x^2-7x+36-\sqrt{x^3+16x^2+62x-78}=\frac{174}{x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2-7x+36)-174 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow x^3-2x^2+x+6 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow 7x^3-14x^2+7x+42 &= 7(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1-(x^3+2x^2-x-43) &= 7(x+5)\sqrt[3]{7(2x^2+9x-5)+(x^3+2x^2-x-43)} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^3+2x^2-x-43) &= 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x-1)+(x^3+2x^2-x-43)}\end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(x^3+2x^2-x-43)=7(x+5)v \\ v^3-(x^3+2x^2-x-43)=7(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=7(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+7(x+5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\circ \quad u=v &\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=x^3+16x^2+62x-78 \\ &\Leftrightarrow 7x^3-28x^2-56x+77=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x-11)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{53}}{2}; \frac{3-\sqrt{53}}{2}\right\}$$

$$\circ \quad u^2+uv+v^2+7(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+7(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+7(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{413}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

Nhắc lại dạng thức $(mx+n)^3-(ax^3+bx^2+cx+d)=f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^3+bx^2+cx+d)}$.

Bài toán số 103 mở đầu cho sự xuất hiện của $g(x)$ dưới dạng đa thức bậc ba, $f(x)$ vẫn có dạng nhị thức bậc nhất.

Ngoài ra thao tác đặt ẩn phụ còn thông qua việc nhân hai vế với hằng số 7. Tác giả xin đi sâu phân tích cụ thể Trước hết biến đổi và do trong căn là đa thức bậc ba nên ta giả định

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2-7x+36)-174 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow x^3-2x^2+x+6 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow (mx+n)^3-(x^3+bx^2+cx+d) &= (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(mx+n)+(x^3+bx^2+cx+d)}\end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} n^3-d=6 \\ 5n+d=-78 \end{cases} \Rightarrow n^3+5n=-72 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \text{ (Loại).}$$

Thoái chuyển qua phương án nhân thêm hằng số k

$$\begin{aligned}k(x^3-2x^2+x+6) &= k(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow (mx+n)^3-(x^3+bx^2+cx+d) &= k(x+5)\sqrt[3]{k(x+5)(mx+n)+(x^3+bx^2+cx+d)}\end{aligned}$$

Để ý hệ số của hạng tử chứa x^3 phía ngoài căn thì $m^3-1=k \Rightarrow m^3=k+1$. Nếu $k=1$ thì trùng lặp biến đổi ban đầu. Thử nghiệm với các giá trị k tiếp theo, nếu $k=7 \Rightarrow m=2$. Khi đó ta có

$$7(x^3 - 2x^2 + x + 6) = 7(x+5)\sqrt[3]{x^3 + 16x^2 + 62x - 78}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x+n) + (x^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 - d = 42 \\ 35n + d = -78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 35n = -36 \\ d = n^3 - 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ d = -43 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.4n - b = -14 \\ 3.2n^2 - c = 7 \\ 14 + b = 16 \\ 7(n+10) + c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Do đó ta quy về

$$7x^3 - 14x^2 + 7x + 42 = 7(x+5)\sqrt[3]{x^3 + 16x^2 + 62x - 78}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (x^3 + 2x^2 - x - 43) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(2x^2 + 9x - 5) + (x^3 + 2x^2 - x - 43)}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^3 + 2x^2 - x - 43) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x-1) + (x^3 + 2x^2 - x - 43)}$$

Bài toán 104. Giải phương trình $\frac{6x^2 + 11x + 13}{x + 13} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -13$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2 + 11x + 13 = (x+13)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \Leftrightarrow (x+2)^3 - (x^3 + x - 5) = (x+13)\sqrt[3]{(x+13)(x+1) + x^3 + x - 5}.$$

Đặt $x+2=t$; $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} = y$ ta thu được phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^3 + x - 5) = (x+13)y \\ (x+13)t + x^3 + x - 5 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+13)t = (x+13)y + y^3 \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + ty + y^2 + x+13) = 0$$

$$\bullet \quad t^2 + yt + y^2 + x + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{32}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + x^2 + 15x + 8 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Thử lại thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 105. Giải phương trình $\frac{x^2 - x + 2}{x + 6} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1 + x(x^2 + x + 13)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2 - 3x + 6 = (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{x^2 + 7x + 6 + x^3 + 6x - 5}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+1) + x^3 + 6x - 5}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)v \\ v^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+6)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^2 + 13x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 5\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u^2 + uv + v^2 + x + 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{14}{3} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 0; x = 5$.

Nhận xét.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x + 6 &= (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(mx+n) + x^3 + bx^2 + cx + d} \end{aligned}$$

Để thấy phía ngoài căn thức có dạng tam thức bậc hai nên $m = 1$. Ta có

$$(x+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+n) + x^3 + bx^2 + cx + d}.$$

$$\text{Đồng nhất thức } \begin{cases} n^3 - d = 6 \\ 6n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 6n = 7 \\ d = 1 - 6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3n - b = 3 \\ 3n^2 - c = -3 \\ 1 + b = 1 \\ n + 6 + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{Do đó quy về } (x+1)^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+1) + x^3 + 6x - 5}.$$

Bài toán 106. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6}} = \frac{6x+17}{(x+6)^2 - 72} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 - x^2 + 5x - 6 \neq 0 \\ |x+6| \neq 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 12x - 36 &= (6x+17)\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)\sqrt[3]{6x^2 + 5x - 34 + x^3 - 7x^2 + 28} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)\sqrt[3]{(6x+17)(x-2) + x^3 - 7x^2 + 28} \end{aligned}$$

Đặt $x-2 = u; \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)v \\ v^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (6x+17)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x-2 &= \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - x^2 + 5x - 6 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{5}; 1\right\}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 6x + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 6x + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-2)^2 + 6x+17=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-2)^2 = -17 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x = \frac{2}{5}; x = 1$.

Bài toán 107. Giải phương trình $\frac{3x^3 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{2x(x^2 + 6)}} = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 - 8x^2 - 6x - 2 &= (2x+1)\sqrt[3]{2x(x^2+6)} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) &= (2x+1)\sqrt[3]{4x^2 - 1 + 2x^3 - 4x^2 + 12x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) &= (2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)(2x-1) + 2x^3 - 4x^2 + 12x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u; \sqrt[3]{2x(x^2+6)}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) = (2x+1)v \\ v^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) = (2x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x+1)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x+1=0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2x+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 2x+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{5}{3} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

$$\circ \quad u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{2x(x^2+6)} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^3 + 12x \Leftrightarrow 6x^3 = 12x^2 + 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow 14x^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 14x^3 = (2x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{14} = 2x+1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{14}-2)=1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{14}-2}.$$

Đổi chiếu điều kiện và thử trực tiếp ta thu được nghiệm duy nhất như trên.

