

CHUYÊN ĐỀ 7. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững khái niệm vectơ chỉ phương của đường thẳng, góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- + Trình bày và vận dụng được các công thức tính khoảng cách, góc.
- + Trình bày được cách viết phương trình tham số của đường thẳng.
- + Trình bày được các vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và mặt phẳng và của đường thẳng với mặt cầu. Vận dụng được các công thức để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng; của đường thẳng với mặt phẳng và của đường thẳng với mặt cầu.

❖ Kỹ năng

- + Biết cách viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng.
- + Biết cách tính khoảng cách, tính góc.
- + Biết cách xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng và vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình đường thẳng

Vector chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ . Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình chính tắc

Nếu $a, b, c \neq 0$ thì phương trình chính tắc của đường thẳng Δ có dạng

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (2)$$

2. Khoảng cách

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0 , có vector chỉ phương $\vec{u}$ và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d[M, \Delta] = \frac{\|[\overrightarrow{MM_0}, \vec{u}]\|}{\|\vec{u}\|}$.

Cách 2:

- + Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M vuông góc với Δ .
- + Tìm giao điểm H của (P) với Δ .
- + Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

Cách 3:

- + Gọi $N \in \Delta$, suy ra tọa độ N theo tham số t .

Chú ý:

+ Nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của Δ thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ cũng là vector chỉ phương của Δ .

+ Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một vector chỉ phương.

Cho đường thẳng Δ có phương trình (1) thì

+ $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vector chỉ phương của Δ .

+ Với điểm $M \in \Delta$ thì $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ trong đó t là một giá trị cụ thể tương ứng với từng điểm M .

+ Tính MN^2 theo t .

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có vector chỉ phương $\vec{u}$ và Δ' đi qua M'_0 có vector chỉ phương $\vec{u}'$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}$.

Cách 2: Tìm đoạn vuông góc chung MN . Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

Cách 3: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa qua Δ và song song với Δ' . Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P) .

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ đi qua } M_1(x_0; y_0; z_0) \text{ có}$$

vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (a; b; c)$, và

$$d_2: \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'} \text{ đi qua } M_2(x'_0; y'_0; z'_0) \text{ có}$$

vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (a'; b'; c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 , ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

$$+ d_1 \text{ trùng } d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1 M_2} \right] \neq \vec{0} \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases}$$

Ta có thể dùng **phương pháp đại số** để xét vị trí tương đối: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

Chú ý trường hợp vô nghiệm

+ Nếu $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ cùng phương thì $d_1 // d_2$.

+ Nếu $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ không cùng phương thì $d_1; d_2$ chéo nhau.

$$+ d_1 \text{ chéo } d_2 \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0$$

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến

$$\vec{n}_\alpha = (A; B; C) \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ đi qua}$$

$M(x_0; y_0; z_0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

- Nếu $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ M(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \end{cases}$ thì $d \subset (\alpha)$.
- Nếu $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ M(x_0; y_0; z_0) \notin (\alpha) \end{cases}$ thì $d \parallel (\alpha)$.
- Nếu $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u}_d = k \cdot \vec{n}_\alpha$ với $k \neq 0$ thì $d \perp (\alpha)$.
- Nếu $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$; $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_\alpha$ không cùng phương thì d cắt (α) .

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng và mặt cầu

$$\text{có phương trình lần lượt là: } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và}$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

Bước 1: Tìm khoảng cách từ tâm I của (S) đến d .

Bước 2:

Phương pháp đại số

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 (*)$$

+) Nếu phương trình (*) vô nghiệm t thì $d \parallel (\alpha)$.

+) Nếu phương trình (*) có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α) .

+) Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm t thì $d \subset (\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta giải phương trình (*), sau đó thay giá trị t vào phương trình tham số của d để tìm $(x; y; z)$

Phương pháp đại số

thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S) , khi đó ta được phương trình

- + Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S) .
- + Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S) .
- + Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) .

bậc hai theo t . Biện luận số giao điểm của (d) và (S) theo số nghiệm của phương trình bậc hai theo t .

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt cầu ta giải phương trình bậc hai theo t , sau đó thay giá trị của t vào phương trình tham số của d để tìm $(x; y; z)$.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

4. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\vec{u_1}, \vec{u_2}$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$.

$$\text{Ta có: } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \right| = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}.$$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

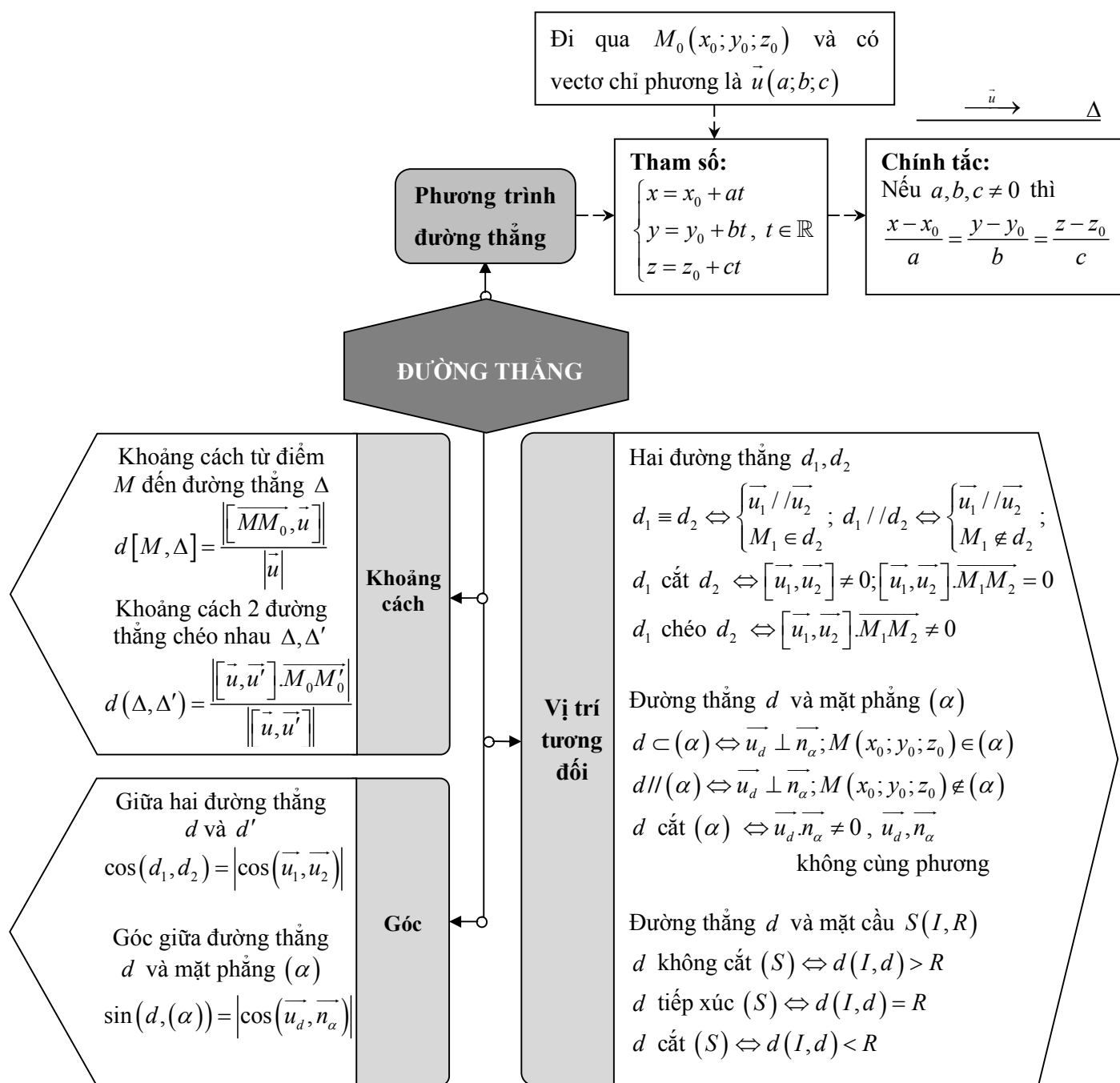
Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u_d}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_\alpha}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) .

