

CHƯƠNG 2

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1

VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

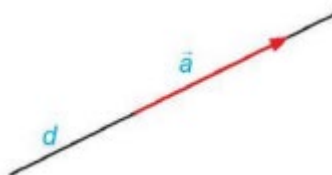
1. Khái niệm vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “vectơ AB ”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

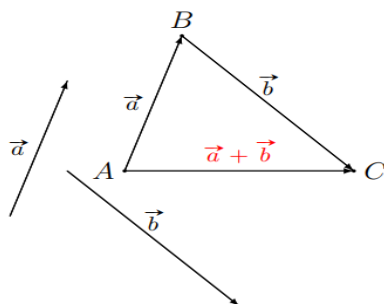
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 , cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Các phép toán vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vector còn được gọi là **phép cộng vector**.

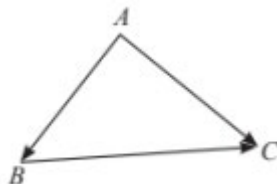


Chú ý: Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

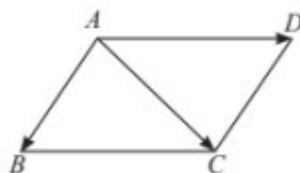
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vector-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Đối với vector trong không gian, ta có các quy tắc sau:

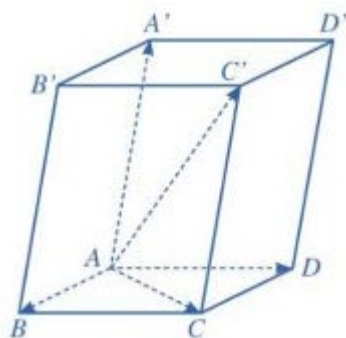
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



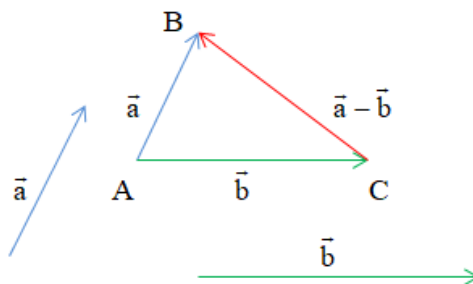
- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



b. Hiệu của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu hai vector còn được gọi là **phép trừ vector**.



Chú ý: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vector trong không gian

a. Định nghĩa:

Cho số $k \neq 0$ và một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vector $\vec{a}$ với số k là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$.

Vector $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là **phép nhân một số với một vector**.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

b. Tính chất:

Với hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý:

- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

c. Sự đồng phẳng của ba vector (tham khảo thêm)

- Ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vector đồng phẳng:** Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

- Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý.

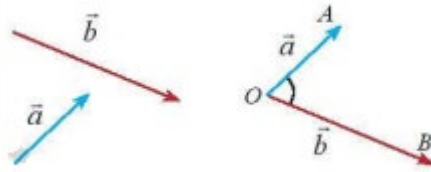
Khi đó: $\exists m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

a. Góc giữa hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.



Chú ý:

- $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .



b. Tích vô hướng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Chú ý:

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

• Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

• Tính chất của tích vô hướng: Với ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{tính chất giao hoán})$$

$$+ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{tính chất phân phối})$$

$$+ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

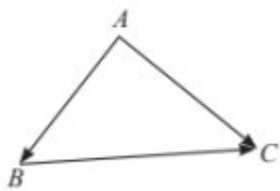
$$\bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

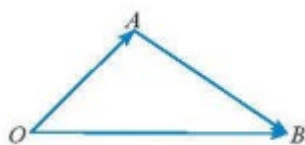
CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHÉP VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

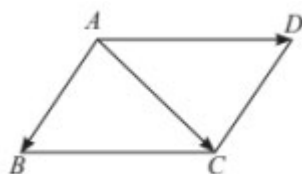
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



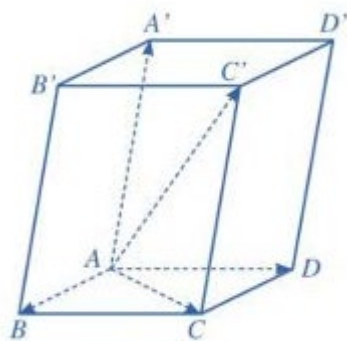
- với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

DẠNG 1

CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
- C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 3. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
- C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Câu 4. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
- C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$
- C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{IJ}$
- C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$ D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$. D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 11. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{IA} + (2k - 1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

A. $k = 2$.

B. $k = 4$.

C. $k = 1$.

D. $k = 0$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

C. $k = 4$.

D. $k = 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$

B. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$.

Câu 16. Hãy nhận xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 17. Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O .

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$.

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$.

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

B. Nếu $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O .

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$.

B. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Câu 23. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$

DẠNG 2

PHÂN TÍCH MỘT VECTOR THEO CÁC VECTOR

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$. B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$. D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 32. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{B'C}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}, \overrightarrow{CA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BD'} = \vec{x}, \overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\vec{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\vec{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D. $2\vec{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\vec{B_1M} = \vec{B_1B} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1}$.

B. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$.

C. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \frac{1}{2}\vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$.

D. $\vec{BB_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1} = 2\vec{B_1D}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC . Phân tích vector $\vec{SI}$ theo ba vector $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \vec{AB}$; $\vec{y} = \vec{AC}$; $\vec{z} = \vec{AD}$. Phân tích vector $\vec{AG}$ theo ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$. Phân tích vector $\vec{MP}$ theo ba vector $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vector $\vec{AM}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

DẠNG 3

HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 40. Cho $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = -6\vec{a} - 3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

- A. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương
- B. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng
- C. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng**
- D. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Câu 41. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương.
- B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.**
- C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương.
- D. Đáp án A, B, C, đều sai.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\vec{GA} = -2\vec{G_0G}$.
- B. $\vec{GA} = 4\vec{G_0G}$.
- C. $\vec{GA} = 3\vec{G_0G}$.**
- D. $\vec{GA} = 2\vec{G_0G}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn: $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. G, S, O không thẳng hàng.
- B. $\vec{GS} = 4\vec{OG}$**
- C. $\vec{GS} = 5\vec{OG}$
- D. $\vec{GS} = 3\vec{OG}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 44. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kỳ không thuộc đường thẳng AB .

- A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$.
- B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OB} = k\vec{BA}$.
- C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$.**
- D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OB} = k(\vec{OB} - \vec{OA})$.

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.
- B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
- C. M là trung điểm BB' .**

D. M là trung điểm CC' .

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”.

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .

D. Chưa thể xác định được.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D = C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}$ ($k \neq 0$), $\overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}$, $\overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

a) Giả sử $a\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ thì giá trị của a bằng bao nhiêu?

b) Xác định vị trí của M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

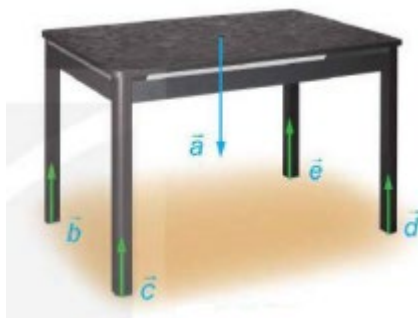
Câu 52. Trong không gian cho tam giác ABC . Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

DẠNG 4

BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

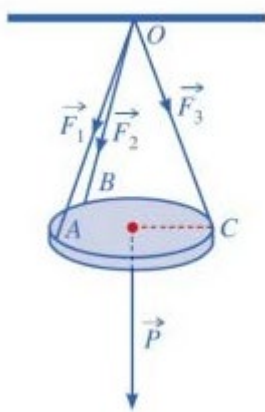
Câu 53. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vector $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Vector $\vec{d}$ ngược hướng với vector $\vec{a}$.
- B. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vector $\vec{a}$.
- C. Vector $\vec{b}$ với vector $\vec{a}$ đối nhau.
- D. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Câu 54. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ).

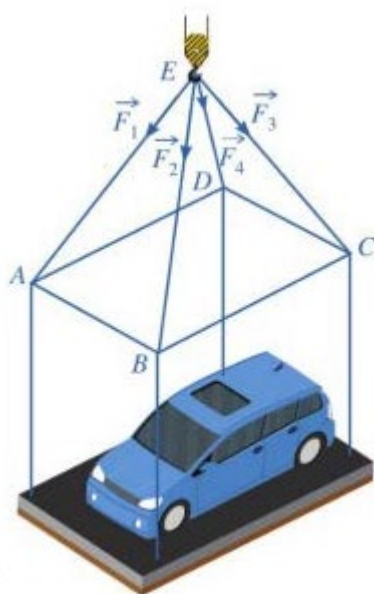


Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

- A. $30\sqrt{3}$.
- B. 10.
- C. $10\sqrt{2}$.
- D. $10\sqrt{3}$.

Câu 55. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên

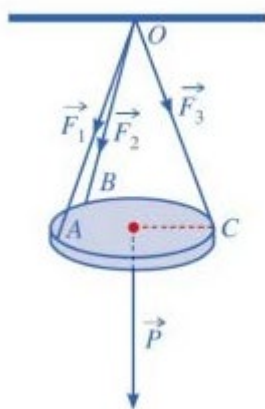
theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $2000(N)$. Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



- A. $15321(N)$. B. $6660(N)$. C. $5000(N)$. D. $10000(N)$.

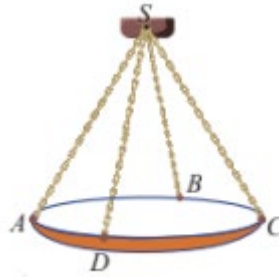
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 56. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}(N)$ (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

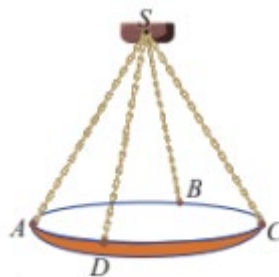
Câu 57. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 45^\circ$ (xem hình vẽ).



a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vector gia tốc rơi tự do có độ lớn $10(m/s^2)$, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

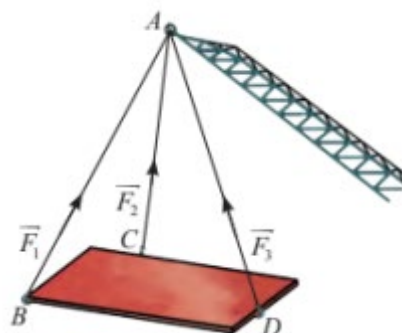
b) Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.

Câu 58. Một chiếc đèn chùm được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $SA = SB = SC = SD$ và $ABCD$ là hình vuông, đồng thời các cạnh SA, SB, SC, SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc có 60° (xem hình vẽ).



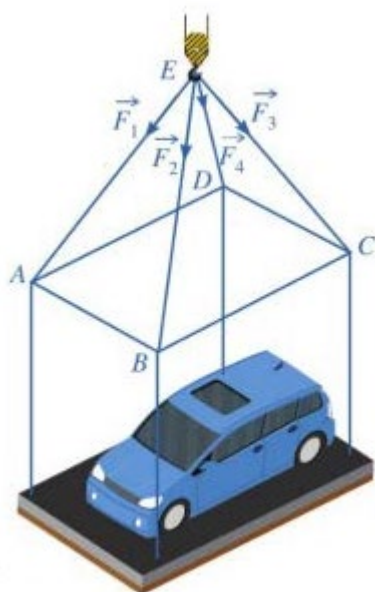
Biết độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp $4(N)$. Tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

Câu 59. Một chiếc cần cẩu, cầu tẩm kim loại có trọng lực $2000(N)$, được thiết kế với tẩm kim loại được giữ bởi ba đoạn cáp AB, AC, AD sao cho $AB = AC = AD$ và BCD là tam giác đều, đồng thời các cạnh AB, AC, AD tạo với mặt phẳng (BCD) một góc có 30° (xem hình vẽ). Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.



Câu 60. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau

và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$, trọng lượng khung sắt là $1000(N)$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô $4000(N)$. Tính cường độ lực căng của các đoạn dây cáp.



CHƯƠNG 2

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1

VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

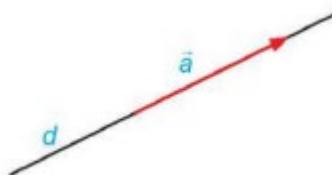
1. Khái niệm vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “vectơ AB ”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

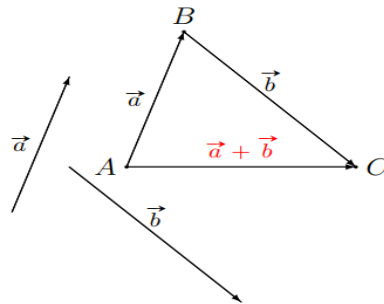
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 , cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Các phép toán vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vector còn được gọi là **phép cộng vector**.

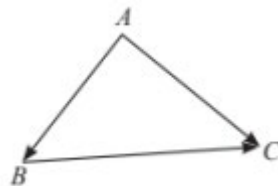


Chú ý: Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

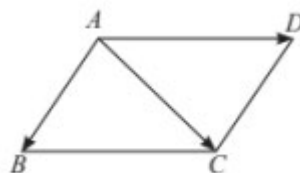
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vector-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Đối với vector trong không gian, ta có các quy tắc sau:

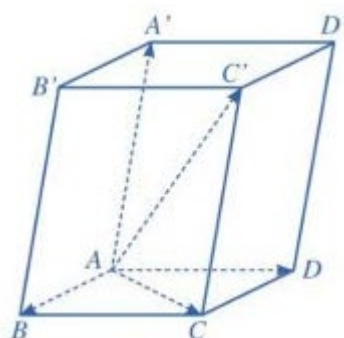
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



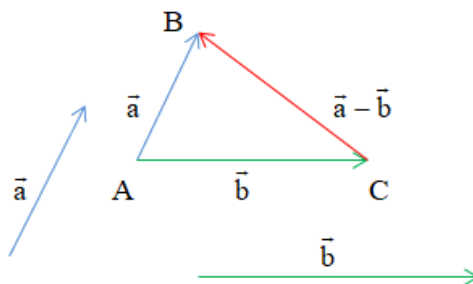
- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



b. Hiệu của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu hai vector còn được gọi là **phép trừ vector**.



Chú ý: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vector trong không gian

a. Định nghĩa:

Cho số $k \neq 0$ và một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vector $\vec{a}$ với số k là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$.

Vector $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là **phép nhân một số với một vector**.

Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k.\vec{a} = \vec{0}$.

b. Tính chất:

Với hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý:

- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

c. Sự đồng phẳng của ba vector (tham khảo thêm)

- Ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vector đồng phẳng:** Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

- Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý.

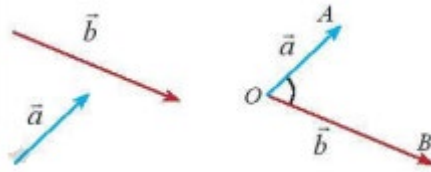
Khi đó: $\exists m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

a. Góc giữa hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.



Chú ý:

- $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .



b. Tích vô hướng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Chú ý:

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

• Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

• Tính chất của tích vô hướng: Với ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{tính chất giao hoán})$$

$$+ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{tính chất phân phối})$$

$$+ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

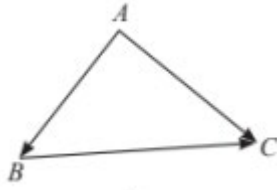
$$\bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHÉP VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

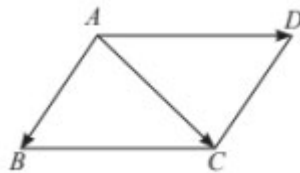
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



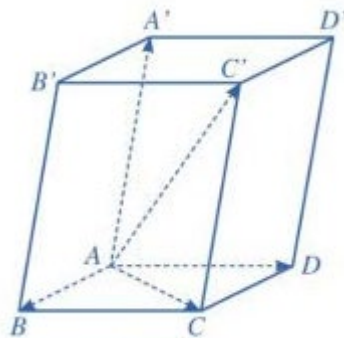
- với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

DẠNG 1

CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây sai.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
 B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
 C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.
 D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.

Theo giả thuyết trên thì với O là một điểm bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Ta thay điểm O bởi điểm A thì ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Do vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ là sai.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
 B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
 C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.
 D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}$

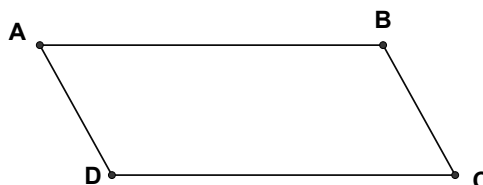
nên $2\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DQ}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$. Vậy $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 3. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
 B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
 C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
 D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C.



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Câu 4. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

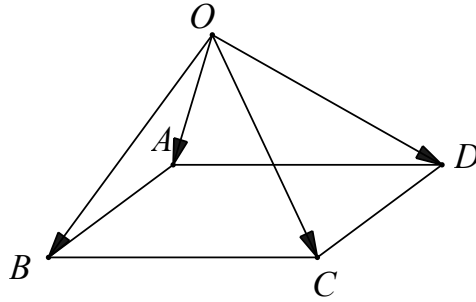
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình bình hành là:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

Với mọi điểm O bất kì khác A, B, C, D , ta có:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN theo quy tắc trung điểm :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}; \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GD}.$$

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$

Lời giải

Chọn A.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}) = \vec{0}.$$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

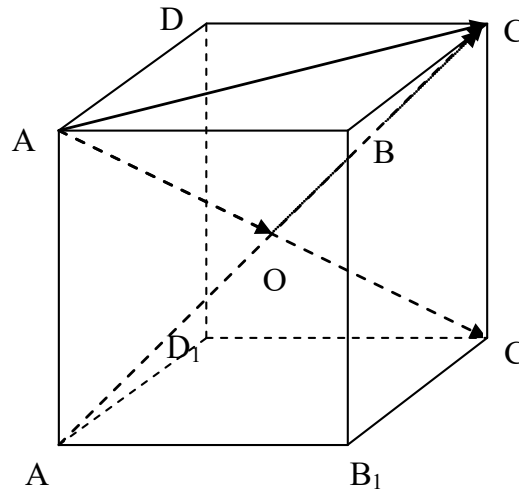
B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$.

Lời giải

Chọn A.



+ Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

+ Vận dụng công thức trung điểm để kiểm tra.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ (vô lý)

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$.

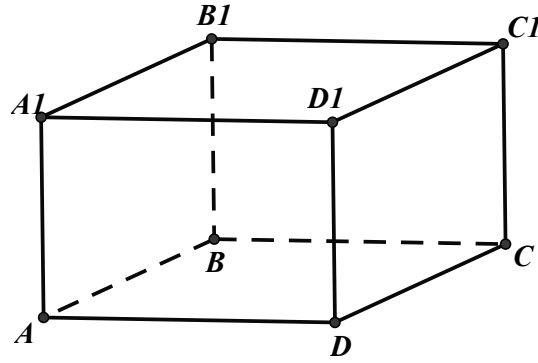
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1} \neq \overrightarrow{BC}$ nên D sai.

Do $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1}$ nên $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$. A đúng

Do $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$ nên B đúng.

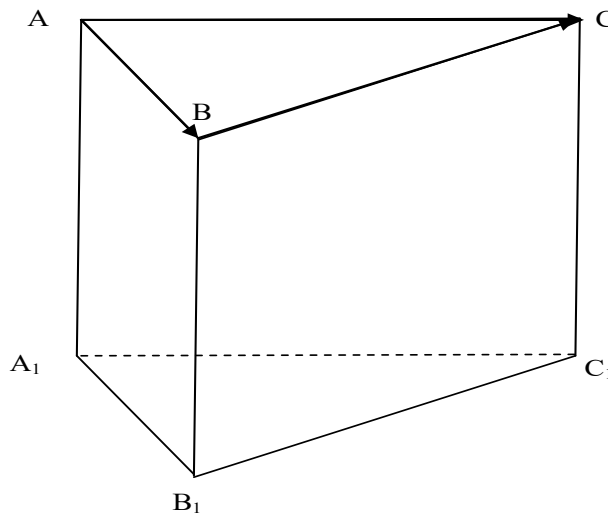
Do $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD_1}$ nên C đúng.

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C.



+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \vec{0}$.

Câu 11. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{IA} + (2k - 1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

- A. $k = 2$. B. $k = 4$. C. $k = 1$. D. $k = 0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta chứng minh được $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ nên $k = 1$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

C. $k = 4$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Với $k = 1$ ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + 1 \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$.

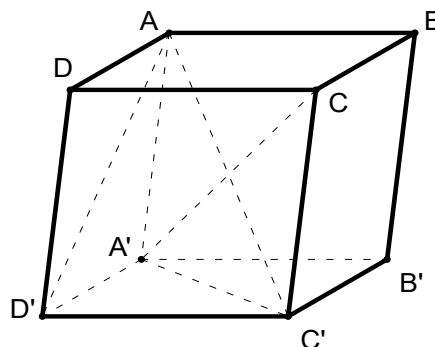
Lời giải

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$ **ĐÚNG**

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ **ĐÚNG**

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$ **ĐÚNG**

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$ **ĐÚNG**



Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$$

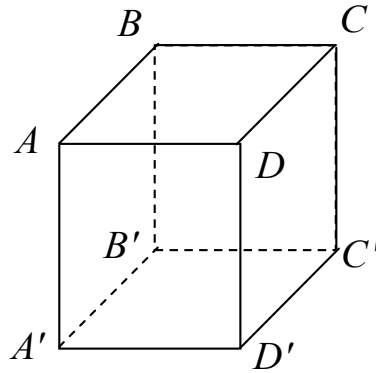
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$$

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$
- B. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$
- C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.
- D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$.

Lời giải

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$ **ĐÚNG**
- B. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$ **ĐÚNG**
- C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$. **ĐÚNG**
- D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$ **SAI**



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = -\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DC'} \neq \overrightarrow{C'D}$$

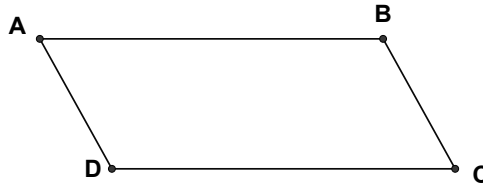
Câu 16. Hãy nhận xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
- B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ **SAI**
- B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **SAI**
- C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. **ĐÚNG**

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. SAI



$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}. \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành}$$

Câu 17. Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O .

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Lời giải

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. SAI

B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ ĐÚNG

C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành. SAI

D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang. SAI

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$.

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

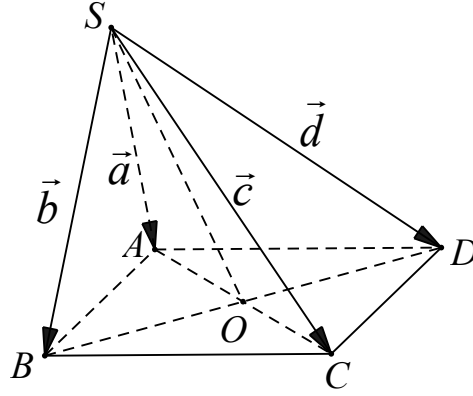
Lời giải

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$. ĐÚNG

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$. SAI

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. SAI

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. SAI



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta phân tích như sau:

$$\begin{cases} \vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO} \\ \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} \end{cases} \text{ (do tính chất của đường trung tuyến)}$$

$$\Rightarrow \vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}.$$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

A. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$.

D. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

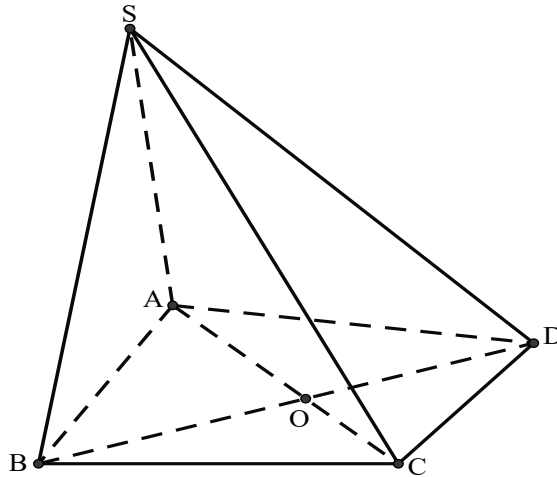
Lời giải

A. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang. **ĐÚNG**

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$. **ĐÚNG**

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$. **SAI**

D. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành. **ĐÚNG**



A. Đúng vì $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} + 2\vec{OD} = \vec{0}$.

Vì O, A, C và O, B, D thẳng hàng nên đặt $\vec{OA} = k\vec{OC}$; $\vec{OB} = m\vec{OD}$

$$\Rightarrow (k+1)\vec{OC} + (m+1)\vec{OD} = \vec{0}.$$

Mà $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ không cùng phương nên $k = -2$ và $m = -2 \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = 2 \Rightarrow AB // CD$.

B. Đúng. Hs tự biến đổi bằng cách chiêm điểm O vào về trái.

C. Sai. Vì nếu $ABCD$ là hình thang cân có 2 đáy là AD, BC thì sẽ sai.

D. Đúng. Tương tự đáp án A với $k = -1, m = -1 \Rightarrow O$ là trung điểm 2 đường chéo.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$.

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

B. Nếu $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Lời giải

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. **ĐÚNG**

B. Nếu $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành. **ĐÚNG**

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$. **SAI**

D. Nếu $\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang. **ĐÚNG**

Đáp án C sai do nếu $ABCD$ là hình thang có 2 đáy lần lượt là AD và BC thì ta có $\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SA}$.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O .

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$.

B. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$.

Lời giải

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$. **SAI**

B. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. **ĐÚNG**

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$. **ĐÚNG**

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$. **ĐÚNG**

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AD_1}$ mà $\overrightarrow{AB_1} \neq \overrightarrow{AD_1}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$ sai.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Lời giải

Đáp án: $k = \frac{1}{2}$.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \text{ (quy tắc trung điểm)} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD})$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ (vì } M \text{ là trung điểm } AB) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

$$\text{Vậy } k = \frac{1}{2}.$$

Câu 23. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

Lời giải

Đáp án: $k = \frac{1}{4}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PN}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PN} = 2(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = 2.2.\overrightarrow{PI} = 4\overrightarrow{PI}. \text{ Vậy } k = \frac{1}{4}$$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Lời giải

Đáp án: $k = \frac{1}{2}$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}$$

$$\text{Mà } M \text{ và } N \text{ lần lượt là trung điểm của } AB \text{ và } CD \text{ nên } \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{CN}$$

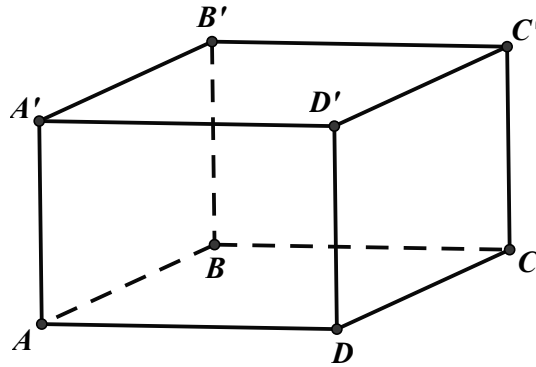
$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Vậy } k = \frac{1}{2}$$

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

Lời giải

Đáp án: $k = 1$



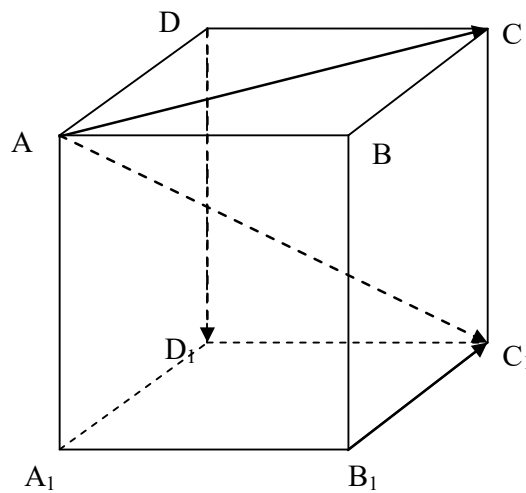
Ta có $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'}$ nên $k = 1$

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k \overrightarrow{AC_1}$$

Lời giải

Đáp án: $k = 1$.



+ Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$. Nên $k = 1$.

PHÂN TÍCH MỘT VECTO' THEO CÁC VECTO'

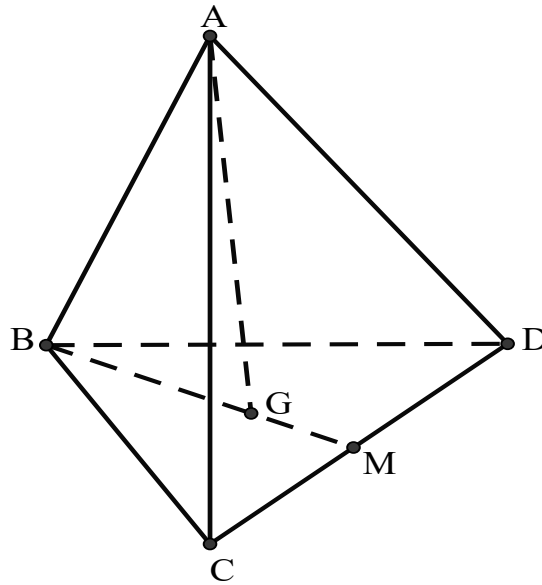
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi M là trung điểm BC .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \vec{a} + \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$ D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).\end{aligned}$$

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{c} + \vec{d} - \vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{MP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Lời giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Mà $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ nên $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

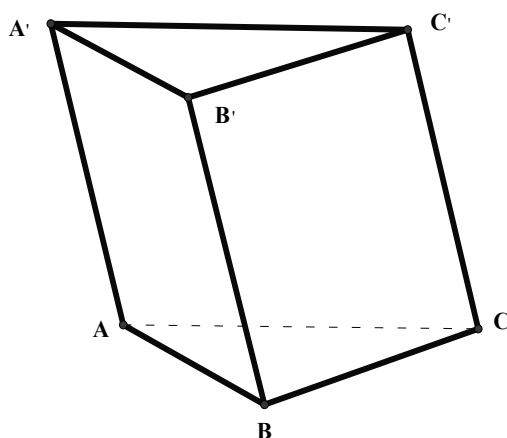
B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D.



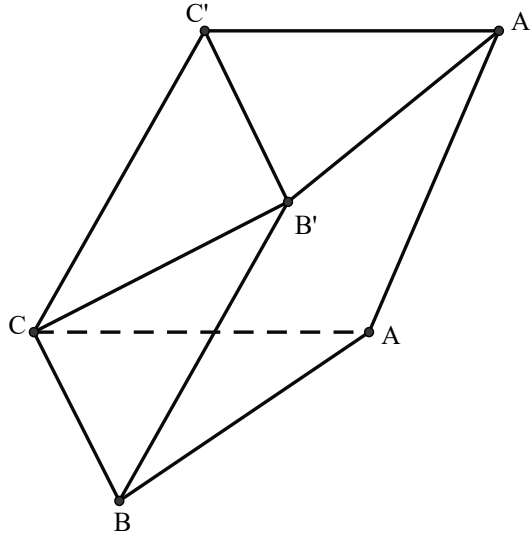
Ta có: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 32. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{B'C}$ qua các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D.



