

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\ln x$ trên $[1; e]$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 (x+1).e^x dx$.

Câu 4 (1,0 điểm).

a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ trên tập số phức. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

b) Giải phương trình: $\log_3(x+1) = \log_{\sqrt{3}}(5-x)$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ hình chiếu của I trên (P).

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

b) Năm học 2015 – 2016 trường THPT Quỳnh Lưu 3 có 39 lớp được chia đều cho ba khối (khối 10, 11, 12), mỗi khối gồm 13 lớp. Đoàn trường lấy ngẫu nhiên 4 lớp để tổ chức lễ ra quân làm lao động vệ sinh môi trường cho địa phương vào Tháng thanh niên. Tính xác suất để các lớp được chọn có trong cả ba khối.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Hình chiếu đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm H của đoạn thẳng AB. Biết góc hợp bởi SC và mặt đáy là 45° .

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2}.\sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} = y + 4x \\ xy + 2x - 11 + \sqrt{12-x+y} + \sqrt{7-3x} = 0 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(3;1), trung điểm của BC là M(4;2), phương trình EF: $3x - y - 2 = 0$ và B có hoành độ bé hơn 4.

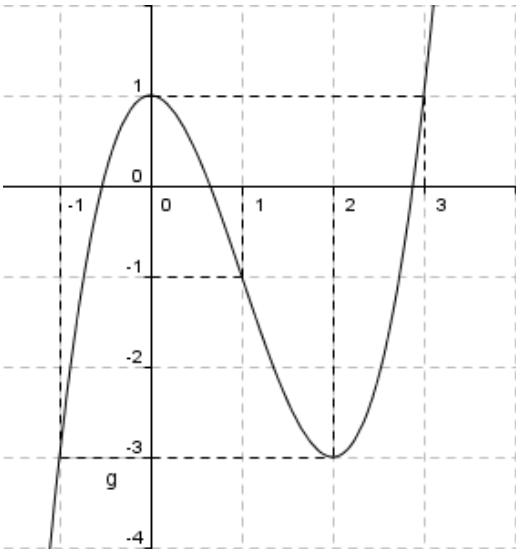
Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x+y)^3}.$$

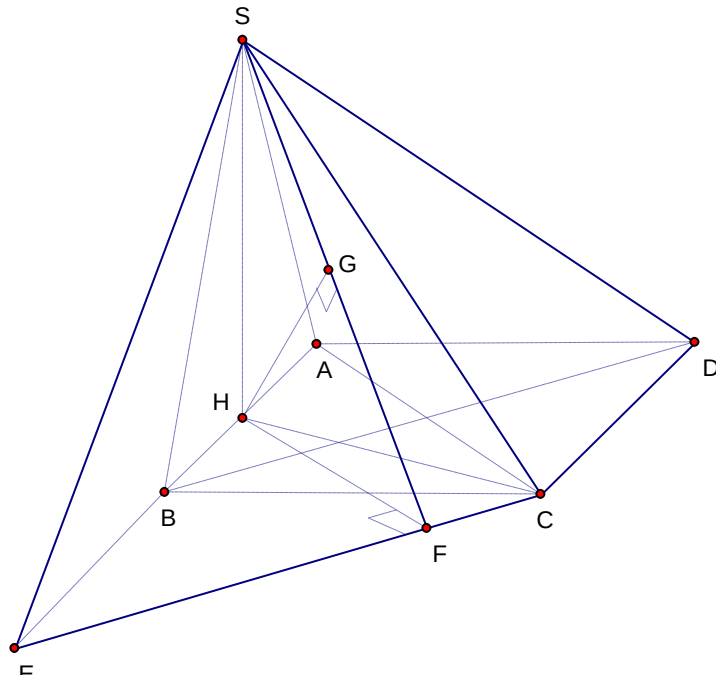
-----/ Hết /-----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Trường THPT Quỳnh Lưu 3

Câu	ý	Nội dung	Điểm															
1 1 đ		1) Tập xác định: $\mathbb{R}$ 2) Sự biến thiên a) Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ $y' > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2; y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ Vậy, hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$	0,25															
		b) Cực trị. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=-3$ c) Giới hạn tại vô cực. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25															
		d) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>-3</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		+	0	-	y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'		+	0	-														
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$														
	3. Đồ thị Đồ thị có tâm đối xứng $I(1;-1)$ và đi qua các điểm $(0;1), (2;3), (-1;-3), (3;1)$. 	0,25																
2 1 đ		Ta có $f(x) = x - 2\ln x; f'(x) = 1 - \frac{2}{x}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1; e)$ $f(1) = 1; f(2) = 2 - 2\ln 2; f(e) = e - 2$ Vậy, $\min_{[1;e]} y = 2 - 2\ln 2; \max_{[1;e]} y = 1$	0,5 0,5															