Bài toán 108. Giải phương trình $\frac{x^3 - 27x + 41}{2x+13} + 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq -13$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} -x^3 + 27x - 41 &= 3(2x+13)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x^2 + 11x - 13) + 2x^3 - 3x^2 - 24x + 40} \\ &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x+13)(x-1) + (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40)} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x+13)(x-1) + (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40)} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) = 3(2x+13)v \\ v^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) = 3(2x+13)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(2x+13)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 3(2x+13)=0 \end{cases}$$

- $$u^2 + uv + v^2 + 3(2x+13) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3(2x+13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2 + 3(2x+13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{159}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+3)^2 = -33 \text{ (Vô nghiệm).}$$
- $$x-1 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 + 3x^2 + 9x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x+1 = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}.$$

Đổi chiều điều kiện ta kết luận nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}.$

Bài toán 109. Giải phương trình $\frac{5x^3 + 13x^2 + 47x + 21}{2\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2}} = x + 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \neq 0.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$5x^3 + 13x^2 + 47x + 21 = 2(x+9)\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 3x^3 + x^2 + 41x + 20 = 2(x+9)\sqrt[3]{2(2x^2 + 19x + 9) + 3x^3 - x^2 - 41x - 20}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - 3x^3 + x^2 + 41x + 20 = 2(x+9)\sqrt[3]{2(x+9)(2x+1) + 3x^3 - x^2 - 41x - 20}$$

Đặt $2x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 - x^2 - 41x - 20) = 2(x+9)v \\ v^3 - (3x^3 - x^2 - 41x - 20) = 2(x+9)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2(x+9)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2(x+9) = 0 \end{cases}$$

- $$u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow 5x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 = -\frac{2}{3}x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}.$$
- $$u^2 + uv + v^2 + 2(x+9) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x+18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + 2x+18 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{50}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}.$

Bài toán 110. Giải phương trình $x(8x^2 + x + 12) = \frac{32}{3} + (x+8)\sqrt[3]{(x-1)(3x^2 - 18x + 3)} - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 8x^3 + x^2 + 12x &= \frac{32}{3} + (x+8)\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x - 9} \\
 \Leftrightarrow 24x^3 + 3x^2 + 36x - 32 &= 3(x+8)\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x - 9} \\
 \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 31) \\
 &= 3(x+8)\sqrt[3]{3(3x^2 + 16x - 8) + 3x^3 - 30x^2 - 27x + 31} \\
 \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 31) &= 3(x+8)\sqrt[3]{3(x+8)(3x-1) + 3x^3 - 30x^2 - 27x + 31}
 \end{aligned}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x + 7}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 15) = 3(x+8)v \\ v^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 15) = 3(x+8)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(x+8)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 3(x+8)=0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x + 7} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^3 - 21x^2 + 21x + 7 \\
 &\Leftrightarrow 24x^3 = 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow 25x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{25} = x+2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{25}-1}. \\
 \checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3(x+8) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3x+24=0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 3x+24=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{27}{4}\left(x-\frac{1}{9}\right)^2 = -\frac{74}{3} \text{ (Vô nghiệm).}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{\sqrt[3]{25}-1}$.

Bài toán 111. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} + \frac{17}{x^2 + x + 17} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 (x^2 + x + 17)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} + 17 &= 2(x^2 + x + 17) \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 17 &= (x^2 + x + 17)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} \\
 \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3 + x^2 + x - 16) &= (x^2 + x + 17)\sqrt[3]{(x^2 + x + 17)(x+1) + x^3 + x^2 + x - 16}
 \end{aligned}$$

Đặt $x+1=t$; $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1}=y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^3 + x^2 + x - 16) = (x^2 + x + 17)y \\ y^3 = (x^2 + x + 17)t + (x^3 + x^2 + x - 16) \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = (x^2 + x + 17)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + x^2 + x + 17) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad t^2 + yt + y^2 + x^2 + x + 17 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t+y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x^2 + x + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t+y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x+\frac{5}{7}\right)^2 = -\frac{118}{7}. \\
 \bullet \quad t=y &\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + 3x^2 + 19x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow x=0.
 \end{aligned}$$

Thử lại ta có $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 112. Giải phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 + x - 3}{\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4}} = x(2x-1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x^2 + x + 4 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + x - 3 &= (2x^2 - x)\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 4 &= (2x^2 - x)\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - x + 2x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x+4) &= (2x^2 - x)\sqrt[3]{(2x^2 - x)(x+1) + 2x + 4}\end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x+4) = (2x^2 - x)v \\ v^3 - (2x+4) = (2x^2 - x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 - x)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - x = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u=v \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + x^2 + x + 4$
 $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.
- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 2x^2 - x = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{11}{4}\left(x+\frac{1}{11}\right)^2 = -\frac{8}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 113. Giải phương trình $x^2 + 3x + 5 = \frac{1}{x} + (3x+1)\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + 5x - 1 &= (3x^2 + x)\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x - 2 &= (3x^2 + x)\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 + x - 2x + 2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2x - 2 &= (3x^2 + x)\sqrt[3]{(3x^2 + x)(x+1) - 2x + 2}\end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 2x - 2 = (3x^2 + x)v \\ v^3 + 2x - 2 = (3x^2 + x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^2 + x)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^2 + x = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^3 + 4x^2 - x + 2$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}; \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right\}$.
- $u^2 + uv + v^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả lưu ý phép phân tích hằng đẳng thức, lập luận vô nghiệm trong trường hợp thứ hai (đối với lớp bài toán này nói chung). Do các bài toán sau khi biến đổi hệ quả thường xuất hiện phân thức nên khả năng nhầm lẫn, sai sót rất dễ xảy ra. Ví dụ để kiểm tra biến đổi

$$\left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}.$$

Chú ý các đa thức $f(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x$ và $g(x) = \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$. Rõ ràng là $f(x) \equiv g(x)$.

Từ đó có thể thử nghiệm $f(1) = g(1), f(0) = g(0), \dots$ Trái điều này tức là bạn đã biến đổi sai !

Bài toán 114. Giải phương trình $\frac{x^3+3x^2+3}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1}} = (x+1)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3+3x^2+6x-1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+3 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1} \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-3x+2 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1+3x-2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3-3x+2 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2(x+1)+3x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u; \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1}=v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-3x+2=(x+1)^2 v \\ v^3-3x+2=(x+1)^2 u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=(x+1)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+(x+1)^2=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad u=v &\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{(x+1)^2(x+1)+3x-2} \Leftrightarrow (x+1)^3=(x+1)^3+3x-2 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}. \\ \circ \quad u^2+uv+v^2+(x+1)^2 &=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v=0 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ v=\sqrt[3]{-5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=\frac{2}{3}$.

Bài toán 115. Giải phương trình $\frac{32x^3+48x^2+9}{4x^2+20x+13} = \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+20x+13 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 32x^3+48x^2+9 &= (4x^2+20x+13) \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \\ \Leftrightarrow 8x^3+12x^2+\frac{9}{4} &= \left(x^2+5x+\frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{19}{2}x + \frac{9}{4} + 6x - \frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{\left(x^2 + 5x + \frac{9}{4}\right)(2x+1) + 6x - \frac{5}{4}}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)v \\ v^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - \frac{19}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(12x^2 + 2x - 19) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-1 + \sqrt{229}}{12}; \frac{-1 - \sqrt{229}}{12}\right\}.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 4(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \sqrt[3]{-\frac{11}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Thử lại trực tiếp, kết luận phương trình có hai nghiệm $S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{229}}{12}; \frac{-1 - \sqrt{229}}{12}\right\}$.