Theo quy tắc hình bình hành ta có:

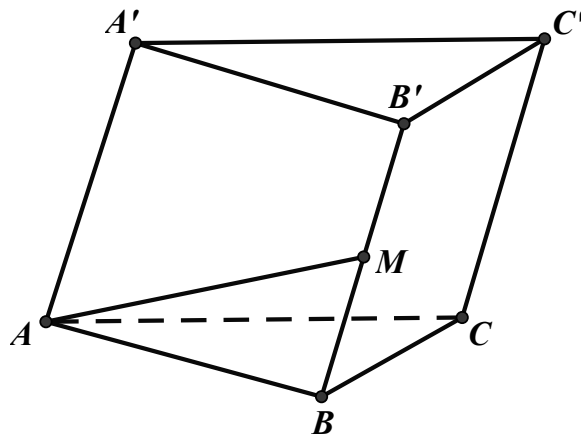
$$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

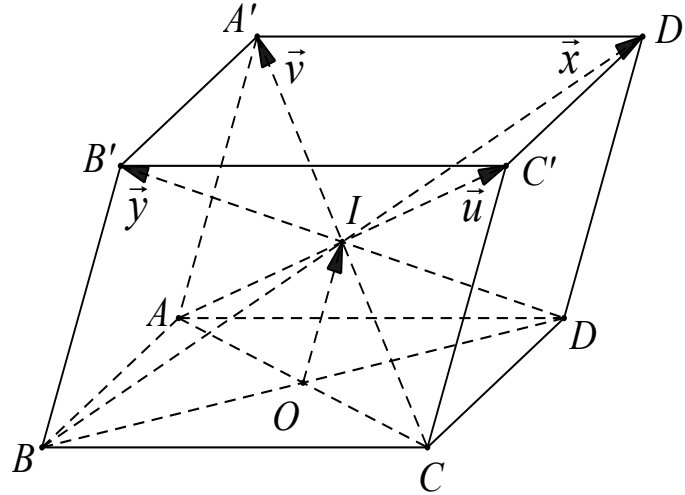
B. $2\vec{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\vec{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D. $2\vec{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải

Chọn D.



Ta phân tích:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC'} + \vec{CA'} = (\vec{AC} + \vec{CC'}) + (\vec{CA} + \vec{AA'}) = 2\vec{AA'}.$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{BD'} + \vec{DB'} = (\vec{BD} + \vec{DD'}) + (\vec{DB} + \vec{BB'}) = 2\vec{BB'} = 2\vec{AA'}.$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y} = 4\vec{AA'} = -4\vec{A'A} = -4.2\vec{OI}.$$

$$\Rightarrow 2\vec{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$$

Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\vec{B_1M} = \vec{B_1B} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1}$.

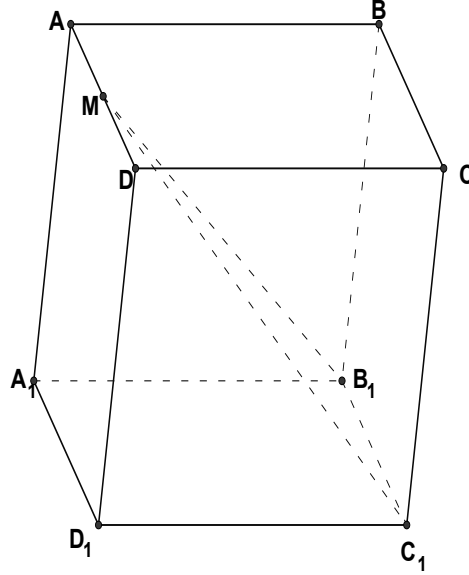
B. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$.

C. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \frac{1}{2}\vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$.

D. $\vec{BB_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1} = 2\vec{B_1D}$.

Lời giải

Chọn B.



A. Sai vì $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1D_1})$

$$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$$

B. Đúng vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1D_1})$

$$= \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1D_1}) = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$$

C. Sai. theo câu B suy ra

D. Đúng vì $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD_1}.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC . Phân tích vector $\overrightarrow{SI}$ theo ba vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Lời giải

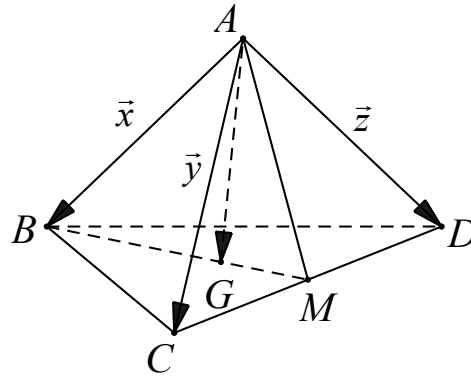
Đáp án: $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI} \Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ theo ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}).$



Gọi M là trung điểm CD .

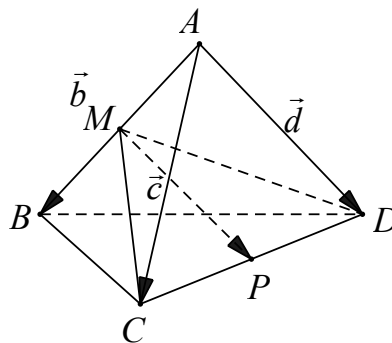
Ta phân tích:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB}\right] = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}).\end{aligned}$$

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Phân tích vector $\overrightarrow{MP}$ theo ba vector $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.



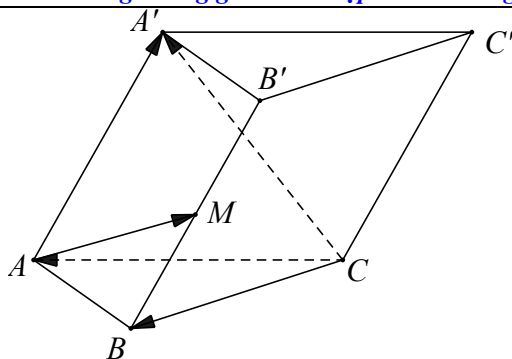
Ta phân tích:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \quad (\text{tính chất đường trung tuyến}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - 2\overrightarrow{AM}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}).\end{aligned}$$

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vector $\overrightarrow{AM}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Ta phân tích như sau:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

DẠNG 3

HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTO

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 40. Cho $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = -6\vec{a} - 3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

- A. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương
- B. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng
- C. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng**
- D. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{y} = -6\vec{a} - 3\vec{b} = -3(2\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{y} = -3\vec{x}$

$\Rightarrow \vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng.

Câu 41. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương.
- B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.**
- C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương.
- D. Đáp án A, B, C, đều sai.

Lời giải

Chọn B.

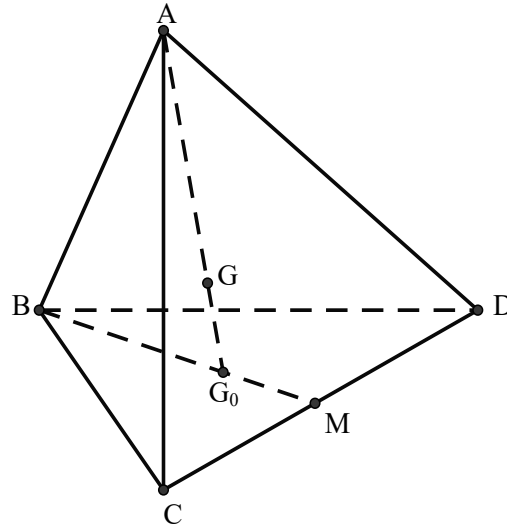
Nhận thấy: $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\vec{GA} = -2\vec{G_0G}$.
- B. $\vec{GA} = 4\vec{G_0G}$.
- C. $\vec{GA} = 3\vec{G_0G}$.**
- D. $\vec{GA} = 2\vec{G_0G}$.

Lời giải

Chọn C.



Theo đề: G_0 là giao điểm của GA và mp $(BCD) \Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD .

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} = \vec{0}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = -(3\overrightarrow{GG_0} + \overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C}) = -3\overrightarrow{GG_0} = 3\overrightarrow{G_0G}$$

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \text{ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?}$$

A. G, S, O không thẳng hàng.

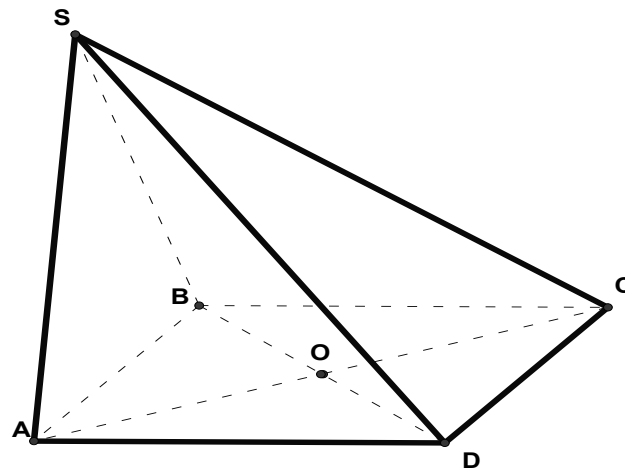
B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 44. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kỳ không thuộc đường thẳng AB .

- A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.
- C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$.**
- D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

Lời giải

- A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. **SAI**
 - B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$. **SAI**
 - C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. ĐÚNG**
 - D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. **SAI**
- A. Sai vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ (I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow O, M, I$ thẳng hàng.
- B. Sai vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow M \equiv B$ và $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow O, B, A$ thẳng hàng: vô lý
- C. $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow B, A, M$ thẳng hàng.
- D. Sai vì $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow O, B, A$ thẳng hàng: vô lý.

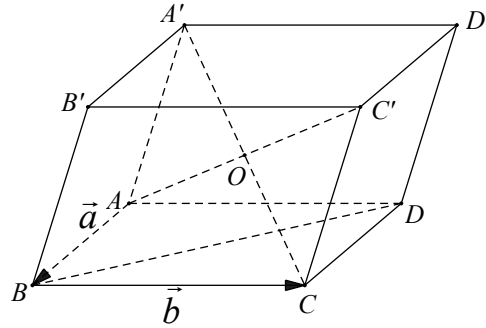
Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.
- B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
- C. M là trung điểm BB' .**
- D. M là trung điểm CC' .

Lời giải

- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$. **SAI**
- B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$. **SAI**
- C. M là trung điểm BB' . ĐÚNG**
- D. M là trung điểm CC' . **SAI**



Ta phân tích:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

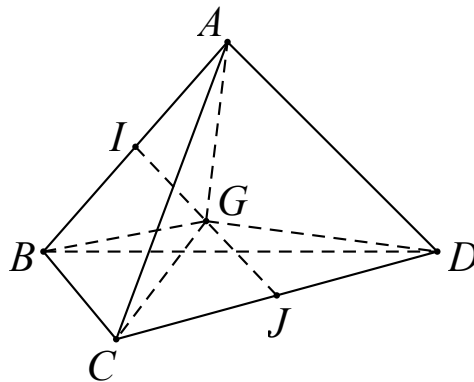
$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB' .

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”.

- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).
- B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .
- C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .
- D. Chưa thể xác định được.

Lời giải

- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD). **ĐÚNG**
- B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD . **ĐÚNG**
- C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC . **ĐÚNG**
- D. Chưa thể xác định được. **SAI**



Ta gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và CD .

Từ giả thiết, ta biến đổi như sau:

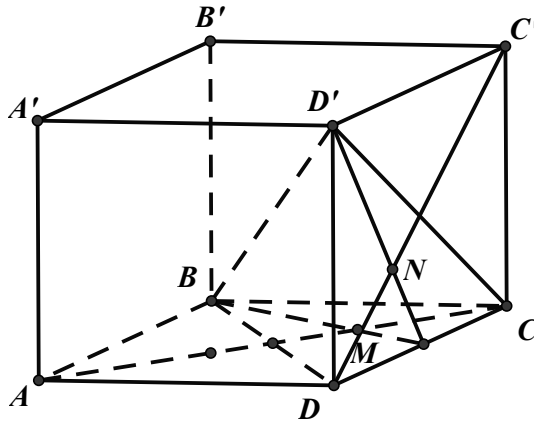
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0} \Rightarrow G \text{ là trung điểm đoạn } IJ.$$

Bằng việc chứng minh tương tự, ta có thể chứng minh được phương án B và C đều là các phương án đúng, do đó **phương án D sai**.

Câu 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D = C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

Lời giải

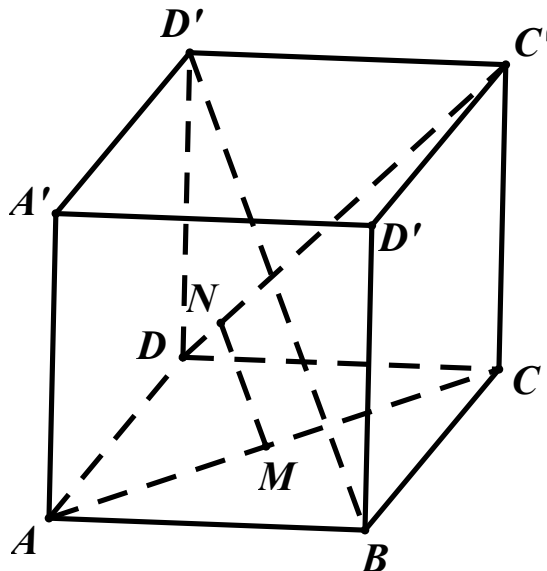
Đáp án: $x = \frac{2}{3}$.



Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{3}$.



$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}.$$

$$\text{Giả sử } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}.$$

Dễ dàng có các biểu diễn $\overrightarrow{BM} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$. Từ đó suy

$$\text{ra } \overrightarrow{MN} = (x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} \quad (1)$$

$$\text{Để } MN \parallel BD' \text{ thì } \overrightarrow{MN} = z\overrightarrow{BD'} = z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\Leftrightarrow (x-y-z)\vec{a} + (1-x-z)\vec{b} + (y-z)\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 1-x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

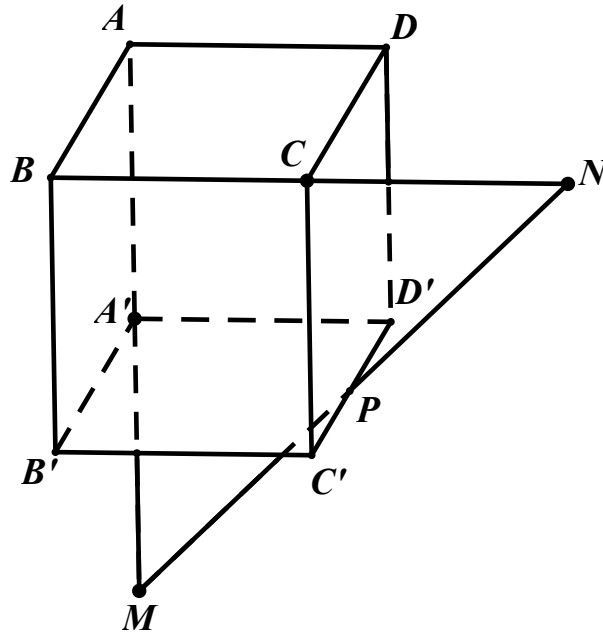
Ta cũng có $\overrightarrow{MN} = z\overrightarrow{BD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'} \Rightarrow \frac{MN}{BD'} = \frac{1}{3}$.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần

lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Lời giải

Đáp án: $\frac{MA}{MA'} = 2$.



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}, P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

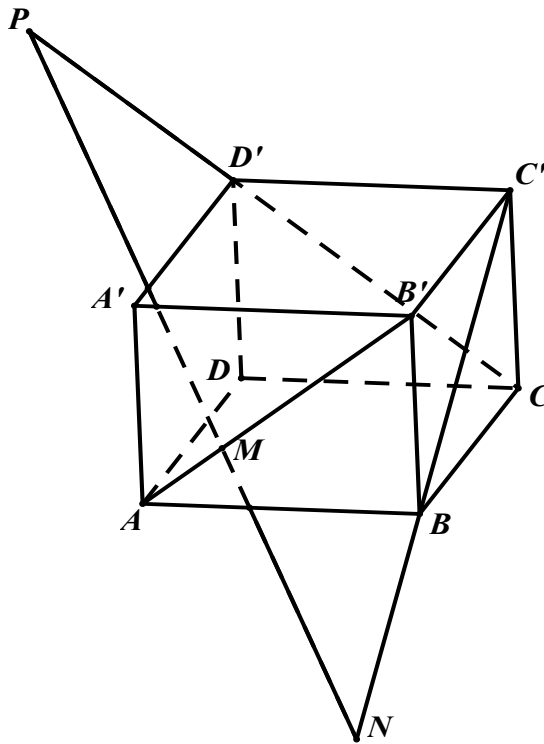
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

Vậy $\frac{MA}{MA'} = 2.$

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án: $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}.$



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$

Từ giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{b} + \vec{c}) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}(\vec{a} + \vec{c}) \quad (2) \quad \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}(\vec{c} - \vec{b}) \quad (3)$$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x-1}\vec{a} - \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$$

$$+ \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \left(\frac{y}{y-1} + \frac{1}{k-1}\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{y-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$$

Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MP}$ (*).

Thay các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ vào (*) và lưu ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

a) Giả sử $a\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ thì giá trị của a bằng bao nhiêu?

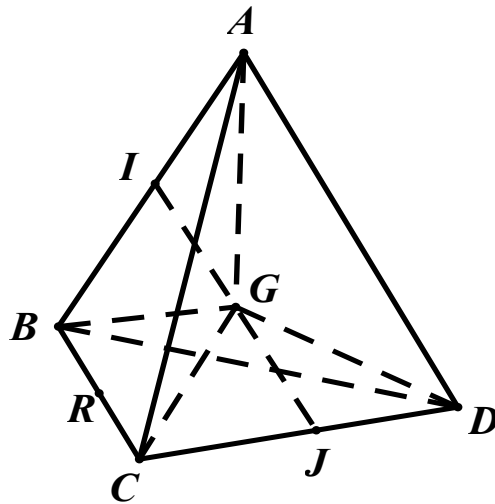
b) Xác định vị trí của M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án:

a) $a = 2$

b) vị trí của M trùng với G



a) **Chọn A.**

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

b) **Chọn B.**

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MG}|$ nên $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv G$.

Câu 52. Trong không gian cho tam giác ABC . Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: M là trọng tâm tam giác ABC .

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} P &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

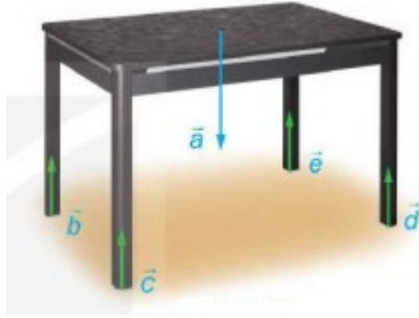
Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC .

DẠNG 4

BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 53. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vector $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Vector $\vec{d}$ ngược hướng với vector $\vec{a}$.
- B. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vector $\vec{a}$.
- C. Vector $\vec{b}$ với vector $\vec{a}$ đối nhau.**
- D. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Lời giải

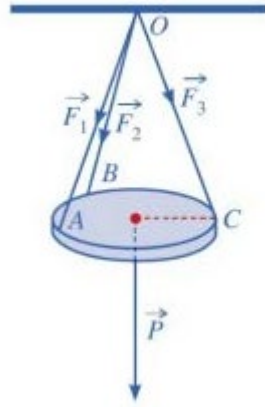
Chọn C

Do bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn và với mặt bàn nên các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vector $\vec{a}$.

Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vector $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn nên các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Vector $\vec{b}$ với vector $\vec{a}$ ngược hướng chứ không phải đối nhau vì hai vector đối nhau là hai vector cùng ngược hướng, cùng độ dài. Đáp án C sai

Câu 54. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

A. $30\sqrt{3}$.

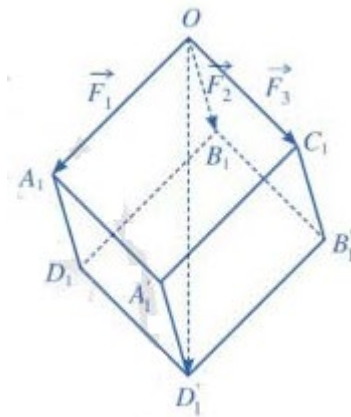
B. 10.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$

Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1B_1'$ là hình hộp.

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1}$

Do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ nên hình hộp

$OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1B_1'$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1B_1'$ là

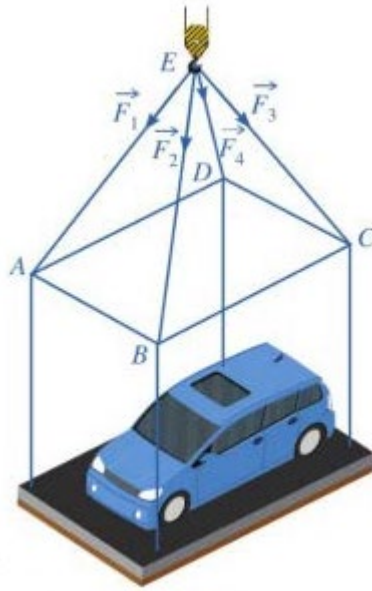
hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

Suy ra trọng lượng của tấm gỗ tròn: $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD_1}| = 10\sqrt{3}(N)$

Câu 55. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên

theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $2000(N)$. Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



A. $15321(N)$.

B. $6660(N)$.

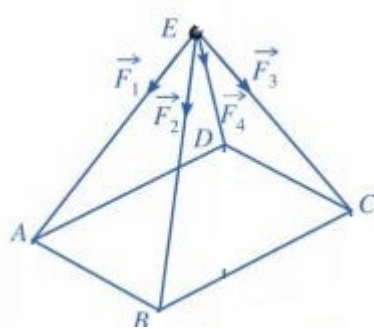
C. $5000(N)$.

D. $10000(N)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO}$; $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2\vec{EO}$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$$

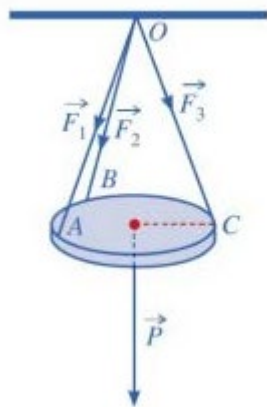
dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên:

$$\Rightarrow EO = EA \cdot \sin 60^\circ = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}$$

Vì chiếc xe ô tô ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{P}_1$

Suy ra trọng lượng của chiếc xe ô tô: $|\vec{P}| + 2000 = 4|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{P}| = 4 \cdot 2500\sqrt{3} - 2000 \approx 15321(N)$

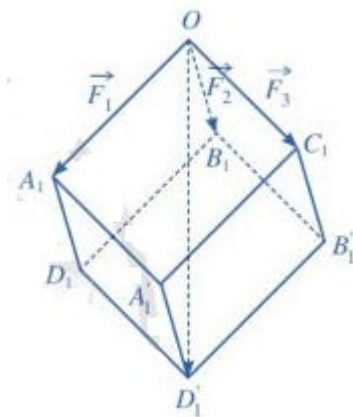
Câu 56. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}(N)$ (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

Lời giải

Đáp án: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 2024(N)$



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\vec{OA_1} = \vec{F_1}$, $\vec{OB_1} = \vec{F_2}$, $\vec{OC_1} = \vec{F_3}$

Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp.

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OD_1}$

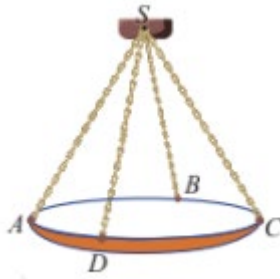
Do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = x$, suy ra độ dài đường chéo bằng $\sqrt{3}x$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

Ta có: $|\vec{P}| = |\vec{OD_1}| \Leftrightarrow 2024\sqrt{3} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow x = 2024(N)$

Câu 57. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn

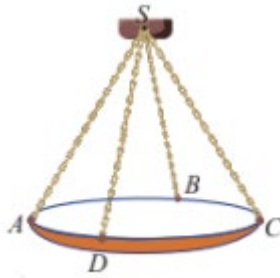
cáp SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 45^\circ$ (xem hình vẽ).



a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vector gia tốc rơi tự do có độ lớn $10(m/s^2)$, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

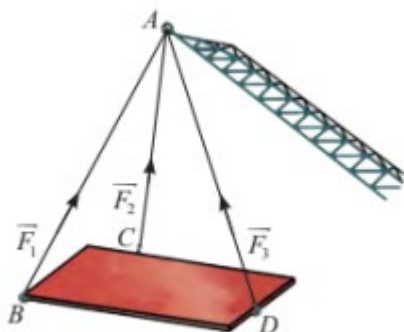
b) Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.

Câu 58. Một chiếc đèn chùm được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $SA = SB = SC = SD$ và $ABCD$ là hình vuông, đồng thời các cạnh SA, SB, SC, SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc có 60° (xem hình vẽ).

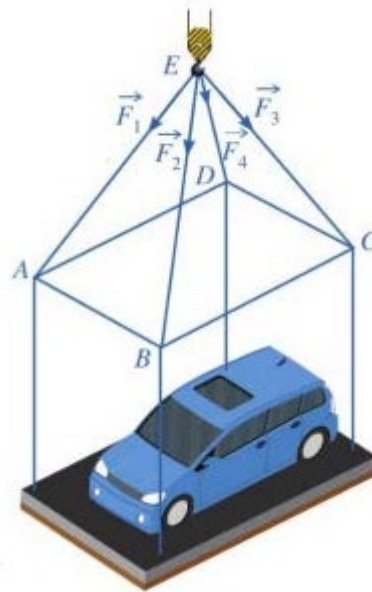


Biết độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp $4(N)$. Tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

Câu 59. Một chiếc cần cẩu, cần tám kim loại có trọng lực $2000(N)$, được thiết kế với tám kim loại được giữ bởi ba đoạn cáp AB, AC, AD sao cho $AB = AC = AD$ và BCD là tam giác đều, đồng thời các cạnh AB, AC, AD tạo với mặt phẳng (BCD) một góc có 30° (xem hình vẽ). Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.



Câu 60. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$, trọng lượng khung sắt là $1000(N)$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô $4000(N)$. Tính cường độ lực căng của các đoạn dây cáp.



CHỦ ĐỀ 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

DẠNG 1

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

* Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

* Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- A.** $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A.** $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 5. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{24}$.

C. 8.

D. 124.

Câu 6. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Câu 7. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 8. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

B. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

C. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$.

D. $4\vec{u} \cdot \vec{v} (\vec{u} - \vec{v})$.

Câu 9. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{119}{169}$.

D. $\frac{119}{169}$.

Câu 10. Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$.

B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Câu 11. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 12. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

A. 25.

B. $\sqrt{616}$.

C. 9.

D. $\sqrt{618}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho $\vec{a} = 3, \vec{b} = 5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

B. $|\vec{a} - \vec{b}| = 8$

C. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$

D. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ và $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 16. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120° và $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Tính $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Câu 17. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3$. Tính $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$.

Câu 18. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Xác định sao cho thỏa mãn $|x\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$.

Câu 19. Cho ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 5$ và $5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0}$. Khi đó biểu thức $M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Câu 20. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}, k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

• Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .

• Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

- A. 45° B. 30° C. 90° D. 60°

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

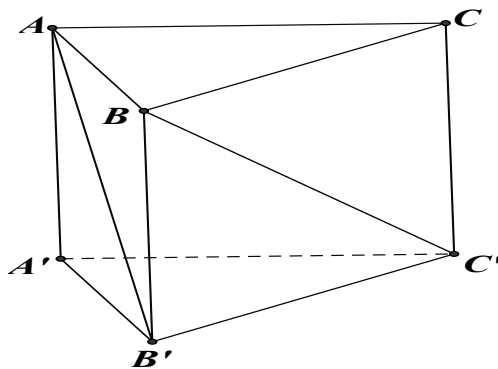
Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

- A. AB và CD chéo nhau B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng D. AB và CD cắt nhau

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 120°

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 33. Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

- A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$ B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$
C. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ D. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Câu 34. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

- A. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ B. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.

B. a^2 .

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$

D. $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định **đúng**?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3.

B. Đúng ba bước

C. Sai ở bước 2.

D. Sai ở bước 1.

Câu 40. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$.

C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a .

- A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$
- B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$.
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$.
- D. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$.

Câu 43. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.

- A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$
- B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$.
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$.
- D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a .

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.
- D. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định sai?

- A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° .
- B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .
- C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° .
- D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° .

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

- A. $A'C' \perp BD$
- B. $BB' \perp BD$
- C. $A'B \perp DC'$
- D. $BC' \perp A'D$

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x (0 \leq x \leq a)$.

- A. $AC' \perp B'D'$
- B. AC' cắt $B'D'$
- C. $AC' \perp MN$
- D. Cả A, B, C đều đúng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$

Câu 49. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{B'A'D'} = 60^\circ, \widehat{B'A'A} = \widehat{D'A'A} = 120^\circ$.

- Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.
- Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.
- Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA' .

CHỦ ĐỀ 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

DẠNG 1

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

* Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

* Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 3. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$

và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

Câu 4. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0 \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b} = -1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Câu 5. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{24}$.

C. 8.

D. 124.

Lời giải

Chọn B.

$$(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 + 90 + 25 = 124.$$

$$\Rightarrow |3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{124}$$

Câu 6. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

+Vì $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ nên:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{a}^2 - 8\vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-5\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6}.$$

$$\text{Ta có } |\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2. \text{ Suy ra } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3\vec{a}^2}{6}$$

$$+ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3a^2}{6}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 7. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A.

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$$

Câu 8. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

B. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

C. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$.

D. $4\vec{u} \cdot \vec{v} (\vec{u} - \vec{v})$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = (\vec{u} + 2\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Câu 9. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$.

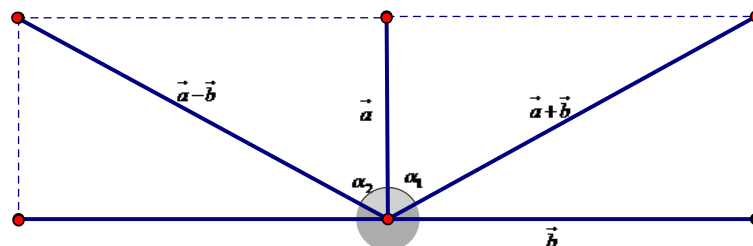
B. $\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{119}{169}$.

D. $\frac{119}{169}$.

Lời giải

Chọn C.