$$\text{Ta có: } \sin(d, (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u_d}, \vec{n_\alpha}) \right| = \frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{n_\alpha}|}{|\vec{u_d}| \cdot |\vec{n_\alpha}|}.$$

Chú ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định vector pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

Bài toán 1: Xác định vector chỉ phương của đường thẳng

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vector nào là một vector chỉ phương của đường thẳng có

phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{3y}{2} = \frac{3-z}{1}$?

- A. $\vec{a} = \left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$. B. $\vec{a} = (9; 2; -3)$. C. $\vec{a} = (3; 2; 1)$. D. $\vec{a} = \left(3; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x-1}{3} = \frac{3y}{2} = \frac{3-z}{1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{9} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Vậy một vector chỉ phương của đường thẳng là $\vec{a} = (9; 2; -3)$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình

$x + 2z + 3 = 0$. Một vector chỉ phương của Δ là:

- A. $\vec{a}(1; 0; 2)$. B. $\vec{b}(2; -1; 0)$. C. $\vec{v}(1; 2; 3)$. D. $\vec{u}(2; 0; -1)$.

Hướng dẫn giải

Vì Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên vector chỉ phương của Δ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Chọn A.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{j} - 4\vec{k}$. Tìm một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

- A. $\vec{u}(2; 5; -1)$. B. $\vec{u}(2; 3; -5)$. C. $\vec{u}(-2; -5; -1)$. D. $\vec{u}(2; 5; -9)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow A(2; 3; -5)$;

$\overrightarrow{OB} = -2\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow B(0; -2; -4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-2; -5; 1)$.

Suy ra đường thẳng AB có một vector chỉ phương là $\vec{u}(2; 5; -1)$.

Chọn A.

Bài toán 2: Viết phương trình đường thẳng khi tìm được một vector chỉ phương và điểm thuộc đường thẳng

Phương pháp giải

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ có phương trình

$$\text{tham số là } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B : Một vector chỉ phương của d là $\overrightarrow{AB}$.
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d // \Delta$ nên vector chỉ phương của Δ cũng là vector chỉ phương của d .
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: Vì $d \perp (P)$ nên vector pháp tuyến của (P) cũng là vector chỉ phương của d .

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Cách 1: Tìm một điểm và một vector chỉ phương

- Tìm toạ độ một điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình mặt phẳng của $(P), (Q)$ với việc chọn giá trị cho một ẩn.
- Tìm một vector chỉ phương của d : $\vec{a} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 : Vì $d \perp d_1, d \perp d_2$ nên một vector chỉ phương của d là: $\vec{u} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -4)$ là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3}$.

C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-4}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -4)$ là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x - 4y + 7z + 2 = 0$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn giải

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vector chỉ phương của đường thẳng (Δ) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $\overrightarrow{n_P} = (3; -4; 7)$.

$$\forall \begin{cases} \Delta \perp (P) \\ A \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} = (3; -4; 7) \\ A(1; 2; 3) \in (\Delta) \end{cases} \text{ nên phương trình tham số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q) là

$$\text{A. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-6}.$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}.$$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 2; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (2; -1; 2)$

Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

Do đường thẳng d song song với (P) và (Q) nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \\ \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (5; -2; -6).$$

Suy ra đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (5; -2; -6)$.

Phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}.$

Chọn D.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 4; -1)$, $B(2; 4; 3)$, $C(2; 2; -1)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC là

$$\text{A. } \begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=-1-2t \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x=1 \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC .

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -2; -4)$.

Do Δ song song với BC nên một vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (0; 1; 2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì Δ có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

$$\text{B. } \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

$$\text{C. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$\text{D. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1; -2; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (2; 2; -2)$.

Gọi $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của Δ thì $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_1}$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_2}$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}]$. Chọn $\vec{u} = (1; 1; -1)$

Lấy $M(2; 1; 3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q) .

Đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1; 3)$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Vậy phương trình Δ là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

Chọn C.

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 1; -1)$, $B(-2; 3; 1)$ và $C(0; -1; 3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Phương trình đường thẳng d là

$$\text{A. } \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{B. } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

$$\text{C. } \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AB} = (-4; 2; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}.$

$$\overline{AC} = (-2; -2; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}.$$

$$\overline{BC} = (2; -4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}.$$

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1).$

Ta có $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (12; 12; 12) = 12(1; 1; 1).$

Đường thẳng d đi qua $G(0;1;1)$ và có vector chỉ phương cùng phương với $[\overline{AB}, \overline{AC}]$, do đó chọn $\vec{u} = (1; 1; 1).$

Phương trình đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Với $t = -1$, ta có điểm $A(-1; 0; 0) \in d.$

Vậy đường thẳng d đi qua $A(-1; 0; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1).$

Chọn B.