3 1 đ		$I = \int_0^1 (x+1).e^x dx = \int_0^1 (x+1)de^x$ $= (x+1)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - e^x \Big _0^1 = e.$ Vậy, I=e.	0,5
			0,5
4 1 đ	a 0,5 đ	Phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có $\Delta' = -4 < 0$ nên nó có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 1 - 2i$. Khi đó, $z_1 ^2 = z_2 ^2 = 5$. Do đó $A = z_1 ^2 + z_2 ^2 = 10$	0,25
	b. 0,5 đ	Điều kiện: $-1 < x < 5$ $\log_3(x+1) = \log_{\sqrt{3}}(5-x) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = \log_3(5-x)^2$ $\Leftrightarrow x+1 = (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 8$ Đổi chiếu điều kiện ta có nghiệm thỏa mãn là $x=3$.	0,25
			0,25
5 1 đ	a 0,5 đ	Khoảng cách từ I đến mp(P) là $r = d(I, (P)) = \frac{ 1.1 + 2.2 + 2.1 - 4 }{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$. Vì M mặt cầu (S) tiếp xúc với mp(P) nên bán kính mặt cầu $r=1$ Phương trình mặt cầu là (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$	0,25
	b 0,5 đ	Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với mp(P), d có vectơ chỉ phương là $\vec{n} = (1; 2; 2)$ nên nó có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$. Gọi H là hình chiếu cần tìm thì H là giao điểm của d và (P), tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ 2x - y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}, H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$	0,25
			0,25
6 1 đ	a 0,5 đ	Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$ Vì $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Khi đó, $P = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha + 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{9}$	0,25
			0,25
	b 0,5 đ	Gọi không gian mẫu là Ω: ‘ Chọn ngẫu nhiên 5 lớp trong 39 lớp ‘ thì $n(\Omega) = C_{39}^4 = 82251$ Gọi A là biến cố “ chọn được 4 lớp có trong cả ba khối”. TH1: khối 10 hai lớp, khối 11 một lớp và khối 12 một lớp có $C_{13}^2 C_{13}^1 C_{13}^1$ cách chọn TH2: khối 10 một lớp, khối 11 hai lớp và khối 12 một lớp có $C_{13}^1 C_{13}^2 C_{13}^1$ cách chọn TH3: khối 10 một lớp, khối 11 một lớp và khối 12 hai lớp có $C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^2$ cách chọn.	0,25

		Do đó $n(A) = 3C_{13}^2 C_{13}^1 C_{13}^1 = 39546$ Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{39546}{82251} = \frac{338}{703} \approx 48\%$	0,25
7 1 đ	a 0,5 đ	 Vì HC là hình chiếu của SC trên mặt đáy nên theo giả thiết $\angle SCH = 45^\circ$. Do đó, $SH = HC \cdot \tan \angle SCH = \sqrt{HB^2 + BC^2} \cdot \tan 45^\circ = a\sqrt{5}$ Diện tích hình vuông ABCD là $4a^2$ Vậy, thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{5} \cdot 4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3} \text{ (dvt)}$.	0,25 0,25
	b 0,5 đ	Dựng hình bình hành BDCE, khi đó $d(SC, BD) = d(BD, (SCE)) = d(B, (SCE))$ Mặt khác, $\frac{d(B, (SCE))}{d(H, (SCE))} = \frac{EB}{EH} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(B, (SCE)) = \frac{2}{3} d(H, (SCE))$ Gọi F và G lần lượt là hình chiếu của H lên EC và SF ta có $\left. \begin{array}{l} CE \perp SH \\ CE \perp HF \end{array} \right\} \Rightarrow CE \perp (SHF) \Rightarrow CE \perp HG$, mà $HG \perp SF$ nên $HG \perp (SCE)$ hay $d(H, (SCE)) = HG$ Ta có $\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{16}{9AC^2} = \frac{1}{5a^2} + \frac{2}{9a^2} = \frac{19}{45a^2}$ Suy ra $d(H, (SCE)) = HG = \frac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{19}}$ Vậy, khoảng cách giữa SC và BD là $\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{19}}$.	0,25 0,25
8 1 đ		Xét hệ $\begin{cases} 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} = y+4x & (1) \\ xy+2x-11+\sqrt{12-x+y}+\sqrt{7-3x}=0 & (2) \end{cases}$	