Nhận thấy $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\text{Mặt khác: } \cos(\alpha_2) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha_2 = \cos^{-1} \frac{5}{13}.$$

Do đó góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 = 2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}$

$$\text{Vậy } \cos(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = \cos\left(2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}\right) = -\frac{119}{169}.$$

Câu 10. Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$. B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|\vec{a}|^2 - 15|\vec{b}|^2 = -16\vec{a} \cdot \vec{b} \\ 7|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 = 30\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

Câu 11. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 12. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2$$

$$= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{616}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho $\vec{a} = 3$, $\vec{b} = 5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

B. $|\vec{a} - \vec{b}| = 8$

C. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$

D. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$

Lời giải

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ **ĐÚNG**

B. $|\vec{a} - \vec{b}| = 8$ **SAI**

C. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$ **ĐÚNG**

D. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$ **SAI**

Ta có:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 4 \cdot 25 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 139$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 79$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{79}$$

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

$$\text{D. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$$

Lời giải

$$\text{A. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right) \text{ ĐÚNG}$$

$$\text{B. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right) \text{ ĐÚNG}$$

$$\text{C. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right) \text{ SAI}$$

$$\text{D. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right) \text{ ĐÚNG}$$

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right) \cdot \frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và D.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$$

$$\bullet \text{ A đúng, vì } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\bullet \text{ B đúng, vì } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ và $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

Đáp án: $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Ta có:

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 28 \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

Câu 16. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120° và $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Tính $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Lời giải

Đáp án: $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{79}$.

Cách 1 :

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = 79 \\ \Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| &= \sqrt{79} \end{aligned}$$

Cách 2 :

Vẽ hình bình hành $ABCD$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác ACD :

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{79}.$$

Câu 17. Cho ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$. Tính $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$.

Lời giải

Đáp án: $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 0$.

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 9 \Leftrightarrow 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 9 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$.

Ta có: $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(\vec{b})^2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = 0$.

Câu 18. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Xác định sao cho thỏa mãn $|x\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có:

$$|x\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x\vec{a} + \vec{b})^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \vec{a}^2 + 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cos 60^\circ + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Câu 19. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 5$ và $5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0}$. Khi đó biểu thức

$M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $M = 29$.

Ta có $5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow 5(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{c} \Leftrightarrow 25(\vec{a} - \vec{b})^2 = 9\vec{c}^2$

$$\Leftrightarrow 25(\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) = 9\vec{c}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

Tương tự: $5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{a} = 5\vec{b} + 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 5$.

$$5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 20.$$

$$\text{Vậy } M = 4 + 5 + 20 = 29.$$

Câu 20. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}, k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$

Lời giải

Đáp án: $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} = 15 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 1.$$

$$\vec{u}\vec{v} = (\vec{a} + \vec{b})(2k\vec{a} - \vec{b}) = 2k|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + (2k-1)\vec{a}\vec{b} = 2k - 4 + \frac{2k-1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \left(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \right)^2 &= \left(\|(\vec{a} + \vec{b})\| \|(2k\vec{a} - \vec{b})\| \right)^2 = \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} \right) \left(4k^2 |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4k\vec{a}\vec{b} \right) = (5 + 2\vec{a}\vec{b})(4k^2 + 4 - 4k\vec{a}\vec{b}) \\ &= 6(4k^2 + 4 - 2k) \Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)}. \end{aligned}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k - 4 + \frac{2k-1}{2}}{\sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)}} \Leftrightarrow \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)} = 6k - 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)} = 6k - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)} = 6k - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ 12k^2 - 96k + 57 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

DẠNG 2

GÓC GIỮA HAI VECTƠ

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

• Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .

• Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° .

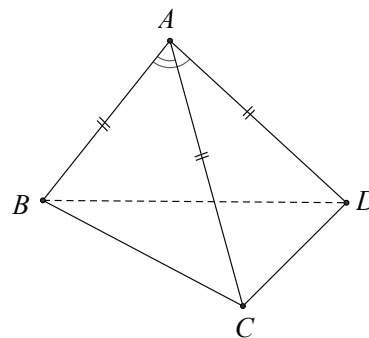
B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D.



Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= 90^\circ \end{aligned}$$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120° .

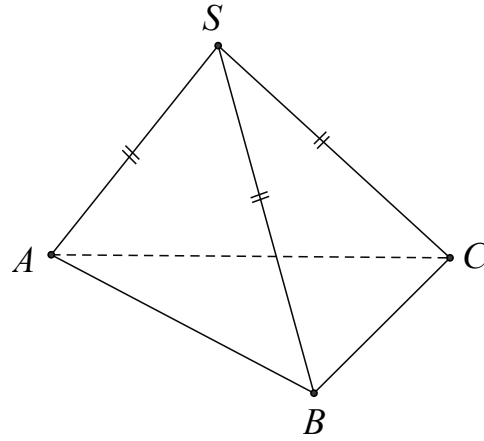
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B.



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) &= 90^\circ\end{aligned}$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45°

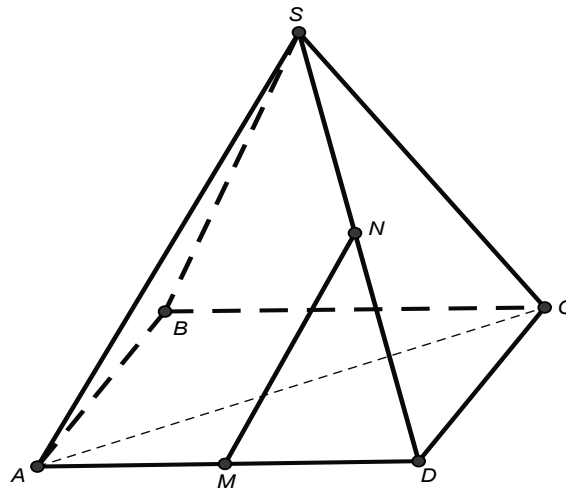
B. 30°

C. 90°

D. 60°

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0° .

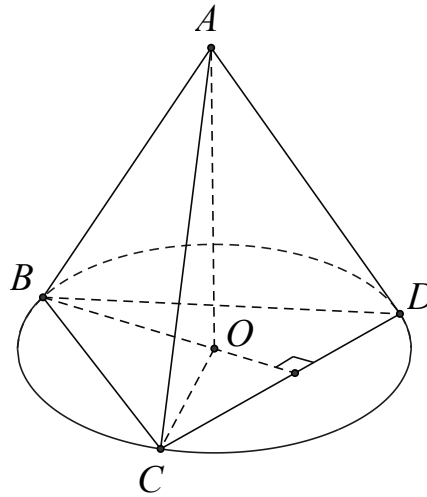
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C.



$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CO \cdot CD \cdot \cos 30^\circ - CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$$

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

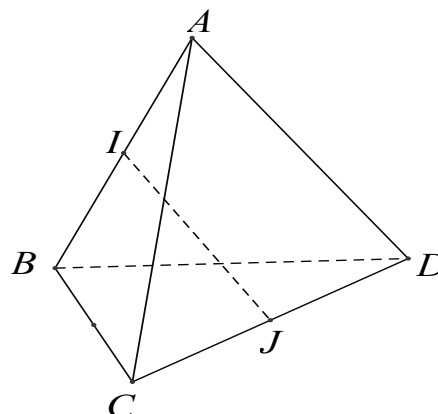
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD .

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90° .

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B.

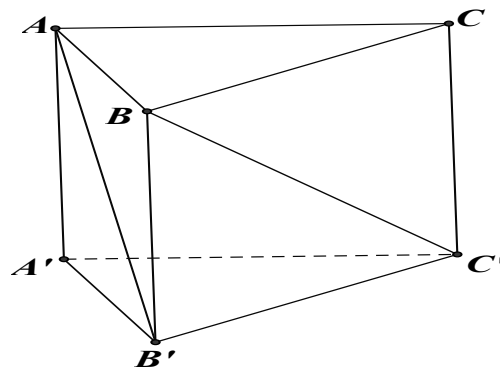
Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$

Vậy $AB \perp CD$.

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

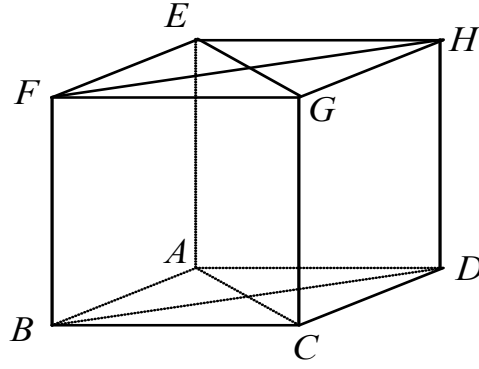
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$$

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

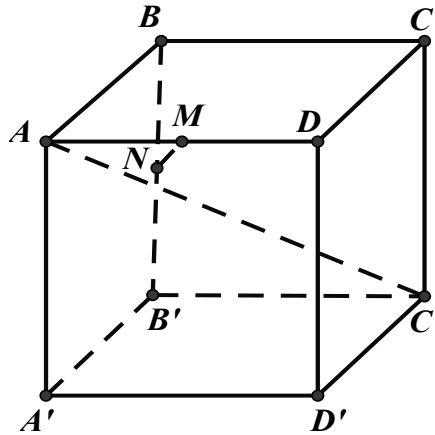
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

* Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

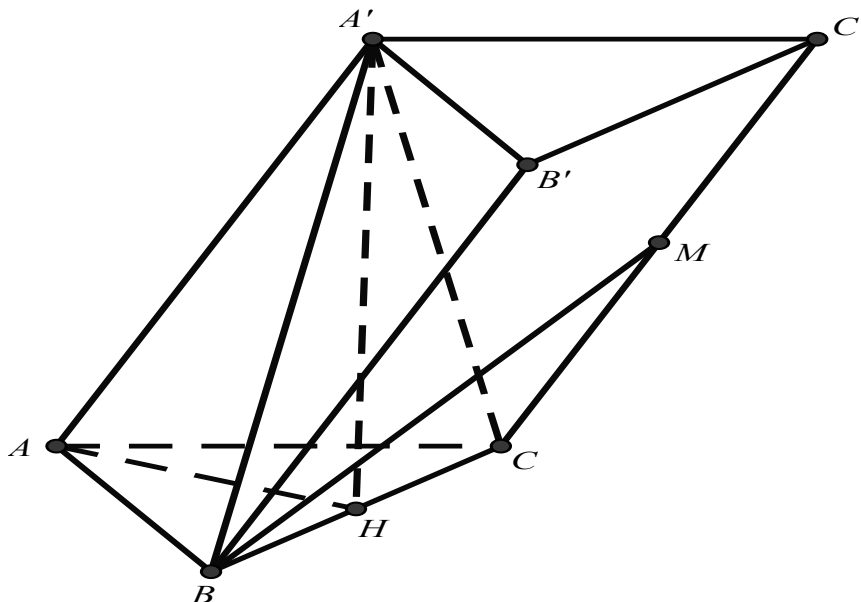
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 33. Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Lời giải

Chọn D.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Câu 34. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

B. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Lời giải

Chọn A.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.

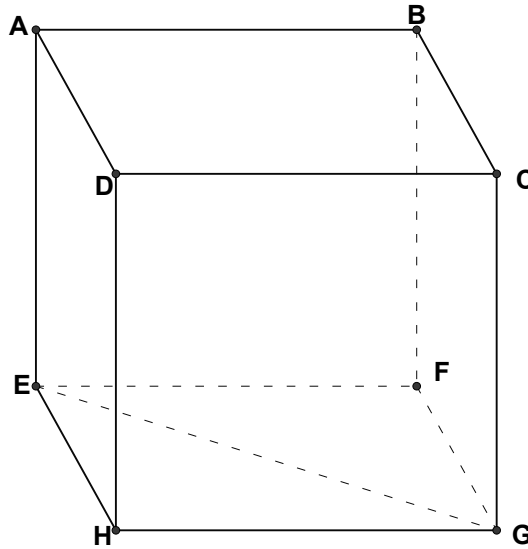
B. a^2 .

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD})$$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

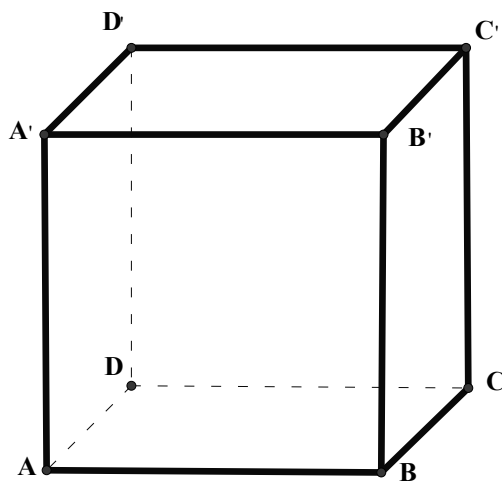
B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$

D. $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có : $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'A'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ (vô lí)}$$

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

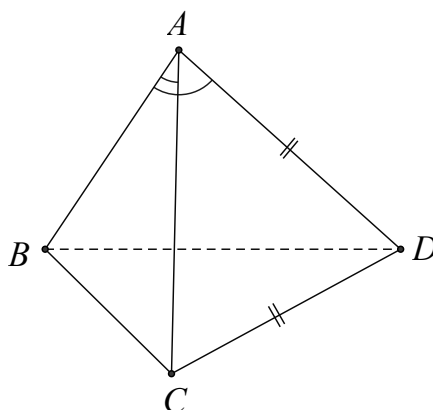
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D.



$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

$$= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2}AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}AB \cdot AD = -\frac{1}{4}AB \cdot CD.$$

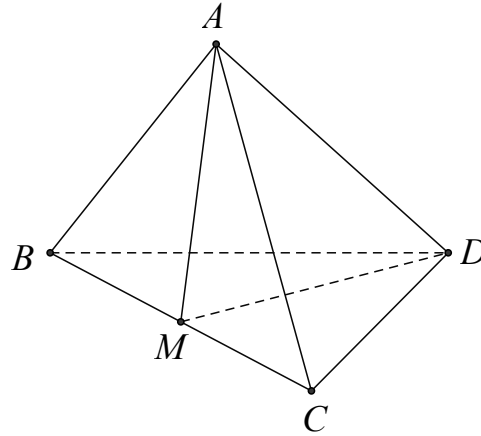
Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4}AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Do có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Suy ra } \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

$$\text{Bước 1: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

- A. Sai ở bước 3. B. Đúng ba bước C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 1.

Lời giải

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 40. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chọn hệ thức đúng?

- A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$. B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$.
C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$. D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1

Ta có

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 0 \\ \Leftrightarrow & GA^2 + GB^2 + GC^2 + (GA^2 + GB^2 - AB^2) + (GA^2 + GC^2 - AC^2) + (GB^2 + GC^2 - BC^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \\ GA = \frac{2}{3}MA \end{cases} \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \right).$$

Tương tự ta suy ra được

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

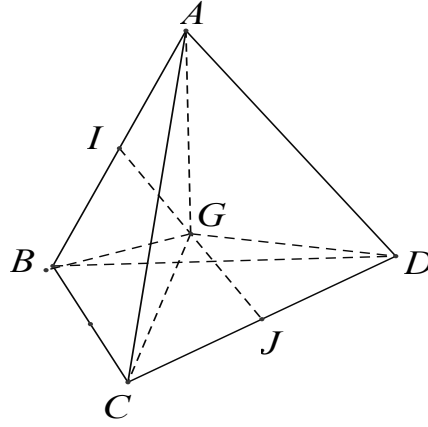
$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3 \\ GA^2 + GB^2 + GC^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

- A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.
D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

Lời giải

Chọn B.



$$\begin{aligned}
 & AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \\
 &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD})^2 \\
 &= 3AG^2 + 3BG^2 + 3CG^2 + 3DG^2 + 2(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0} \\
 & \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\
 &= 2(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a .

- A.** $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$
- B.** $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$.
- C.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$.
- D.** $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$.

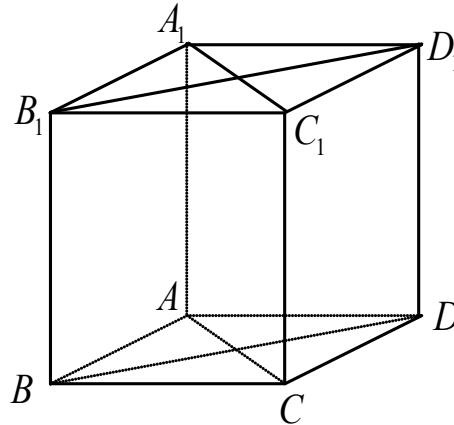
Lời giải

- A.** $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$ **ĐÚNG**

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$. **ĐÚNG**

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$. **ĐÚNG**

D. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$. **ĐÚNG**



Câu 43. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

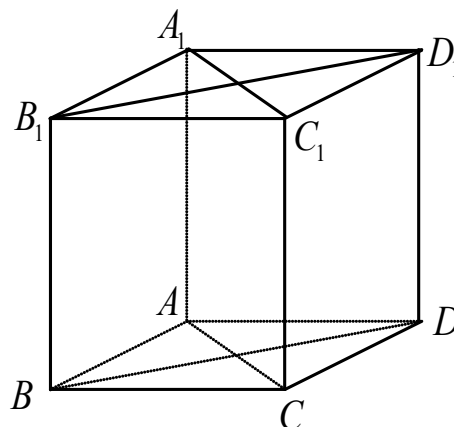
Lời giải

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$ **SAI**

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$. **ĐÚNG**

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$. **ĐÚNG**

D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$. **ĐÚNG**



Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a .

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

D. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

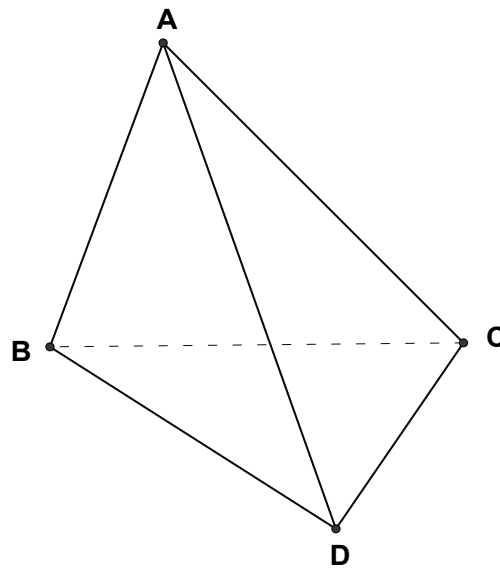
Lời giải

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ **ĐÚNG**

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ **ĐÚNG**

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ **SAI**

D. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ **ĐÚNG**



Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC, BCD, CDA, ABD là các tam giác đều.

A. Đúng vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

B. Đúng vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

D. Đúng vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**?

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° .

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .

C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° .

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° .

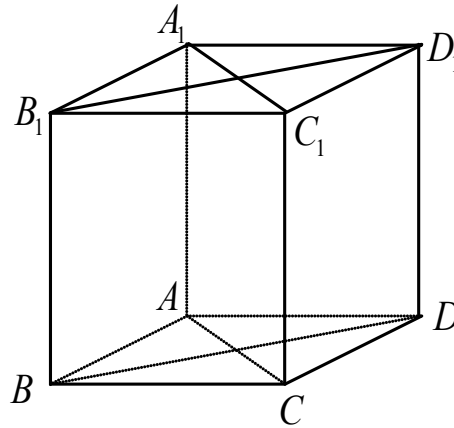
Lời giải

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° **ĐÚNG**

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° . **SAI**

C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° . **ĐÚNG**

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° . **ĐÚNG**



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} &= \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (\text{vì } (\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}) = 90^\circ \text{ và } (\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}) = 90^\circ \Rightarrow (AA_1, B_1D_1) = 90^\circ$$

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

A. $A'C' \perp BD$

B. $BB' \perp BD$

C. $A'B \perp DC'$

D. $BC' \perp A'D$

Lời giải

A. $A'C' \perp BD$ **ĐÚNG**

B. $BB' \perp BD$ **SAI**

C. $A'B \perp DC'$ **ĐÚNG**

D. $BC' \perp A'D$ **ĐÚNG**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BB'} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= BB' \cdot BA (\cos \widehat{B'BA} + \cos \widehat{B'BC}) \end{aligned}$$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

$$+ \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} \neq 0 \text{ suy ra } BB' \text{ không vuông góc với } BD$$

$$+ \widehat{B'BA} + \widehat{B'BC} = 180^\circ \Rightarrow \cos \widehat{B'BA} = -\cos \widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ suy ra } BB' \perp BD$$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $\widehat{B'BA}$ và $\widehat{B'BC}$

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x (0 \leq x \leq a)$.

A. $AC' \perp B'D'$

B. AC' cắt $B'D'$

C. $AC' \perp MN$

D. Cả A, B, C đều đúng

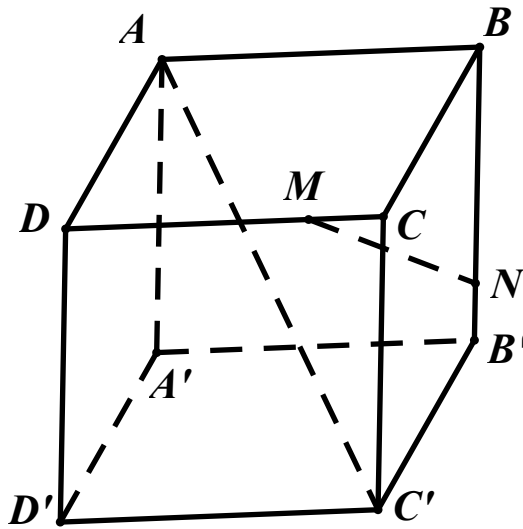
Lời giải

A. $AC' \perp B'D'$ **ĐÚNG**

B. AC' cắt $B'D'$ **SAI**

C. $AC' \perp MN$ **ĐÚNG**

D. Cả A, B, C đều đúng **SAI**



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{c}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow AC' \perp B'D'$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) = \left(\vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) = \frac{x}{a} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{Từ đó ta có } \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left[\left(\vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) \right] = \frac{x}{a} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$$

$$= \frac{x}{a} a^2 + \left(1 - \frac{x}{a} \right) b^2 - c^2 = x \cdot a + \left(1 - \frac{x}{a} \right) a^2 - a^2 = 0.$$

Vậy $AC' \perp MN$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$

Lời giải

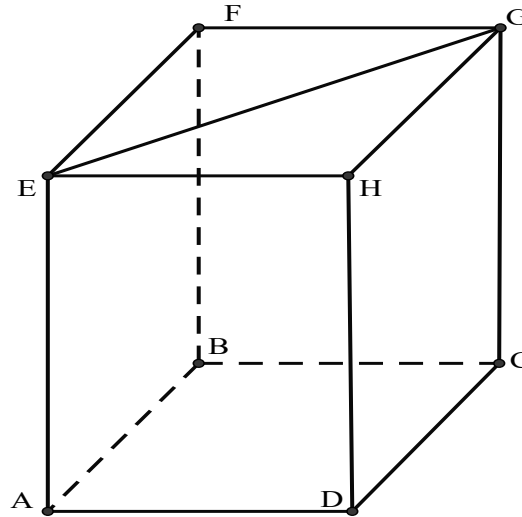
Đáp án: $k = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.\end{aligned}$$

Câu 49. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = a^2$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} &= (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}) \\ &= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AE} + EF^2 + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FB} \\ &= 0 + a^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA} = a^2 + 0 = a^2\end{aligned}$$

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{B'A'D'} = 60^\circ, \widehat{B'A'A} = \widehat{D'A'A} = 120^\circ$.

- Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.
- Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.
- Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA' .

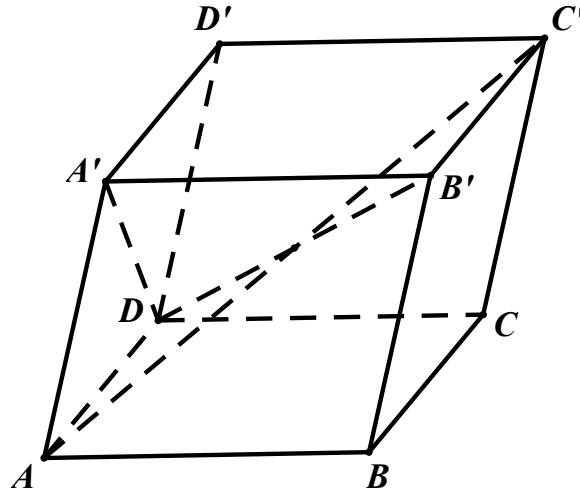
Lời giải

Đáp án:

a) $\widehat{(AB, A'D)} = 60^\circ; \widehat{(AC', B'D)} = 90^\circ$

b) $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{3}; S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}$

c) $\widehat{(AC', AB)} = \widehat{(AC', AD)} = \widehat{(AC', AA')} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$



a)

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{A'B'} = \vec{b}, \overrightarrow{A'D'} = \vec{c}$$

Ta có $\overrightarrow{A'D} = \vec{a} + \vec{c}$ nên

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AB, A'D}) &= \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) \right| \\ &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{|\vec{a}(\vec{a} + \vec{c})|}{|\vec{a}| |\vec{a} + \vec{c}|} \end{aligned}$$

$$\text{Đề ý rằng } |\vec{a} + \vec{c}| = a, \vec{a}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Từ đó } \cos(\widehat{AB, A'D}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{AB, A'D}) = 60^\circ$$

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{B'D} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, từ đó tính được

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D} = (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0 \Rightarrow (\widehat{AC', B'D}) = 90^\circ.$$

b)

$$\overrightarrow{A'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{B'D} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow A'C \perp B'D \text{ nên } S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} A'C \cdot B'D.$$

$$\text{Dễ dàng tính được } A'C = a\sqrt{2}, B'D = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$$

$$S_{AA'C'C} = AA' \cdot AC \sin(\widehat{AA', AC}), AA' = a, AC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tính được } \sin(\widehat{AA', AC}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{AA', AC})} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } S_{AA'C'C} = AA' \cdot AC \sin(\widehat{AA', AC}) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$$

c)

$$\text{ĐS: } \left(\widehat{AC'}, AB \right) = \left(\widehat{AC'}, AD \right) = \left(\widehat{AC'}, AA' \right) = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

CHỦ ĐỀ 3

BA VECTƠ ĐỒNG PHẪNG VÀ KHÔNG ĐỒNG PHẪNG

Tham khảo thêm

♦ Chứng minh ba vector đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng, phân tích một vector theo ba vector không đồng phẳng.

+ Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng: Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

+ Để phân tích một vector $\vec{x}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

♦ Tính độ dài của đoạn thẳng, vector.

+ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vector ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.

• Phân tích $\vec{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

• Khi đó $MN = |\vec{MN}| = \sqrt{\vec{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$

$$= \sqrt{m^2 |\vec{a}|^2 + n^2 |\vec{b}|^2 + p^2 |\vec{c}|^2 + 2mn \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 2np \cos(\vec{b}, \vec{c}) + 2mp \cos(\vec{c}, \vec{a})}$$

♦ Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.

Sử dụng các kết quả

• A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{DA} = m\vec{DB} + n\vec{DC}$

• A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

- A. Ba vector đồng phẳng là ba vector cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Ba vector không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vector bất kì.
- D. Ba vector đồng phẳng là ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vector đó đồng phẳng.
- B. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector $\vec{0}$ thì ba vector đó đồng phẳng.
- C. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng.
- D. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng.

Câu 3. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.
- B. Các vector $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}; \vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.
- C. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.
- D. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 4. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

- A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
- B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
- C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
- D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Câu 5. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Chọn khẳng định đúng?

- A. Ba vector $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.
- B. Hai vector $\vec{x}; \vec{a}$ cùng phương.
- C. Hai vector $\vec{x}; \vec{b}$ cùng phương.
- D. Ba vector $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 6. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vector đó bằng vector $\vec{0}$.
- C. Vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Câu 7. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

- A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
- B. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .
- C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
- D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

B. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

C. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn MP .

D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vector đó có giá thuộc một mặt phẳng

B. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

C. Cho hai vector không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

D. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 10. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ ta suy ra $m = n = p = 0$.

B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, trong đó $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Với ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ ta có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

D. Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

B. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vector $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. B. Các vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
 C. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng. D. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$
 B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .
C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng
 D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC .
 B. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$.
C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.
 D. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ còn P, Q, R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. P, Q, R thẳng hàng B. P, Q, R không đồng phẳng
C. P, Q, R không thẳng hàng D. Cả A, B, C đều sai

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

- A. $k = \frac{1}{2}$ B. $k = \frac{1}{3}$ C. $k = \frac{1}{4}$ D. $k = \frac{1}{5}$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác

ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G' . Ta có $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = k \frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

- A. 3** B. 4 C. 2 D. 1

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + 2\frac{SD}{SD'}$

B. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{2SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{2SD'}$

C. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

D. $\frac{SA}{SA'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC , cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$.

A. $\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$

D. $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1 . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

A. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$

B. $\frac{3}{S}$

C. $\frac{2}{S^2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Câu 26. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$. Ta được S, I, J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{2} = \frac{JS}{JI}$

B. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{4} = \frac{JS}{JI}$

C. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{3} = \frac{JS}{JI}$

D. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) .

A. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

B. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

C. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

D. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

CHỦ ĐỀ 3

BA VECTƠ ĐỒNG PHẪNG VÀ KHÔNG ĐỒNG PHẪNG

Tham khảo thêm

♦ Chứng minh ba vector đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng, phân tích một vector theo ba vector không đồng phẳng.

+ Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng: Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng

phẳng

+ Để phân tích một vector $\vec{x}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

♦ Tính độ dài của đoạn thẳng, vector.

+ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vector ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

• Chọn ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.

- Phân tích $\vec{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

- Khi đó $MN = |\vec{MN}| = \sqrt{\vec{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$

$$= \sqrt{m^2 |\vec{a}|^2 + n^2 |\vec{b}|^2 + p^2 |\vec{c}|^2 + 2mn \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 2np \cos(\vec{b}, \vec{c}) + 2mp \cos(\vec{c}, \vec{a})}$$

♦ Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.

Sử dụng các kết quả

- A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{DA} = m\vec{DB} + n\vec{DC}$

• A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

- A. Ba vector đồng phẳng là ba vector cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Ba vector không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vector bất kì.
- D. Ba vector đồng phẳng là ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D.

Câu A sai vì ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.

Câu B sai vì thiếu điều kiện 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương.

Câu C sai vì $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vectơ bất kì không phải là điều kiện để 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.

B. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng.

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.

+ Nắm vững khái niệm ba vectơ đồng phẳng.

Câu 3. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}; \vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.

Các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

Mà : $\vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

$$\Leftrightarrow \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = m(3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 1 \\ -3m - 3n = -2 \text{ (hệ vô nghiệm)} \\ 2m - 3n = 4 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại hai số $m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

Câu 4. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thuyết $m + n + p \neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m \neq 0$. Từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba vectơ).

Câu 5. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{z})$ nên ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 6. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

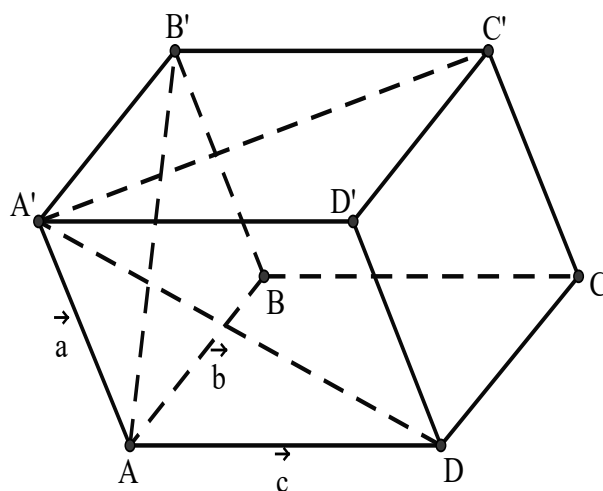
B. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ $\vec{0}$.

C. vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

C. Sai

D. Đúng vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{CA} \Rightarrow 3 \text{ vectơ } \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 7. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

- A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
- B. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .
- C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
- D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.**

Lời giải

Chọn D.

A Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 vectơ.

B. Đúng

C. Đúng vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}$

Mà $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (vì I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

D. Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
- B. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.**
- C. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn NP .
- D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ đúng với mọi điểm A, B, C, D nên câu B sai.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó có giá thuộc một mặt phẳng**
- B. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.
- C. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.
- D. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó có giá song song hoặc thuộc một mặt phẳng. Câu

A sai

Câu 10. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ ta suy ra $m = n = p = 0$.
- B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, trong đó $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- C. Với ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ ta có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- D. Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.**

Lời giải

Chọn D.

Câu D sai. Ví dụ phản chứng 3 cạnh của hình chóp tam giác đồng qui tại 1 đỉnh nhưng chúng không đồng phẳng.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.
- C. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.**
- D. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.

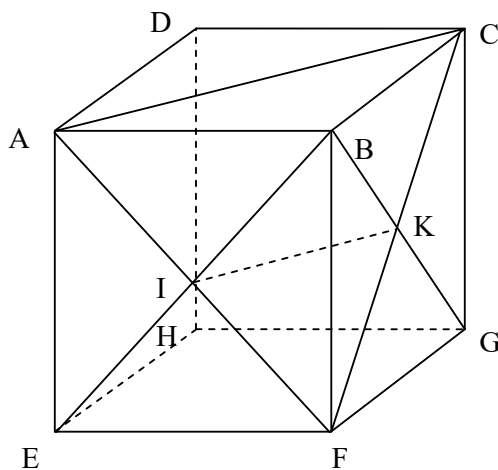
Ta có 3 vectơ $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì chúng có giá cùng nằm trên mặt phẳng (BCD_1A_1) .

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.**
- C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
- D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.



$$+ \begin{cases} IK \parallel (ABCD) \\ GF \parallel (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{BD} \text{ đồng phẳng.}$$

+ Các bộ vectơ ở câu A, C, D không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

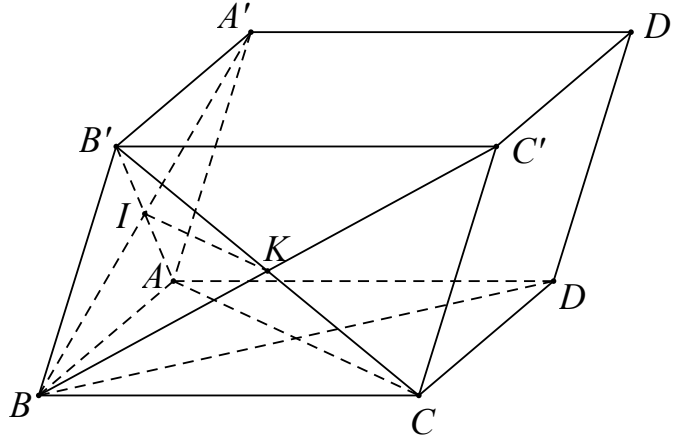
B. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vector $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc $(B'AC)$

B. Đúng vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = -\vec{b} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{c} = 2\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow$ ba vector đồng phẳng.

D. Đúng vì theo câu C $\Rightarrow \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = -\vec{b} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{c} = 2\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

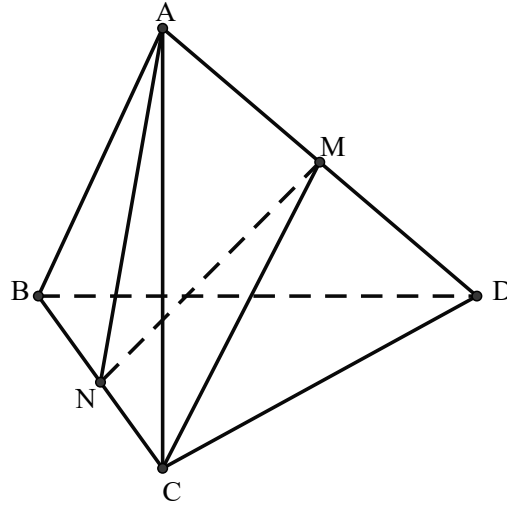
B. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vector $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

B. Đúng vì từ N ta dựng vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{MN}$ thì $\overrightarrow{MN}$ không nằm trong mặt phẳng (ABC) .

C. Sai. Tương tự đáp án B thì $\overrightarrow{AN}$ không nằm trong mặt phẳng (CMN) .

D. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

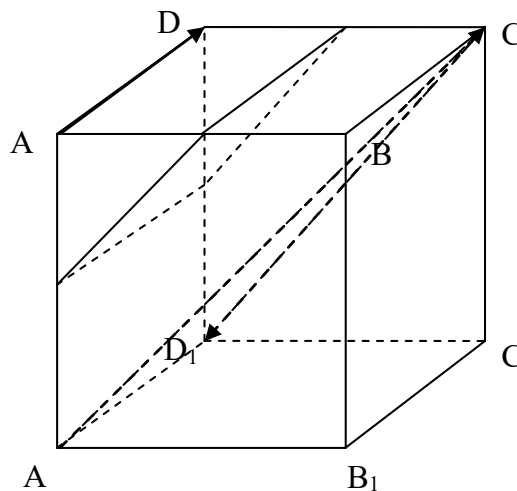
B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.



+ M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AA_1, DD_1, CD .

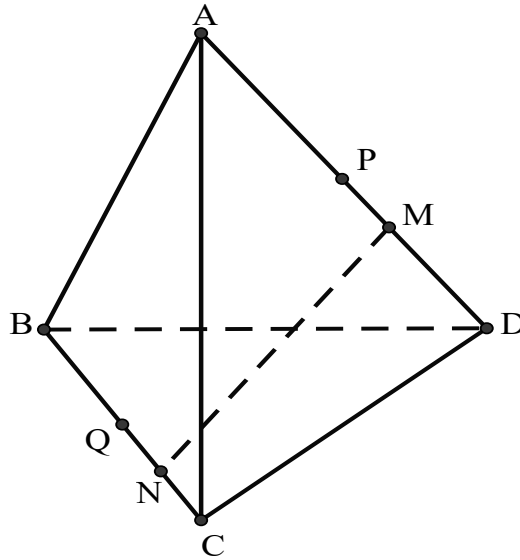
Ta có $CD_1 \parallel (MNPQ); AD \parallel (MNPQ); A_1C \parallel (MNPQ) \Rightarrow \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 B. Các vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
 C. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
 D. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.



A. Sai vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN} \text{ không đồng phẳng.}$$

B. Đúng vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ} : \text{đồng phẳng.}$$

C. Đúng. Bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên ta có $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

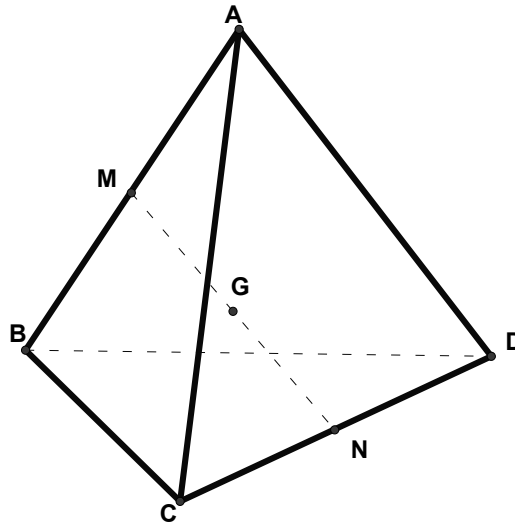
D. Đúng. Biểu diễn giống đáp án A ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$
 B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .
 C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng
 D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$

Suy ra: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **đúng**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC .

B. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$.

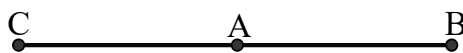
C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

A. Sai vì $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow A$ là trung điểm BC .



B. Sai vì $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = -4\overrightarrow{AC}$.



C. Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

D. Sai vì $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{CA}$ (nhân 2 vế cho -1).

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ còn P, Q, R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. P, Q, R thẳng hàng

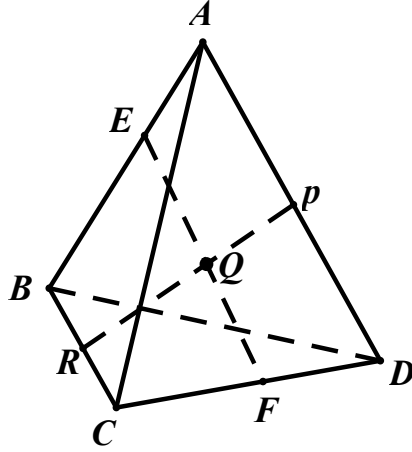
B. P, Q, R không đồng phẳng

C. P, Q, R không thẳng hàng

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FQ}$ (2)

Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ} = l\overrightarrow{PD} + l\overrightarrow{DF} + l\overrightarrow{FQ}$ (3)

Lấy (1)–(3) theo vế ta có : $(1-l)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE} - l\overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

Tương tự $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ nên $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF} = \frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB} - \frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC} = -k\overrightarrow{QR}$

Vậy P, Q, R thẳng hàng.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

A. $k = \frac{1}{2}$

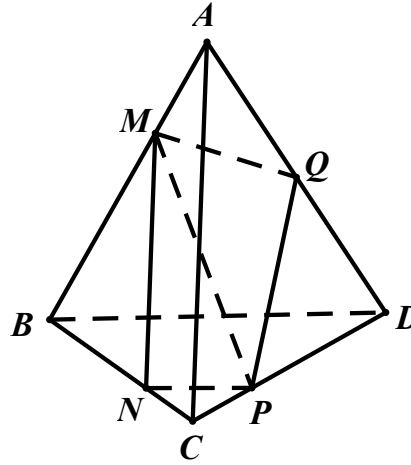
B. $k = \frac{1}{3}$

C. $k = \frac{1}{4}$

D. $k = \frac{1}{5}$

Lời giải

Chọn A.



Cách 1.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \text{ do đó } MN \parallel AC.$$

Vậy Nếu M, N, P, Q đồng phẳng thì $(MNPQ) \cap (ACD) = PQ \parallel AC$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{QA}{QD} = 1 \text{ hay } \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} + k \vec{c}, \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}$$

Các điểm M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \exists x, y: \overrightarrow{MP} = x \overrightarrow{MN} + y \overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} + k \vec{c} = x \left(-\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right) + y \left(-\frac{1}{6} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} \right)$$

Do các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}, y = 1, k = \frac{1}{2}.$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác

ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G' . Ta có $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = k \frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

A. 3

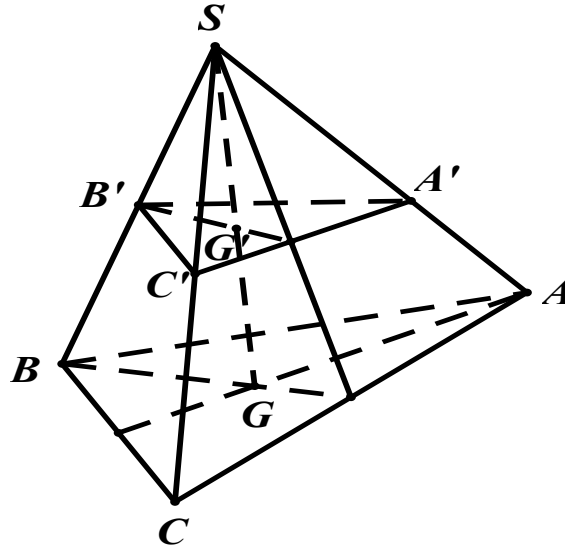
B. 4

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn A.



Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{SG}{SG'} \overrightarrow{SG'} = \frac{SA}{SA'} \overrightarrow{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overrightarrow{SC'}$$

Mặt khác A', B', C', G' đồng phẳng nên: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$.

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ trong đó S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB . Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', M' .

Chúng minh: $\frac{S_a SA}{SA'} + \frac{S_b SB}{SB'} + \frac{S_c SC}{SC'} = \frac{S \cdot SM}{SM'}$. (Với S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB và S là diện tích tam giác ABC).

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SA'} + 2 \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + 2 \frac{SD}{SD'}$

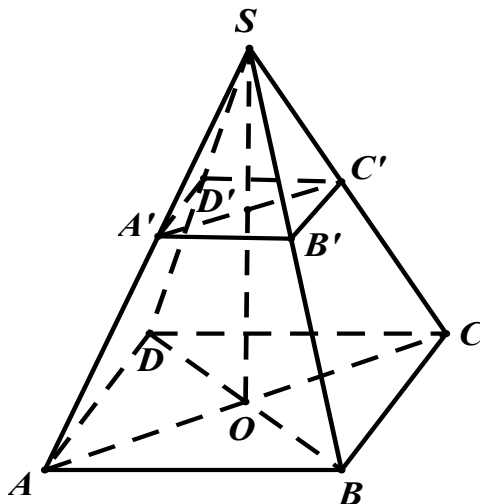
B. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{2SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{2SD'}$

C. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

D. $\frac{SA}{SA'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$

Lời giải

Chọn C.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} \overrightarrow{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} = \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overrightarrow{SC'}$$

Do A', B', C', D' đồng phẳng nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC , cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}.$$

A. $\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$

D. $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có $3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

$$= \frac{SA}{SA'} \overrightarrow{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overrightarrow{SC'}.$$

Mà G, A', B', C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \right) (a^2 + b^2 + c^2) \geq \left(\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$\frac{1}{aSA'} = \frac{1}{bSB'} = \frac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3$ ta được

$$SA' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3a}, SB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3b}, SC' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3c}.$$

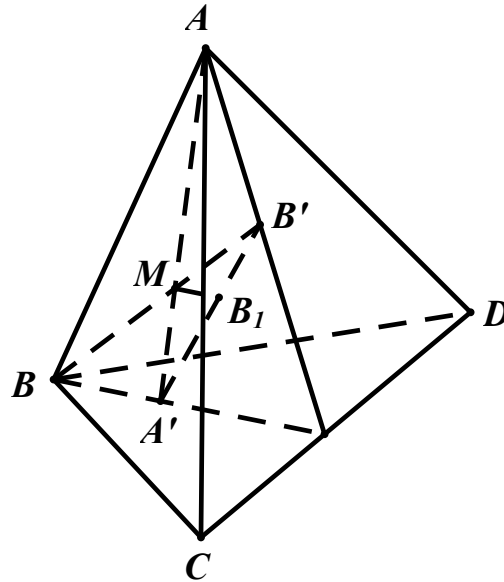
Vậy GTNN của $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$ là $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1 . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

- A. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.
- B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.
- C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.
- D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

Lời giải

Chọn D.



Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên

tồn tại $x, y, z, t > 0$ sao cho $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} + t\overrightarrow{MD} = \vec{0}$ (1)

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD) .

Ta có
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (BCD) \\ (BB'A') \cap (\alpha) = MB_1 \Rightarrow MB_1 \parallel BA' \\ (BB'A') \cap (BCD) = BA' \end{cases}$$

Do đó $\frac{MB_1}{BA'} = \frac{MB'}{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \frac{MB'}{BB'} \overrightarrow{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MB'} + t\overrightarrow{MB'} &= \vec{0} \Rightarrow (x + y + z)\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \Rightarrow (x + y + z + t)\overrightarrow{MB'} &= y\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \frac{MB'}{BB'} = \frac{y}{x + y + z + t} \end{aligned}$$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1} = \frac{y}{x + y + z + t}\overrightarrow{BA'}$ (3)

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1} = \frac{z}{x + y + z + t}\overrightarrow{CA'}$ (4)

$$\overrightarrow{MD_1} = \frac{t}{x + y + z + t}\overrightarrow{DA'} \quad (5)$$

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' thì thu được

$$y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} + t\overrightarrow{A'D} = \vec{0}. \text{ Vậy từ (3), (4), (5) ta có}$$

$$\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \frac{1}{x + y + z + t}(y\overrightarrow{BA'} + z\overrightarrow{CA'} + t\overrightarrow{DA'}) = \vec{0}, \text{ hay } M \text{ là trọng tâm của tam giác } B_1C_1D_1.$$

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$

B. $\frac{3}{S}$

C. $\frac{2}{S^2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Lời giải

Chọn A.

Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA$.

Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng

thức cần chứng minh $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

Theo công thức Leibnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được

$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Câu 26. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$. Ta được S, I, J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{2} = \frac{JS}{JI}$

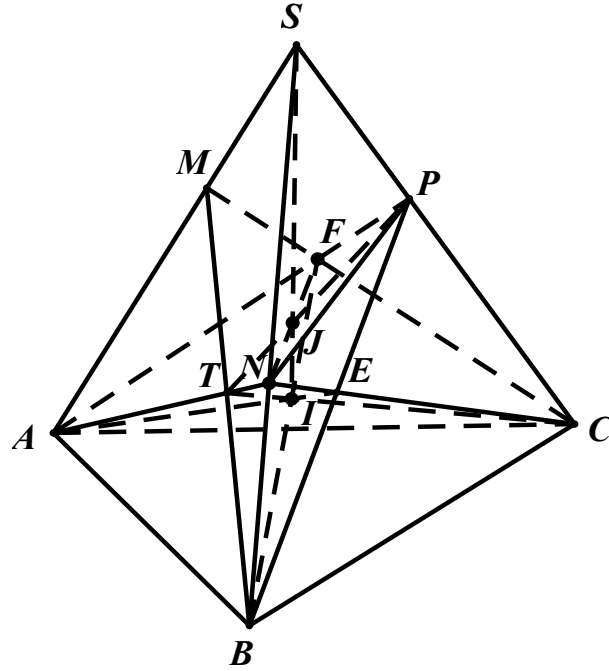
B. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{4} = \frac{JS}{JI}$

C. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{3} = \frac{JS}{JI}$

D. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$

Lời giải

Chọn D.



Gọi $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP, T = AN \cap BM$.

Trong (BCM) có $I = BF \cap CT$ trong (ANP) có $NF \cap PT = J$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM} = \frac{x}{x+1}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{y+1}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{z+1}\vec{c}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Do $T = AN \cap BM$ nên $\begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \end{cases} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{y+1}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}.$$

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ta có $\begin{cases} \frac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \frac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x+y+1} \\ \beta = \frac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\overrightarrow{SE} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c}, \overrightarrow{SF} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I = BF \cap CT$ và $NF \cap PT = J$ ta được:

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}), \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI} \Rightarrow \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$$

Vậy S, I, J thẳng hàng và $\frac{SI}{IJ} = x + y + z + 1 = \frac{SM}{MA} + \frac{SN}{NB} + \frac{SP}{PC} + 1$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) .

A. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

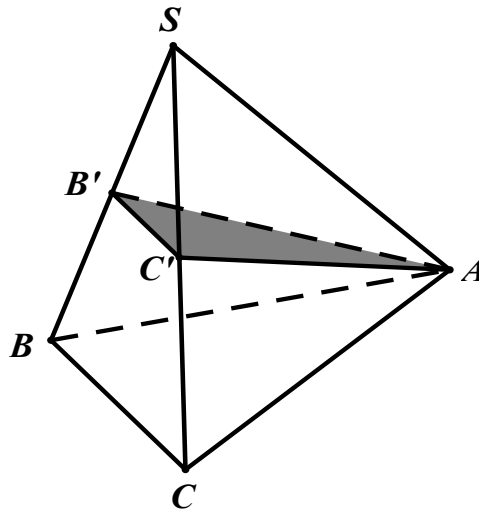
B. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

C. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

D. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

Lời giải

Chọn D.



Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC . Thiết diện là tam giác $AB'C'$.

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{AB'^2 AC'^2 - (\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'})^2}$$

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$

$$\Rightarrow AB'^2 = \frac{1}{4} SB^2 + SA^2 - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{a^2}{4} (5 - 4 \cos \alpha).$$

Tính tương tự, ta có: $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} = \frac{a^2}{4} (4 - 3 \cos \alpha).$

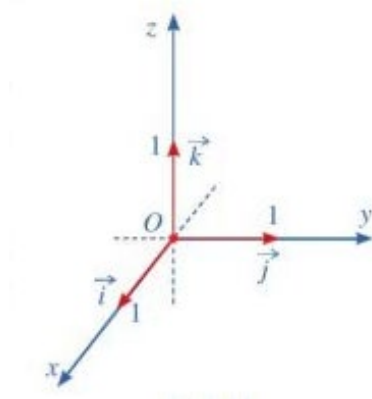
Vậy $S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4}{16} (5 - 4 \cos \alpha)^2 - \frac{a^4}{16} (4 - 3 \cos \alpha)^2} = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}.$

BÀI 2

TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ trục tọa độ $Oxyz$.



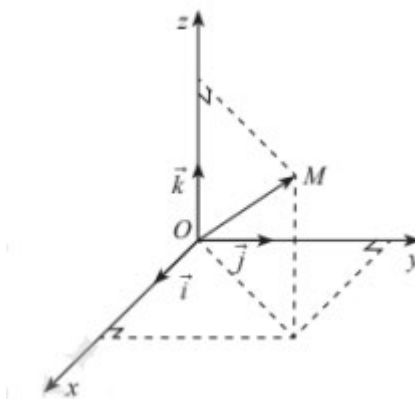
Chú ý:

- Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các **vector đơn vị** trên các trục Ox , Oy , Oz .
- Trong không gian $Oxyz$, ta gọi:
 - + Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.
 - + Trục Ox : **trục hoành**, Trục Oy : **trục tung**, Trục Oz : **trục cao**.
 - + Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc nhau.

2. Tọa độ của một điểm và của một vector

a. Tọa độ của một điểm

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ của điểm M .

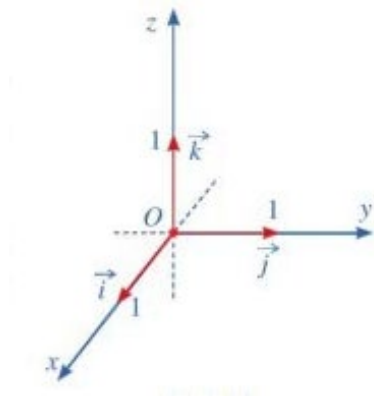


b. Tọa độ của một vector

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

- Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.
- Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$: $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$
- Điều kiện hai vector bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$, khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$
- Vector đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
Vector đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
Vector đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua Oyz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua Oxz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

- A.** $(-2; 3; 1)$. **B.** $(2; 3; -1)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(2; 3; 1)$.

Câu 3. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là:

- A.** $\vec{a}(-1; 2; -3)$. **B.** $\vec{a}(2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a}(-3; 2; -1)$. **D.** $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:

- A.** $(-2; 3; 5)$. **B.** $(2; -3; 5)$. **C.** $(-2; -3; 5)$. **D.** $(2; -3; -5)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(1; 2; 3)$ **B.** $(-1; -2; 3)$ **C.** $(3; 5; 1)$ **D.** $(3; 4; 1)$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A.** $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(0; 5; 2)$. **B.** $(0; 5; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(3; 0; -1)$. **B.** $(0; 1; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(3; -1; 0)$. **B.** $(0; 0; 1)$. **C.** $(0; -1; 0)$. **D.** $(3; 0; 0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(0; 2; -3)$. **B.** $(1; 0; -3)$. **C.** $(1; 2; 0)$. **D.** $(1; 0; 0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $(0;1;0)$. B. $(2;1;0)$. C. $(0;1;-1)$. D. $(2;0;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3;0;0)$ B. $N(0;-1;1)$ C. $P(0;-1;0)$ D. $Q(0;0;1)$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;0;3)$. C. $Q(2;0;0)$. D. $N(0;4;-1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.

B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.

C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.

D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;0)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0;2;3)$. B. $(-1;-2;-3)$. C. $(-1;2;3)$. D. $(1;2;-3)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2;3;5)$. B. $A'(2;-3;-5)$. C. $A'(-2;-3;5)$. D. $A'(-2;-3;-5)$.

Câu 18. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;-\sqrt{2};\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(-1;0;0)$. B. $M'(1;0;0)$. C. $M'(1;0;\sqrt{3})$. D. $M'(1;-\sqrt{2};0)$.

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(\sqrt{2};0;\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(0;-\sqrt{2};0)$. B. $M'(\sqrt{2};0;0)$. C. $M'(0;0;\sqrt{3})$. D. $M'(0;0;0)$.

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;-\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;0;-\sqrt{3})$. B. $M'(0;2;-\sqrt{3})$. C. $M'(0;0;-\sqrt{3})$. D. $M'(0;0;\sqrt{3})$.

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$. Tìm điểm $A' \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

- A. $A'(-1;1;0)$. B. $A'(1;1;0)$. C. $A'(2;2;0)$. D. $A'(2;-1;2)$.

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$. Tìm điểm $M' \in (Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5})$. B. $M'(1;1-\sqrt{2};0)$. C. $M'(1;0;2+\sqrt{5})$. D. $M'(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1+\sqrt{2};2;1-\sqrt{2})$. Tìm điểm $M' \in (Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1+\sqrt{2};0;1-\sqrt{2})$. B. $M'(0;2;1-\sqrt{2})$. C. $M'(0;-2;1-\sqrt{2})$. D. $M'(0;-2;1+\sqrt{2})$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(-4;2;9)$. C. $D(4;-2;9)$. D. $D(4;2;-9)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;2)$ và $D=(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

- A. $(2;0;2)$. B. $(2;2;2)$. C. $(2;-2;2)$. D. $(0;-2;0)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. $A'(4;6;-5)$. B. $A'(2;0;2)$. C. $A'(3;5;-6)$. D. $A'(3;4;-6)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A. $C'(10;4;4)$. B. $C'(-13;4;4)$. C. $C'(13;4;4)$. D. $C'(7;4;4)$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

- A. $B'(8;4;10)$. B. $B'(6;12;0)$. C. $B'(10;8;6)$. D. $B'(13;0;17)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2)$, $B(1;0;3)$, $C(0;2;-2)$.

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{BC} = (-1;2;-5)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

C. Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0; 1; -2), C(0; -2; 1), D(1; 0; -1)$.

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{OC} = (0; -2; 1)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

C. Tọa độ điểm B là $B(-1; -1; 0)$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

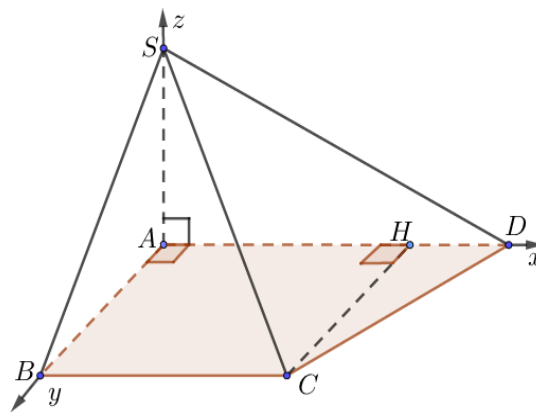
A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.

B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$), $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



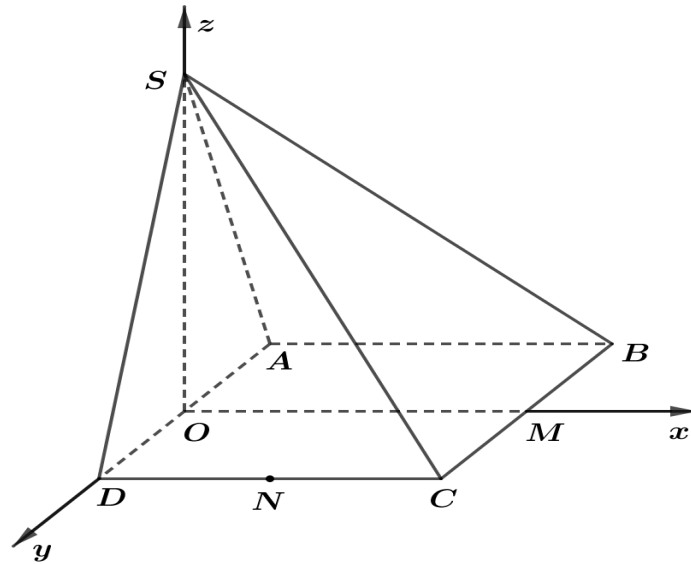
A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0; 0; 0), B(a; a; 0)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a; a; 0), D(2a; 0; 0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0; 0; 2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a; 0; 0)$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

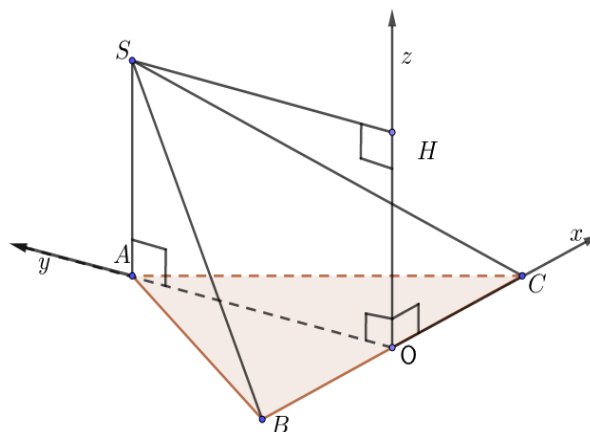
B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

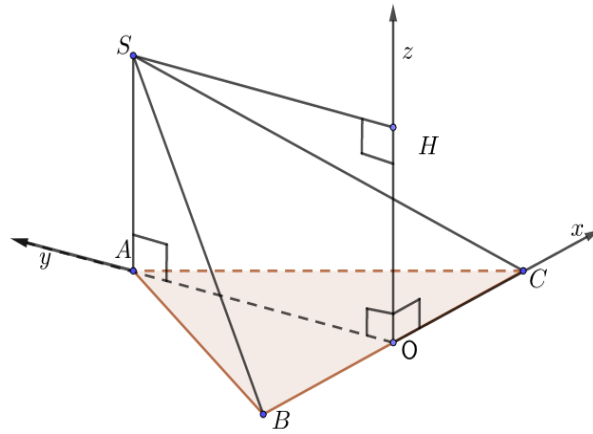
D. Tọa độ các điểm M, N là $M\left(1; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

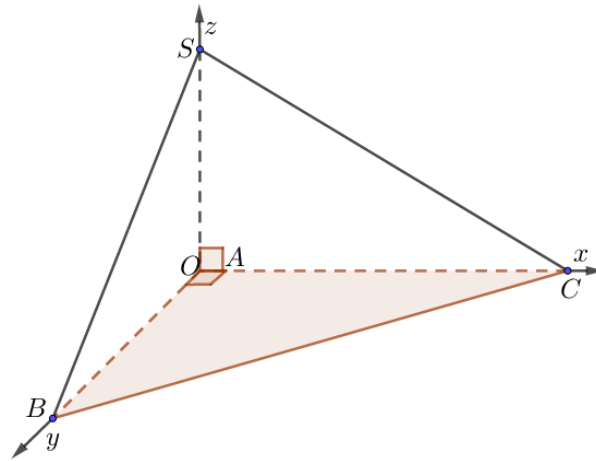
Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H (H là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



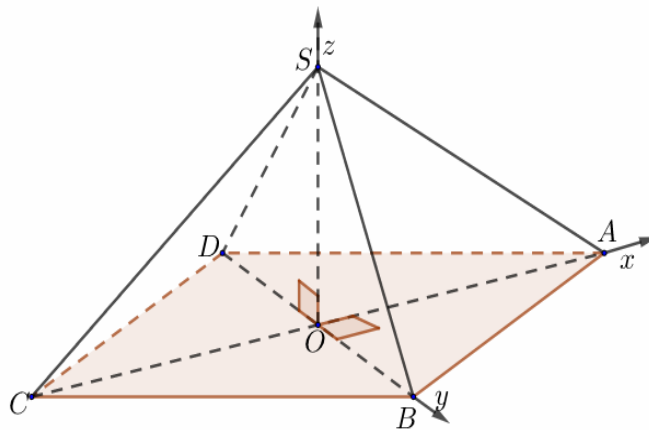
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và cạnh $BC = 2\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 3$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H (H là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



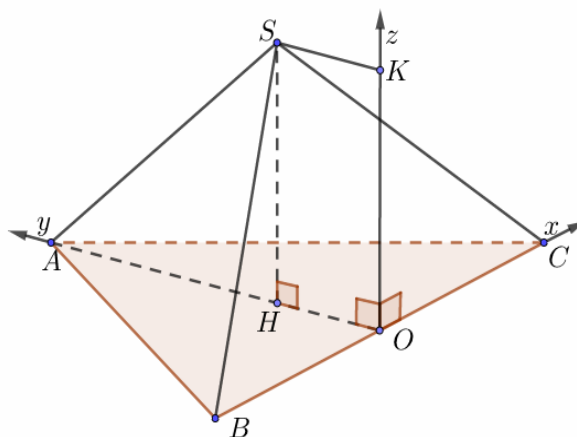
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 2024$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S



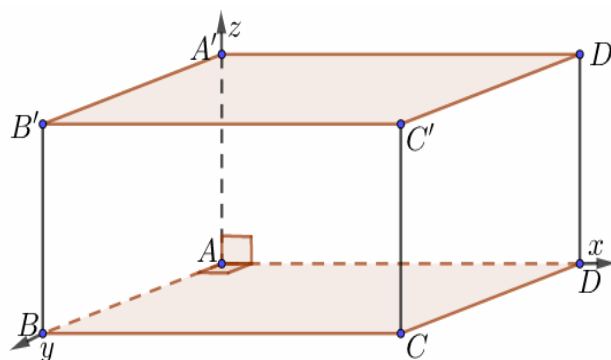
Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, D, S .