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai $M(1; 2; 3)$, $N(3; 4; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0.$

Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

$$\text{A. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của $HK.$

Do $MH = NK$ nên $\Delta HMI = \Delta KNI \Rightarrow IM = IN.$ Khi đó I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn $MN.$

Ta có (Q) đi qua trung điểm của MN là điểm $J(2; 3; 4)$ và nhận $\vec{n} = \frac{1}{2}\overline{MN} = (1; 1; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $(Q): x + y + z - 9 = 0.$

Mà $I \in A \subset (P).$ Suy ra $I \in d = (P) \cap (Q): \begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$

Tìm được $(0; 13; -4) \in d$ và vector chỉ phương của d là $(1; -2; 1).$

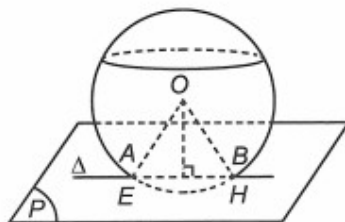
$$\text{Vậy } d: \begin{cases} x=t \\ y=13-2t \\ z=-4+t \end{cases}$$

Chọn A.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB là tam giác đều. Phương trình tham số của Δ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn giải



Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vector chỉ phương của Δ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Ta có $\vec{n}_P = (1; -3; 5)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow a - 3b + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 3b - 5c$. (1)

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB

Ta có ΔOAB là tam giác đều cạnh R nên $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Suy ra khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH = \sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } \frac{|\vec{u} \cdot \vec{OE}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$3b - 5c + b + c = 0 \Leftrightarrow b = c \Rightarrow a = -2c.$$

Thay $c = -1$ thì $b = -1$ và $a = 2$.

Ta được một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; -1; -1)$

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

Chọn C.

Bài toán 3: Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa

Phương pháp giải

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ .

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ . Khi đó $H \in \Delta$, $\overrightarrow{M_0H} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H .

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với d . (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1 \cap d$, $M_2 \in d_2 \cap d$. Suy ra M_0, M_1, M_2 thẳng hàng. Từ đó tìm được M_1, M_2 và suy ra phương trình đường thẳng d .

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_1 ; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó một vector chỉ phương của d có thể chọn là $\vec{u} = [\vec{n_P}, \vec{n_Q}]$.

- Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 : Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB .
- Đường thẳng d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 : Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ và chứa d_1 , mặt phẳng (Q) song song với Δ và chứa d_2 . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.
- Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

Cách làm: Gọi $M \in d_1$, $N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N . Viết phương trình đường

thẳng MN chính là đường vuông góc chung của d_1, d_2 .

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng

(P) là

A. $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

$$\text{C. } \frac{x}{-5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{x}{5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng d có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lấy điểm $M = d \cap (P) \Rightarrow M(4 - 2t; -2 + 2t; -1 + t) \in d$. Thay đổi tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $4 - 2t - 2 + 2t + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $M(0; 2; 1)$.

Do đó $d \cap (P) = M(0; 2; 1)$.

Lấy $A(4; -2; -1) \in d$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng AH đi qua $A(4; -2; -1)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 1; -1)$ làm vector chỉ phương nên AH có

phương trình là
$$\begin{cases} x = 4 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}).$$

Suy ra $H(4 + t_1; -2 + t_1; -1 - t_1)$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) được

$$4 + t_1 - 2 + t_1 + 1 + t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

MH là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) , MH đi qua $M(0; 2; 1)$ và nhận

$\overrightarrow{MH} = \left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-5; 7; 2)$ là vector chỉ phương nên có phương trình là $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho các đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình

đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 là

$$\text{A. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi $I = d_1 \cap \Delta$, $I(1+t, -1+2t, -t) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t; 2t-1; -t-2)$ là một vector chỉ phương của Δ .

Do $\vec{u}_{d_2} = (1; 2; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d_2 và $\Delta \perp d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \Leftrightarrow t + 2(2t-1) + 2(-t-2) = 0 \Leftrightarrow 3t-6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = (2; 3; -4)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - 2z = 0$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{4}.$$

Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}.$$

$$\text{B. } \frac{x+5}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{x+2}{3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Hướng dẫn giải

$$d_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-t \\ y = 6+2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$$M \in d_1 \Leftrightarrow M(-1-t; 6+2t; t).$$

$$d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-3t' \\ y = 2-t', t' \in \mathbb{R} \\ z = -4+4t' \end{cases}$$

$$N \in d_2 \Leftrightarrow N(1-3t'; 2-t'; -4+4t').$$

$$\overrightarrow{MN} = (2+t-3t'; -4-2t-t'; -4-t+4t').$$

$$(P): 3x + y - 2z = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}(3; 1; -2).$$

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t-3t' = 3k \\ -4-2t-t' = k \\ -4-t+4t' = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$t = -2 \Rightarrow M(1; 2; -2)$$

Do $(d) \perp (P)$ nên $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(P)}}$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = 1+3s \\ y = 2+s \\ z = -2-2s \end{cases}; s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Chọn } s = -1 \Rightarrow A(-2; 1; 0) \in d \Rightarrow d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}.$$

Chọn A.

Ví dụ 4. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ cắt đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Do $d \cap d_1 = B \Rightarrow B(2m; m; m+2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m-1; m-2; m-1)$.

d song song với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow 1(2m-1) + 1(m-2) - (m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -1; 0).$$

Vậy phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$

Chọn C.

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN .

A. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$ B. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$
C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$ D. $\frac{x-6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $N = \Delta \cap d \Rightarrow N(-2+2t; 1+t; 1-t)$.

A là trung điểm của $MN \Rightarrow M(4-2t; 5-t; 3+t)$.

Mà $M \in (P)$ nên tọa độ M thỏa phương trình (P) , ta được:

$$2(4-2t) - (5-t) + (3+t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow N(-6; -1; 3), M(8; 7; 1).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (14; 8; -2)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vector chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} = (7; 4; -1)$ nên có

phương trình là $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Chọn A.

Ví dụ 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$.

Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N . Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -2; 1)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α) .

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-2; 7; 3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó IH nhỏ nhất khi H trùng với K .

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất.

Khi đó đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K . Ta có $\overrightarrow{AK} = (1; 4; 6)$.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Chọn A.

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là

$d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

Đường thẳng AB có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}(2;1;-1)$.

B. $\vec{u}(1;-1;0)$.

C. $\vec{u}(0;1;-1)$.

D. $\vec{u}(1;2;1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow C(2 + 2t; 4 - t; 2 - t).$$

Gọi M là trung điểm của AC nên $M = \left(2 + t; \frac{7 - t}{2}; \frac{5 - t}{2}\right).$

Vì $M \in d$ nên $\frac{(2 + t) - 3}{-1} = \frac{\left(\frac{7 - t}{2}\right) - 3}{2} = \frac{\left(\frac{5 - t}{2}\right) - 2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t - 1}{-1} = \frac{1 - t}{4} = \frac{1 - t}{-2} \Rightarrow t = 1.$

Suy ra $C(4; 3; 1).$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ là: $2x - y - z + 2 = 0.$

Gọi H là giao điểm của (P) và $\Delta \Rightarrow H(2; 4; 2).$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác Δ , suy ra H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(2; 5; 1).$

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2; 2; 0) = 2(-1; 1; 0).$

Suy ra phương trình của đường thẳng BC là
$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $B = BM \cap BC \Rightarrow B(2; 5; 1) = A'.$

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) = 2(0; 1; -1).$

Chọn C.