Bài toán 116. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17}} = \frac{x(2x-3)}{x^2(x+4) - 9(x+1)} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 15x + 17 \neq 0 \\ x^2(x+4) - 9(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 6x + 2x^2 + 21x + 17}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{(2x^2 - 3x)(x+2) + 2x^2 + 21x + 17}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x)v \\ v^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 - 3x)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x + 2 = u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 + 3x^2 + 15x + 17$
 $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -10 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -10 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{10}.$
- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x^2 - 3x = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 117. Giải phương trình $x^2 + 5x + \frac{1}{x} = 4 + (3x-1)\sqrt[3]{3x(x^2+2)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 4x + 1 &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{3x^3 + 6x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x^2 - 7x &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{3x^3 + 6x} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2x^2 - 7x &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{(3x^2 - x)(x+1) - 2x^2 + 7x} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{3x^3 + 6x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 2x^2 - 7x = (3x^2 - x)v \\ v^3 + 2x^2 - 7x = (3x^2 - x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^2 - x)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 6x} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^3 + 6x \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -x^3 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -x^3 \Leftrightarrow x-1 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x + \frac{1}{15}\right)^2 = -\frac{11}{15}.$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 118. Giải phương trình $\frac{4x^3 + 5x^2 + 2x + 1}{\sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1}} + 3x = 1 + x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $4x^3 - 8x^2 + 1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^2 + 2x - 1) &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{2(2x^3 - 5x^2 - x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - (2x^2 + 2x - 1) &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x+1) + 2x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1)v \\ v^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2(x^2 - 3x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} = v \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 4x^3 - 8x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 20x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x + 1)^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{23}{10} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Không nằm ngoài phạm vi dạng thức sử dụng hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Trong đó đa thức $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$. Rõ ràng mức độ phức tạp đã tăng cao so với các bài toán trước đây. Hơn nữa đối với bài toán số 118 này còn có sự xuất hiện thao tác nhân thêm hằng số. Vì bên ngoài căn thức là đa thức bậc ba nên trường hợp xấu nhất $g(x)$ là đa thức bậc ba. Giả định

$$\begin{aligned} 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 &= (x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của x^3 ta có $\begin{cases} m^3 - a = 4 \\ m + a = 4 \end{cases} \Rightarrow m^3 + m = 8 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$

Do đó bắt buộc nhân thêm hằng số k . Ta thử nghiệm

$$\begin{aligned} k(4x^3 + 5x^2 + 2x + 1) &= k(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = k(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{k(x^2 - 3x + 1)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của x^3 ta có $\begin{cases} m^3 - a = 4k \\ mk + a = 4 \end{cases} \Rightarrow m^3 + mk = 4k + 4.$

Phương trình hai ẩn trên khó có thể có cách nào khác ngoài thử chọn hằng số nguyên.

Nếu $k = 2 \Rightarrow m^3 + 2m = 12 \Rightarrow m = 2$. Nếu $k = 3 \Rightarrow m^3 + 3m = 16 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$

Xử lý ngay trường hợp đẹp đẽ $m = k = 2 \Rightarrow a = 0$, thu được

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (bx^2 + cx + d) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x + n) + (bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Tiếp tục đồng nhất các hạng tử với số mũ bé hơn

$$\begin{cases} n^3 - d = 2 \\ 2n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 2n = 3 \\ d = 1 - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 12n - b = 10 \\ 2(n - 6) + b = -8 \\ 6n^2 - c = 4 \\ 2(-3n + 2) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Do đó ta có biến đổi

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(2x^3 - 5x^2 - x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Bài toán 119. Giải phương trình $x^2 + 2 + \frac{2}{x-2} = (x-1)\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 2x - 2 &= (x-1)(x-2)\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1} \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 12x^2 + 12x - 12 &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{12x^3 - 42x^2 + 42x - 12 + 2x^3 - 6x + 11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^3 - 6x + 11) &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{6(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) + 2x^3 - 6x + 11} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^3 - 6x + 11) &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{6(x^2 - 3x + 2)(2x-1) + 2x^3 - 6x + 11} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 6x + 11) = 6(x^2 - 3x + 2)v \\ v^3 - (2x^3 - 6x + 11) = 6(x^2 - 3x + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(x^2 - 3x + 2)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u-v)[u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 9\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 14x^3 - 42x^2 + 36x - 1$
 $\Leftrightarrow 6x^3 - 30x^2 + 30x = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2 - 5x + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm, $x \in \left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Bài toán 120. Giải phương trình $\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} + \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \notin \{2; 3\}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)(x-3)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} + x-1 &= x(x-2)(x-3) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} &= x(x^2 - 5x + 6) - x + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 5x + 1 &= (x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 20x^2 + 20x + 4 &= 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) & \\ = 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{4(2x^3 - 11x^2 + 17x - 6) + 4x^3 + 8x^2 - 14x - 5} & \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{4(x^2 - 5x + 6)(2x-1) + 4x^3 + 8x^2 - 14x - 5}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)v \\ v^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(x^2 - 5x + 6)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u-v)[u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 7\left(x - \frac{23}{14}\right)^2 = -\frac{41}{7} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 12x^3 - 36x^2 + 54x - 29 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 48x - 28 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = -1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 = -1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 121. Giải phương trình $x^3 = x^4 + 2 + (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^4 - 2 = (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)x + x^4 + 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + 2) = (x^2 + x + 1)y \\ y^3 - (x^4 + 2) = (x^2 + x + 1)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x^2 + x + 1)(y - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = x^3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{11}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet x^2 + xy + y^2 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 122. Giải phương trình $2(x+1) = x^4 + (x+2)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)\sqrt[3]{(x+2)x + x^4 + x^3 - 2x - 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 - 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)y \\ y^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+2)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = x^4 + x^3 + x^2 - 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 123. Giải phương trình $(x+1)\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1} + x^4 + x^3 + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)x + x^4 + 2x^3 + 1}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)y \\ y^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+1)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

- ❖ $x^2 + xy + y^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- ❖ $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$

Xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1), do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$. Biến đổi

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 + x - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Rõ ràng (2) mẫu thuẫn. Vậy (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 124. Giải phương trình $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2 + (x+3)\sqrt[3]{2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)\sqrt[3]{(x+3)x + 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2}.$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)y \\ y^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+3)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình trên.

Xét trường hợp $x \neq 0$, biến đổi phương trình về dạng

$$2x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + x + \frac{1}{x} - 6 = 0 \quad [1].$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, khi đó

$$[1] \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+5x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; -2\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; -2\right\}$.

Bài toán 125. Giải phương trình $2x^4 + 1 + (2x+3)\sqrt[3]{2x^4+2x^2+1} = x^3 + 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)\sqrt[3]{x(2x+3) + 2x^4 - 3x + 1}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x^4+2x^2+1} = y$ ta thu được

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)y \\ y^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (2x+3)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = 2x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2(2x^2 + x + 1) - x(2x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (2x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Các phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm do $\Delta < 0$.
 Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 126. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 1 + (x+2)\sqrt[3]{x^4+3x^3+x^2+x+2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)\sqrt[3]{(x+1)(x+2) + x^4 + 3x^3 - 2x}$.

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4+3x^3+x^2+x+2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$
 Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq 0$; biến đổi $x^2 + 2x - 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$.