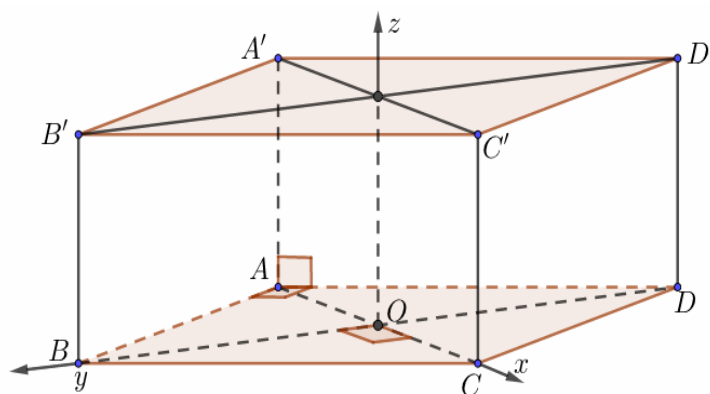
Câu 38. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Gọi H là hình chiếu điểm S trên mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H, K (K là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

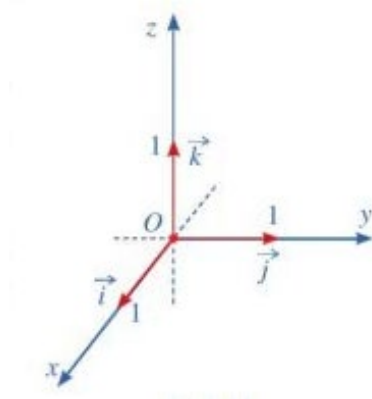


Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$.



BÀI 2**TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM****1. Hệ trục tọa độ trong không gian**

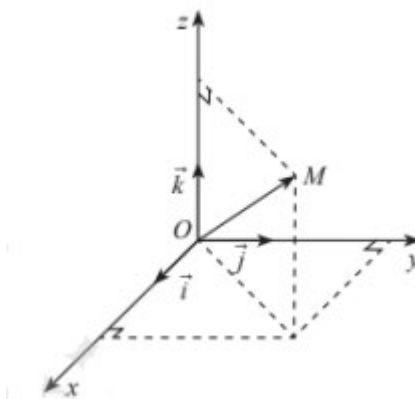
Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ trục tọa độ $Oxyz$.

**Chú ý:**

- Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các **vector đơn vị** trên các trục Ox , Oy , Oz .
- Trong không gian $Oxyz$, ta gọi:
 - + Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.
 - + Trục Ox : **trục hoành**, Trục Oy : **trục tung**, Trục Oz : **trục cao**.
 - + Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc nhau.

2. Tọa độ của một điểm và của một vector**a. Tọa độ của một điểm**

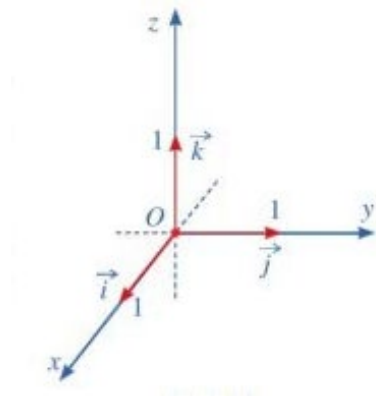
Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ của điểm M .

**b. Tọa độ của một vector**

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

- Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.
- Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$: $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$
- Điều kiện hai vector bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$, khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$
- Vector đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
Vector đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
Vector đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua Oxz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua Oyz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1; 2; -3).$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

- A.** $(-2; 3; 1)$. **B.** $(2; 3; -1)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(2; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó, } \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1).$$

Câu 3. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là:

- A.** $\vec{a}(-1; 2; -3)$. **B.** $\vec{a}(2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a}(-3; 2; -1)$. **D.** $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Lời giải

Chọn A.

$$+) \text{ Ta có } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(x; y; z) \text{ nên } \vec{a}(-1; 2; -3).$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OA}$ là:

- A.** $(-2; 3; 5)$. **B.** $(2; -3; 5)$. **C.** $(-2; -3; 5)$. **D.** $(2; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A) = (-2; 3; 5)$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(1; 2; 3)$ **B.** $(-1; -2; 3)$ **C.** $(3; 5; 1)$ **D.** $(3; 4; 1)$

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1; 2; 3)$$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A.** $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x; y; z)$

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) = (x - 1; y - 2; z + 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(0; 5; 2)$. **B.** $(0; 5; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(3; 0; -1)$. **B.** $(0; 1; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(3; -1; 0)$. **B.** $(0; 0; 1)$. **C.** $(0; -1; 0)$. **D.** $(3; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(0; 2; -3)$. **B.** $(1; 0; -3)$. **C.** $(1; 2; 0)$. **D.** $(1; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C.

Hình chiếu của điểm $A(a; b; c)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(a; b; 0)$ nên hình chiếu của điểm $A(1; 2; -3)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(1; 2; 0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A. $(0;1;0)$. B. $(2;1;0)$. C. $(0;1;-1)$. **D. $(2;0;-1)$.**

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2;1;-1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2;0;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3;0;0)$ **B. $N(0;-1;1)$** C. $P(0;-1;0)$ D. $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz) , ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;0;3)$. C. $Q(2;0;0)$. **D. $N(0;4;-1)$.**

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x = 0 \Rightarrow N(0;4;-1) \in (Oyz)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. **D. $M'(0;5;6)$.**

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;5;6)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.
 B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.
C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.
 D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;0)$.

Lời giải

Chọn C

Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; -y; z)$. Do đó phương án A sai.

Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(-x; y; -z)$. Do đó phương án B sai.

Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(-x; -y; -z)$. Do đó phương án D sai.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0; 2; 3)$. B. $(-1; -2; -3)$. C. $(-1; 2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0; 2; 3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1; 2; 3)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -3; 5)$ lên Oy . Suy ra $H(0; -3; 0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; -3; -5).$$

Câu 18. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(-1; 0; 0)$. B. $M'(1; 0; 0)$. C. $M'(1; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Ox \Rightarrow M'(1; 0; 0)$

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(\sqrt{2}; 0; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(0; -\sqrt{2}; 0)$. B. $M'(\sqrt{2}; 0; 0)$. C. $M'(0; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(0; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn D.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Oy \Rightarrow M'(0; 0; 0)$

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; -\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1; 0; -\sqrt{3})$. B. $M'(0; 2; -\sqrt{3})$. C. $M'(0; 0; -\sqrt{3})$. D. $M'(0; 0; \sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Oz \Rightarrow M'(0; 0; -\sqrt{3})$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 1; 2)$. Tìm điểm $A' \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

- A. $A'(-1; 1; 0)$. B. $A'(1; 1; 0)$. C. $A'(2; 2; 0)$. D. $A'(2; -1; 2)$.

Lời giải

Chọn B.

AA' ngắn nhất khi điểm A' là hình chiếu điểm A trên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(1; 1; 0)$

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{5})$. Tìm điểm $M' \in (Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1; 1 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{5})$. B. $M'(1; 1 - \sqrt{2}; 0)$. C. $M'(1; 0; 2 + \sqrt{5})$.
D. $M'(0; 1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{5})$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oxz) \Rightarrow M'(1; 0; 2 + \sqrt{5})$

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1 + \sqrt{2}; 2; 1 - \sqrt{2})$. Tìm điểm $M' \in (Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1 + \sqrt{2}; 0; 1 - \sqrt{2})$. B. $M'(0; 2; 1 - \sqrt{2})$. C. $M'(0; -2; 1 - \sqrt{2})$. D. $M'(0; -2; 1 + \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow M'(0; 2; 1 - \sqrt{2})$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4; -2; 9)$. B. $D(-4; 2; 9)$. C. $D(4; -2; 9)$. D. $D(4; 2; -9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x; y; z)$.

$$\text{Để } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3-x; 1-y; 2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$ và $D = (1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A. $(2; 0; 2)$. B. $(2; 2; 2)$. C. $(2; -2; 2)$. D. $(0; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. $A'(4; 6; -5)$. B. $A'(2; 0; 2)$. C. $A'(3; 5; -6)$. D. $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2; 5; -7)$.

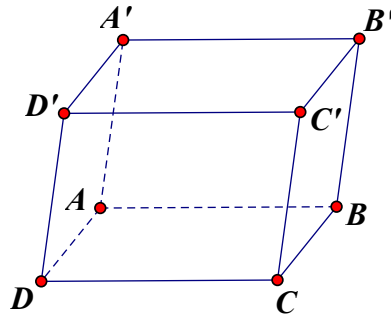
Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$, $A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A. $C'(10; 4; 4)$. B. $C'(-13; 4; 4)$. C. $C'(13; 4; 4)$. D. $C'(7; 4; 4)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8; 4; 10)$.

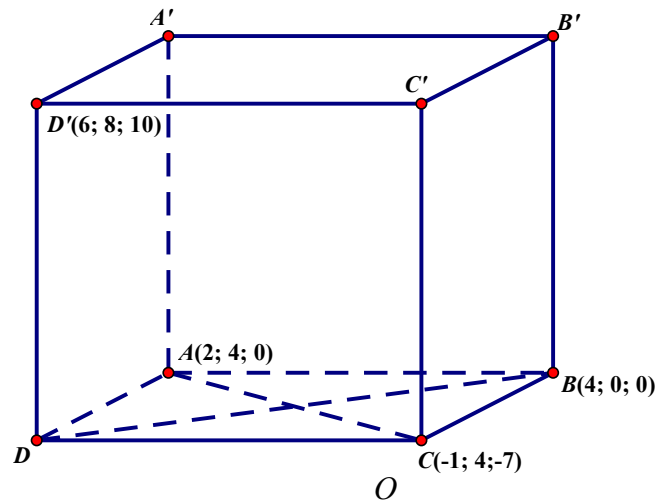
B. $B'(6; 12; 0)$.

C. $B'(10; 8; 6)$.

D. $B'(13; 0; 17)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17), \overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c'). \text{ Do } ABCD.A'B'C'D' \text{ là hình hộp nên } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}.$$

Vậy $B'(13; 0; 17)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2), B(1;0;3), C(0;2;-2)$.

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{BC} = (-1;2;-5)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

C. Tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Lời giải

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{BC} = (-1;2;-5)$. ĐÚNG

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. ĐÚNG

C. Tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$. ĐÚNG

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$. SAI

$$\overrightarrow{BC} = (-1;2;-5)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2;-1;1)$$

Gọi tọa độ điểm D là $(x;y;z)$

$$\overrightarrow{AB} = (2;-1;1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (-x;2-y;-2-z)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -x = 2 \\ 2 - y = -1 \\ -2 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

$$\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2), C(0;-2;1), D(1;0;-1)$.

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{OC} = (0;-2;1)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

C. Tọa độ điểm B là $B(-1;-1;0)$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Lời giải

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{OC} = (0;-2;1)$. ĐÚNG

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. ĐÚNG

C. Tọa độ điểm B là $B(-1;-1;0)$. ĐÚNG

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. SAI

$$\overrightarrow{OC} = (0; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Gọi tọa độ điểm B là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{BA} = (-x; 1-y; -2-z)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1; 2; -2)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -x = 1 \\ 1-y = 2 \\ -2-z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm B là $B(-1; -1; 0)$.

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.

B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

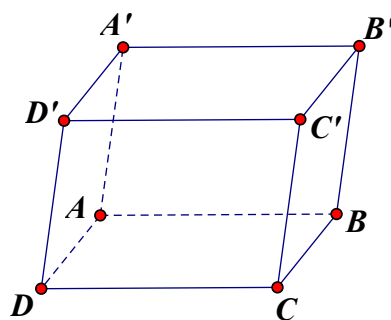
Lời giải

A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$. **SAI**

B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$. **ĐÚNG**

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. **ĐÚNG**

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$. **ĐÚNG**



Gọi tọa độ điểm A' là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{A'C'} = (-1-x; 2-y; 1-z)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 0)$$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

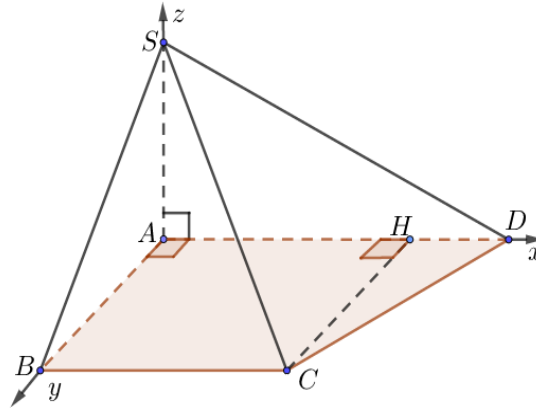
$$\text{Suy ra } \begin{cases} -1-x=-2 \\ 2-y=2 \\ 1-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A'(1;0;1)$$

Làm tương tự ta có: $B'(0;4;2); B(1;5;1); D(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} = (1;4;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{B'D} = (1;-5;-3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

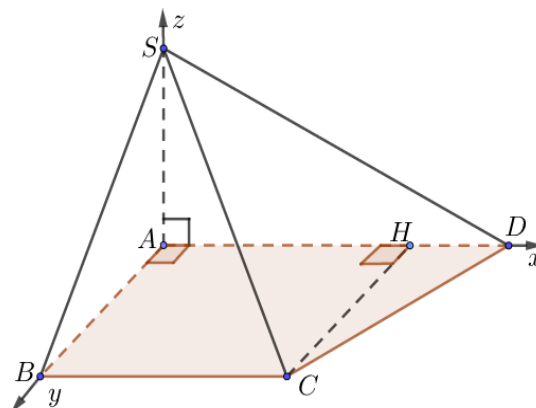
Lời giải

A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$. **SAI**

B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$. **ĐÚNG**

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$. **ĐÚNG**

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$. **ĐÚNG**

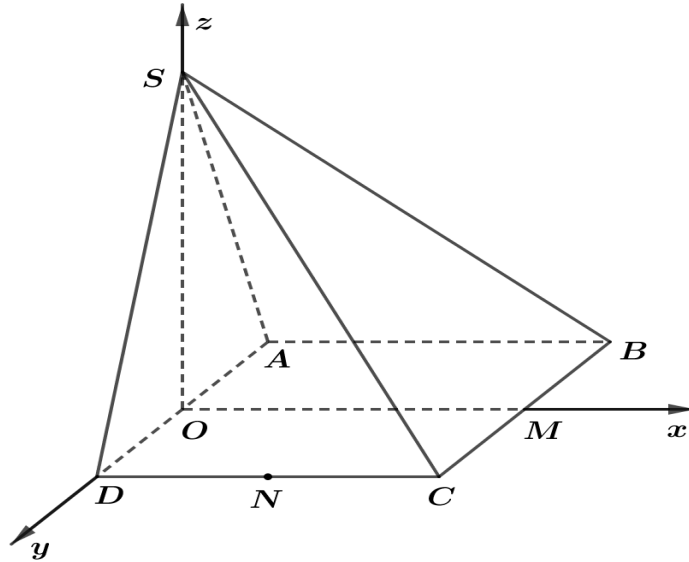


Để tính được $AB = BC = AH = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AS} = 2\vec{k}$

Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(a;a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(2a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $H(a;0;0)$

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M, N là $M\left(1; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

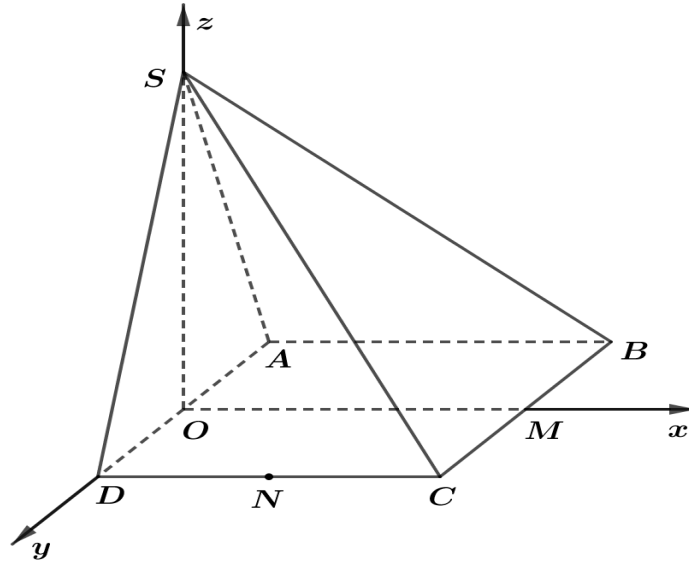
Lời giải

A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$. **ĐÚNG**

B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$. **ĐÚNG**

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **ĐÚNG**

D. Tọa độ các điểm M, N là $M\left(1; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **ĐÚNG**



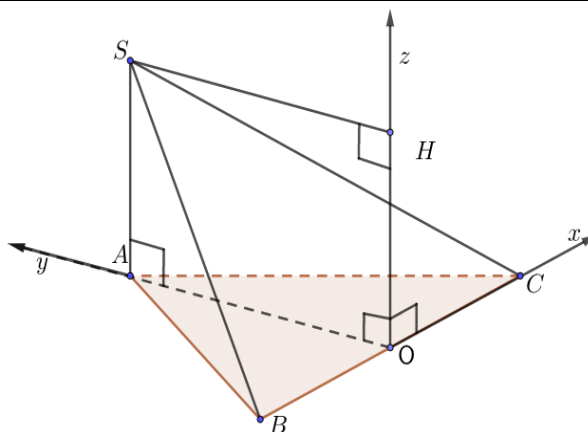
Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

SAD là tam giác đều có cạnh bằng 1 nên $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

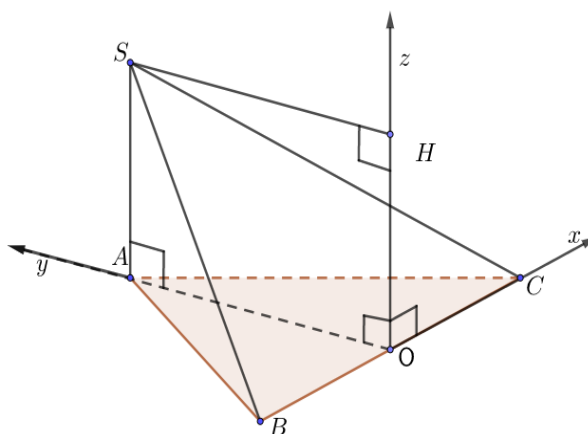
$A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

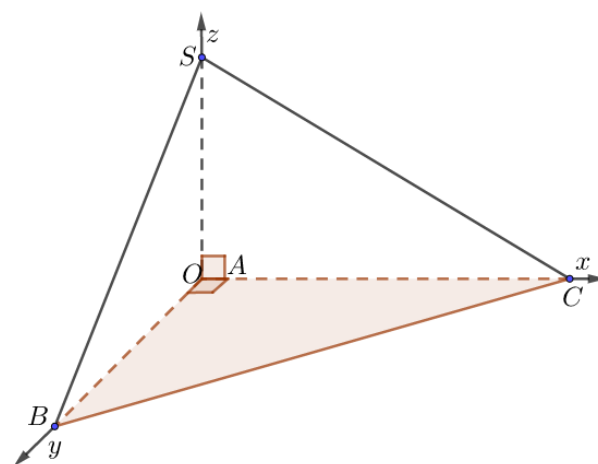
Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H (H là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



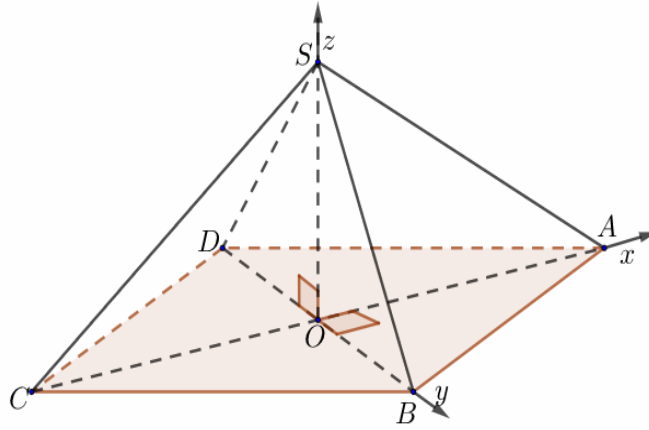
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và cạnh $BC = 2\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 3$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H (H là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



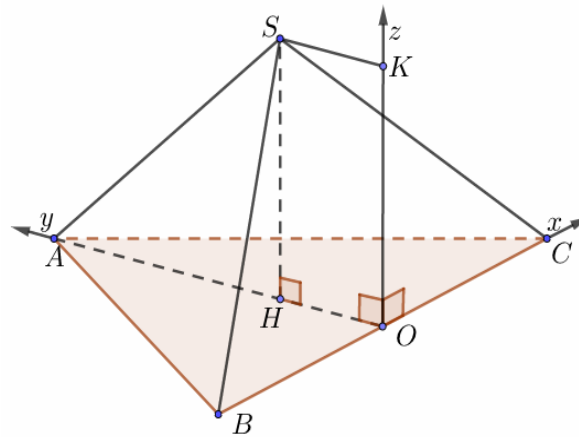
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 2024$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



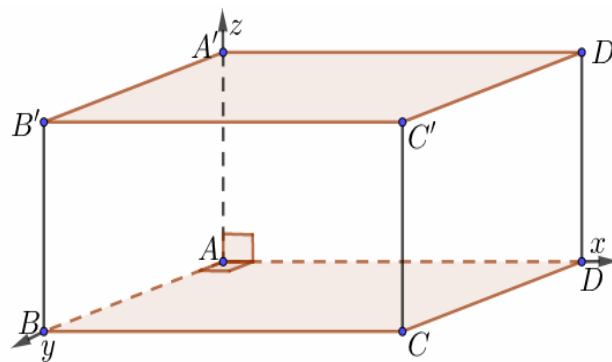
Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, D, S .



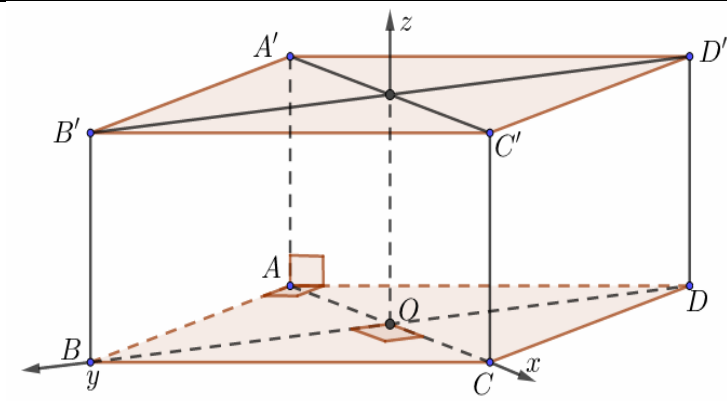
Câu 38. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Gọi H là hình chiếu điểm S trên mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H, K (K là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$.



BÀI 3

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

Nhận xét: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

2. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm

của tam giác ABC thì: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có:

+ Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

+ Góc hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

CHỦ ĐỀ 1

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

DẠNG 1

CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

• $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

• Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(3; 4; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(3; 4; 1)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(1; 2; 3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d}(-7; 0; -4)$ B. $\vec{d}(-7; 0; 4)$ C. $\vec{d}(7; 0; -4)$ D. $\vec{d}(7; 0; 4)$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$. C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$. D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; 7; 3)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. C. $m = 4; n = -3$. D. $m = 1; n = 0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; -3), B(1; 0; 2), C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A. $x + y = 1$. B. $x + y = 17$. C. $x + y = -\frac{11}{5}$. D. $x + y = \frac{11}{5}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A. $x = 4; y = 7$ B. $x = -4; y = -7$ C. $x = 4; y = -7$ D. $x = -4; y = 7$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

- A. $M(4; -5; 0)$. B. $M(2; -3; 0)$. C. $M(0; 0; 1)$. D. $M(4; 5; 0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$
 B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương
 C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$
 D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.
 B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
 D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

- A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.
 B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.
 C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
 D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Tìm tọa độ vector $\vec{x}$, biết rằng: $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Câu 21. Cho vector $\vec{a} = (1; -1; 0)$, xác định k để vector $\vec{u} = (2; 2k - 1; 0)$ cùng phương với vector $\vec{a}$.

Câu 22. Cho hai vector $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Tìm m để $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b}$ cùng phương.

Câu 23. Cho ba vector $\vec{a} = (1; -7; 9)$, $\vec{b} = (3; -6; 1)$, $\vec{c} = (2; 1; -7)$. Biểu diễn vector $\vec{u} = (-4; 13; -6)$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Câu 24. Cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 2; 3)$. Biểu diễn vector $\vec{u} = (1; 2; -2)$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Câu 25. Cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Xác định các số thực m, n để $m\vec{a} - 3n\vec{b} = \vec{c}$.

Câu 26. Cho 3 vector : $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Xác định các số thực m, n để $\frac{m}{3}\vec{a} - n\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4; 2; 3)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(3; 8; 7)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$. Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

DẠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTOR

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$;
- Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$
- Góc hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Câu 30. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Câu 31. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$.

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7. D. $\sqrt{39}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Câu 37. Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

- A. 120° . B. 45° . C. 135° . D. 60° .

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -2$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.

Câu 41. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$; $B(-1; 2; 1)$; $C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. -6. B. -14. C. 14. D. 6.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

Câu 45. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(3; 1; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $9 - 2\sqrt{6}$. B. $9 - 3\sqrt{6}$. C. $9 + 3\sqrt{6}$. D. $9 + 2\sqrt{6}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-4; -2; 6)$.

A. $\vec{b} = -2\vec{a}$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

D. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

C. $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$.

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Câu 49. Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$.

A. $5z - x = 0$.

B. $7x - y = 0$.

C. $5y + 7z = 0$.

D. $7x + y = 0$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$.

A. $AB \perp BD$.

B. $AB \perp BC$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AB \perp CD$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

a) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b}$. Trong ba vector trên có các cặp vector nào vuông góc ?

b) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}, \vec{i})$

Câu 52. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 53. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính $4\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$.

b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 54. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = -6$.

Câu 55. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{a} \cdot \vec{u} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 4; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(2; 2; -1)$. Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(2; -3; 1)$. Điểm $S(a; b; c)$ sao cho $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

Câu 58. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Câu 59. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $|\vec{MB} - 2\vec{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Câu 60. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 2; 1)$, $M \in Ox$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = |\vec{MA} + \vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 61. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-1; 2; 1)$, $M \in Oy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ để T đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0; 2; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 2; 3)$, $M \in Oz$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = |\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S = a + 2b + 3c$.

DẠNG 3

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG

TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

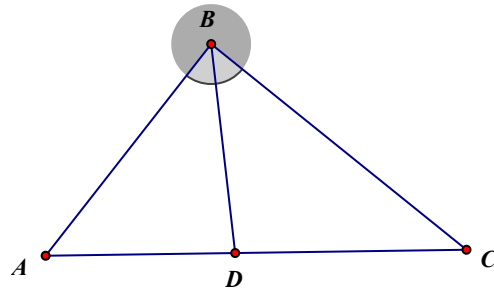
- $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

- $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{BA}{BC} \overrightarrow{DC}$$



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = \sqrt{5}$ B. $OA = 5$ C. $OA = 3$ D. $OA = 9$

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(4; 2; 2)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(2; 0; -2)$. D. $(1; 0; -1)$.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4; 9; 8)$. C. $B(5; 3; -7)$. D. $B(5; -3; -7)$.

Câu 68. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0; 0; 3)$. B. $G(0; 0; 9)$. C. $G(-1; 0; 3)$. D. $G(0; 0; 1)$.

Câu 69. Cho bốn điểm $S(1, 2, 3)$; $A(2, 2, 3)$; $B(1, 3, 3)$; $C(1, 2, 4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5; 9; 13)$. B. $\left(\frac{5}{3}; 3; \frac{13}{3}\right)$. C. $\left(1; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. D. $\left(\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; \frac{13}{4}\right)$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$. B. $(4; 5; -9)$. C. $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$. D. $(1; -7; 12)$.

Câu 72. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

A. $M(0; 0; 3)$. B. $M(0; 0; -3)$. C. $M(-8; -4; 7)$. D. $M(8; 4; -7)$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$
C. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{AM}{BM} = 2$ C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$; $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{10}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A , B , C .

- A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$. B. $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. D. $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng

- A. 5. B. 4. C. 14. D. 15.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a-b+c$ bằng

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

- A. $I(1;1;1)$. B. $I(0;1;1)$. C. $I(0;-1;-1)$. D. $I(1;0;1)$.

Câu 83. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

- A. $D(-12;-1;3)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. C. $D(8;7;-1)$. D. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$.

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A. $a+b+c=6$. B. $a+b+c=5$. C. $a+b+c=8$. D. $a+b+c=7$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$; $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó.