	Điều kiện $2 \leq x \leq \frac{7}{3}, y \geq 0$ Ta có $2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{4(x-2)} \sqrt{y} \leq \frac{4x-8+y}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } y=4x-8$ $2\sqrt{(y+8)x} = \sqrt{(y+8)4x} \leq \frac{4x+y+8}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } y=4x-8$ Suy ra $2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} \leq y+4x$. Dấu "=" xảy ra khi $y=4x-8$ Như vậy, pt(1) $\Leftrightarrow y=4x-8$. Thế vào pt(2) ta có: $4x^2 - 6x - 11 + \sqrt{4+3x} + \sqrt{7-3x} = 0$ $\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) + (\sqrt{4+3x} - x - 1) + (\sqrt{7-3x} - x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 0 \left(\text{do } x \in \left[2; \frac{7}{3}\right] \right)$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 3) \left[4 - \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 & (*) \\ \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 4 & (3) \end{cases}$ + pt(*) $\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ Đổi chiều điều kiện ta có $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, hệ có nghiệm $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6 \right)$ +Xét pt(3) $\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right] \Rightarrow \sqrt{4+3x} + x + 1 \geq 3 + \sqrt{10} > 6 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} < \frac{1}{6}$ Xét hàm số $\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]: g(x) = \sqrt{7-3x} + x - 2 \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{7-3x}} + 1 = \frac{2\sqrt{7-3x} - 3}{2\sqrt{7-3x}} < 0$ $\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \leq 3$ Do đó, $\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]: \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \leq \frac{1}{6} + 3 < 4 \text{ hay pt(3) vô nghiệm}$ Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6 \right)$	0,25 0,25 0,25 0,25
--	---	---

9 1 đ	Phương trình đường thẳng BC: $x - y - 2 = 0$ Gọi H là giao điểm của EF và BC ta có tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}, H(0; -2). \text{ Từ các giả thiết ta thấy H nằm trên tia đối của tia BC.}$ Ta chứng minh $MD \cdot MH = MB^2$. Thật vậy, qua B kẻ đường thẳng song song với CA cắt HE tại G. Khi đó ta có $BG = BF = BD$ đồng thời $\frac{HB}{HC} = \frac{GB}{CE} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow HB \cdot DC = DB \cdot HC$. Vì M là trung điểm đoạn BC nên ta được $(MH - MB)(MB + MD) = (MB - MD)(MH + MB) \Leftrightarrow MH \cdot MD = MB^2.$ Gọi $B(t; t-2), t < 4$ ta có $2(t-4)^2 = 8 \Leftrightarrow t-4 = -2 \Leftrightarrow t = 2, B(2; 0) \Rightarrow C(6; 4)$. Phương trình đường tròn tâm B bán kính BD là (T): $(x-2)^2 + y^2 = 2$. Đường thẳng EF cắt (T) tại G và F có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}. \text{ Vì G nằm giữa H và F nên}$ $F\left(1; 1\right), G\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right).$ Khi đó phương trình AB: $x + y - 2 = 0$, AC đi qua C và song song với BG nên có pt: $x - 7y + 22 = 0$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 7y + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}, A(-1; 3)$ Vậy, $A(-1; 3), B(2; 0), C(6; 4)$.	0,25 0,25 0,5
10 1 đ	Xét biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x+y)^3}$ Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \leq \frac{2}{x+y}$ Thật vậy, $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{x^2 + 3y^2} + \frac{1}{3x^2 + y^2} \right) = \frac{8(x^2 + y^2)}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)}$	

	Xét $\frac{8(x^2 + y^2)}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)} - \frac{4}{(x + y)^2} = \frac{4[2(x^2 + y^2)(x + y)^2 - (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)]}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)(x + y)^2}$ $= \frac{-4(x - y)^4}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)(x + y)^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \leq \frac{2}{x + y}$ Dấu “=” xảy ra khi $x=y$ Như vậy, $P \leq \frac{2}{x + y} - \frac{2}{3(x + y)^3}$ Đặt, $t = \frac{1}{x + y}, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{2t^3}{3} \Rightarrow f'(t) = 2 - 2t^2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ Ta có bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(t)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table> f(t) Từ BBT ta thấy GTLN của f(t) là 4/3 khi t=1. Vậy, GTLN của P là 4/3 khi $x = y = \frac{1}{2}$	t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	f'(t)	-	0	+	0	-	0,5 0,5
t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$									
f'(t)	-	0	+	0	-									

Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.