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Thu được phương trình

$$t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(t+2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên, hay $S = \{-1; 1; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

Bài toán 127. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 2 + (x+4)\sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)\sqrt{(x+4)(x+1) + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)v \\ v^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 + uv + v^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{19}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x^3 - 5x^2 + 6x + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 5x + 6) + x(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 5x + 6) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = 3 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \quad [*]$$

Phương trình [*] vô nghiệm do $\Delta < 0$, nên phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 128. Giải phương trình $x^4 + x^2 - 2x + (x^2 + 10)\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5} = 6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)\sqrt{(x^2 + 10)(x+1) + x^4 + 4x^2 + x - 5}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)v \\ v^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 10)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 10 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + x^2 + 10 = 0 &\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -10 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 2x^2 - 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 2(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2}) = 0$$

Xét $x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2} = 0, \Delta < 0$, phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Xét } x^2 - \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 129. Giải phương trình $x^4 + (5x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + 5x^3 - 11x - 6} = x^3 + 8x^2 + 15x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)\sqrt[3]{(5x^2 + 1)(x+1) + x^4 - 5x^2 - 12x - 7}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 + 5x^3 - 11x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)v \\ v^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (5x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 5x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 5x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 5x^3 - 11x - 6 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 7x^2 + 14x + 7 \Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 = 7(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7})(x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(2 + \sqrt{7}) + \sqrt{11}}{2}; x = \frac{-(2 + \sqrt{7}) - \sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Xét } x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7} - 2 + \sqrt{11}}{2}; x = \frac{\sqrt{7} - 2 - \sqrt{11}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 130. Giải phương trình $x^4 + (x^2 - x + 1)\sqrt[3]{x(x^3 + x^2 + 3x - 1)} = x^3 + 4x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)(x+1) + x^4 + 3x^2 - x - 1}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x(x^3 + x^2 + 3x - 1)} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 - x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark u^2 + uv + v^2 + x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \checkmark u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 3x^2 - x \Leftrightarrow x^4 = 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Xét $x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 131. Giải phương trình $x^2(x^2 + 3) + (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8} = x^3 + 13x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^4 - 10x - 5) &= (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 3 + x^4 - 10x - 5} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (x^4 - 10x - 5) &= (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{(x^2 - 2x + 3)(x-1) + x^4 - 10x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u; \sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 10x - 5) = (x^2 - 2x + 3)v \\ v^3 - (x^4 - 10x - 5) = (x^2 - 2x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 - 2x + 3)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x-1)^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \triangleright u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8 \Leftrightarrow x^4 = 8x + 7 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \\ x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 + 1 = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Xét $x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

$$\text{Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm } x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Bài toán 132. Giải phương trình $x^4 + (x-2)^2\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 7x - 3} = x^3 + 10x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) &= (x-2)^2\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4 + x^4 + 3x^2 - 7x - 7} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) &= (x^2 - 4x + 4)\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 4)(x+1) + x^4 + 3x^2 - 7x - 7} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 + x^3 - 7x - 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) = (x^2 - 4x + 4)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) = (x^2 - 4x + 4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x-2)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 - 7x - 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 10x = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 5x^2 + 10x + 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 5(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{5}(x+1) \\ x^2 + 1 = -\sqrt{5}(x+1) \end{cases}$$

$$\text{Xét } x^2 + 1 = \sqrt{5}(x+1) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}; x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}.$$

Xét $x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 133. Giải phương trình

$$6x^4 + x^3 + 3x^2 + 11x = 5x^5 + 2 + (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) &= (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{(2x^3 + 4x^2 + 5x + 3) + 5x^5 - 6x^4 - 8x + 3} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) &= (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{(2x^2 + 2x + 3)(x+1)5x^5 - 6x^4 - 8x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) = (2x^2 + 2x + 3)v \\ v^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) = (2x^2 + 2x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 + 2x + 3)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 + x^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6 \\ &\Leftrightarrow 5x^5 - 6x^4 + x^3 + x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 12x^2(x+1) - 11x(x+1) + 5(x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Xét trường hợp $x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 12 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta có $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Thu được

$$5t^2 - 11t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(5x^2 - x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5x^2 - x + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 134. Giải phương trình

$$8x^4 + x^3 + 5x = 3x^5 + 7x^2 + 1 + 3(6x^2 + 4x + 1)\sqrt[3]{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1) \sqrt[3]{(6x^2 + 4x + 1)(x-1) + 3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3}.$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1)v \\ v^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (6x^2 + 4x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (2x+1)^2 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^5 - 8x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 16x^2(x+1) - 11x(x+1) + 3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Xét trường hợp } x \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 16 - \frac{11}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \text{ thu được } 3t^2 - 11t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 135. Giải phương trình $4x^4 + x^3 + 3x = x^5 + 3x^2 + 4 + (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{4x^3 - x - 3 + x^5 - 4x^4 + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{(4x^2 + 4x + 3)(x-1) + x^5 - 4x^4 + 3}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3)v \\ v^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (4x^2 + 4x + 3)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 4x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = v^3 \\ \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (2x+1)^2 = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) rõ ràng vô nghiệm.

$$u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x \Leftrightarrow x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x+1) - 5x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - 5x(x+1) + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).
- Xét trường hợp $x \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$.

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thu được phương trình

$$\begin{aligned} y^2 - 2 - 5y + 8 &= 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm.

Bài toán 136. Giải phương trình

$$x^6 + 5x^4 + 4x^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2} = 3x^3 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) &= (x+2)\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2 + x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x+1) + x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)v \\ v^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

$$\diamond u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1 = 0$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq 0$; biến đổi về $x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$; thu được

$$t^3 - 3t + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t + 3 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Với $t^2 + t + 3 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 137. Giải phương trình

$$x^6 + 3x^5 + x^4 = 7x^3 + 6x^2 + 19 + (x^2 + 3x + 9)\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) \\
 &= (x^2 + 3x + 9) \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 15x + 18 + x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11} \\
 &\Leftrightarrow (x+2)^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) \\
 &= (x^2 + 3x + 9) \sqrt[3]{(x^2 + 3x + 9)(x+2) + x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11}
 \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) = (x^2 + 3x + 9)v \\ v^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) = (x^2 + 3x + 9)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 3x + 9)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9 = 0 \end{cases}$$

✓ $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{27}{4}$ (Vô nghiệm).

✓ $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7$

Đưa về $x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$. Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình này.