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm là $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

B. Tọa độ vector là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

C. $2024a + 2025b = 2025$

D. $a + b + c = -2$

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $x + 2y = 1$.

B. $3y + z = 1$.

C. $x + 2y - 2z = -15$.

D. $x + y + z = 11$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(x_G; y_G; z_G)$.

A. $x_G + y_G + z_G = 1$.

B. $2x_G - y_G = 3$.

C. $2x_G + y_G - 3z_G = -1$.

D. $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $D(a; b; c)$.

A. $a + b = 3$.

B. $a + c = \frac{5}{3}$.

C. $a + b - 2c = 1$.

D. $a + b + c = 4$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 90. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1; -1; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(4; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB .

b) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$

Câu 91. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1; -1; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(4; -2; 2)$, $D(3; 0; 1)$, $E(1; 2; 3)$

- Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.
- Tính $\cos$ các góc của tam giác ABC
- Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm AB
- Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Câu 92. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4; -1; 2)$; $B(7; 3; 2)$.

- Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ và cách đều hai điểm A, B .
- Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A .

Câu 93. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3), B(0; 3; 7), C(2; 5; 0)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tính góc $\widehat{ABC}$.
- Tính diện tích ΔABC . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC .

Câu 94. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ΔABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
- Tìm tọa độ trọng tâm của ΔABC .
- Tính góc $\widehat{ABC}$.
- Tính độ dài đường cao BH của ΔABC

Câu 95. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Biết rằng: $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-1; -1; 2)$, $D'(2; -2; -3)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta AA'C$.

Câu 96. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Biết rằng: $A(0; 2; 2), B(0; 1; 2), C(-1; 1; 1), C'(1; -2; -1)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta B'DD'$.

BÀI 3

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

Nhận xét: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

2. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm

của tam giác ABC thì: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có:

+ Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

+ Góc hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

CHỦ ĐỀ 1

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

DẠNG 1

CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

• $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

• Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\vec{v} = (-3; -6; 3)$.

Do đó $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2; -10; 3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(3; 4; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{u} - \vec{v} = (-1; 2; -1)$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(3; 4; 1)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. **D. $(1; 2; 3)$.**

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d}(-7; 0; -4)$ B. $\vec{d}(-7; 0; 4)$ **C. $\vec{d}(7; 0; -4)$** D. $\vec{d}(7; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 + 1 + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. **B. $(-2; 2; -7)$.** C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. **B. $(-2; 2; -7)$.** C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B.

Có $2\vec{a} = (4; -6; 6)$; $3\vec{b} = (0; 6; -3)$; $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$. C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$. **D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.**

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $2\vec{y} = (2; 0; -2)$.

$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2 + 2; 1 + 0; -3 - 2) = (4; 1; -5)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; 7; 3)$.

Lời giải

Chọn A.

Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2.1 + 0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = (1; 7; 2)$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{11}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ . Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

Do đó $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m , n để các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $m = 7$; $n = -\frac{3}{4}$.

B. $m = 7$; $n = -\frac{4}{3}$.

C. $m = 4$; $n = -3$.

D. $m = 1$; $n = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

A. $x + y = 1$.

B. $x + y = 17$.

C. $x + y = -\frac{11}{5}$.

D. $x + y = \frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$.

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

A. $x = 4; y = 7$

B. $x = -4; y = -7$

C. $x = 4; y = -7$

D. $x = -4; y = 7$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4; -5; 0)$.

B. $M(2; -3; 0)$.

C. $M(0; 0; 1)$.

D. $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 2; -1)$.

$$\text{Để } A, B, M \text{ thẳng hàng thì } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương, khi đó: } \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy $M(4; -5; 0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Lời giải

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ **ĐÚNG**

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương **SAI**

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ **ĐÚNG**

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ **ĐÚNG**

• Xét đáp án A: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Đáp án B sai.

• $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ đúng.

• $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ đúng.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. SAI

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$. SAI

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. ĐÚNG

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. SAI

Đặt: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m.(2; 3; 1) + n.(-1; 5; 2) + p.(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} (I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$. ĐÚNG

+ Ta có: $\begin{cases} 3\vec{a} = (6; -15; 9) \\ \vec{b} = (0; 2; 1) \\ 5\vec{c} = (5; 35; 10) \end{cases} \Rightarrow 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18) = \vec{u}$

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$. **ĐÚNG**

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{a} = \left(1; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \frac{4}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ 2\vec{c} = (2; 14; 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right) = \vec{x}$$

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. **ĐÚNG**

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{v} = (2; -3; 2) \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. **SAI**

$\vec{y} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{y} = (-1; -5; -3) \Rightarrow \vec{y} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Tìm tọa độ vector $\vec{x}$, biết rằng: $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Lời giải

Đáp án: $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$

+ Gọi vector $\vec{x}$ có tọa độ: $\vec{x} = (x; y; z) \Rightarrow 2\vec{x} = (2x; 2y; 2z)$

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + 2\vec{x} = (5 + 2x; 4 + 2y; -1 + 2z) \\ \vec{b} = (2; -5; 3) \end{array} \right.$$

+ Vì $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ nên:
$$\left\{ \begin{array}{l} 5 + 2x = 2 \\ 4 + 2y = -5 \\ -1 + 2z = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \\ z = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$$

Câu 21. Cho vector $\vec{a} = (1; -1; 0)$, xác định k để vector $\vec{u} = (2; 2k - 1; 0)$ cùng phương với vector $\vec{a}$.

Câu 22. Cho hai vector $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Tìm m để $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b}$ cùng phương.

Câu 23. Cho ba vector $\vec{a} = (1; -7; 9)$, $\vec{b} = (3; -6; 1)$, $\vec{c} = (2; 1; -7)$. Biểu diễn vector $\vec{u} = (-4; 13; -6)$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Câu 24. Cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 2; 3)$. Biểu diễn vector $\vec{u} = (1; 2; -2)$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Câu 25. Cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Xác định các số thực m, n để

$$m\vec{a} - 3n\vec{b} = \vec{c}.$$

Câu 26. Cho 3 vector : $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Xác định các số thực m, n để $\frac{m}{3}\vec{a} - n\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4; 2; 3)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(3; 8; 7)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$. Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

DẠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTOR

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$;
- Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

$$\bullet \text{ Góc hai vector: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Câu 30. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$.

Do đó, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 31. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$.

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7 . D. $\sqrt{39}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(\vec{u} + \vec{v} \right)^2 &= \left(\vec{u} + \vec{v} \right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5^2 = 19. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}.$$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° . **B.** 60° . **C.** 150° . **D.** 30° .

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 37. Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. 120° . **B.** 45° . **C.** 135° . **D.** 60° .

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

A. $m = -5$.

B. $m = 5$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$

Lời giải

Chọn B.

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$.

B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$.

C. $m = 2 - \sqrt{6}$.

D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m - 9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2 + 6m + 10}}.$$

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$

B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$

C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}(1; 5; -2)$; $\overrightarrow{AC}(5; 4; -1)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5 + 20 + 2}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$; $B(-1; 2; 1)$; $C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. -6 . B. -14 . C. 14 . D. 6 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -3; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$.

Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2)$; $\overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 45. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$

- A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. 3 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } M(x; y; z). \text{ Ta có: } \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)+y(y-2)+z^2=0 \\ x^2+y(y-2)+z(z-2)=0 \\ x(x-2)+y^2+z(z-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y=0 \\ x^2+y^2+z^2-2y-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y=0 \\ x=z \\ y=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x=0 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M(0;0;0) \\ M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right) \end{bmatrix}.$$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5;3;-1), B(2;3;-4), C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $9-2\sqrt{6}$. B. $9-3\sqrt{6}$. C. $9+3\sqrt{6}$. D. $9+2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{Suy ra: } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -3), \vec{b} = (-4; -2; 6)$.

- A. $\vec{b} = -2\vec{a}$.
 B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 C. $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.
 D. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

Lời giải

- A. $\vec{b} = -2\vec{a}$. **ĐÚNG**
 B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **SAI**
 C. $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$. **ĐÚNG**
 D. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$. **ĐÚNG**

Dễ thấy $\vec{b} = -2\vec{a}$. Từ đó suy ra vector $\vec{a}$ ngược hướng với vector $\vec{b}$ và $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 = -28 \neq 0.$$

Do đó đáp án B sai.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

C. $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$.

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. **SAI**

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$. **ĐÚNG**

C. $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$. **ĐÚNG**

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$. **ĐÚNG**

Ta có

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{u}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \neq 2 \text{ (SAI)}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 - 2 - 3 = -4 \text{ (đúng)}.$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{u}| = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{0+9+16} = 5 \text{ (đúng)}.$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} = 1 \cdot 1 + (2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 49. Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$.

A. $5z - x = 0$.

B. $7x - y = 0$.

C. $5y + 7z = 0$.

D. $7x + y = 0$.

Lời giải

A. $5z - x = 0$. **SAI**

B. $7x - y = 0$. **SAI**

C. $5y + 7z = 0$. **ĐÚNG**

D. $7x + y = 0$. **ĐÚNG**

Theo giả thiết ta có $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ nên

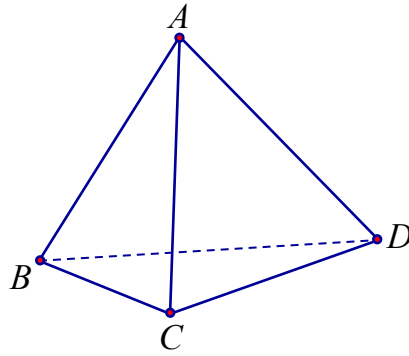
$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4z = 0 \\ -1x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4z = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4 \cdot \frac{-5}{7}y = 0 \\ z = \frac{-5}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$.

- A. $AB \perp BD$.
- B. $AB \perp BC$.
- C. $AB \perp AC$.
- D. $AB \perp CD$.

Lời giải

- A. $AB \perp BD$. **ĐÚNG**
- B. $AB \perp BC$. **ĐÚNG**
- C. $AB \perp AC$. **SAI**
- D. $AB \perp CD$. **ĐÚNG**



Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 0; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

Làm tương tự ta có:

- $AB \perp BD$
- $AB \perp BC$
- $AB \perp CD$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

- a) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b}$. Trong ba vectơ trên có các cặp vectơ nào vuông góc ?
- b) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}, \vec{i})$

Câu 52. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

- a) Tính $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
- b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 53. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

- a) Tính $4\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$.
- b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 54. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = -6$.

Câu 55. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{a} \cdot \vec{u} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 4; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(2; 2; -1)$. Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x + y + z = 7$

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(2; -3; 1)$. Điểm $S(a; b; c)$ sao cho $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Đáp án: $T = a + b + c = -\frac{5}{6}$

Gọi G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{-1}{3}\right)$

$$SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2 = \overrightarrow{SA}^2 + 2\overrightarrow{SB}^2 + 3\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GB})^2 + 3(\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ = 6SG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2$$

$SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ nhỏ nhất khi $S \equiv G$ hay $S\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{-1}{3}\right)$.

Nên $T = a + b + c = -\frac{5}{6}$.

Câu 58. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = 4$

$$\overrightarrow{MA} = (2 - m; 5 - m; 1 - m), \overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m), \overrightarrow{MC} = (1 - m; 2 - m; -1 - m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m - 4)^2 \leq 28$$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 59. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

$$\overrightarrow{AC}(-1; -3; -2), \overrightarrow{MB}(-2 - m; -6 - m; 2 - m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m - 6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m - 2)^2 + 24}$$

Để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ nhỏ nhất thì $m = 2$

Câu 60. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3), B(2; 2; 1), M \in Ox$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$

Câu 61. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 2; -3), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 1), M \in Oy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ để T đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $T_{\min} = \sqrt{5}$

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0; 2; 3), B(2; 1; 1), C(1; 2; 3), M \in Oz$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $M\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0), B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S = a + 2b + 3c$.

Lời giải

Đáp án: $S = a + 2b + 3c = \frac{15}{11}$

Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB .

$$\text{Ta có } (P): y + z = 0 \text{ nên } \begin{cases} b + c = 0 \\ a + 2b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 1 - 3b \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{MA} = (1 + 3b; 2 - b; b), \overrightarrow{MB} = (1 + 3b; -b; -2 + b)$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{(1 + 3b)^2 + 2b(b - 2)}{\sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2}}$$

$$= \frac{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b}{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b + 4} = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$$

$$\text{Xét } f(b) = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5} \text{ có } f'(b) = \frac{4(22b + 2)}{11b^2 + 2b + 5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{11}.$$

$$\text{Nhận thấy } f(b) \text{ nhỏ nhất tại } b = -\frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{14}{11}, c = \frac{1}{11}$$

$$\text{Nên } a + 2b + 3c = \frac{14}{11} - \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{15}{11}$$

DẠNG 3**ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG****TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM**

$$\bullet \quad AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

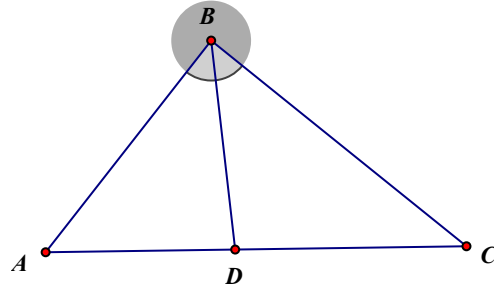
• $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

• $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

• Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{BA}{BC} \overrightarrow{DC}$$



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

A. $OA = \sqrt{5}$

B. $OA = 5$

C. $OA = 3$

D. $OA = 9$

Lời giải

Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

A. 26.

B. 22.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4; 2; 2)$.

B. $(2; 1; 1)$.

C. $(2; 0; -2)$.

D. $(1; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ ta có: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(2;1;1)$.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4;9;8)$. C. $B(5;3;-7)$. D. $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên ta có: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}$$

Vậy $B(5;-3;-7)$.

Câu 68. Trong không gian cho hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0;0;3)$. B. $G(0;0;9)$. C. $G(-1;0;3)$. D. $G(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC \text{ bằng: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2+2+0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3+5+1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0;0;3)$$

Câu 69. Cho bốn điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

- A. $(5;9;13)$. B. $\left(\frac{5}{3};3;\frac{13}{3}\right)$. C. $\left(1;\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. D. $\left(\frac{5}{4};\frac{9}{4};\frac{13}{4}\right)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $G(x, y, z)$ là trọng tâm của hình chóp $SABC$ suy ra

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C + x_S}{4} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C + y_S}{4} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C + z_S}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+1+1+1}{4} = \frac{5}{4} \\ y = \frac{2+3+2+2}{4} = \frac{9}{4} \\ z = \frac{3+3+4+3}{4} = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

- A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2)$; $2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

- A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ B. $(4; 5; -9)$ C. $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$ D. $(1; -7; 12)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(2-x) \\ 1-y = -2(-3-y) \\ -2-z = -2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 72. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$ B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$ C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$ D. $M(4; -3; 8)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8).$$

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

- A. $M(0; 0; 3)$. B. $M(0; 0; -3)$. C. $M(-8; -4; 7)$. D. $M(8; 4; -7)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi điểm } M(x; y; z). \text{ Khi đó: } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2(-2 - x) \\ y - 2 = 2(-1 - y) \\ z - 1 = 2(4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Vậy $M(0; 0; 3)$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$
C. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{AM}{BM} = 2$ C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn A

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$.

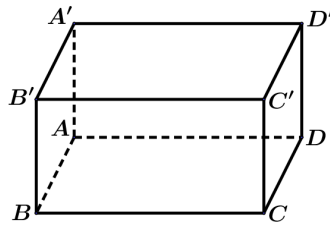
B. $2|a|$.

C. $3|a|$.

D. $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$.

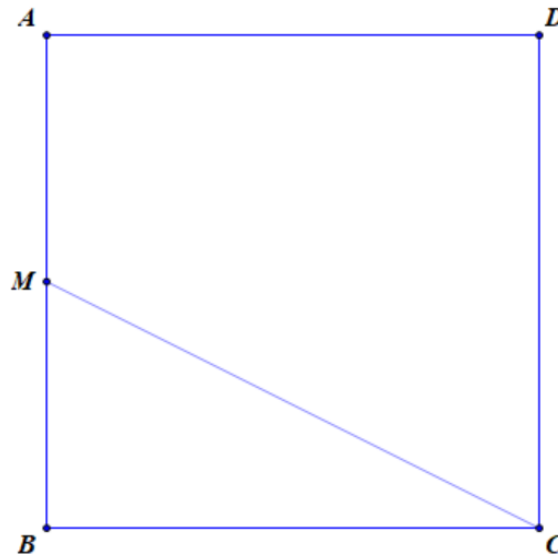
B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{6}$.

D. $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |2\overrightarrow{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

A. 1.

B. 3.

C. 6.

D. -9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a + 2b + c = 3.$$

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$.

Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A , B , C .

A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right).$

B. $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right).$

C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right).$

D. $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right).$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } A(2; 2; 2) \text{ và } PA = PB = PC = \frac{3\sqrt{21}}{4}.$$

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. 5.

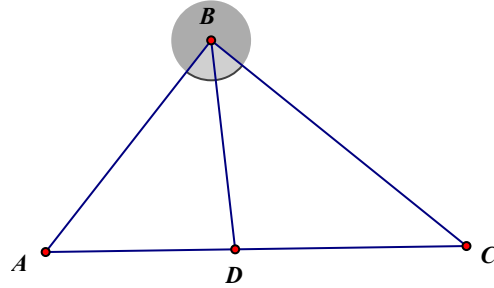
B. 4.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*).

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$\text{Do đó (*)} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c = 5.$$

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết

$I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a-b+c$ bằng

A. 1

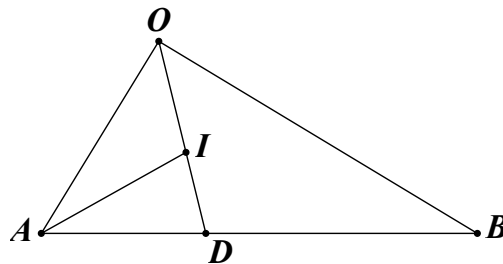
B. 3

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB}}{7}. \text{ Do đó } D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}.$$

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

A. $I(1; 1; 1)$.

B. $I(0; 1; 1)$.

C. $I(0; -1; -1)$.

D. $I(1; 0; 1)$.

Lời giải

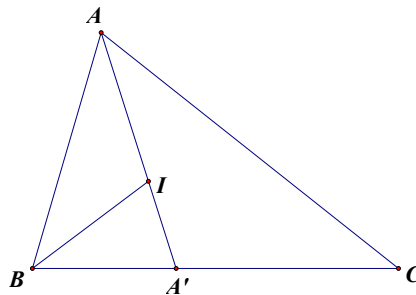
Chọn B

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có: $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

với $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A .

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow b \overrightarrow{BA'} + c \overrightarrow{CA'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IA} = \frac{c}{A'B} \overrightarrow{A'I} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \overrightarrow{A'I} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{A'I} \Leftrightarrow a \overrightarrow{IA} + (b+c) \overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a \overrightarrow{IA} + b \overrightarrow{IB} + c \overrightarrow{IC} + b \overrightarrow{BA'} + c \overrightarrow{CA'} = \vec{0} \Leftrightarrow a \overrightarrow{IA} + b \overrightarrow{IB} + c \overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (do(1)).$$

Áp dụng công thức trong tam giác OMN

$$\text{ta được } OM \cdot \overrightarrow{IN} + ON \cdot \overrightarrow{IM} + MN \cdot \overrightarrow{IO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{OM \cdot x_N + ON \cdot x_M + MN \cdot x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \frac{OM \cdot y_N + ON \cdot y_M + MN \cdot y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \frac{OM \cdot z_N + ON \cdot z_M + MN \cdot z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 83. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

Khi đó $IM = \frac{AB}{2}; JM = \frac{BC}{2}; KM = \frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB = BC = AC = 2\sqrt{2}$.

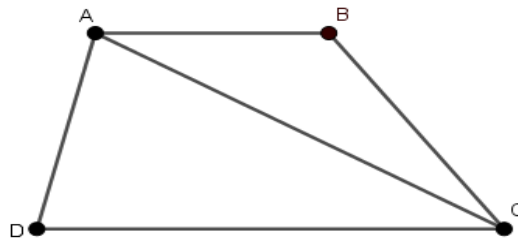
Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

A. $D(-12;-1;3)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. C. $D(8;7;-1)$. D. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a + b + c = 6$.

B. $a + b + c = 5$.

C. $a + b + c = 8$.

D. $a + b + c = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a - 1 = \frac{4}{3} \\ b - 2 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$; $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó.

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm là $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

B. Tọa độ vector là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

C. $2024a + 2025b = 2025$

D. $a + b + c = -2$

Lời giải

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm là $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$. **ĐÚNG**

B. Tọa độ vector là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ **SAI**

C. $2024a + 2025b = 2025$ **ĐÚNG**

D. $a + b + c = -2$ **ĐÚNG**

M là trung điểm đoạn thẳng AB nên $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

Tọa độ vector là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$$G(1; c; 3) \text{ làm trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy

$$2024a + 2025b = 2025$$

$$a + b + c = -2$$

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $x + 2y = 1$.

B. $3y + z = 1$.

C. $x + 2y - 2z = -15$.

D. $x + y + z = 11$.

Lời giải

A. $x + 2y = 1$. **ĐÚNG**

B. $3y + z = 1$. **SAI**

C. $x + 2y - 2z = -15$. **ĐÚNG**

D. $x + y + z = 11$. **ĐÚNG**

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y - 1; z + 2)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - 1 = -6 \\ z + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy

$$x + 2y = 1.$$

$$3y + z = -8.$$

$$x + 2y - 2z = -15.$$

$$x + y + z = 11.$$

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$,

$B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(x_G; y_G; z_G)$.

A. $x_G + y_G + z_G = 1$.

B. $2x_G - y_G = 3$.

C. $2x_G + y_G - 3z_G = -1$.

D. $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$.

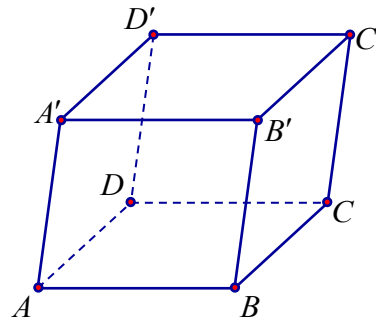
Lời giải

A. $x_G + y_G + z_G = 1$. **ĐÚNG**

B. $2x_G - y_G = 3$. **ĐÚNG**

C. $2x_G + y_G - 3z_G = -1$. **SAI**

D. $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$. **SAI**



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y - 3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

$x_G + y_G + z_G = 1$.

$2x_G - y_G = 3$.

$2x_G + y_G - 3z_G = 11$.

$x_G - 2y_G - 3z_G = 6$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C'$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases}. \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $D(a; b; c)$.

A. $a + b = 3$.

B. $a + c = \frac{5}{3}$.

C. $a + b - 2c = 1$.

D. $a + b + c = 4$.

Lời giải

A. $a + b = 3$. **ĐÚNG**

B. $a + c = \frac{5}{3}$. **SAI**

C. $a + b - 2c = 1$. **ĐÚNG**

D. $a + b + c = 4$. **ĐÚNG**

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}; \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

$a + b = 3$.

$a + c = \frac{1}{3}$.

$a + b - 2c = 1$.

$a + b + c = 4$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 90. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1;-1;1)$, $B(2;-3;2)$, $C(4;-2;2)$.

- Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$

Câu 91. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1;-1;1)$, $B(2;-3;2)$, $C(4;-2;2)$, $D(3;0;1)$, $E(1;2;3)$

- Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.
- Tính $\cos$ các góc của tam giác ABC
- Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm A, B
- Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Câu 92. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4;-1;2)$; $B(7;3;2)$.

- Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ và cách đều hai điểm A, B .
- Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A .

Câu 93. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-3)$, $B(0;3;7)$, $C(2;5;0)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tính góc $\widehat{ABC}$.
- Tính diện tích $\triangle ABC$. Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của $\triangle ABC$.

Câu 94. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$.
- Tính góc $\widehat{ABC}$.
- Tính độ dài đường cao BH của $\triangle ABC$

Câu 95. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(1;2;-1)$, $B(-1;1;3)$, $C(-1;-1;2)$, $D'(2;-2;-3)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle AA'C$.

Câu 96. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(0;2;2)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $C'(1;-2;-1)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle B'DD'$.

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG THỰC TIỄN VÀ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG THỰC TIỄN**

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



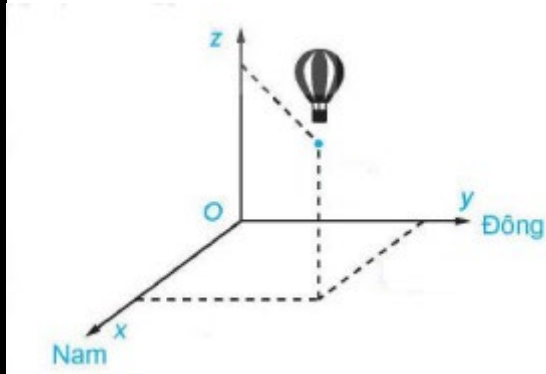
Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

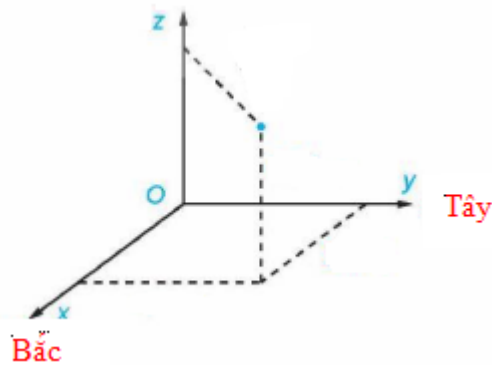
- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



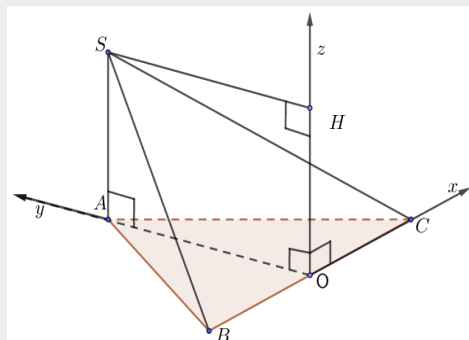
- Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Gắn tọa độ đối với hình chóp

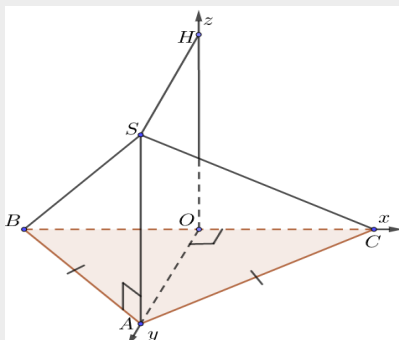
1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều



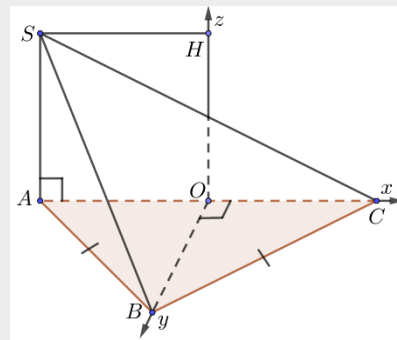
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$,
 $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \overbrace{OH}^{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



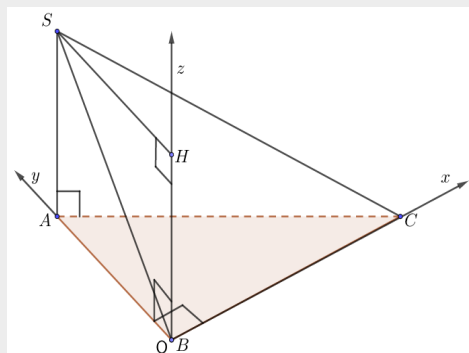
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A(0; OA; 0)$, $B(-OB; 0; 0)$,
 $C(OC; 0; 0)$, $S\left(0; OA; \overbrace{OH}^{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



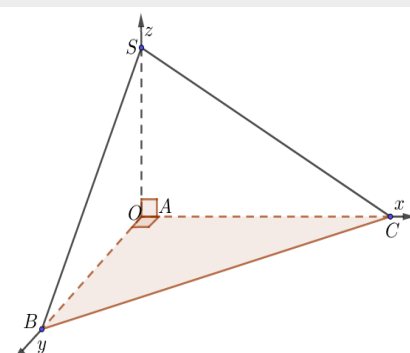
- Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$,
 $C(OC; 0; 0)$, $S\left(-OA; 0; \overbrace{OH}^{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



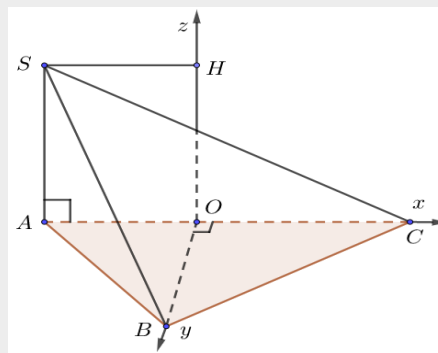
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm:
 $B \equiv O(0;0;0)$,
 $A(0; AB; 0)$, $C(BC; 0; 0)$,
 $S\left(0; AB; \overbrace{BH}^{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại A



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm:
 $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0; OB; 0)$, $C(AC; 0; 0)$,
 $S(0; 0; SA)$.

Đáy là tam giác thường

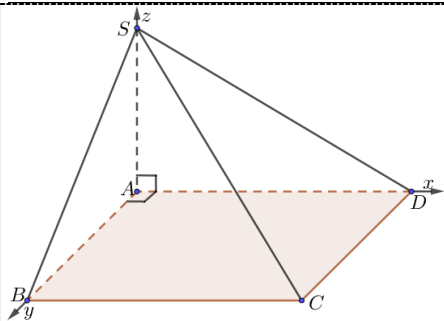


- Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$,
 $C(OC; 0; 0)$, $S\left(-OA; 0; \overbrace{OH}^{=SA}\right)$.

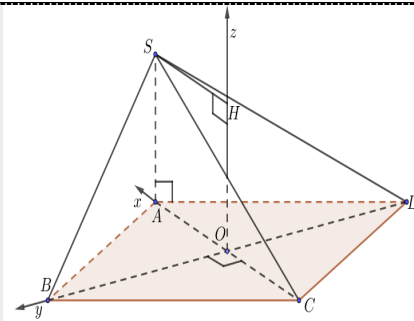
Đáy hình vuông, hình chữ nhật

Đáy là hình thoi

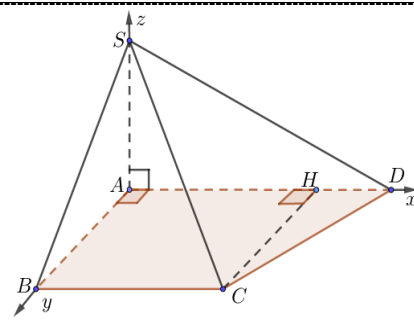
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ
 $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$,
 $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.