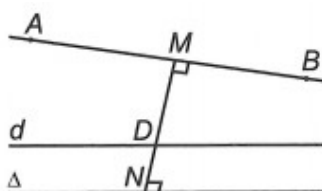
Ví dụ 8. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(4; -2; 4), B(0; 0; -2).$ Gọi d là đường thẳng song song và cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{5}$, gần đường thẳng AB nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm nào dưới đây?

- A. $(2; 1; 0).$ B. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}; 0\right).$ C. $(3; 2; 0).$ D. $(0; 0; 0).$

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của đường thẳng AB có dạng:
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = -2 + 6t \end{cases}.$$

Để đường thẳng d thỏa mãn bài toán thì ta có hình vẽ tương ứng



Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và Δ là MN với $M(0; -5; 1), N(3; 1; 1)$.

Để d gần đường thẳng AB nhất thì d phải đi qua điểm D nằm trên đoạn MN mà $DN = d(d, \Delta) = \sqrt{5}, MN = 3\sqrt{5}$. Do đó $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{DN} \Rightarrow D = (2; -1; 1)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_{(d)}} = (2; -1; 1)$.

Suy ra phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (Oxy) tại điểm có $z = 1 + t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy giao điểm của d và (Oxy) là $(0; 0; 0)$.

Chọn D.

Ví dụ 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}; \Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\Delta_3: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}; \Delta_4: \frac{x-5}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{1}$$

Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Giá trị của biểu thức $T = a - 2b$ bằng

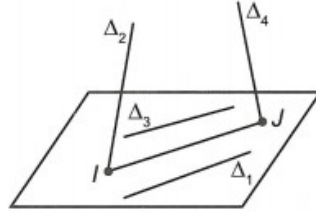
A. -2.

B. -3.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\Delta_1 // \Delta_3$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và $\Delta_3 \Rightarrow (P): x + 2y - z + 3 = 0$.

Gọi $I = \Delta_2 \cap (P) \Rightarrow I(0; -1; 1)$.

Gọi $J = \Delta_4 \cap (P) \Rightarrow J\left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-24}{6}; \frac{-2a+7b-8}{6}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-18}{6}; \frac{-2a+7b-14}{6}\right)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{IJ}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (1; -1; -1)$.

Suy ra $\frac{-2a+b+22}{6} = \frac{3b-18}{-6} = \frac{-2a+7b-14}{-6} \Leftrightarrow a - 2b = 2$.

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$$

- A. $\vec{u} = (1; -2; 0)$. B. $\vec{u} = (-2; 2; -4)$. C. $\vec{u} = (1; 1; 2)$. D. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng qua hai điểm $M(-2; 1; 2), N(3; -1; 0)$ có vector chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. B. $\vec{u} = (5; -2; -2)$. C. $\vec{u} = (-1; 0; 2)$. D. $\vec{u} = (5; 0; 2)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận vector $\vec{u}$ là vector chỉ phương. Giá trị $a+b$ bằng

- A. -8. B. 8. C. 4. D. -4.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $E(-1; 0; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (3; 1; -7)$. Phương trình của đường thẳng d là

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng EF là

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d ?

- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=-2+3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0; -1; 4)$ vuông góc với d và nằm trong (P) là

- A. $\begin{cases} x=5t \\ y=-1+t \\ z=4+5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=4+t \end{cases}$.

Câu 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$ và $(\beta): x+y-z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2-t \\ y=2 \\ z=2-2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=-2+2t \end{cases}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+y+z=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình của đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=2-5t \\ z=-1-7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-5t \\ z=-3-7t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=4+t \\ y=-5 \\ z=-7-3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=5t \\ z=-3+7t \end{cases}$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-12=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) .

A. $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ B. $d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+3}{1}$
C. $d': \frac{x}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{1}$ D. $d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-2}{1}$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$
C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=2-t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=-2-t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=2-t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases} \end{array}$$

Bài tập nâng cao

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3} & \text{B. } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3} \\ \text{C. } \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3} & \text{D. } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3} \end{array}$$

Câu 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 20$, mặt phẳng (α) có phương trình: $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ' nằm trong mặt phẳng (α) , vuông góc với đường thẳng Δ , đồng thời Δ' cắt mặt cầu (S) theo dây cung có độ dài lớn nhất.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \Delta': \begin{cases} x=3t \\ y=-2 \\ z=-4+t \end{cases} & \text{B. } \Delta': \begin{cases} x=1+3t \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases} & \text{C. } \Delta': \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+5t \\ z=3+4t \end{cases} & \text{D. } \Delta': \begin{cases} x=1-2t \\ y=1-5t \\ z=1-4t \end{cases} \end{array}$$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2), B(5;1;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=2 \\ y=1-4t \\ z=-2+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=-2-t \end{cases} \end{array}$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) có phương trình: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; a; b)$. Giá trị của $a + b$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 4. & \text{B. } -2. & \text{C. } -\frac{1}{2}. & \text{D. } 5. \end{array}$$

Câu 18: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của đường thẳng Δ là

$$\begin{array}{llll} \text{A.} \begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases} & \text{B.} \begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases} & \text{C.} \begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases} & \text{D.} \begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases} \end{array}$$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;1;0), B(3;0;2), C(4;3;-4)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc A là

$$\begin{array}{llll} \text{A.} \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases} & \text{B.} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} & \text{C.} \begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} & \text{D.} \begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \end{array}$$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2), B(-2;3;1), C(3;-1;4)$.

Phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh B là

$$\begin{array}{llll} \text{A.} \begin{cases} x=-2-t \\ y=3+t \\ z=1-t \end{cases} & \text{B.} \begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=1-t \end{cases} & \text{C.} \begin{cases} x=-2-t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{cases} & \text{D.} \begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \\ z=1+t \end{cases} \end{array}$$

Dạng 2: Các vấn đề về góc

Bài toán 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp giải

Cho đường thẳng

$(\Delta): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho

$(\alpha): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) và (α) Tính góc tạo bởi Δ và (α) .

ta có công thức:

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Chú ý: A, B, C và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 4; 5)$.

Ta có: $\sin(\widehat{\Delta, (\alpha)}) = |\cos(\vec{n}, \vec{u})|$

$$= \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $(\widehat{\Delta, (\alpha)}) = 60^\circ$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$. Biết Δ cắt mặt phẳng (P) tại A, M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) .

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 4)$.

Mặt phẳng $(P): x+y-2z+6=0$ có vector chỉ phương $\vec{n} = (1; 1; -2)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin \varphi$$

$$\text{Suy ra } d(M, \Delta) = MH = MA \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.$$

Chọn B.

