

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (1,0 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$.

Câu 2 (1,0 điểm): Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^{2x}(2x+3)$ trên đoạn $[-3;0]$.

Câu 3 (1,0 điểm):

a) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị biểu thức: $P = \cos 2\alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Giải phương trình: $\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 2\log_4(2x+1); x \in R$.

Câu 4 (1,0 điểm):

a) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính độ dài đoạn AB, biết A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

b) Cho phép khai triển $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9; (x \neq 0)$ thành biểu thức ẩn x. Tìm số hạng không chứa x.

Câu 5 (1,0 điểm): Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = 2xe^x, y = 0, x = 2$.

Câu 6 (1,0 điểm): Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có góc giữa BC' và mặt phẳng (ABB'A') là 30° , cạnh đáy là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường BC' và AC.

Câu 7 (1,0 điểm): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(1;-1;3) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho $AM = 2\sqrt{6}$.

Câu 8 (1,0 điểm): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. Đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC cắt (C) tại E(3;-1) khác A. Điểm $G\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ lớn hơn 3.

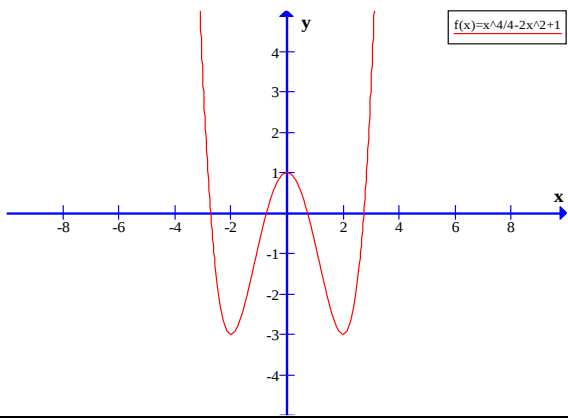
Câu 9 (1,0 điểm): Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y^3 + 2y + 3x\sqrt{2-x} = 8\sqrt{2-x} \\ \sqrt{2-x} - \sqrt{2y-3} - \sqrt{10-x-4y} = x\sqrt{2-x} + 3 \end{cases}; x, y \in R$$

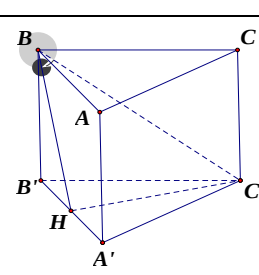
Câu 10 (1,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

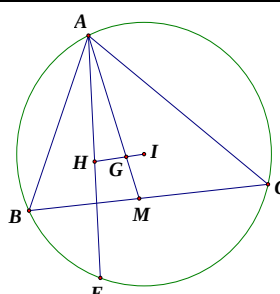
Chứng minh
$$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}.$$

Hết

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm																		
1 (1đ)	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$.	1,00																		
	a, TXĐ: $D=\mathbb{R}$. b, SBT: $y' = x^3 - 4x, y' = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ Xét dấu y' .	0,25																		
	Hs đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ Hs đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow y_{CD} = 1$. Hs đạt CT tại $x = \pm 2 \Rightarrow y_{CT} = -3$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$	0,25																		
	BBT: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-3</td><td>1</td><td>-3</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	y'	-	0	+	0	-	y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$														
y'	-	0	+	0	-															
y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$															
ĐT: Vẽ đúng, đẹp 	0,25																			
2(1đ)	Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = e^{2x}(2x + 3)$ trên $[-3;0]$.	1,00																		
	Hs đã cho liên tục trên $[-3;0]$ $y' = 2e^{2x}(2x + 3) + 2e^{2x} = 2e^{2x}(2x + 4)$	0,25																		
	$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in (-3;0)$	0,25																		
	Ta có: $y(0) = 3; y(-2) = -e^{-4} = -\frac{1}{e^4}; y(-3) = -3e^{-6} = -\frac{3}{e^6}$	0,25																		
	Vậy $\max_{[-3;0]} y = 3$ khi $x = 0$; $\min_{[-3;0]} y = -e^{-4}$ khi $x = -2$	0,25																		
3a 0,5đ	Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \cos 2\alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.	0,5																		
	Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$	0,25																		