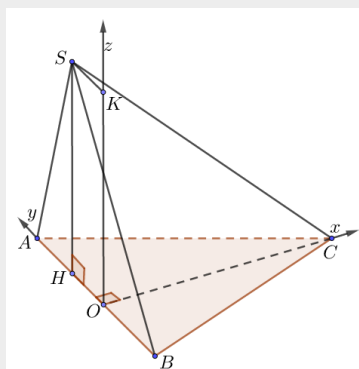
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$,
 $A(OA;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$
 $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ
 $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$,
 $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

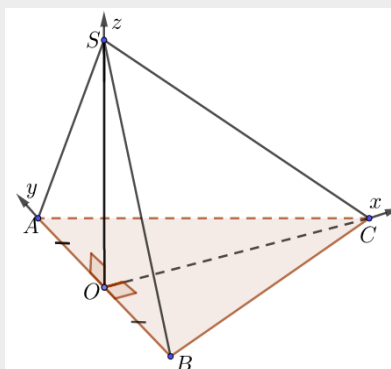
2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



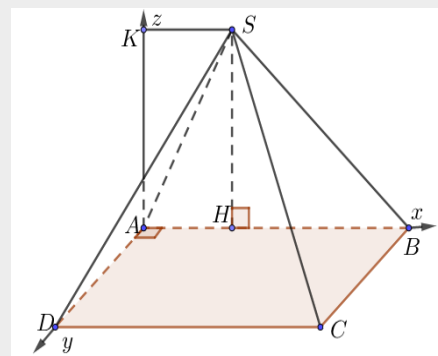
- Vẽ đường cao CO trong $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có:
 $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SC)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật

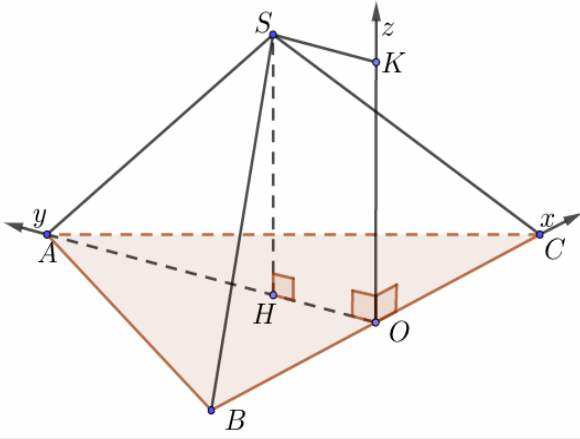


- Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.
- Ta có:
 $A \equiv O(0;0;0)$, $B(AB;0;0)$, $C(AB;AD;0)$,
 $D(0;AD;0)$, $S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Hình chóp tứ giác đều

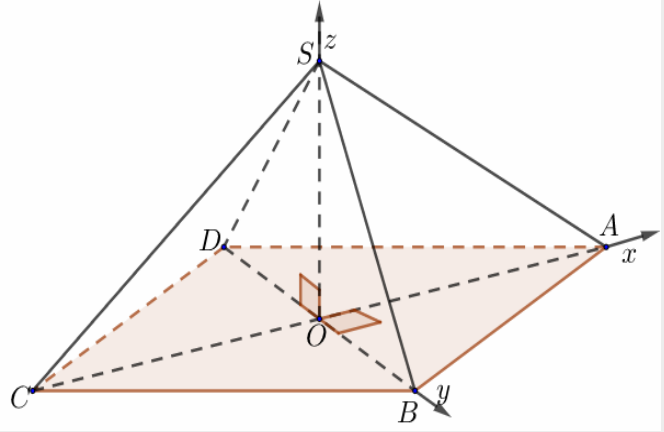


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$.

Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{6}; \frac{OK}{SH}\right).$$



Chọn hệ trục như hình với $a = 1$.

Tọa độ điểm:

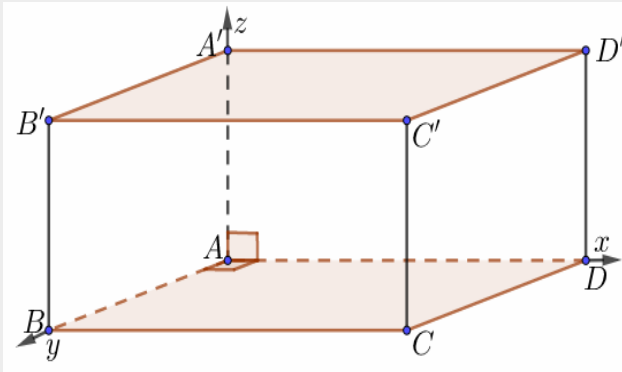
$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right); S(0;0;SO).$$

II. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0),$$

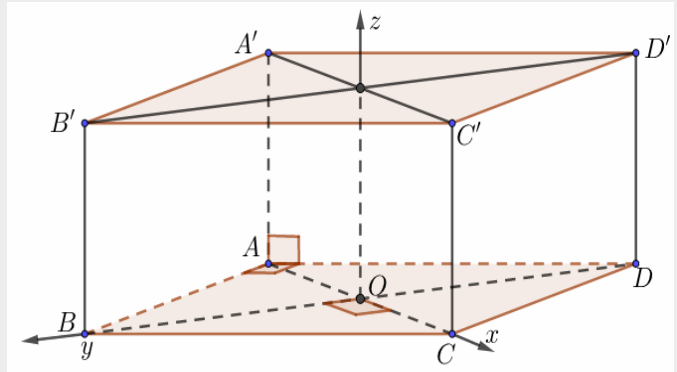
$$B(0; AB; 0), C(AD; AB; 0),$$

$$D(AD; 0; 0),$$

$$A'(0; 0; AA'),$$

$$B'(0; AB; AA'), C'(AD; AB; AA'), D'(AD; 0; AA').$$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

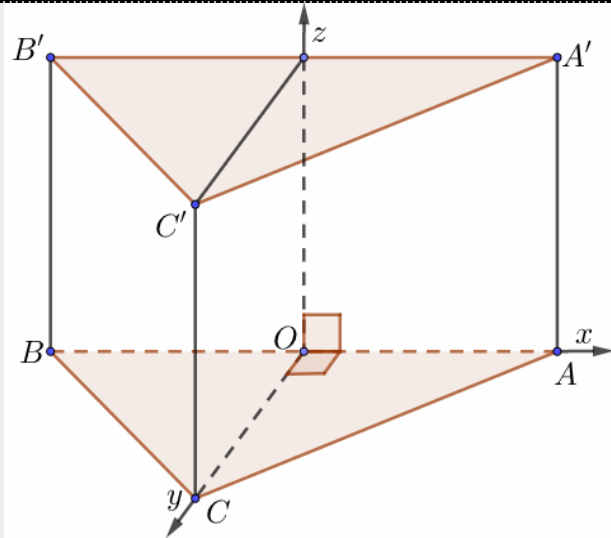
$$O(0;0;0), A(-OA; 0; 0), B(0; OB; 0), C(OC; 0; 0),$$

$$D(0; -OD; 0), A'(-OA; 0; AA'), B'(0; OB; AA'),$$

$$C'(OC; 0; CC'), D'(0; -OD; DD').$$

Lăng trụ tam giác đều

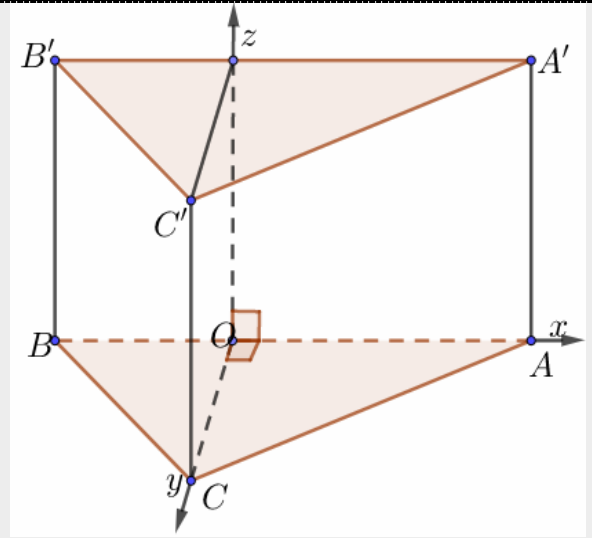
Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$$



Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$.

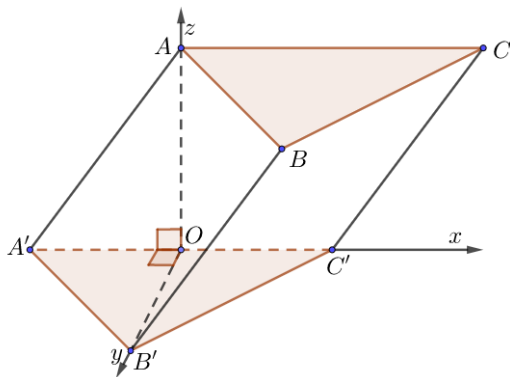
Tọa độ điểm là:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$$

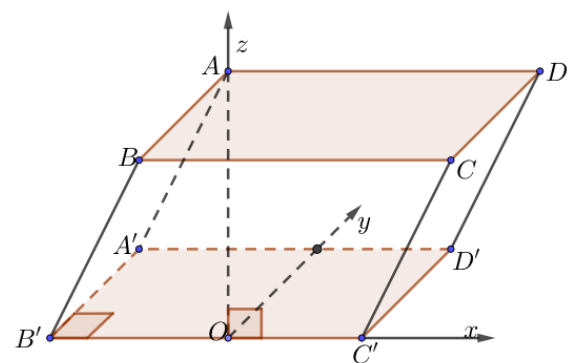
2. Lăng trụ xiên:

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

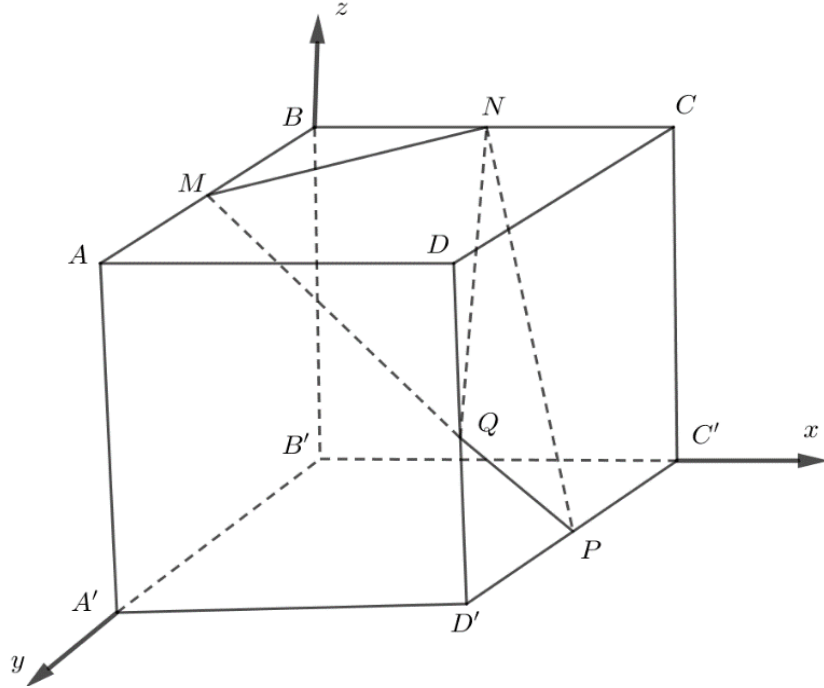
Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .



A. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P(1; 1; 0), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

C. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

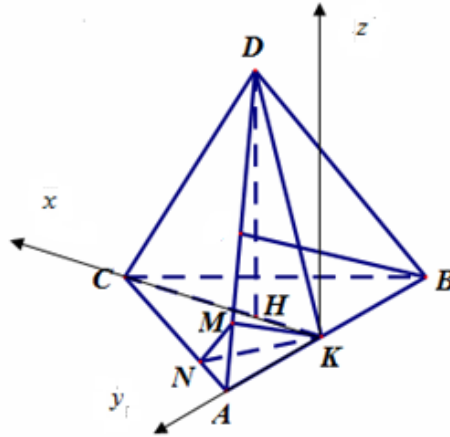
Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm K, M, N theo a .

A. $K(0; 0; 0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

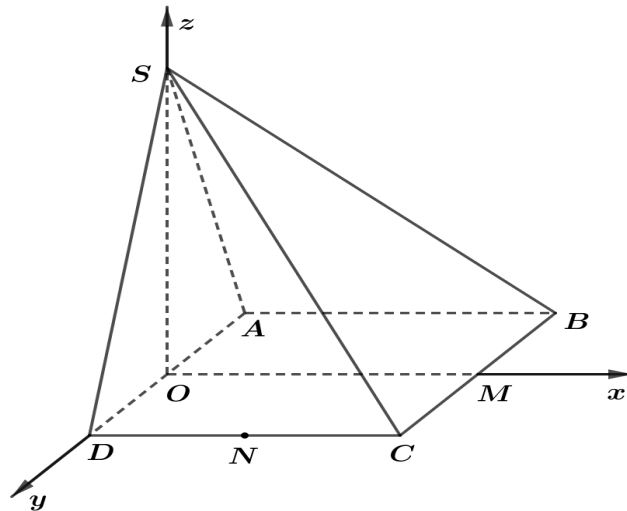
B. $K(0; 0; 0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

C. $K(0; 0; 0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

D. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.



Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Xác định tọa độ các điểm S, M, N theo a .

A. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$.

B. $S(0;0;a\sqrt{3}); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

C. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$.

D. $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right); M(a;0;0); N\left(0;\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Khoảng cách từ G đến K là:

A. $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $GK = \frac{1}{2}$

D. $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$. B. $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$. C. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$. D. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Độ dài MG là:

A. $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4$, $AD = 3$, $AA' = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

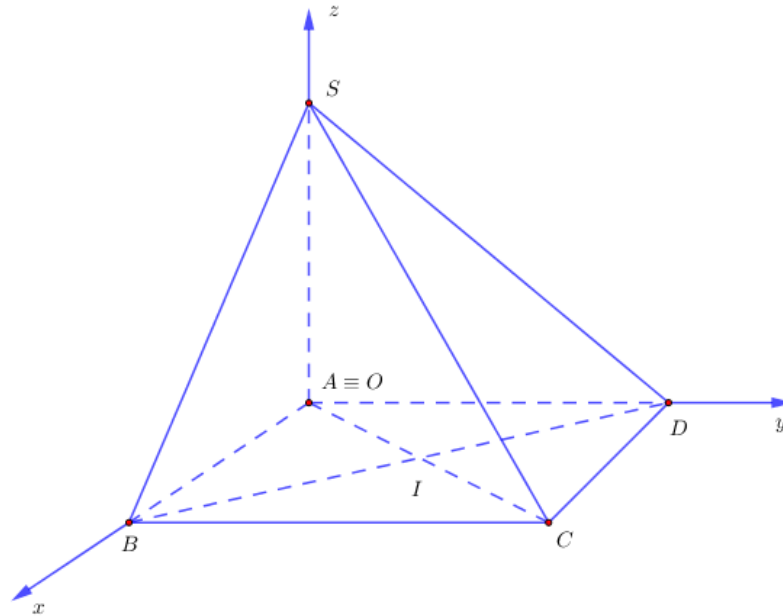
Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2$, $AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD . Tính độ dài BI .

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN . Tính tọa độ điểm G .

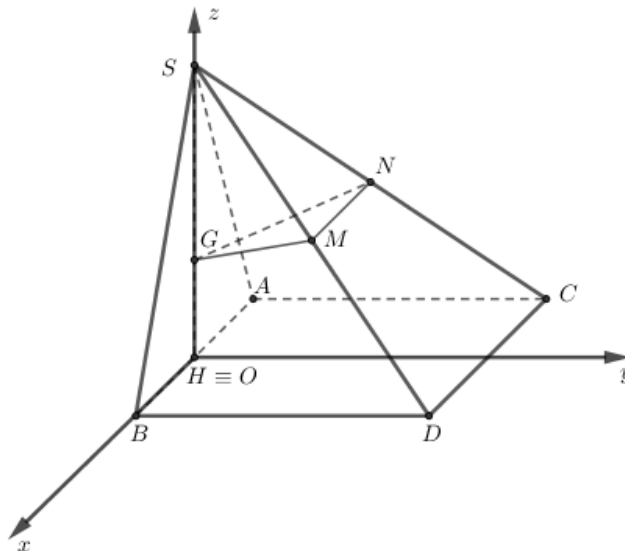
Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Tính độ dài $C'G$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD . Tính độ dài CG .

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì tọa độ điểm I là bao nhiêu? Biết $I = AC \cap BD$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới, Tính tọa độ các điểm G, M, N theo a .



Câu 21. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$.

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA .

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG THỰC TIỄN VÀ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG THỰC TIỄN**

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 800; y - 300; z - 10)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(x - 800) \\ 100 = 4(y - 300) \\ 2 = 4(z - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 875 \\ y = 325 \\ z = 10,5 \end{cases} \Rightarrow Q(875; 325; 10,5)$$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875; 325; 10,5)$

Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Lời giải

Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MQ} = (400; 200; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ}$

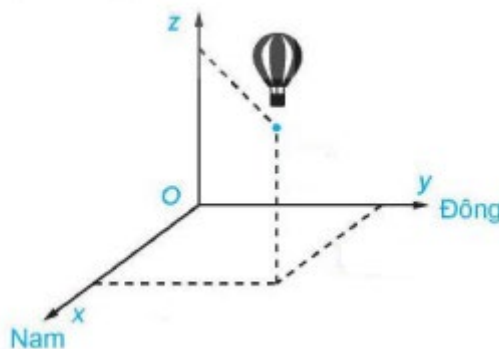
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5;10;0,4)$.

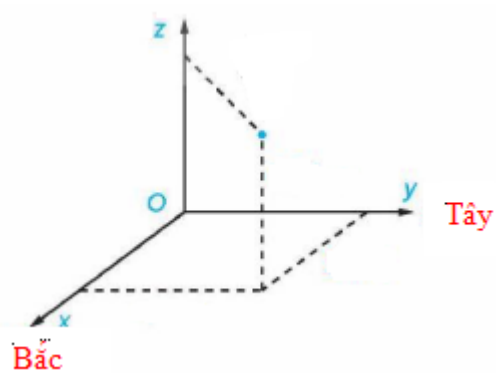
b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{5^2 + 10^2 + (0,4)^2} \approx 11,2(km)$

Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc máy bay có tọa độ $(50;20;1)$.

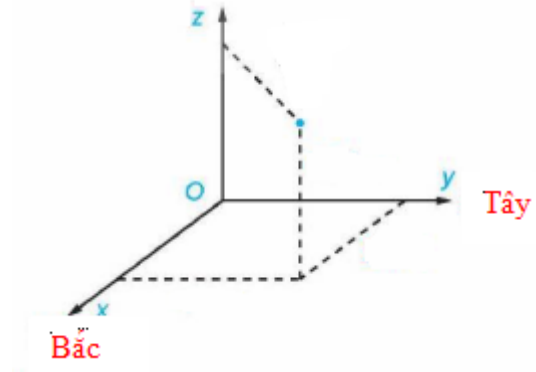
b) Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2 + 20^2 + 1^2} \approx 53,9(km)$

Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20; 10; 0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

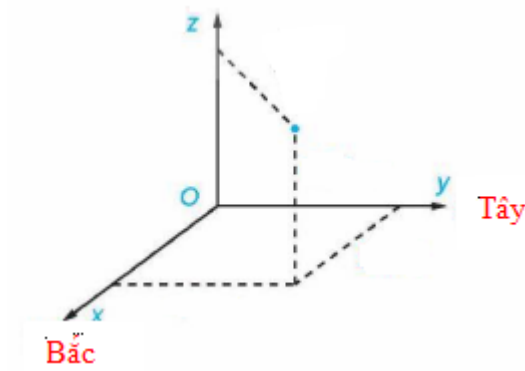
Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100; -80; 1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70; 60; 0,8)$.

a) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2 + (-80)^2 + 1^2} \approx 128(km)$$

b) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100 - 70)^2 + (-80 - 60)^2 + (1 - 0,8)^2} \approx 220(km)$$

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

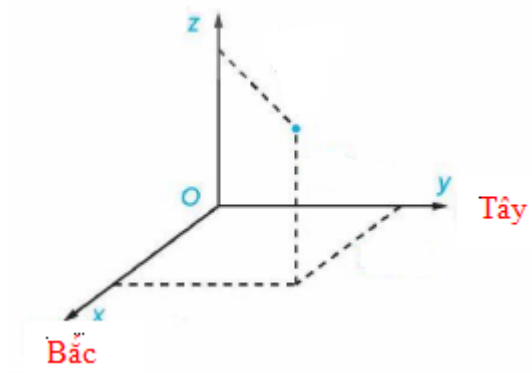


a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60; -40; 2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80; 50; 4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ

$$\left(\frac{-60+80}{2}; \frac{-40+50}{2}; \frac{2+4}{2} \right) = (10; 5; 3).$$

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2 + (-40-50)^2 + (2-4)^2} \approx 166,4(km)$$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} \approx 11,6(km)$$

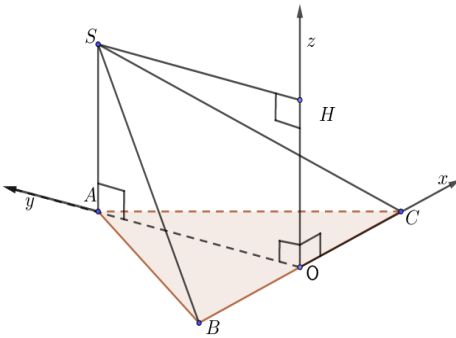
DẠNG 2

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Gắn tọa độ đối với hình chóp

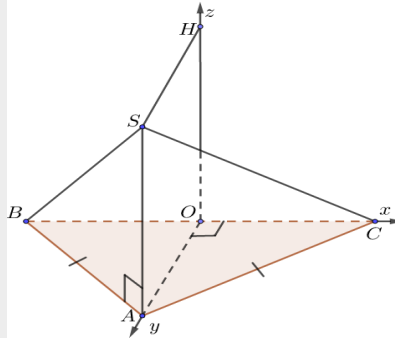
1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều



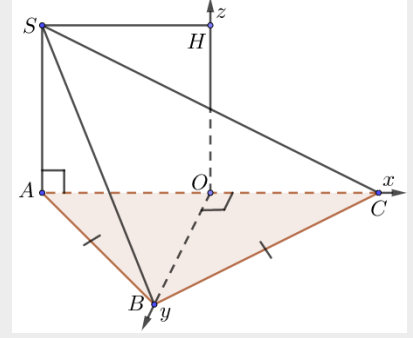
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$,
 $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



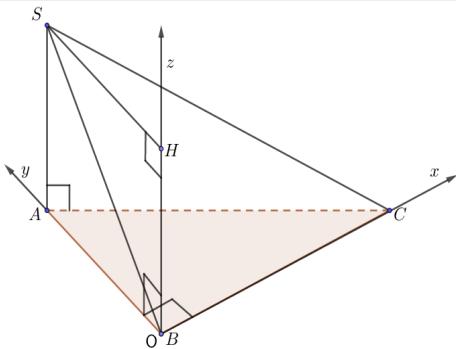
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



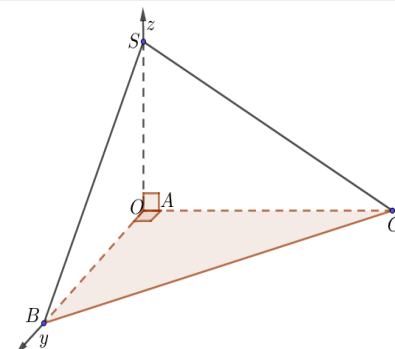
- Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



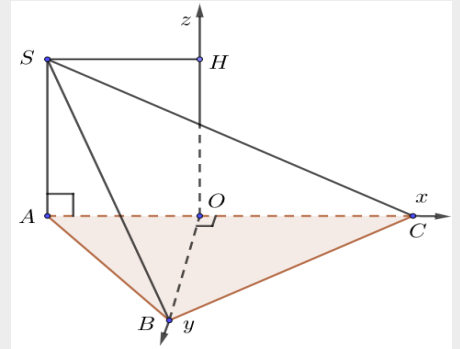
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm:
 $B \equiv O(0;0;0)$,
 $A(0;AB;0)$, $C(BC;0;0)$,
 $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại A



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm:
 $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$,
 $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác thường

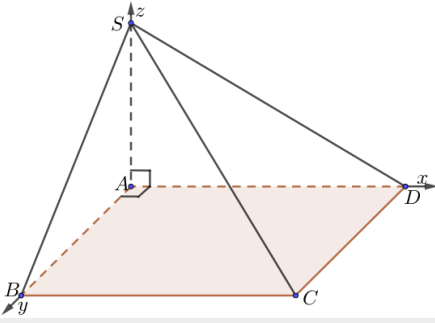


- Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

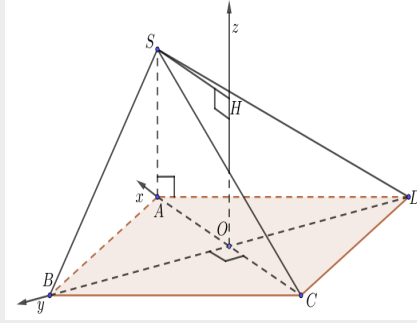
Đáy hình vuông, hình chữ nhật

Đáy là hình thoi

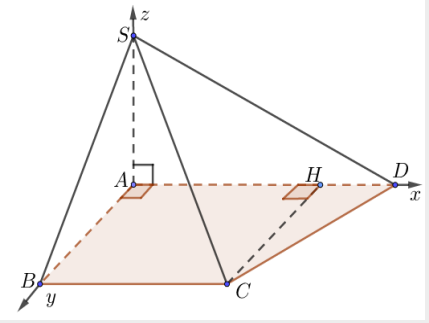
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ
 $A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0),$
 $C(AD;AB;0), D(AD;0;0), S(0;0;SA)$



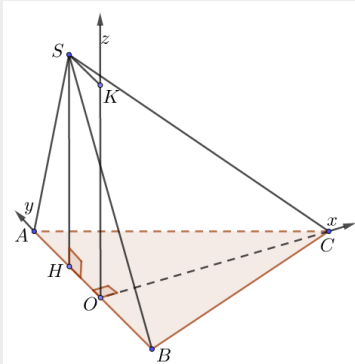
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0),$
 $A(OA;0;0),$
 $B(0;OB;0), C(-OC;0;0)$
 $D(0;-OD;0), S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right).$



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ
 $A \equiv O(0;0;0),$
 $B(0;AB;0), C(AH;AB;0),$
 $D(AD;0;0), S(0;0;SA).$

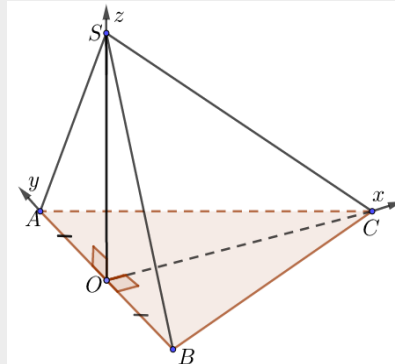
2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



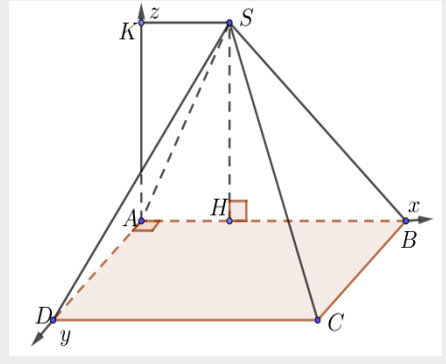
- Vẽ đường cao CO trong $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có:
 $O(0;0;0), A(0;OA;0), B(0;-OB;0),$
 $C(OC;0;0), S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0;0;0), A(0;OA;0),$
 $B(0;-OB;0), C(OC;0;0), S(0;0;SC)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật

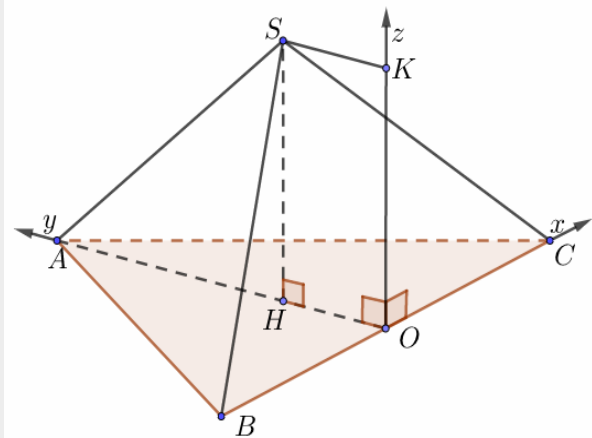


- Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.
- Ta có:
 $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0),$
 $D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Hình chóp tứ giác đều

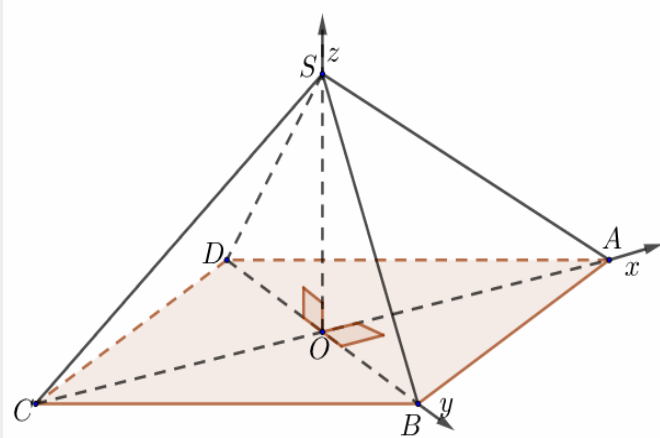


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$.

Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{6}; \frac{OK}{SH}\right).$$



Chọn hệ trục như hình với $a = 1$.