Bài toán 2: Góc giữa hai đường thẳng



Phương pháp giải

Cho hai đường thẳng:

$$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$(\Delta_2): \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) .

$$\text{Ta có: } \cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}; \Delta_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}.$$

Tính góc giữa hai đường thẳng trên.

Hướng dẫn giải

Vector chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$.

Vector chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u}_2 = (1; 1; -4)$.

$$\begin{aligned} \cos(\Delta_1, \Delta_2) &= \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng đã cho là 45° .



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(P): x - z \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = 0; (Q): y - z \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = 0; \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Góc giữa (d) và trục Oz là:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; 0; -\sin \alpha)$.

Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; -\cos \alpha)$.

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vector chỉ phương của (d) là:

$$\vec{u}_{(d)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (\sin \alpha; \cos \alpha; 1).$$

Vector chỉ phương của (Oz) là $\vec{u}_{(Oz)} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Suy ra } \cos(d, Oz) = \frac{|0 \cdot \sin \alpha + 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot 1|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1^2} \cdot \sqrt{0 + 0 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d, Oz) = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là 45° .

Chọn B.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -1; 2)$, song song với mặt phẳng

$$(P): 2x - y - z + 3 = 0, \text{ đồng thời tạo với đường thẳng } \Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \text{ một góc lớn nhất. Phương}$$

trình đường thẳng d là

- A. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$.
C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$. D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -1)$.

Đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; -2; 2)$.

Giả sử đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0^\circ \leq (d, \Delta) \leq 90^\circ$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất nên $(d, \Delta) = 90^\circ \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_\Delta$.

Lại có $d \parallel (P)$ nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(P)}] = (4; 5; 3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) có một vector chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$, đồng thời tạo với d góc bé nhất. Tính $T = m^2 - n^2$.

A. $T = -5$.

B. $T = 4$.

C. $T = 3$.

D. $T = -4$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$; đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{v} = (4; -4; 3)$.

$$\Delta // (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta có: } \cos(\widehat{\Delta, d}) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41(5m^2 + 8m + 5)}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{(4m + 5)^2}{5m^2 + 8m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}. \end{aligned}$$

Vì $0^\circ \leq (\widehat{\Delta, d}) \leq 90^\circ$ nên $(\widehat{\Delta, d})$ bé nhất khi và chỉ khi $\cos(\widehat{\Delta, d})$ lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{16t^2 + 40t + 25}{5t^2 + 8t + 5} \Rightarrow f'(t) = \frac{-72t^2 - 90t}{(5t^2 + 8t + 5)^2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frac{16}{5}$		5		$\frac{16}{5}$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			0		

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(t) = f(0) = 5$.

Suy ra $(\widehat{\Delta, d})$ bé nhất khi $m = 0 \Rightarrow n = 2$.

Do đó $T = m^2 - n^2 = -4$.

Chọn D.

 **Bài tập tự luyện dạng 2**

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): -x+2y-3z=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Khi đó góc φ bằng

A. 0° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$ và

$\Delta_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng

A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 135° .

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z-5}{m}$ tạo với nhau góc 60° , giá trị của tham số m bằng

A. $m = -1$. B. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Bài tập nâng cao

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m - 1 + t \end{cases}.$$

Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B và các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A, B tạo với nhau một góc lớn nhất bằng

A. $-1,5$. B. 3 . C. -3 . D. $-2,25$.

Dạng 3: Khoảng cách

Bài toán 1: Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Phương pháp giải

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

$$\text{đường thẳng } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}.$$

Tính khoảng cách từ $M(-2; 1; -1)$ tới d .

Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$

và có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó

khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi

công thức:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $A(1; 2; -2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-3; -1; 1), \vec{u}(1; 2; -2)$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là:

$$d(M; d) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

📌 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;-1)$ cho trước, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 2 = 0$ và cách điểm $M(0;2;1)$ một khoảng lớn nhất.

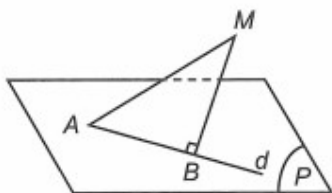
A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Hướng dẫn giải



Ta gọi B là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi đó $MB \leq MA$.

Suy ra $MB_{\max} = MA$ nên đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với MA .

Đồng thời đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) nên ta có

$$\vec{u}_d = [\vec{MA}, \vec{n}_{(P)}] = (1; 3; -1).$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2), B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

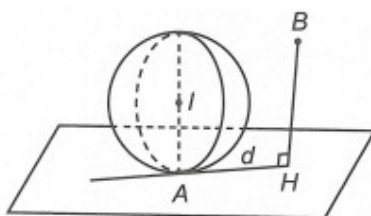
C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 - t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$ có tâm $I(0; -3; -6)$ bán kính $R = 6$.

$IA = 6 = R \Rightarrow A \in (S)$, $IB = 3\sqrt{10} > R$ nên B nằm ngoài (S) .



Đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) nên d nằm trong mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vector pháp tuyến có phương trình là $x + 2y + 2z = 0$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (P) thì tọa độ của $H(4; -1; -1)$.

Ta có: $d(B; d) \geq d(B; (P)) = BH$.

Vậy khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi d đi qua H . Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AH} = (2; -2; 1)$.

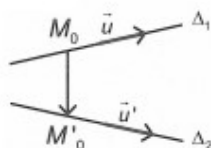
Suy ra phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Chọn C.

Bài toán 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp giải

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: Δ_1 có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$; Δ_2 có vector chỉ phương $\vec{u}' = (a'; b'; c')$ và đi qua $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$.



Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 được tính bởi

$$\text{công thức } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}.$$

Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ ($\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta_2$) thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_0, \Delta_2)$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1; -1; 2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (4; -2; 2)$.

Do $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$.

$$\text{Suy ra } d(d_1, d_2) = d(N; d_1) = \frac{\left| \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN} \right] \right|}{\left| \vec{u}_1 \right|}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (0; 1; 2), \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN} \right] = (-3; -4; 2).$$

$$\text{Suy ra } \frac{\left| \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN} \right] \right|}{\left| \vec{u}_1 \right|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{174}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(d_1, d_2) = \frac{\sqrt{174}}{6}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;0), B(2;1;1), C(0;1;2), D(1;-1;1)$.

Khoảng cách giữa AB và CD là

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 0; 1) \\ \overrightarrow{CD} = (1; -2; -1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (2; 2; -2).$

Suy ra $d(AB, CD) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]|} = \sqrt{3}.$

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$, đường thẳng $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(0; 2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , nằm trong (P) sao cho khoảng cách d và d' đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-9}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-1}{9}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{9}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{-9}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và song song với d' .

Phương trình của d_1 là: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Trên đường thẳng d_1 lấy điểm $B(1; 0; 0)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và d_1 .

Ta có $d(d, d') = d(d', (Q)) = d(B, (Q)).$

Do d_1 cố định cho nên $d(d, d') = d(B, (Q)) \leq d(B, d_1).$

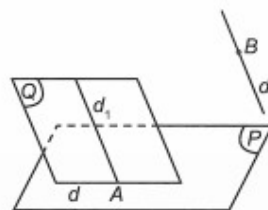
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \overrightarrow{BH}$ trong đó H là hình chiếu của B lên d_1 .

Ta tìm được $H\left(\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{-5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = (-5; 2; 1).$

Ta có $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (1; 7; -9).$

Vậy phương trình của đường thẳng d là $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-9}.$

Chọn A.



Lưu ý: Vì đường thẳng d đi qua A nên ta có thể loại đáp án bằng cách thay tọa độ điểm A vào các đáp

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(a; b; c)$. Khoảng cách từ điểm P đến trục tọa độ Oy bằng

- A. $\sqrt{a^2 + c^2}$. B. b . C. $|b|$. D. $a^2 + c^2$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ bằng

- A. $\frac{16}{3}$. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. D. 3.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ và $(d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$ bằng

- A. 30. B. 20. C. 25. D. 15.

Bài tập nâng cao

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1), A(1; 2; -3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng nhỏ nhất.

- A. $\vec{u}(2; 2; -1)$. B. $\vec{u}(3; 4; -4)$. C. $\vec{u}(2; 1; 6)$. D. $\vec{u}(1; 0; 2)$.

Câu 5: Phương trình đường thẳng d đi qua O và vuông góc với $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và cách điểm $M(3; 1; 0)$ một khoảng nhỏ nhất là

- A. $\frac{x}{-17} = \frac{y}{14} = \frac{z}{10}$. B. $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{z}{-13}$. C. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-13}$. D. $\frac{x}{17} = \frac{y}{14} = \frac{z}{-10}$.

Dạng 4: Vị trí tương đối

Bài toán 1: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp giải

Trong không gian $Oxyz$, xét đường thẳng (Δ) có vector chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.

$$(\Delta) \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0.$$

$$(\Delta) // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

$$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

$$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{n} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C.$$

Ta có thể biện luận vị trí tương đối dựa vào số nghiệm của phương trình đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) .

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d cắt và không vuông góc với (P) . B. d song song với (P) .
C. d vuông góc với (P) . D. d nằm trong (P) .

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1; -3; -1)$ làm một vector chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (3; -3; 2)$ làm một vector pháp tuyến.

Do $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ và hai vector này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P) .

Chọn A.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + my + (m^2 - 1)z - 7 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; m; m^2 - 1)$.

$$d // (P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 + m - m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy với $m = -2$ thì $d \subset (P)$ (loại). Vậy $m = -1$.

Chọn B.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x - y + 2z - 5 = 0$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d // (\alpha)$.

B. $d \subset (\alpha)$.

C. d cắt (α) và không vuông góc với (α) .

D. $d \perp (\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 2 + 4t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x - y + 2z - 5 = 0 & (*) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $1 + 2t - (2 + 4t) + 2(3 + t) - 5 = 0$.

Phương trình này có vô số nghiệm.

Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) .

Chọn B.

Ví dụ 4. Tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d : \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng

$(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ là

A. $(1; 0; 1)$.

B. $(0; 0; -2)$.

C. $(1; 1; 6)$.

D. $(12; 9; 1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(4t + 12; 3t + 9; t + 1) \in d$.

Ta có $M \in (P) \Rightarrow 3(4t + 12) + 5(3t + 9) - (t + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Suy ra $M(0; 0; -2)$.

Chọn B.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(P) : x + 2y - z - 1 = 0, (Q) : 2x + y - z + 2 = 0$

và hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}, \Delta_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ và cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K . Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 6.

D. $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{u} = [\vec{n_P}, \vec{n_Q}] = (-1; -1; -3)$.

Gọi $H(2t; 1+t; -1+2t)$; $K(m; 2-m; 1+2m)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = (m-2t; 1-m-t; 2+2m-2t).$$

Vì Δ song song với 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ nên $\overrightarrow{HK} = k\vec{u}$ nên

$$\frac{m-2t}{1} = \frac{1-m-t}{1} = \frac{2+2m-2t}{3}.$$

Tính ra được $m = \frac{2}{7}$; $t = \frac{-3}{7}$. Suy ra $HK = \frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Chọn A.

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 2(m^2 + m + 2)x + (m^2 - 1)y + (m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0$ luôn chứa đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là?

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2(m^2 + m + 2)x + (m^2 - 1)y + (m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m^2(2x + y + 1) + m(2x + z + 1) + 4x - y + 2z + 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \\ 4x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy (P) luôn chứa đường thẳng (Δ) cố định: $\begin{cases} x = -\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là: $d(O; \Delta) = \frac{[\overrightarrow{OA}, \vec{u}_\Delta]}{|\vec{u}_\Delta|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Chọn C.

Bài toán 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

 **Phương pháp giải**

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1(x_0; y_0; z_0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (a; b; c)$ và $d_2: \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$ đi qua $M_2(x'_0; y'_0; z'_0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (a'; b'; c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 , ta sử dụng phương pháp sau:

$$\begin{aligned} +) d_1 \text{ trùng } d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \\ +) d_1 // d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1 M_2}] \neq \vec{0} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \\ +) d_1 \text{ cắt } d_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases} \\ +) d_1 \text{ chéo } d_2 &\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0. \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và } d_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y+9}{8} = \frac{z+2}{m^2} \quad (m \neq 0)$$

Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d_1 // d_2$ có số phần tử là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1; -1; 2)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $B(-3; -9; -2)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (4; 8; m^2)$.

Đường thẳng $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau.

Vì $\frac{-3-1}{1} = \frac{-9+1}{2} = \frac{-2-2}{1}$ nên B nằm trên đường thẳng d_1 .

Do đó hai đường thẳng này luôn có điểm chung là B nên hai đường thẳng không thể song song.

Chọn B.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=2-2t' \\ y=-2+t' \\ z=1+3t' \end{cases}$$

Tìm tọa độ giao điểm M của d và d' .

- A. $M = (0; -1; 4)$. B. $M = (-1; 0; 4)$. C. $M = (4; 0; -1)$. D. $M = (0; 4; -1)$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm M của d và d' ứng với t và t' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+t=2-2t' \\ 2+3t=-2+t' \\ 3-t=1+3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2t'=1 \\ 3t-t'=-4 \\ t+3t'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t'=1 \end{cases}.$$

Vậy $M = (0; -1; 4)$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

- A. Δ_1 song song với Δ_2 . B. Δ_1 chéo với Δ_2 .
C. Δ_1 cắt Δ_2 . D. Δ_1 trùng với Δ_2 .