Xét $x \neq 0$; phương trình trên trở thành

$$x^3 + 3x^2 + x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 & (t^3 + 3t) + 3t^2 + 6 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 3t + 4) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 138. Giải phương trình

$$5x^3 - 11x^2 - 4x + 1 + (x+2) \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 2x + 1} = x^4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1) \\
 &= (x+2) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 2x) + x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1} \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1) \\
 &= (x+2) \sqrt[3]{(x+2)(x^2 + x) + x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1}
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{8x^3 - 7x^2 - 2x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (7x^3 - 8x^2 - 3x) = (x+2)v \\ v^3 - (7x^3 - 8x^2 - 3x) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + x)^2 + x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x)^2 + 1 + x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) + 1 + x^2 + 2x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-2; 1\} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \\
 \diamondsuit \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 = (x - 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 139. Giải phương trình $\frac{x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2x + 2 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} \\
 &\Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 3(x^4 + 2x^3 + x^2) + 3(x^2 + x) + 1 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) \\
 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 + 2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1} \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) \\
 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) + 2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1}
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x + 1 = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) = (x^2 + 1)v \\ v^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) = (x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Ta có phương trình

$$t^3 - 3t + t^2 - 2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0.$$

Phương trình $t^2 + 3t + 4 = 0, \Delta < 0$ nên vô nghiệm. Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 140. Giải phương trình

$$\frac{x^6 + x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2}{2x^2 + 1} = \sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^4 + 3x^2 + 1 - x^5 + 8x^3 + x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{(2x^2 + 1)(x^2 + 1) - x^5 + 8x^3 + x^2 + 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 1 = u; \sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) = (2x^2 + 1)v \\ v^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) = (2x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = -x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 - 8x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x - 8 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (t^3 + 3t) + t^2 + 2 + t - 8 &= 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ (t+1)^2 = -5 \end{cases} &\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 141. Giải phương trình $\frac{x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = \sqrt[3]{-3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x + 1 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{-3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2} \\ \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 2 - 3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 + 1) + (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x)} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 1 = u; \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 2 - 3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) = (x^2 + 2)v \\ v^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) = (x^2 + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -2$ (Vô nghiệm).
- $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = -3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho trở thành

$$x^3 + 3x^2 + x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (t^3 + 3t) + 3t^2 + 6 + t - 6 &= 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 3t + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\frac{x^6 + 6x^4 + x^3 + 8x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 6x^4 + x^3 + 8x^2 + 4x + 3 &= (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} \\ &\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) \\ &= (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 + x^3 + 4x^2 - 4x + 5} \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2) + x^3 + 4x^2 - 4x + 5} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 2 = u; \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)v \\ v^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+1)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\checkmark \quad x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7 \Leftrightarrow x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1 = 0$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

$$\text{Xét } x \neq 0; \text{ biến đổi về } x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$; thu được

$$t^3 - 3t + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t + 3 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Nếu $t^2 + t + 3 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Nếu $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 143. Giải phương trình $x^6 + x^3 + 2x^2 + x + (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - x + 1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} -x^6 - x^3 - 2x^2 - x &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^5 + x^4 - x^2 + 1 + x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{(x^4 - x + 1)(x+1) + x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1) = (x^4 - x + 1)v \\ v^3 - (x^6 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1) = (x^4 - x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^4 - x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^4 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + x^4 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2}{4} = -\frac{1}{2} \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 144. Tìm nghiệm dương của phương trình sau

$$\frac{1+3x}{1+x^4} = \sqrt[3]{x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x+1 &= (x^4+1)\sqrt[3]{x^5+x^4+x^3+3x^2+x+1} \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1 - (x^3+3x^2) &= (x^4+1)\sqrt[3]{x^5+x^4+x+1+(x^3+3x^2)} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3+3x^2) &= (x^4+1)\sqrt[3]{(x^4+1)(x+1)+x^3+3x^2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{x^5+x^4+x^3+3x^2+x+1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 3x^2) = (x^4 + 1)v \\ v^3 - (x^3 + 3x^2) = (x^4 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^4 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^4 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^5 + x^4 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x^4 + x^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + x^3 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 145. Giải phương trình $\frac{11x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{5x^4 - x + 2} = \sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $5x^4 - x + 2 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 11x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 3 &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) & \\ &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{5x^5 + 5x^4 - x^2 + x + 2 - 11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) & \\ &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{(5x^4 - x + 2)(x+1) - 11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = (5x^4 - x + 2)v \\ v^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = (5x^4 - x + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (5x^4 - x + 2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 5x^4 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + 5x^4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4x^4 + \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4x^4 + \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\triangleright u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow 5x^5 - 6x^4 + x^3 + x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 5x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 12x^2(x+1) - 11x(x+1) + 5(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Xét trường hợp $x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 12 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta có $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Thu được

$$5t^2 - 11t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(5x^2 - x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5x^2 - x + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1\}$.

Nhận xét.

Đến đây là bài toán số 145 của tài liệu, một số thứ tự thí dụ không nhỏ, tất nhiên hông nằm ngoài dạng thức sử dụng ắnn phụ chứa căn bậc ba đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2. Sau đây tác giả cùng độc giả điểm lại một số cấp độ chúng ta đã trải nghiệm

1. $(mx+n)^3 - (ax+b) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax+b)}$.
2. $(mx+n)^3 - (ax^2+bx+c) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^2+bx+c)}$.
3. $(mx+n)^3 - (ax^3+bx^2+cx+d) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3+bx^2+cx+d)}$.
4. $(mx+n)^3 - (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)}$.
5. $(mx+n)^3 - (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)}$.
6. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax+b) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax+b)}$.
7. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^2+bx+c) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax^2+bx+c)}$.
8. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^3+bx^2+cx+d) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax^3+bx^2+cx+d)}$.
9. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)}$.
10. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)$
 $= f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)}$.
11. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g)$
 $= f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p) + (ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g)}$.

Trong đó đa thức $f(x)$ của chúng ta tăng dần độ phức tạp theo thứ tự

$$f(x) \equiv \text{const} \rightarrow f(x) \equiv ax+b \rightarrow f(x) \equiv ax^2+bx+c \rightarrow f(x) \equiv ax^4+bx+c.$$

Lưu ý sau khi đặt hai ắnn phụ u với v , ta thường quy về tuyển phương trình

$$\begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + f(x) = 0 \end{cases}$$

Giả định u là ẩn phụ đơn giản hơn (đa thức) còn v là ẩn phụ phức tạp hơn (căn thức).

Trường hợp $u = v$ đã bước đầu được lồng ghép các phương trình đại số bậc cao điển hình, trong đó cao nhất là phương trình đối xứng bậc 6, đòi hỏi các bạn cần nắm vững lý thuyết, rèn luyện kỹ năng thành thạo mới có thể xử lý trọn vẹn được bài toán đưa ra.

$$\text{Hơn thế nữa } u^2 + uv + v^2 + f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + f(x) = 0 & (1) \\ \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + f(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Thông qua quan sát, một số bạn độc giả đã có thể linh hoạt sử dụng một trong hai phương án (1) hoặc (2).

Để ý kỹ lưỡng có thể thấy phương án (1) đơn giản hơn phương án 2, các bạn đừng có đại dốt tung tóe $\frac{3}{4}v^2$ theo căn thức, không giải quyết vấn đề gì, bởi khi đó ta thường gặp may mắn

$$\begin{cases} f(x) \equiv \text{const} > 0 \\ f(x) \equiv ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \equiv ax^4 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Việc đánh giá ước lượng các biểu thức trên đã được trình bày chi tiết thông qua các thí dụ, trường hợp cuối cùng là khó khăn hơn cả.