	$P = 1 - 2\sin^2 \alpha - \cos(-\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha - \cos \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} + \frac{4}{5} = \frac{27}{25}$	0,25
3b 0,5đ	Giải phương trình sau: $\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 2\log_4(2x+1); x \in R$	0,5
	ĐK: $x > 1$. Pt $\Rightarrow \log_2(x-1) + \log_2(x+1) = \log_2(2x+1) \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = \log_2(2x+1)$	0,25
	$\Rightarrow x^2-1 = 2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{3} (l) \\ x = 1+\sqrt{3} \end{cases}$ Vậy pt có nghiệm $x=1+\sqrt{3}$	0,25
4a 0,5đ	Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Tính độ dài đoạn AB.	0,5
	Xét pt: $z^2 - 2z + 5 = 0$. $\Delta' = 1-5 = -4 = (2i)^2$ Pt có hai nghiệm $z_1 = 1-2i; z_2 = 1+2i$	0,25
	Ta có: $A(1;-2); B(1;2) \Rightarrow \overline{AB} = (0;4) \Rightarrow AB = 4$	0,25
4b 0,5đ	Cho phép khai triển $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9; (x \neq 0)$ thành biểu thức ẩn x. Tìm số hạng không chứa x?	0,5
	CT số hạng TQ: $T_{k+1} = C_9^k (3x^2)^{9-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k \cdot C_9^k \cdot 3^{9-k} \cdot x^{18-3k}$	0,25
	Do số hạng không chứa x nên $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k=6$. Vậy số hạng không chứa x là: $C_9^6 \cdot 3^3 = 2268$	0,25
5(1đ)	Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi: $y = 2xe^x, y = 0, x = 2$.	1,00
	Xét pt hđ giao điểm: $2xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. DT hp cần tìm: $S = \int_0^2 2xe^x dx = \int_0^2 2xe^x dx$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow S = 2xe^x \Big _0^2 - \int_0^2 2e^x dx$	0,25
	$S = 2xe^x \Big _0^2 - 2e^x \Big _0^2$	0,25
	$S = 2e^2 + 2$	0,25
6(1đ)	Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có góc giữa BC' và mặt phẳng (ABB'A') là 30° , cạnh đáy là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường BC' và AC.	1 điểm
	*) Xác định góc giữa BC' và mp(ABB'A'): Gọi H là trung điểm của A'B' $\Rightarrow C'H \perp A'B'$ mà $(ABB'A') \perp (A'B'C') \Rightarrow C'H \perp (ABB'A') \Rightarrow$ Góc giữa BC' và (ABB'A') là $\widehat{C'BH} \Rightarrow \widehat{C'BH} = 30^\circ$ $\Delta A'B'C'$ đều cạnh $a\sqrt{3} \Rightarrow C'H = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow BC' = 3a$	 0,25

	$CC' = \sqrt{9a^2 - 3a^2} = a\sqrt{6} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = (a\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{6} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{4} \text{ (dvtt)}$	0,25
	*) $d_{(BC',AC)} = ?$ Do $AC // A'C' \Rightarrow d_{(BC',AC)} = d_{(AC,(BA'C'))} = d_{(A,(BA'C'))} = x; V_{A.BA'C'} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot S_{A'BC'} \Rightarrow x = \frac{3V_{A.BA'C'}}{S_{A'BC'}}$	0,25
	$V_{A.BA'C'} = V_{C'.A'BA} = \frac{1}{3} \cdot C'H \cdot S_{A'AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}; BC' = 3a;$ $A'C' = a\sqrt{3}; A'B = a\sqrt{15} \Rightarrow \cos \widehat{BA'C'} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \sin \widehat{BA'C'} = \frac{\sqrt{55}}{10}$ $\Rightarrow S_{BA'C'} = \frac{1}{2} A'B \cdot A'C' \cdot \sin \widehat{BA'C'} = \frac{3a^2\sqrt{11}}{4} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{22}}{11} \Rightarrow d_{(AC,BC')} = \frac{3a\sqrt{22}}{11}$	0,25
7(1đ)	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(1;-1;3) và đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t, \quad t \in R. \end{cases}$ Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho $AM = 2\sqrt{6}$.	1,00
	Đt d có vtcp $\vec{u}(2; -1; -1)$. MP (P) vuông góc với d nên (P) có vtpt $\vec{u}(2; -1; -1)$.	0,25
	Ptmp (P): $2(x-1) - (y+1) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$	0,25
	$M \in (d) \Rightarrow M(1+2t; 2-t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(2t; 3-t; -t-3)$	0,25
	$AM = 2\sqrt{6} \Rightarrow 6t^2 + 18 = 24 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} M(3; 1; -1) \\ M(-1; 3; 1) \end{cases}$	0,25
8(1đ)	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. Đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC cắt (C) tại E(3;-1) khác A. Điểm $G\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ lớn hơn 3.	1,00
	+) Đường (C) có tâm I (-1;2), bán kính R = 5. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. CM được: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IH}$. Từ đó H(7;1) 	0,25
	+) ĐT AH chính là đường thẳng HE $\Rightarrow$ pt (HE): $x - 2y - 5 = 0$. $A = AH \cap (C) \Rightarrow A(-1; -3)$	0,25
	+) CM được BC là đường trung trực của HE $\Rightarrow$ pt(BC): $2x + y - 10 = 0$ (có thể tìm điểm D đối xứng với A qua I. CM được BHCD là hình bình hành $\Rightarrow$ trung điểm M của BC chính là trung điểm M của HD $\Rightarrow$ Tọa độ điểm M. ĐT BC đi	