Tọa độ điểm:

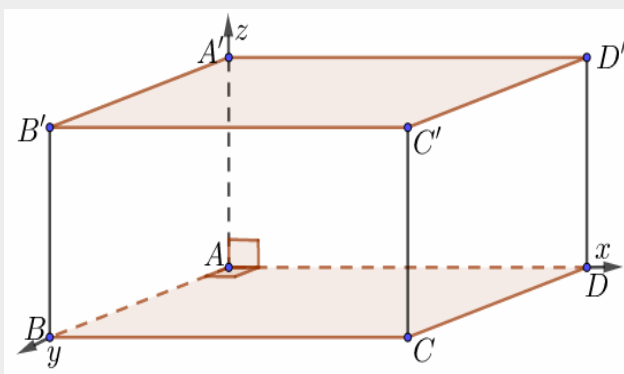
$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right); S(0;0;SO).$$

II. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0),$$

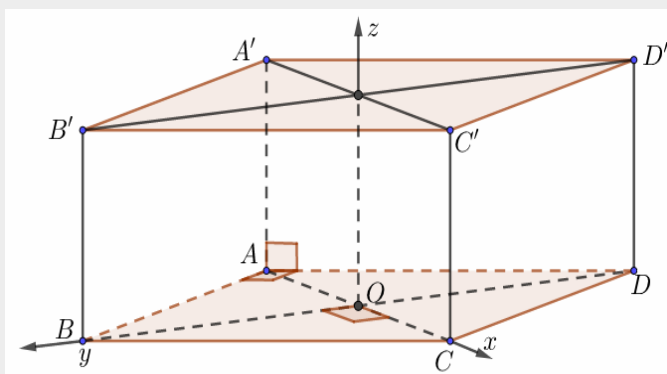
$$B(0; AB; 0), C(AD; AB; 0),$$

$$D(AD; 0; 0),$$

$$A'(0; 0; AA'),$$

$$B'(0; AB; AA'), C'(AD; AB; AA'), D'(AD; 0; AA').$$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

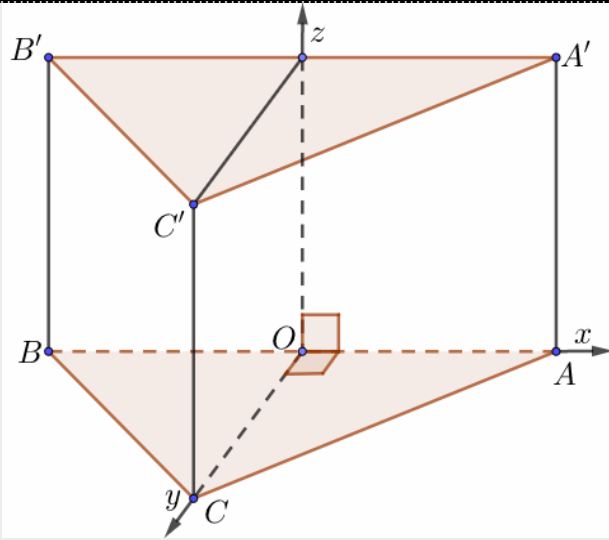
$$O(0;0;0), A(-OA; 0; 0), B(0; OB; 0), C(OC; 0; 0),$$

$$D(0; -OD; 0), A'(-OA; 0; AA'), B'(0; OB; AA'),$$

$$C'(OC; 0; CC'), D'(0; -OD; DD').$$

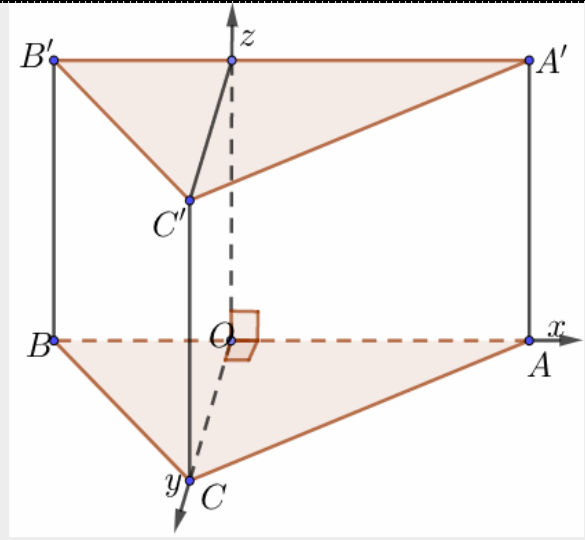
Lăng trụ tam giác đều

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0), \\ A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$$



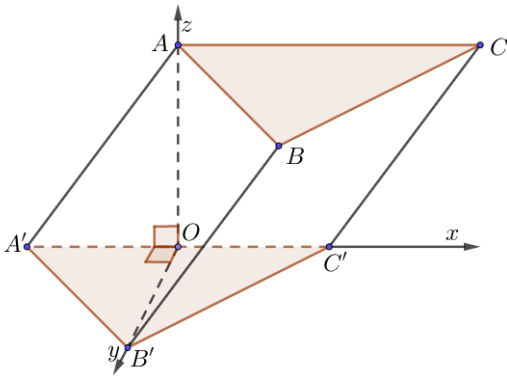
Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$.

Tọa độ điểm là:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0), C(0;OC;0), \\ A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$$

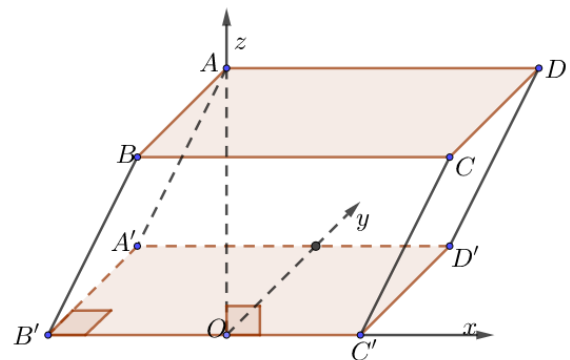
2. Lăng trụ xiên:

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

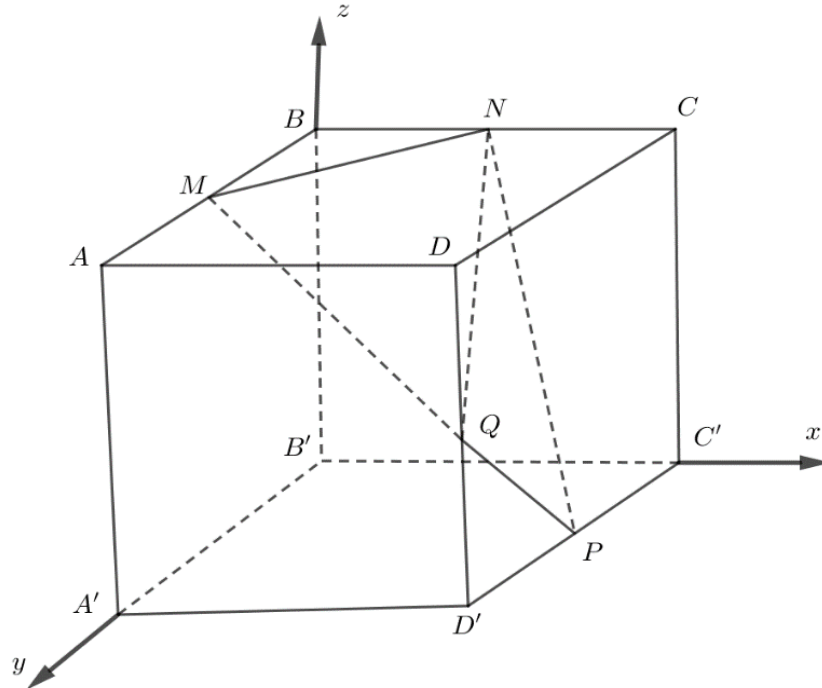
Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .



A. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right).$

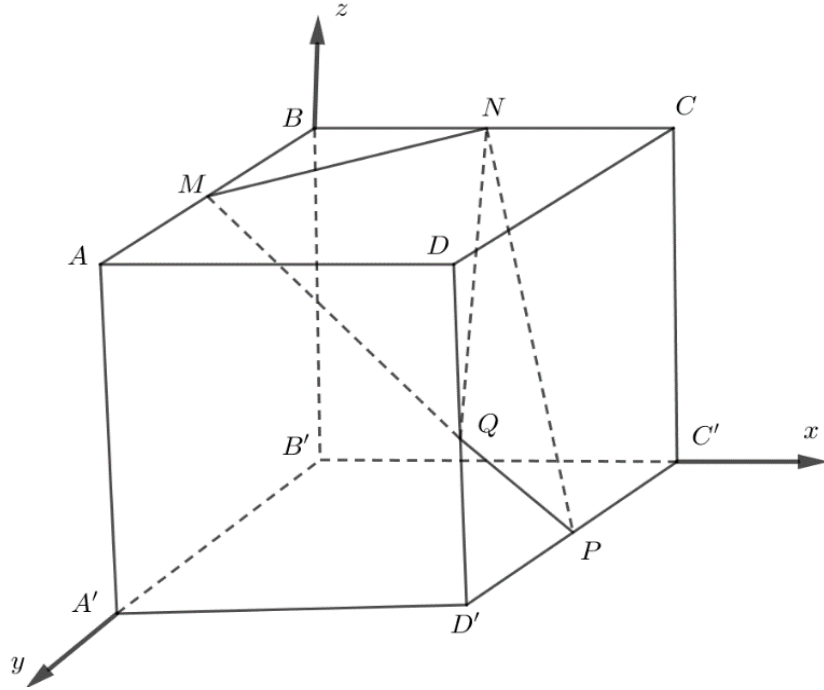
B. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P(1; 1; 0), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right).$

C. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right).$

D. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right).$

Lời giải

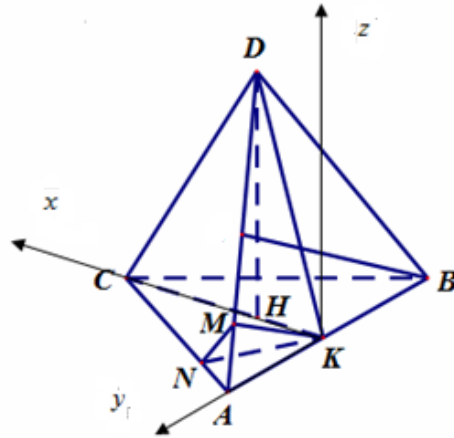
Chọn C



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$.

Khi đó: $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm K, M, N theo a .



A. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

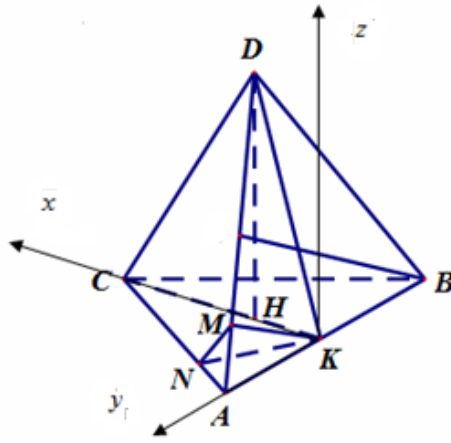
B. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

C. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

D. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D



ta có: $KC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; $DH = \frac{\sqrt{6}}{3}a$; $HK = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

$$AN = \frac{1}{4}AC; AM = \frac{1}{4}AD$$

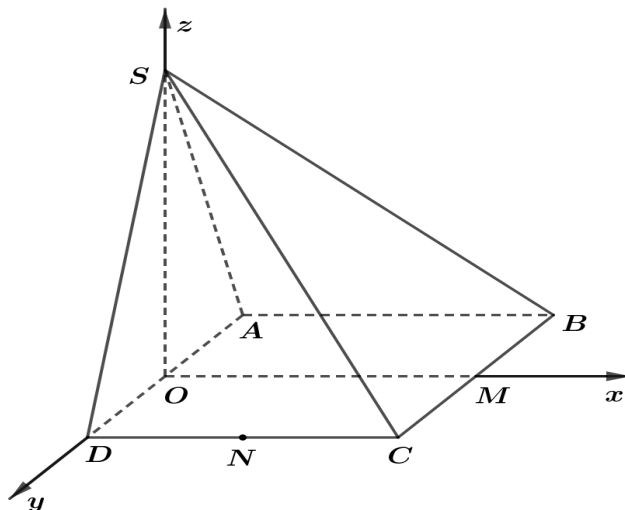
Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $K \equiv O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$$

Vậy $K(0;0;0)$, $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$, $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Xác định tọa độ các điểm S, M, N theo a .

A. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$

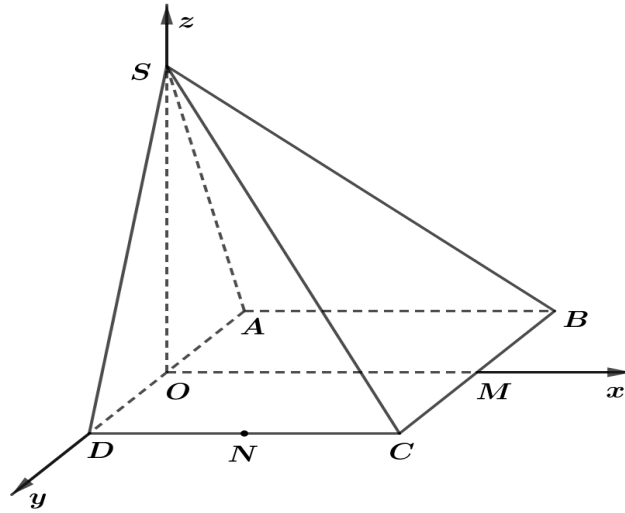
B. $S(0;0;a\sqrt{3}); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

C. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right).$

D. $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right); M(a;0;0); N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right).$

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Khoảng cách từ G đến K là:

A. $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $GK = \frac{1}{2}$

D. $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz$, $B \in Ox$, $C \in Oy$ sao cho $AO = 5$, $OB = 2$, $OC = 4$

$$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0).$$

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

$$\text{Khoảng cách từ } G \text{ đến } K \text{ là: } GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$.

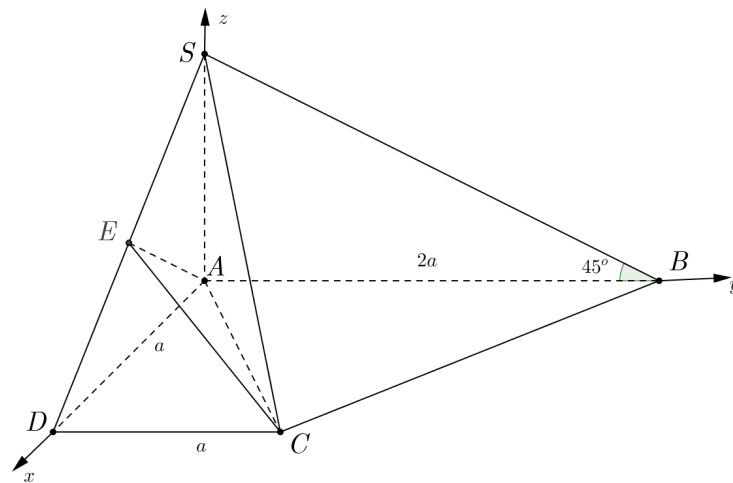
B. $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$.

C. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$.

D. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$,

$$E\left(\frac{a}{2}; 0; a\right).$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ACE \Rightarrow G\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

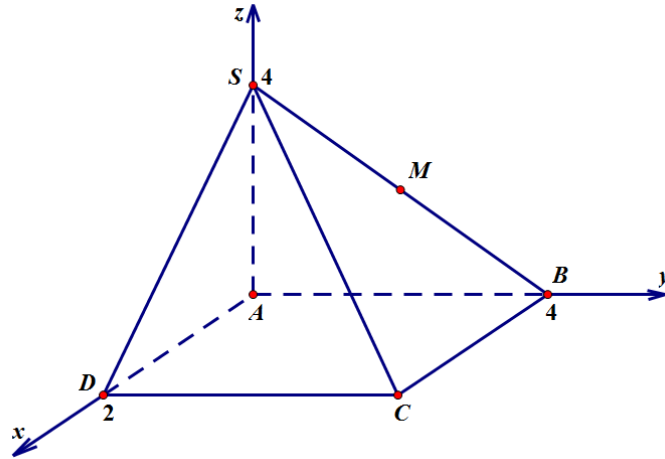
Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 2a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{113}}{6}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Độ dài MG là:

A. $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$.

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

G là trọng tâm của tam giác $SCD \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$

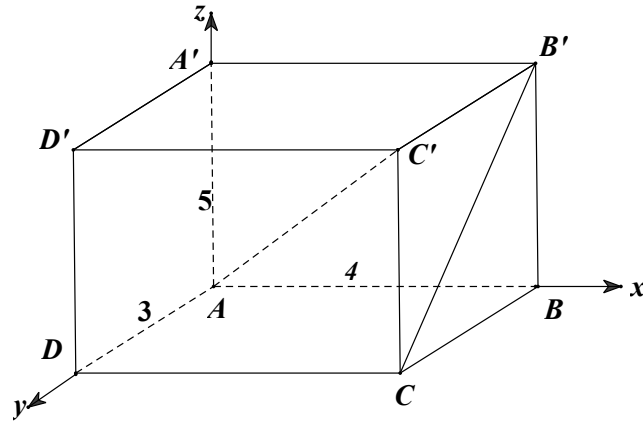
Độ dài MG là: $MG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4$, $AD = 3$, $AA' = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0;0;0), C(4;3;0), B'(4;0;5), B(4;0;0),$

G là trọng tâm của tam giác $ACB' \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$

$$\text{Độ dài } BG \text{ là: } BG = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 4\right)^2 + (1 - 0)^2 + \left(\frac{5}{3} - 0\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

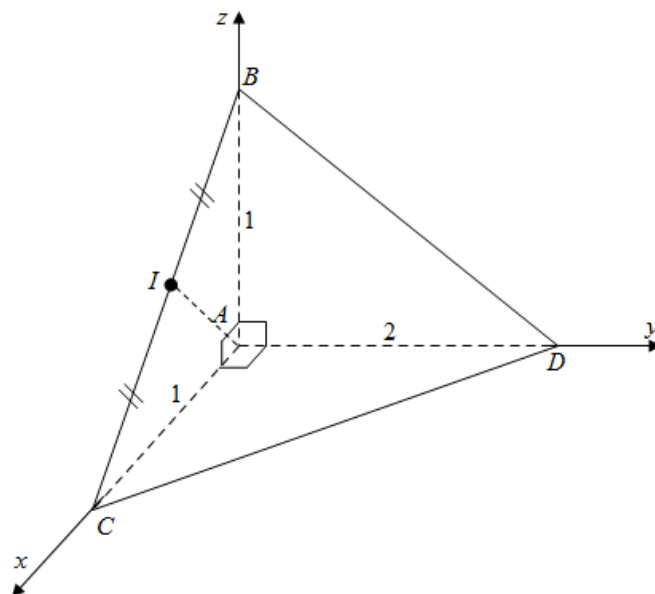
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD . Tính độ dài BI .

Lời giải

Đáp án: $BI = \frac{1}{3}$



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax , AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0), B(0;0;1)$ vì $B \in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C \in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D \in Ay$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

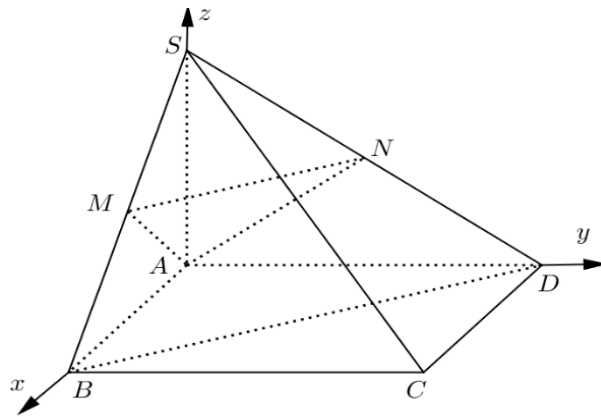
G là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow G\left(\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Độ dài } BI \text{ là: } BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 + (0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN . Tính tọa độ điểm G .

Lời giải

Đáp án: $G\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A \equiv O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; a)$ (như minh họa hình vẽ),

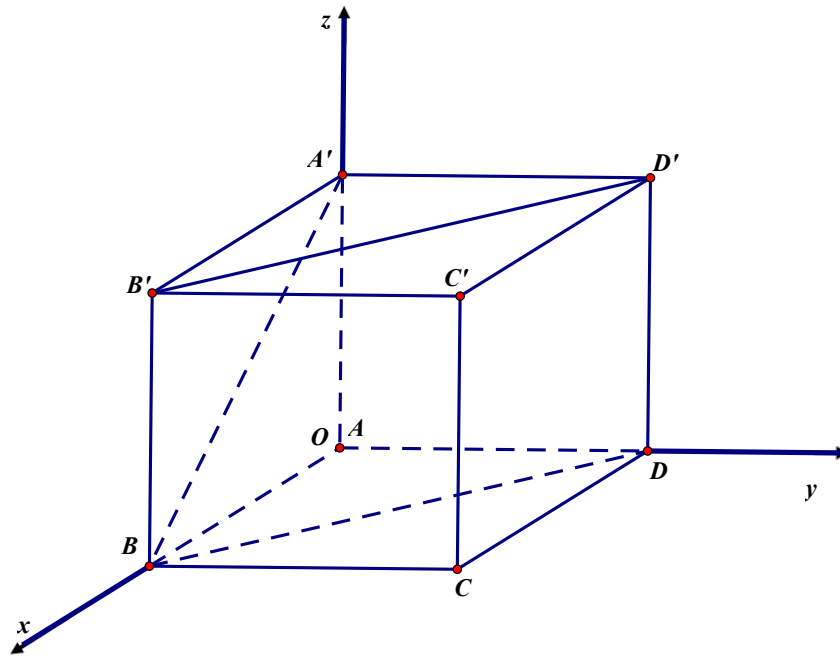
suy ra $M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)$

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Tính độ dài $C'G$.

Lời giải

Đáp án: $C'G = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

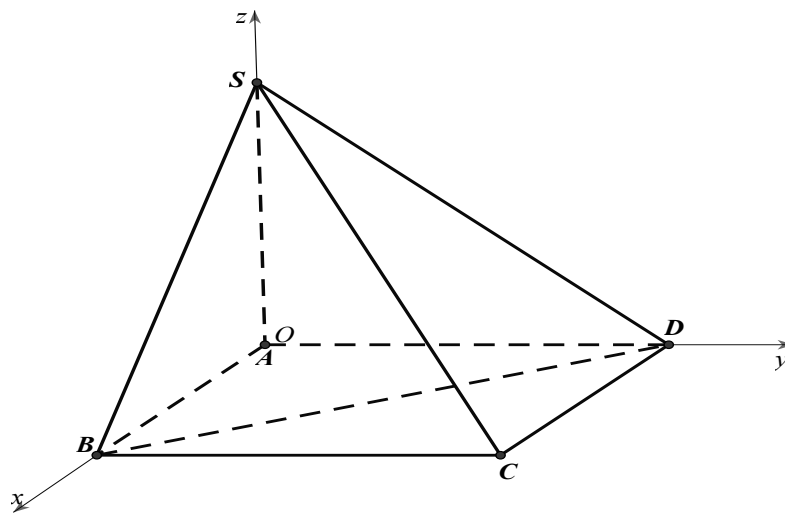
G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

$$\text{Độ dài } C'G \text{ là: } C'G = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - a\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD . Tính độ dài CG .

Lời giải

Đáp án: $CG = \frac{a\sqrt{17}}{3}$



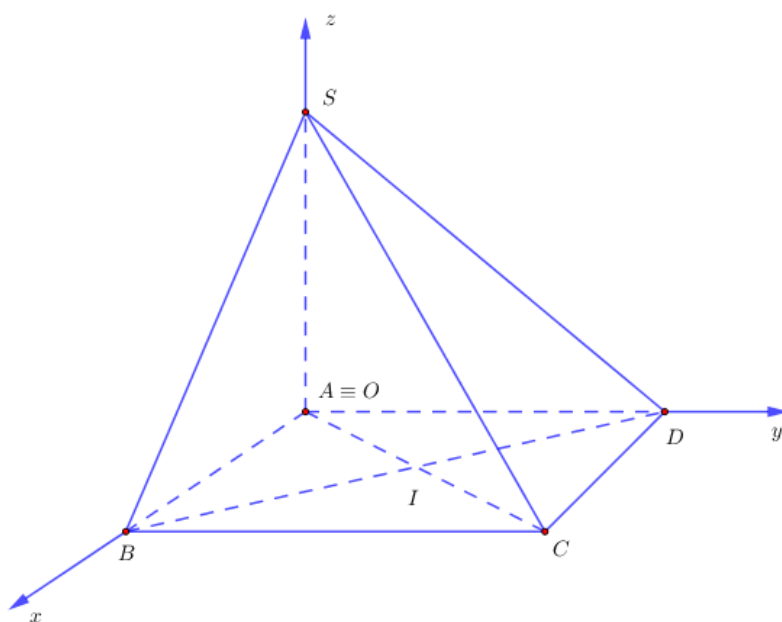
Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{3};0), D(0;a\sqrt{3};0), S(0;0;a).$$

G là trọng tâm của tam giác $SBD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{3}\right)$

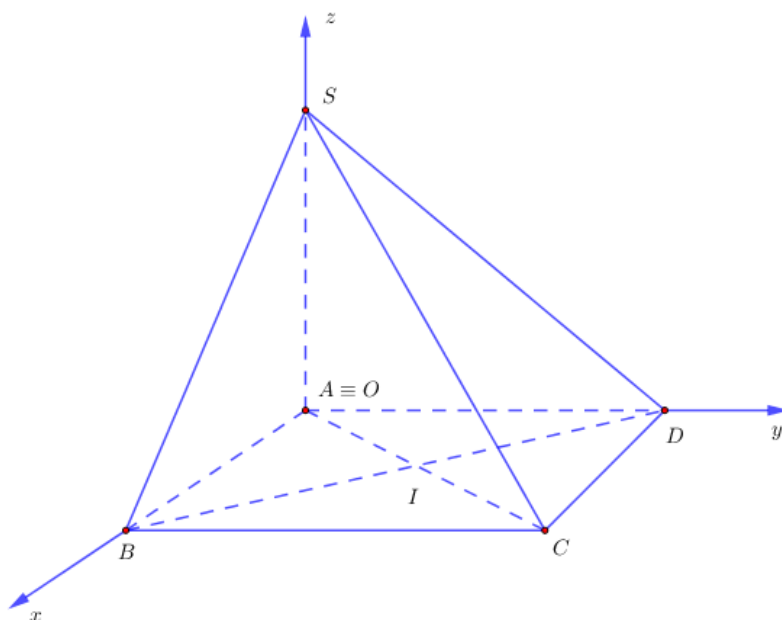
$$\text{Độ dài } CG \text{ là: } CG = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{3}$$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì tọa độ điểm I là bao nhiêu? Biết $I = AC \cap BD$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Lời giải

Đáp án: $I\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

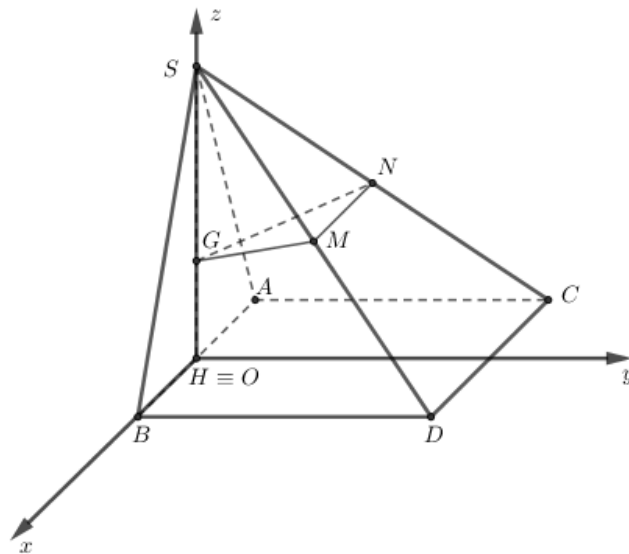
$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SBD); (ABCD)} = \widehat{(SI; AI)} = \widehat{SIA}.$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

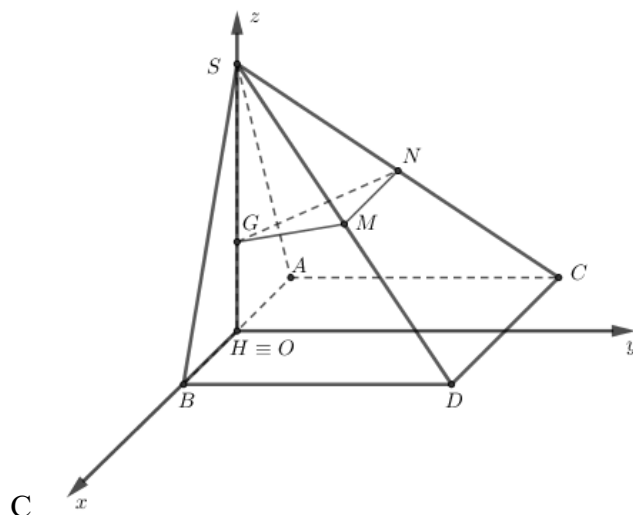
$$\Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới, Tính tọa độ các điểm G, M, N theo a .



Lời giải

Đáp án: $G\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(\frac{-a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};a;0\right); D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$$

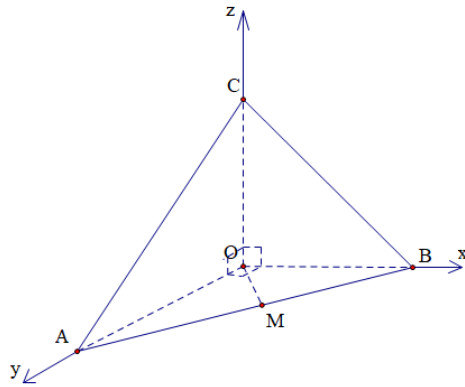
$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Câu 21. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$.

Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

Đáp án: $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = 120^\circ$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0), A(0;a;0), B(a;0;0), C(0;0;a), M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC} = (-a;0;a), \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}}{BC \cdot OM} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = 120^\circ.$$

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA .

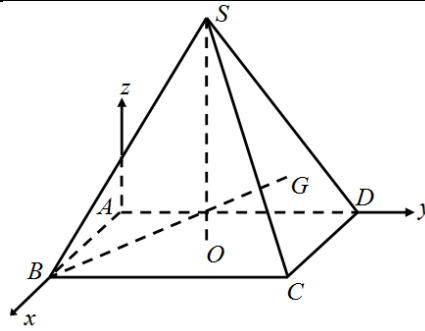
Lời giải

Đáp án: $\cos(BG; SA) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Gọi $O = AC \cap BD$.

Tam giác SAO vuông: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Gắn tọa độ như hình vẽ



$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right).$$

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{AS} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{a}{2}(1;1;\sqrt{6})$, $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{-a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{6}(-3;5;\sqrt{6})$.

Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

$$\cos(BG;SA) = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AS}|}{BG \cdot AS} = \frac{|-3+5+6|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

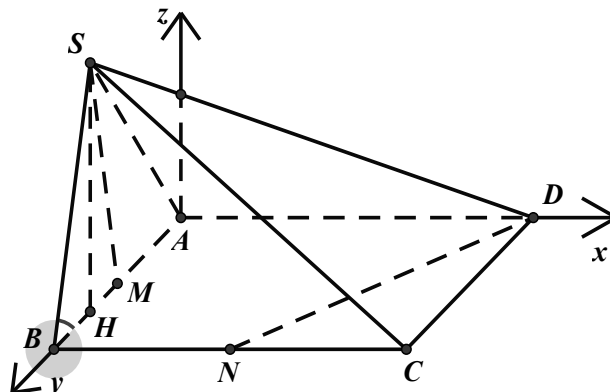
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

Lời giải

Đáp án: $\cos(SM, DN) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Trong (SAB) , kẻ $SH \perp AB$ tại H . Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S , $SB = AB \cdot \cos \widehat{SBA} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SBH vuông tại H , $BH = SB \cdot \cos \widehat{SBH} = \frac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin \widehat{SBA} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$AH = AB - BH = a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow H\left(0; \frac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow S\left(0; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), D(a; 0; 0), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{DN} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right) \Rightarrow \cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{SN \cdot DN} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$