Phương án (2) cũng đã xảy ra với nhiều bài toán, đặc thù của nó là phải “tung tóe, kết hợp tổng thể”, thậm chí tinh tế hơn, bởi thường gặp các tình huống không xác định được rõ ràng dấu của $f(x)$, một phần cũng vì căn thức bậc ba không cần điều kiện xác định, còn nếu không chúng ta đã dùng đánh giá căn bản, bất đẳng thức, công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số, nói chung khi đó về “hỏa lực” là không thiếu. Cụ thể các bạn cần lập luận $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0$ bằng cách quy về hằng đẳng thức hoặc dùng công cụ hàm số (mặc dù là trên tập số thực).

$$\text{Các trường hợp thường gặp tương tự phương án (1), đó là } \begin{cases} f(x) \equiv \text{const} \\ f(x) \equiv ax^2 + bx + c \\ f(x) \equiv ax^4 + bx + c \geq 0 \end{cases}$$

Xây dựng điều này bằng cách chọn $f(x)$ sao cho phương trình bậc hai ẩn x : $\frac{3}{4}u^2 + f(x) = 0$ vô nghiệm. Hoặc nếu bậc 4 thì $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu không lập luận được $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ có nghiệm thì thao tác giải bài toán sẽ rất phức tạp, không muốn nói là đi vào ngõ cụt. Nếu $f(x)$ là đa thức bậc ba kết hợp với u dạng nhị thức bậc nhất thì $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0$ vẫn có dạng thức bậc ba, và tất yếu không tồn tại sự kiện $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Liệu $f(x)$ có dạng đa thức bậc ba được hay không? Câu trả lời là có, và khi đó muốn có $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phải có $u \equiv mx^2 + nx + p$, nhằm tạo ra đa thức bậc bốn, quy về hằng đẳng thức sẽ thuận lợi hơn. Sau đây tác giả xin kết thúc tài liệu bằng lớp bài toán với $f(x)$ có dạng đa thức bậc ba, trước khi chuyển sang Lý thuyết sử dụng ẩn phụ phần 10, nâng cao và phát triển mở rộng các phần 8 – 9.

Bài toán 146. Giải phương trình

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 1 = (x^3 + 1)\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) &= (x^3 + 1)\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 - x)^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) &= (x^3 + 1)\sqrt[3]{(x^3 + 1)(x^2 - x) + x^3 - 5x^2 + 5x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - x = u$; $\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) = (x^3 + 1)v \\ v^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) = (x^3 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^3 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^4 - 2x^3 + x^2) + x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{48}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên. Xét $x \neq 0$; biến đổi về

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Ta có phương trình

$$t^3 - 3t - 4(t^2 - 2) + 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 1)(t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1 \right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 147. Giải phương trình $x^6 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (1 - x^3)\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) &= (1 - x^3)\sqrt[3]{x^2 + x - x^5 - x^4 + 3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) &= (1 - x^3)\sqrt[3]{(1 - x^3)(x^2 + x) + 3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) = (1 - x^3)v \\ v^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) = (1 - x^3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (1 - x^3)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 1 - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^4 + 2x^3 + x^2) - x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{48}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

- $u=v \Leftrightarrow u^3=v^3 \Leftrightarrow x^6+3x^5+3x^4+x^3=2x^5+2x^4-x^2-x-1 \Leftrightarrow x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
 Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^7+x^6-x^6+x^5-x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^7-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad (2)$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.
 Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 148. Giải phương trình

$$x^6+7x^5+20x^4+26x^3+16x^2+8x+1=(x^3+3x^2+1)\sqrt[3]{-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^6+6x^5+12x^4+8x^3-(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1) \\ &= (x^3+3x^2+1)\sqrt[3]{(x^5+5x^4+6x^3+x^2+2x)-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1} \\ &\Leftrightarrow (x^2+2x)^3-(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1) \\ &= (x^3+3x^2+1)\sqrt[3]{(x^3+3x^2+1)(x^2+2x)-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2+2x=u$, $\sqrt[3]{-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1)=(x^3+3x^2+1)v \\ v^3-(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1)=(x^3+3x^2+1)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3-v^3=(x^3+3x^2+1)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+x^3+3x^2+1=0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2+uv+v^2+x^3+3x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2+x^3+3x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2+2x)^2+x^3+3x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4+4x^3+6x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x+\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\diamond u=v \Leftrightarrow u^3=v^3 \Leftrightarrow x^6+6x^5+12x^4+8x^3=-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^6=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $\frac{x^6+2x^5+6x^4+5x^3+2x^2+2x+1}{x^3+4x^2+1}=\sqrt[3]{2x^5+2x^4-x^2-x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3+4x^2+1 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 2x + 1 &= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} \\
&\Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) \\
&= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 + 4x^3 + x^2 + x + x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1} \\
&\Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) \\
&= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^3 + 4x^2 + 1)(x^2 + x) + x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) = (x^3 + 4x^2 + 1)v \\ v^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) = (x^3 + 4x^2 + 1)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (x^3 + 4x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\circ \quad u^2 + uv + v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + x)^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{19}{4}x^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{16}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}
\end{aligned}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 = 2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1).$$

Nhận xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)
\end{aligned}$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.
Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 150. Giải phương trình

$$x^6 + 9x^5 + 41x^4 + 71x^3 + 21x^2 + 24x + 1 = (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) \\
&= (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{3x^5 + 26x^4 + 51x^3 + 6x^2 + 18x - 14x^4 - 44x^3 - 21x^2 - 24x - 1} \\
&\Leftrightarrow (x^2 + 3x)^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) \\
&= (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{(3x^3 + 17x^2 + 6)(x^2 + 3x) - 14x^4 - 44x^3 - 21x^2 - 24x - 1}
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 3x = u$; $\sqrt[3]{3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) = (3x^3 + 17x^2 + 6)v \\ v^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) = (3x^3 + 17x^2 + 6)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^3 + 17x^2 + 6)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + 3x)^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{95}{4}x^2 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2(x+5)^2 + 5x^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \diamondsuit \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 = 3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $(x-1)^3 - 7x = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x-1)+7x}.$