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$ nên vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; -2; 1)$ của Δ_2 .

Suy ra Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2 .

Lấy $M(1; -1; 0) \in \Delta_1$, $N(3; 3; -2) \in \Delta_2$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 4; -2)$.

Khi đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

Suy ra $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .

Chọn C.

Bài toán 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

 Phương pháp giải

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .

Chứng minh d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu

(S) đến đường thẳng d là

$$h = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM_0 \cdot a}|}{|\vec{a}|}$$

Bước 2: So sánh $d(I, d)$ với bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S).
- Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S).
- Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu (S).

Phương pháp đại số

Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t (*).

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì d không cắt (S).
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm thì d tiếp xúc (S).
- Nếu phương trình (*) có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N .

Chú ý: Để tìm tọa độ M, N ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d .

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}.$$

Phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16.$

B. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25.$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng d đi qua $M(-2;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;2)$.

Ta có $h = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3.$

Vì $h < R$ nên d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 17$ cắt trục Oz tại hai điểm A, B . Tìm độ dài đoạn AB .

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz .

Ta có $M \in Oz$ nên $M(0;0;t)$.

Mà $M \in (S)$ nên $0^2 + 0^2 + (t+2)^2 = 17$

$$\Leftrightarrow (t+2)^2 = 17 \Leftrightarrow |t+2| = \sqrt{17} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{17} \\ t = -2 + \sqrt{17} \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ các giao điểm là $A(0;0;-2-\sqrt{17})$,

$$B(0;0;-2+\sqrt{17}) \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}.$$

C. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R .

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (2;3;2)$.

Gọi H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$.

Ta có $AH = d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Với $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (2; -2; 1) \\ \vec{u} = (2; 3; 2) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}] = (-7; -2; 10) \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 10^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$.

Giá trị $2a+b+c$ bằng

A. $\frac{134}{25}$.

B. $\frac{116}{25}$.

C. $\frac{84}{25}$.

D. $\frac{62}{25}$.

Hướng dẫn giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R = 3$.

Khi đó $IM = 5 > R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Phương trình đường thẳng MI là $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên MI nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

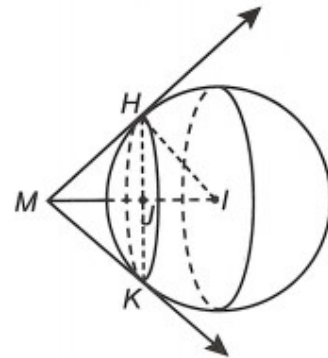
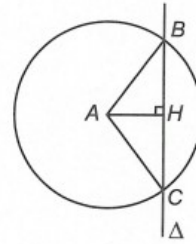
Xét $\triangle MHI$ vuông tại H có

$MI = 5; IH = 3 \Rightarrow MH = \sqrt{MI^2 - HI^2} = 4$.

Mặt khác $\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ = \sqrt{(-4+4t)^2 + (3-3t)^2}$.

$MJ \cdot MI = MH^2 \Rightarrow MJ = \frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow (-4+4t)^2 + (3-3t)^2 = \frac{256}{25}$



$$\Leftrightarrow 25t^2 - 50t + \frac{369}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{25} \\ t = \frac{41}{25} \end{cases}$$

Suy ra $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ hoặc $J\left(1; \frac{139}{25}; \frac{-73}{25}\right)$.

+) Với $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{9}{5} < IM$ (nhận).

+) Với $J\left(1; \frac{139}{25}; \frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ = \frac{41}{5} > IM$ (loại).

Vậy $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ nên $2a + b + c = \frac{84}{25}$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{14}{3}$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{2}$. Gọi

$A(x_0; y_0; z_0)$, $x_0 > 0$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B, C, D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ là

A. 6.

B. 16.

C. 12.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm mặt cầu thì $I(1; 2; 3)$.

Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI .

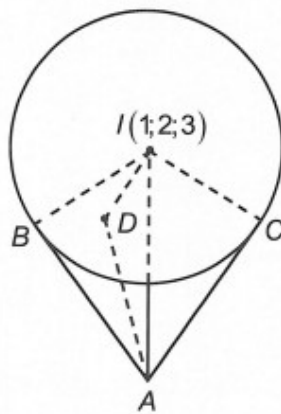
Vì theo giả thiết $AB = AC = AD$ và $IB = IC = ID = \sqrt{\frac{14}{3}}$ nên AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại O . Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

Đặt $AI = x \left(x > \sqrt{\frac{14}{3}} \right)$.

Ta có $AB = \sqrt{AI^2 - IB^2} = \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}}$

$$IB^2 = IO \cdot IA \Rightarrow IO = \frac{14}{3x} \Rightarrow OB = \sqrt{IB^2 - IO^2} = \sqrt{\frac{14}{3} - \left(\frac{14}{3x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cdot \cos 120^\circ = 3OB^2$$



$$\Rightarrow BD = \sqrt{3}OB \Rightarrow BD = \sqrt{3}OB = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2} \right)}$$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên

$$AB = BD \Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}} = \sqrt{3 \left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2} \right)} \Leftrightarrow x^2 - \frac{14}{3} = 14 - \frac{196}{3x^2}$$

$$3x^4 - 56x^2 + 196 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{14}{3} \\ x^2 = 14 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{14}.$$

$A \in d$ nên $A(4+3t; 4+2t; 4+t)$.

$$\text{Suy ra } AI = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{(4+3t-1)^2 + (4+2t-2)^2 + (4+t-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow |t+1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; 4; 4) \\ A(-2; 0; 2) \end{cases}.$$

Do $x_0 > 0$ nên điểm A có tọa độ $A(4; 4; 4)$.

Suy ra $P = 12$.

Chọn C.

Ví dụ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P, Q, R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn

tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và cắt

(S) tại hai điểm A, B phân biệt. Diện tích lớn nhất của $\triangle AOB$ là

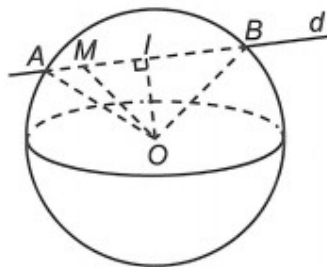
A. $\sqrt{15}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR) .

$$\text{Dễ thấy } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}.$$

Khi đó (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + 0 = 1 < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi I là trung điểm của AB , do $\triangle OAB$ cân tại O nên $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OI \cdot AB$.

Đặt $OI = x$. Vì $OI \leq OM$ nên $0 < x \leq 1$ và $AB = 2\sqrt{8-x^2}$.

Ta có $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}x \cdot 2\sqrt{8-x^2} = x\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8x^2-x^4}$.

Xét hàm số $f(x) = 8x^2 - x^4$, $0 < x \leq 1$.