	qua M nhận $\overline{IM}$ là vtpt $\Rightarrow$ ptđt BC)	0,25
	+) ĐT BC cắt (C) tại hai điểm B, C. Do B có hoành độ lớn hơn 3 nên giải hệ tìm được B(4;2); C(2;6).	0,25
8(1đ)	Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3y^3 + 2y + 3x\sqrt{2-x} = 8\sqrt{2-x} & (1) \\ \sqrt{2-x} - \sqrt{2y-3} - \sqrt{10-x-4y} = x\sqrt{2-x} + 3 & (2) \end{cases}$	1,00
	ĐK: $\begin{cases} x \leq 2, y \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 10 - 4y \end{cases} (I)$ Xét pt (1). Đặt $t = \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 2-x \Rightarrow x = 2-t^2 \Rightarrow 2x\sqrt{2-x} = 6t - 3t^3$ Khi đó (1) trở thành: $3y^3 + 2y = 3t^2 + 2t$ (3). Xét hs $f(u) = 3u^3 + 2u \Rightarrow f'(u) = 9u^2 + 2 > 0 \forall u \in R \Rightarrow f(u)$ db trên R Từ (3) ta có: $f(y) = f(t) \Rightarrow y = t$ hay $y = \sqrt{2-x} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y = \sqrt{2-x} \\ x = 2 - y^2 \end{cases}$	0,25
	Thay $\begin{cases} y = \sqrt{2-x} \\ x = 2 - y^2 \end{cases}$ vào (2) ta có: $y^3 - y - 3 - \sqrt{2y-3} - \sqrt{y^2 - 4y + 8} = 0 \Leftrightarrow y^3 - y - 6 + (1 - \sqrt{2y-3}) + (2 - \sqrt{y^2 - 4y + 8}) = 0$ Ta thấy với $y \geq \frac{3}{2}$ thì $1 + \sqrt{2y-3} > 0$; $2 + \sqrt{y^2 - 4y + 8} > 0$ nên pt đã cho tương đương: $(y-2) \left[y^2 + 2y + 3 - \frac{2}{\sqrt{2y-3}+1} - \frac{y-2}{\sqrt{y^2-4y+8}+2} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = -2 \text{ (tm)} \\ y^2 + 2y + 3 - \frac{2}{\sqrt{2y-3}+1} - \frac{y-2}{\sqrt{y^2-4y+8}+2} = 0 \quad (*) \end{cases}$	0,25
	$y \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2y-3}+1} \leq 2 \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{2y-3}+1} \geq -2$ Với $\sqrt{y^2 - 4y + 8} + 2 = \sqrt{(y-2)^2 + 4} + 2 > \sqrt{(y-2)^2} = y-2 > y-2$ $\Rightarrow \frac{-(y-2)}{\sqrt{y^2 - 4y + 8} + 2} > -1$ $\Rightarrow$ VT (*) là $y^2 + 2y + 3 - \frac{2}{\sqrt{2y-3}+1} - \frac{y-2}{\sqrt{y^2-4y+8}+2} > y^2 + 2y + 3 - 3 = y^2 + 2y > 0 \quad \forall y \geq \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ pt (*) vô nghiệm. Vậy pt có nghiệm duy nhất (-2;2).	0,25
		0,25
10	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh:	1,00

(1đ)	$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}$	
	Ta có: $b^2 - 2b + 3 \geq 2 \Rightarrow \frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} \leq \frac{a^3}{2}$ (1)	0,25
	Xét hs: $f(c) = c^3 - 3c + a^2 - 2a + 7$ (a : tham số) trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \in (0; +\infty)$ Lập bảng biến thiên của $f(c)$ trên $(0; +\infty)$	
	$\Rightarrow f(c) \geq f(1) = a^2 - 2a + 5 \geq 4 \Rightarrow \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} \leq \frac{2b^3}{4} = \frac{b^3}{2}$ (2)	0,25
	Xét hs: $g(a) = a^4 + a^2 - 6a + b^4 - 2b^2 + 11$ (b : tham số) trên $(0; +\infty)$ $\Rightarrow g'(a) = 4a^3 + 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \in (0; +\infty)$ Lập bảng biến thiên của $f(c)$ trên $(0; +\infty)$	
	$\Rightarrow g(a) \geq g(1) = b^4 - 2b^2 + 7 \geq 6 \quad \forall a, b > 0 \Rightarrow \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3c^3}{6} = \frac{c^3}{2}$ (3)	0,25
	Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có đpcm	0,25

Chú ý: Học sinh làm theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.