2. $(x+1)(x^2-4x-1) = (x+1)\sqrt[3]{x^2+8x-1}.$

3. $x^3+2 = (x+1)\sqrt[3]{x^2+9x-1}+3(x+1)^2.$

4. $\frac{x^3-6x^2+11x-10}{\sqrt[3]{x^2+4x-8}} = x+5.$

5. $x^3-6x^2+11x-14 = (x+7)\sqrt[3]{x^2+6x-8}.$

6. $x^3+3x = (x+1)\sqrt[3]{4x^2-1}+6x^2+1.$

7. $\frac{x^3-12x^2+12x-6}{\sqrt[3]{(x-1)(7x+8)}} = 3+x.$

8. $\frac{(x+3)\sqrt[3]{x^2+13x-8}+6x^2+6}{x^3} = 1.$

9. $x^3+5x^2+11x+12 = (x+6)\sqrt[3]{2x^2+9x+8}.$

10. $\frac{x^3+5x^2+11x+14}{\sqrt[3]{2(x+1)(x+4)}} - x - 7 = 0.$

11. $(x+1)^3 - (x^2-8) = (x+9)\sqrt[3]{(x+9)(x+1)+(x^2-8)}.$

12. $\frac{x^3+2x^2+3x+8}{2+x} = \sqrt[3]{(x+1)(2x+1)}.$

13. $x^3+2x^2+3x+10 = (x+10)\sqrt[3]{2x^2+11x+1}.$

14. $\frac{x^3+7x^2+16x+3}{2x-1} + \sqrt[3]{-3x^2-7x+7} = 0.$

15. $\frac{8x^3-13x^2+7x-1}{\sqrt[3]{3x^2-1}} = x+1.$

16. $x^3+7x^2+16x+2 = (1-2x)\sqrt[3]{-3x^2-7x+8}.$

17. $x^2+7x+16 = \left(\frac{1}{x}-2\right)\sqrt[3]{-3x^2-7x+10}.$

18. $\frac{8x^3-13x^2+7x-8}{\sqrt[3]{3x^2+6}} = x+1.$

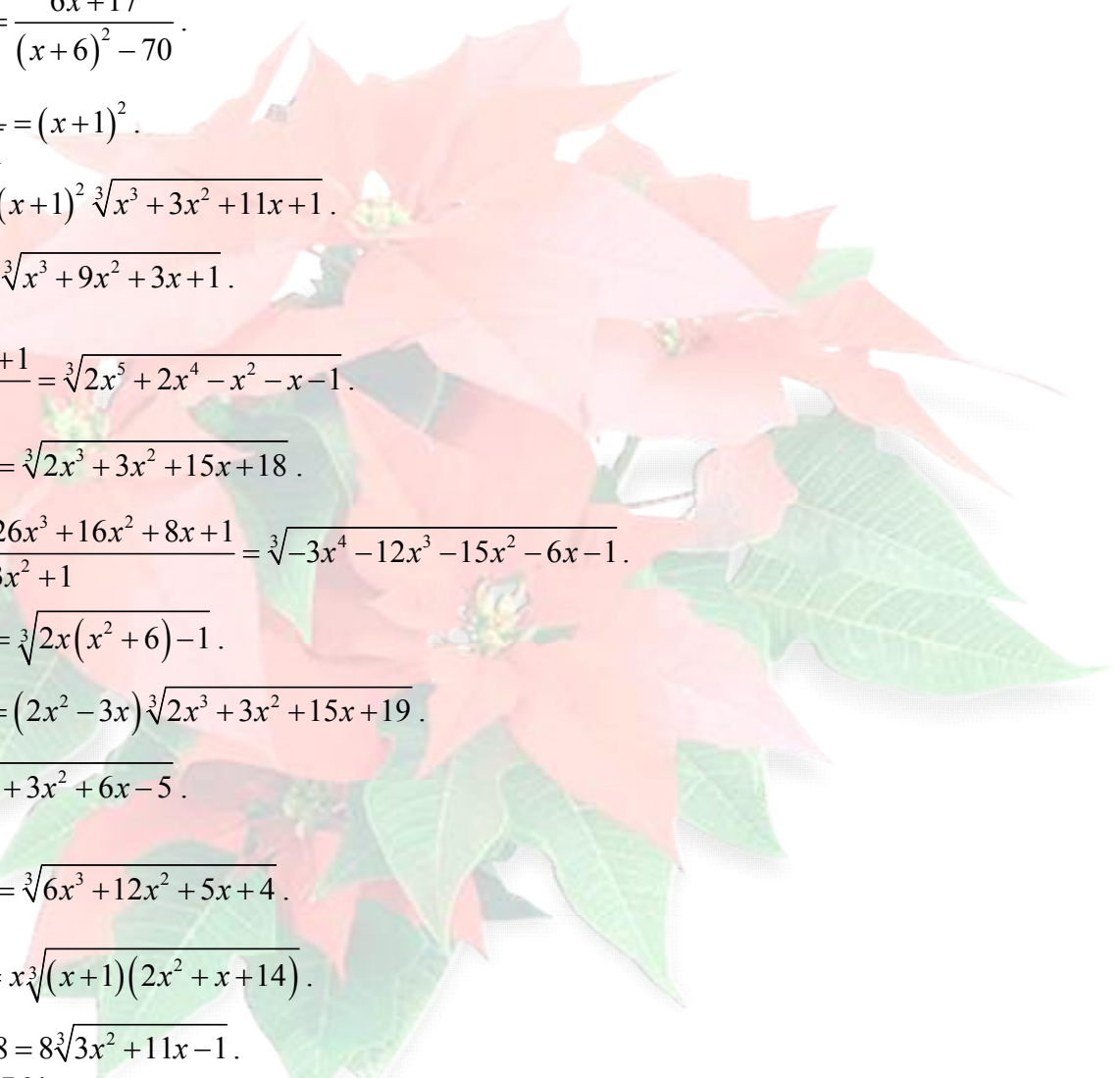
19. $9x^3-12x^2+x-4 = (x+4)\sqrt[3]{18x^2+39x-1}.$

20. $\frac{3x^3-12x^2+2x-5}{\sqrt[3]{36x^2+117x-1}} = 1.$

21. $8x^2-13x+7 = \frac{4}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2+6x-1}.$

22. $9x^3-15x^2+x-4 = (x+4)\sqrt[3]{27x^2+39x-49}.$

23. $x^3-2x^2+x-1 = \sqrt[3]{4x^2+14x-1}.$

- 
24. $2x^2 - 9x^2 + 4x - 4 = 2\sqrt[3]{6x^2 + 14x - 1}$.
 25. $(x-1)(x^2+1) = 2\sqrt[3]{-4x^2 + 14x - 1}$.
 26. $\frac{8x^3 - 29x^2 + 8x - 8}{8} = \sqrt[3]{17x^2 + 14x - 1}$.
 27. $3x^2 - 3x + 14 = (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x - 7}$.
 28. $\frac{3x^2 - 3x + 37}{x+6} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x - 30}$.
 29. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 8}} = \frac{6x+17}{(x+6)^2 - 70}$.
 30. $\frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 13x + 1}} = (x+1)^2$.
 31. $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 11x + 1}$.
 32. $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 + 3x + 1}$.
 33. $\frac{x^6 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{1 - x^3} = \sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1}$.
 34. $\frac{x^3 + 4x^2 - 9x - 10}{2x^2 - 3x} = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 18}$.
 35. $\frac{x^6 + 7x^5 + 20x^4 + 26x^3 + 16x^2 + 8x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1} = \sqrt[3]{-3x^4 - 12x^3 - 15x^2 - 6x - 1}$.
 36. $\frac{6x^3 - 8x^2 - 6x - 1}{2x + 1} = \sqrt[3]{2x(x^2 + 6) - 1}$.
 37. $x^3 + 4x^2 - 9x - 11 = (2x^2 - 3x)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 19}$.
 38. $\frac{x^3 + 3x^2 + 7}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 5}$.
 39. $\frac{8x^3 + x^2 + 14x + 4}{3x^2 - x + 7} = \sqrt[3]{6x^3 + 12x^2 + 5x + 4}$.
 40. $\frac{x^3 + 4x^2 - 9x - 6}{2x - 3} = x\sqrt[3]{(x+1)(2x^2 + x + 14)}$.
 41. $8x^3 - 15x^2 + 11x - 8 = 8\sqrt[3]{3x^2 + 11x - 1}$.
 42. $8x^2 - 45x + 187 = \frac{764}{x+4} + \sqrt[3]{9x^2 + 27x - 1}$.
 43. $5x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - x)\sqrt[3]{4x^3 + 6x}$.
 44. $\frac{x^3 - 4x^2 + x - 5}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^2 + 3x + 17}} = 1$.
 45. $\frac{6x^2 + 11x + 1}{13 + x} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 20}$.
 46. $-4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - x)\sqrt[3]{4x^3 + 6x}$.