Vì $f'(x) = 4x(4-x^2) > 0$ với mọi $x \in (0;1]$ nên $f(x) \leq f(1) = 7$.

Suy ra diện tích của $\triangle OAB$ lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB .

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 4

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm M và nhận vector $\vec{a}$ làm vector chỉ phương và đường thẳng d' đi qua điểm M' và nhận vector $\vec{a}'$ làm vector chỉ phương. Điều kiện để đường thẳng d song song với đường thẳng d' là

- A. $\begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}', k \neq 0 \\ M \notin d' \end{cases}$ B. $\begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}', k \neq 0 \\ M \in d' \end{cases}$ C. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}' \\ M \in d' \end{cases}$ D. $\begin{cases} \vec{a} \neq k\vec{a}', k \neq 0 \\ M \notin d' \end{cases}$

Câu 2: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d , đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$.

- A. $R=2$. B. $R=4$. C. $R=1$. D. $R=3$.

Câu 3: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$ là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu

$$(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 \text{ và } (S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn tâm là $I(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ bằng

- A. $\frac{7}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{10}{3}$. D. 1.

Bài tập nâng cao

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): (m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 1)$ vuông góc với Δ và cách O một khoảng lớn nhất có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; b; c)$. Giá trị của $T = b + c$ bằng

- A. 12. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 6)$ và $D(1; 1; 1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(-1; -2; 1)$. B. $N(5; 7; 3)$. C. $P(3; 4; 3)$. D. $Q(7; 13; 5)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho có duy nhất một mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1?

- A. 1. B. 6. C. 7. D. 2.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6; 0; 0), N(0; 6; 0), P(0; 0; 6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM ?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 4.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3), B(6; 5; 5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Tính $S = b + c + d$.

- A. $S = 18$. B. $S = -18$. C. $S = -12$. D. $S = 24$.

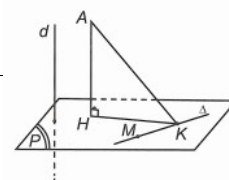
Dạng 5: Một số bài toán cực trị

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1), A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (2; 2; -1)$. B. $\vec{u} = (1; 7; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. D. $\vec{u} = (3; 4; -4)$.

Hướng dẫn giải



Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P) \perp (d)$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2; -2; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = \vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên có phương trình:
 $2x + 2y - z + 9 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ .

Khi đó $AK \geq AH = \text{const}$ nên AK đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$.

Đường thẳng AH đi qua $A(1; 2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên AH có phương trình

$$\text{tham số là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Vì $H \in AH$ nên $H(1 + 2t; 2 + 2t; -3 - t)$.

Lại $H \in (P)$ nên $2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; -2; -1)$.

Vậy $\vec{u}_\Delta = \vec{HM} = (1; 0; 2)$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5; 3; -2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N .

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

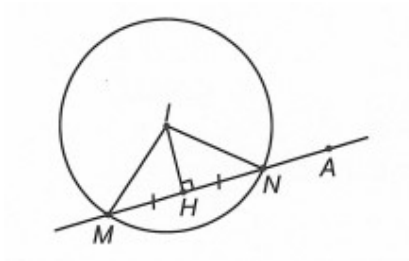
A. $S_{\min} = 30$.

B. $S_{\min} = 20$.

C. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

D. $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$.

Hướng dẫn giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 - (-3)} = 3$.

Ta có: $AI = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34} > R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S) .

Ta lại có: $S = AM + 4AN$.

Đặt $AM = x$, $x \in [\sqrt{34} - 3; \sqrt{34} + 3]$.

$$\text{Mà } AM \cdot AN = AI^2 - R^2 = 34 - 9 = 25 \Rightarrow AN = \frac{25}{AM}.$$

Do đó: $S = f(x) = x + \frac{100}{x}$ với $x \in [\sqrt{34} - 3; \sqrt{34} + 3]$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x} < 0$ với $x \in [\sqrt{34} - 3; \sqrt{34} + 3]$.

Do đó: $\min_{[\sqrt{34}-3; \sqrt{34}+3]} f(x) = f(\sqrt{34} + 3) = 5\sqrt{34} - 9$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A, M, N, I$ thẳng hàng và $AM = \sqrt{34} + 3$; $AN = \sqrt{34} - 3$.

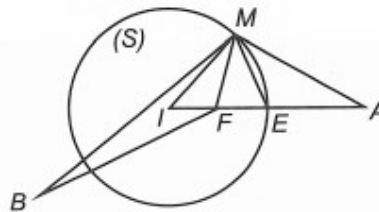
Chọn C.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(9; 6; 11), B(5; 7; 2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$.

Giá trị nhỏ nhất của $AM + 2MB$ bằng

- A. $\sqrt{105}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $2\sqrt{29}$. D. $\sqrt{102}$.

Hướng dẫn giải



Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$ có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 6$.

Ta có $IA = 12 = 2R$.

Gọi E là giao điểm của IA và mặt cầu (S) suy ra E là trung điểm của IA nên $E(5; 4; 7)$.

Gọi F là trung điểm của IE suy ra $F(3; 3; 5)$.

Xét $\triangle MIF$ và $\triangle AIM$ có $\widehat{AIM}$ chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\triangle MIF \sim \triangle AIM$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Do đó $AM + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2BF = 2\sqrt{29}$ (theo bất đẳng thức tam giác).

Dấu “=” xảy ra khi M là giao điểm FB và mặt cầu (S) .

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 5

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$. Xét M là điểm thay đổi thuộc d , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

- A. 14. B. 160. C. $4\sqrt{10}$ D. 18.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;3); B(-3;1;3); C(1;5;1)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng tọa độ (Oxy) sao cho biểu thức $T = 2|\overline{MA}| + |\overline{MB} + \overline{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_0 - y_0$ bằng

- A. $x_0 - y_0 = -\frac{8}{5}$. B. $x_0 - y_0 = \frac{8}{5}$. C. $x_0 - y_0 = -2$. D. $x_0 - y_0 = 2$.

Bài tập nâng cao

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$.

Câu 4: Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1;1;3), B(21;9;-13)$.

Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng

- A. 3. B. 8. C. 6. D. -18.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Xác định vector chỉ phương và viết phương trình đường thẳng

1-B	2-B	3-B	4-B	5-B	6-C	7-C	8-C	9-B	10-B
11-D	12-D	13-A	14-D	15-D	16-C	17-D	18-B	19-C	20-B

Dạng 2. Các vấn đề về góc

1-C	2-B	3-A	4-C						
-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--

Dạng 3. Khoảng cách

1-A	2-A	3-C	4-D	5-D					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--

Dạng 4. Vị trí tương đối

1-A	2-D	3-D	4-D	5-C	6-B	7-D	8-C	9-B	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

Dạng 5. Một số bài toán cực trị

1-B	2-C	3-C	4-B						
-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--