$$47. x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

$$48. x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 + 1) \sqrt[3]{x^4 + 6x^2 + 3x + 6}.$$

$$49. x^3 + x - 1 = \sqrt[3]{x^4 + 4x^2 + 3x + 3}.$$

$$50. x^3 + 3x^2 - 4x + 4 = (x + 1)^2 \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 10x - 2}.$$

$$51. \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 11}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 1}} = (x + 1)^2.$$

$$52. x^3 + 3x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + x) \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}.$$

$$53. \frac{x^3 + 3x^2 + 10x - 7}{3x + 1} - x \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - 7x + 8} = 0.$$

$$54. x^3 + 3x^2 - x - 1 = (2x^2 - x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 3x + 2}.$$

$$55. \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x} = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 7x - 2}.$$

$$56. \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1}} = \frac{x^2 + x + 17}{x^3 + 3x^2 + 3x - 4}.$$

$$57. x + \frac{2}{x^2 + x + 17} = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 32x + 16}.$$

$$58. \frac{5}{x^2 + x + 17} = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 32x + 13} - x.$$

$$59. \sqrt[3]{x(x^2 + 4x + 32)} - x = \frac{18}{x(1 + x) + 17}.$$

$$60. 5x^3 + 7x + 3x + 1 = (4x^2 - x + 5) \sqrt[3]{3x^2 + 5}.$$

$$61. \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 2}}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$62. \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x + 2}} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

$$63. \frac{(x-1)(x^2 + x + 9)}{x^2 - x + 1} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 5x + 10}.$$

$$64. x^3 + x - 2 = (x^2 - x + 1) \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 3}.$$

$$65. \sqrt[3]{x^3 + x - 9} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 7}{(x+1)^2 + 3}.$$

$$66. (x^2 + 2x + 4) \sqrt[3]{x^3 + 6x - 6} = x^3 - 6x^2 + 6x - 3.$$

$$67. (x+1)^2 + 3 = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt[3]{x^3 + x - 10}}.$$

$$68. (x^2 - 2x + 4) \sqrt[3]{x^3 + x + 11} = x^3 - 6x^2 + 11x - 11.$$

$$69. \sqrt[3]{x^3 + 7x + 11} = \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 11}{x^2 - 2x + 4}.$$

Lời kết.

Bài toán số 150 cũng là bài toán cuối cùng của tài liệu Lý thuyết sử dụng ắnn phụ căn phần thứ 9, chủ đạo tập hợp và hướng dẫn về lớp bài toán sử dụng căn thức với phương trình chứa căn bậc ba đưa được về hệ phương trình. Trong quá trình hoàn thiện bài toán các bạn cần kết hợp phép thế, đặt ắnn phụ, kỹ thuật giải phương trình bằng phép nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức và nhằm nghiệm đối với phương trình bậc cao tuy nhiên nó chỉ là chút chia sẻ phần nào của tác giả ! Mong muốn các bạn độc giả chú ý kỹ lưỡng và rút được nhiều kinh nghiệm quý báu cho bản thân mình.

Tác giả chúc các bạn học sinh, các thầy cô giáo và toàn thể các bạn độc giả sức khỏe, vui vẻ, bình tĩnh, tự tin, bírt phá, đánh bật đề thi, đạt kết quả cao trong các kỳ thi tương lai sắp tới, chúc các em học sinh lớp 12 THPT đạt điểm tối đa môn Toán trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2015 và hơn thế nữa.

Tôi còn nhớ đã đọc trong một tài liệu, tại Đại hội Châu ngoan Bác Hồ Thành phố Hồ Chí Minh, năm 1977, có một vị đại biểu trong Đoàn chủ tịch đã từng nói

“Thành phố soi thấy tương lai rất sáng của mình trên vầng trán các cháu”

Đó là câu nói nổi tiếng của Nguyễn Bí thư Thành ủy Thành phố Hồ Chí Minh, Cố Thủ tướng Chính phủ Nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam, đồng chí Sáu Dân – Võ Văn Kiệt. Câu nói hàm súc chứa rất nhiều tâm tư và nguyện vọng của một người chiến sĩ cộng sản kiên trung, vào sinh ra tử cùng nhịp đập trái tim Tổ quốc suốt hai cuộc kháng chiến. Thế hệ hậu sinh chúng ta sinh ra và lớn lên trên dải đất hình chữ S nhiều đau thương, còn chưa hàn gắn hết, mỗi người chúng ta đều sục sôi dòng máu chảy trong mình không thay đổi được, từ bé đến lớn nghiêm nhiên thừa hưởng chế độ y tế và giáo dục để phát triển toàn diện, đó là ân huệ của cha mẹ, của thế hệ trước, của non sông ban tặng cho mỗi công dân. Tư tưởng cá nhân luôn tồn tại trong mỗi người, đó là sự phân công xã hội và tất yếu nảy sinh do bản năng, vì thế nó thường vượt qua ngưỡng cửa tập thể, nó cứ đi sâu mãi để làm đường lạc lối. Dù rằng quyền sống, quyền hưởng thụ, và nhiều quyền khác nữa là bất di bất dịch, nhưng điều gì cũng cần có mức độ, điều gì cũng cần phù hợp đạo lý, giữ vững bản sắc và truyền thống vốn có lâu đời của nó, làm sao để khi nhìn vào chúng ta còn nhận ra mình. Thiết nghĩ sống tốt, hữu ích, đúng đạo lý, khoan dung, không dẫm đạp đồng bào, diệt trừ ác độc, hơn nữa để an toàn và thoải mái cần chiếm lĩnh khoa học, cùng nhau vững bước làm chủ tri thức, làm chủ tương lai, chỉ cần làm được chiếc ốc vít, làm được súng đại liên, chiến xa, tên lửa, tàu ngầm, tiêm kích, cường kích chúng ta sẽ hoàn toàn xây dựng được bức tường thành bảo vệ mẹ già, vợ đại, con thơ trước sự dòm ngó của ngoại bang. Thế hệ trẻ mình cần nhiều thứ thật đấy, và chưa mất mát thứ gì, vì thế cần có trách nhiệm giữ gìn bản sắc và quyết tâm xây dựng tổ quốc Việt Nam hòa bình, công chính, dân chủ, vững bền, giàu mạnh, sánh vai cùng các nước Xã hội Chủ nghĩa trong khu vực và trên thế giới, như đất nước Cu Ba, Liên Bang Nga, Cộng hòa Hồi giáo Iran, CHDCND Triều Tiên, hay ít nhất là CHND Trung Hoa láng giềng chẳng hạn.

Facebook Vĩ Xuyên – Ác Liệt.
Thủ đô Hà Nội, ngày 17 tháng 02 năm 2015.

-----HẾT-----

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

- Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
33. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
34. *Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.*
Doãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2013.
35. *Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.*
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhĩ ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*
37. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*
38. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*
39. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*
40. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*
41. *Các tạp chí toán học:* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
42. *Các diễn đàn toán học:* Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net;
Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
43. *Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...*



THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC