

Câu 1. (4,5 điểm)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2 - 1)x + m^3 - m$ có đồ thị (C) và điểm $I(-1;3)$.

- a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2022; +\infty)$.
- b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho (C) có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị của (C) cùng với điểm I tạo thành một tam giác vuông tại I .

Câu 2. (4,0 điểm)

- a) Cho tam giác đều ABC . Trên mỗi cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy 4 điểm phân biệt và không điểm nào trùng với các đỉnh A, B, C . Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp 15 điểm đã cho (tính cả các điểm A, B, C)?
- b) Một người chọn ngẫu nhiên một số điện thoại, trong đó mỗi số có mười chữ số và ba chữ số đầu cố định là 099. Số điện thoại này được gọi là *may mắn* nếu bốn chữ số tiếp theo là các chữ số chẵn đôi một khác nhau, ba chữ số cuối là các số lẻ và tổng ba chữ số này bằng 9. Tính xác suất để người đó nhận được số điện thoại *may mắn*.

Câu 3. (5,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 6$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 45° .

- a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .
- c) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SM và SC . Chứng minh hình chóp $A.CMHK$ nội tiếp một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc $\widehat{SAC} = \alpha > 45^\circ$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với đường thẳng SC cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính tỉ số diện tích của thiết diện và diện tích đáy $ABCD$ theo α .

Câu 5. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y^2-x}\right) + 1 = y^2 - 2x \\ \sqrt{3y^2-5} + \sqrt{4x-3} = 2x+1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{3} < a, b, c < 1$. Chứng minh:

$$\log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) + \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) + \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) \geq 9.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (4.5 điểm)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2 - 1)x + m^3 - m$ có đồ thị (C) và điểm $I(-1; 3)$

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2022; +\infty)$.

b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho (C) có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị của (C) cùng với điểm I tạo thành một tam giác vuông tại I .

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 6mx - 3(m^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx - 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2mx - (m^2 - 1) = 0 (*)$$

Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow pt(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow (C)$ luôn có hai điểm cực trị.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 1 \\ x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Dễ thấy $x_1 > x_2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					
						$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên $(2022; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$m + 1 \leq 2022 \Leftrightarrow m \leq 2021$$

Vậy $m \leq 2021$ thỏa yêu cầu.

b) Hai điểm cực trị của (C) là $A(m + 1; 2m + 2), B(m - 1; 2m - 2)$.

$$\overline{IA}(m + 2; 2m - 1), \overline{IB}(m; 2m - 5)$$

Theo giả thiết tam giác ABI vuông tại I

$$\Leftrightarrow \overline{IA} \cdot \overline{IB} = 0 \Leftrightarrow m(m + 2) + (2m - 1)(2m - 5) = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 10m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$.

Câu 2: (4.0 điểm)

a) Cho tam giác đều ABC . Trên mỗi cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy 4 điểm phân biệt và không điểm nào trùng với các đỉnh A, B, C . Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp 15 điểm đã cho (tính cả các điểm A, B, C).

Lời giải

Số cách lấy 3 điểm tùy ý từ tập hợp 15 điểm là C_{15}^3 .

Số cách lấy 3 điểm thuộc cùng một cạnh của tam giác là $3C_6^3$.

Vậy số tam giác có các đỉnh thuộc tập hợp 15 điểm đã cho là $C_{15}^3 - 3C_6^3 = 395$.

b) Một người chọn ngẫu nhiên một số điện thoại, trong đó mỗi số có mười chữ số và ba chữ số đầu cố định là 099. Số điện thoại này được gọi là *may mắn* nếu bốn chữ số tiếp theo là các chữ số chẵn đôi một khác nhau, ba chữ số cuối là các số lẻ và tổng ba chữ số này bằng 9. Tính xác suất để người đó nhận được số điện thoại *may mắn*.

Lời giải

Giả sử số điện thoại là: $099a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ (trong đó $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; \dots; 9\}$)

Ta có: $n(\Omega) = 10^7$

Gọi $A =$ “Số điện thoại may mắn”

Khi đó: Có A_5^4 cách chọn a_1, a_2, a_3, a_4

TH1: a_5, a_6, a_7 là bộ số $(1; 3; 5) \Rightarrow 3!$ cách chọn

TH2: a_5, a_6, a_7 là bộ số $(1; 1; 7) \Rightarrow 3$ cách chọn

TH3: a_5, a_6, a_7 là bộ số $(3; 3; 3) \Rightarrow 1$ cách chọn

$\Rightarrow n(A) = A_5^4 (3! + 3 + 1) = 1200$

Xác suất để người đó nhận được số điện thoại may mắn là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1200}{10^7} = 0,00012$.

Câu 3: (5.5 điểm)

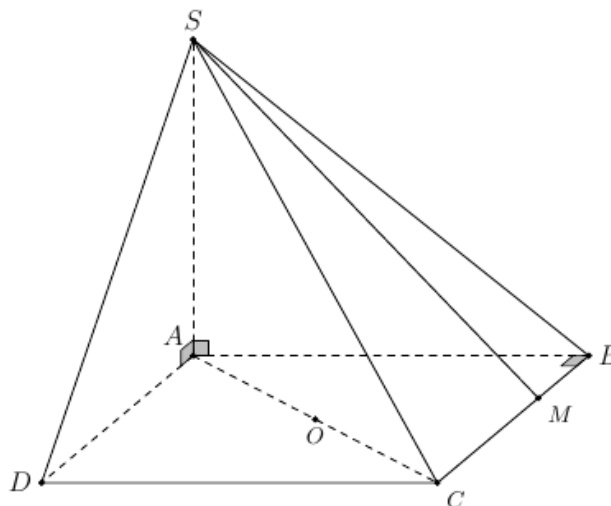
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 6$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 45° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .

c) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SM và SC . Chứng minh hình chóp $A.CMHK$ nội tiếp một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

Lời giải



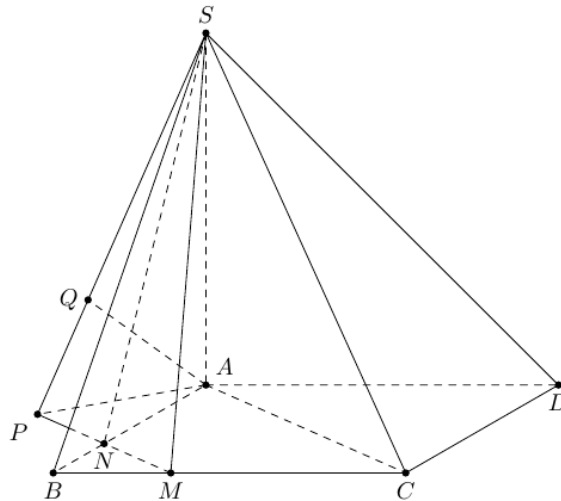
a) Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Ta có $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle SBC$ vuông cân tại B . Khi đó $SB = BC = 6$ và $SC = 6\sqrt{2}$.

Trong $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 6 = 18\sqrt{3}$ (đvtt).

b) Cách 1:



Trong $(ABCD)$ kẻ $MN \parallel AC$ với $N \in AB$. Suy ra $BN = \frac{1}{3}AB = 1$; $AN = 2$; $BM = \frac{1}{3}BC = 2$;

$$MN = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 36} = \sqrt{5}; \quad AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Khi đó $AC \parallel (SMN) \Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(A, (SMN))$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $AP \perp MN$ với $P \in MN$.

Trong (SAP) kẻ $AQ \perp SP$ (1) với $Q \in SP$.

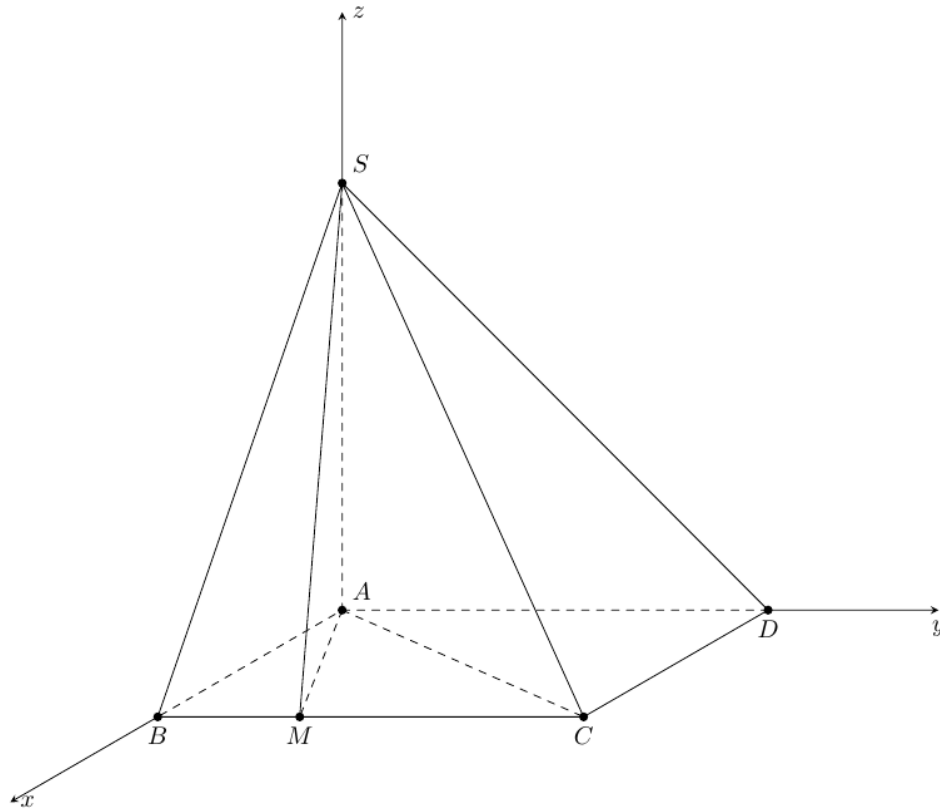
$$\text{Do } \begin{cases} MN \perp AP \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAP) \Rightarrow AQ \perp MN \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $AQ \perp (SMN)$. Vậy $d(AC, SM) = d(A, (SMN)) = AQ$.

$$\text{Ta có } AP = d(A, MN) = \frac{2}{3}d(B, AC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{9 + 36}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Trong } \triangle SAP \text{ vuông tại } A \text{ ta có } AQ = \frac{SA \cdot AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{27 + \frac{16}{5}}} = \frac{12\sqrt{453}}{151}.$$

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với

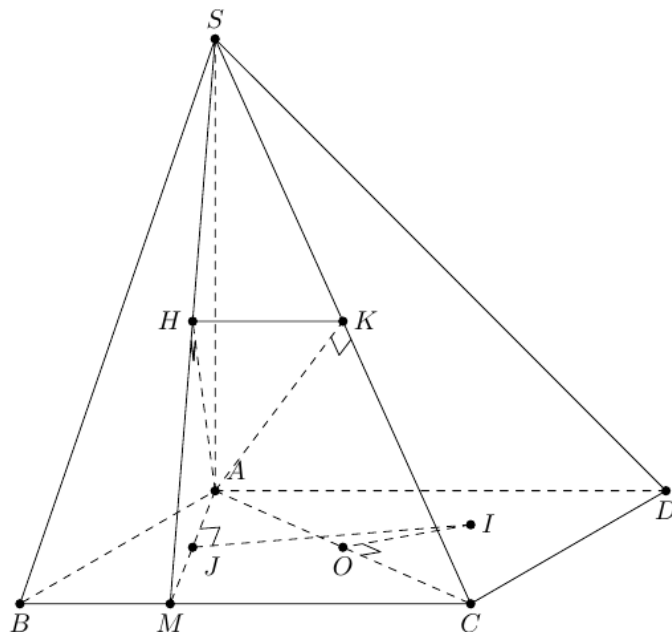
$$A \equiv O(0;0;0); B(3;0;0); D(0;6;0); C(3;6;0); S(0;0;3\sqrt{3}); M(3;2;0).$$

Ta có $\overrightarrow{SM} = (3;2;-3\sqrt{3})$ và $\overrightarrow{AC} = (3;6;0)$, $\overrightarrow{AM} = (3;2;0)$.

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}] = (-18\sqrt{3}; 9\sqrt{3}; -12) \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}] = 3\sqrt{151} \\ \overrightarrow{AM} \cdot [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}] = -36\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } d(AC, SM) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}]|}{\|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}]\|} = \frac{36\sqrt{3}}{3\sqrt{151}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{151}} = \frac{12\sqrt{453}}{151}.$$

c)



Gọi O, J lần lượt là trung điểm của AC, AM .

Dựng trục của các $\triangle AHM$ và $\triangle AKC$. Hai trục này là trung trục của các đoạn thẳng AC , AM nên giao điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$.
 Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.CMHK$ chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ (đvdt)}.$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABM} = 9 - 3 = 6 \text{ (đvdt)}.$$

Mặt khác

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}; \quad AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}; \quad MC = \frac{2}{3} BC = 4.$$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$.

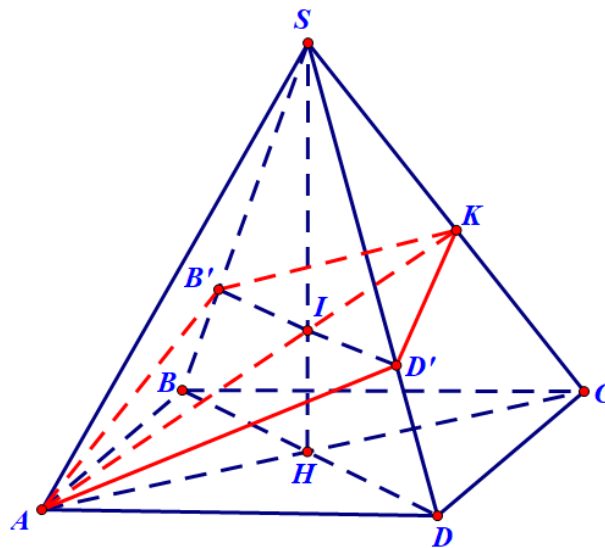
$$\text{Ta có } S_{\triangle AMC} = \frac{AM \cdot AC \cdot MC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{AM \cdot AC \cdot MC}{4S_{\triangle AMC}} = \frac{\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy: } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 75^\circ.$$

Câu 4: (1.5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc $\widehat{SAC} = \alpha > 45^\circ$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với đường thẳng SC cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính tỉ số diện tích của thiết diện và diện tích đáy $ABCD$ theo α .

Lời giải



$$\text{Gọi } H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$$\text{Gọi } K \text{ là giao điểm của } (P) \text{ và } SC \Rightarrow AK \perp SC \text{ và } AK \cap SH = I.$$

$$\text{Ta có } SC \perp BD \Rightarrow (P) \parallel BD \Rightarrow (P) \cap (SBD) = B'D' \parallel BD \text{ và } B'D' \text{ đi qua } I.$$

$$\text{Vậy thiết diện của } (P) \text{ với hình chóp } S.ABCD \text{ là tứ giác } AB'KD' \text{ có } AK \perp B'D'.$$

$$\text{Theo giả thiết tam giác } SAC \text{ là tam giác cân tại } S \text{ và } \widehat{SAC} = \widehat{SCA} = \alpha > 45^\circ.$$

$$\text{Đặt cạnh đáy của hình vuông } ABCD \text{ là } a.$$

$$\text{Ta có: } SH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \alpha, \quad AK = a\sqrt{2} \sin \alpha, \quad SA = SC = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAK \text{ ta có}$$

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4\cos^2 \alpha} - 2a^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} \left(\frac{1 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)} = \frac{a\sqrt{2} |\cos 2\alpha|}{2\cos \alpha}.$$

Vì tứ giác $CHIK$ nội tiếp nên: $SI.SH = SK.SC \Rightarrow SI = \frac{SK.SC}{SH} = a\sqrt{2} \frac{|\cos 2\alpha|}{\sin 2\alpha} = a\sqrt{2} |\cot 2\alpha|$

Vậy ta có $B'D' = \frac{SI}{SH}.BD = 2a\sqrt{2} \frac{|\cot 2\alpha|}{\tan \alpha}$.

Diện tích tứ giác $AB'KD'$ là $S_{AB'KD'} = \frac{1}{2} AK.B'D' = 2a^2 \cos \alpha. |\cot 2\alpha|$.

Diện tích tứ giác $ABCD$ là $S = a^2$.

Vậy tỉ số diện tích là: $\frac{S_{AB'KD'}}{S_{ABCD}} = \frac{2a^2 \cos \alpha. |\cot 2\alpha|}{a^2} = 2\cos \alpha. |\cot 2\alpha|$.

Câu 5: (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y^2-x}\right) + 1 = y^2 - 2x \\ \sqrt{3y^2-5} + \sqrt{4x-3} = 2x+1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y^2 - 5 \geq 0 \\ 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 5 \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$4\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y^2-x}\right) + 1 = y^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow (2x+1-y^2) \left(\frac{4}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(y^2-x)} + \sqrt[3]{(y^2-x)^2}} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = y^2 \quad (3) \\ \frac{4}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(y^2-x)} + 4\sqrt[3]{y^2-x}} + 1 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(y^2-x)} + \sqrt[3]{y^2-x} = \left[\sqrt[3]{y^2-x} + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} \right]^2 + \frac{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}{4} > 0, \forall x \geq \frac{3}{4}, 3y^2 - 5 \geq 0$$

Do đó (4) vô nghiệm.

Thay $y^2 = 2x+1$ (3) vào phương trình $\sqrt{3y^2-5} + \sqrt{4x-3} = 2x+1$ ta được phương trình

$$\sqrt{6x-2} + \sqrt{4x-3} = 2x+1$$

Cách 1:

$$\sqrt{6x-2} + \sqrt{4x-3} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ (2x+1) \left[\frac{1}{\sqrt{6x-2} - \sqrt{4x-3}} - 1 \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \sqrt{6x-2} = \sqrt{4x-3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 6x-2 = 4x-3+1+2\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x = \sqrt{4x-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào (3) ta được $y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$ (nhận).

Thay $x = 3$ vào (3) ta được $y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{7}$ (nhận).

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $S = \{(1; \sqrt{3}), (1; -\sqrt{3}), (3; -\sqrt{7}), (3; \sqrt{7})\}$.

Cách 2:

$$\sqrt{6x-2} + \sqrt{4x-3} = 2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-2} - (x+1) + \sqrt{4x-3} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{\sqrt{6x-2}+x+1} + \frac{-x^2+4x-3}{\sqrt{4x-3}+x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{6x-2}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{4x-3}+x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào (3) ta được $y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$ (nhận).

Thay $x = 3$ vào (3) ta được $y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{7}$ (nhận).

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $S = \{(1; \sqrt{3}), (1; -\sqrt{3}), (3; -\sqrt{7}), (3; \sqrt{7})\}$.

Câu 6. (1.5 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{3} < a, b, c < 1$. Chứng minh

$$\log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) + \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) + \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) \geq 9.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho các số thực dương ta có

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}(3b-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3b-1) \leq b^3 \\ \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}(3c-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3c-1) \leq c^3, \text{ kết hợp với } \frac{1}{3} < a, b, c < 1 \text{ ta được:} \\ \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}(3a-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3a-1) \leq a^3 \end{cases}$$

$$\log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) + \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) + \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) \geq \log_a b^3 + \log_b c^3 + \log_c a^3$$

$$= 3(\log_a b + \log_b c + \log_c a) \stackrel{AM-GM}{\geq} 9\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 9$$

$$\text{Vậy } \log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) + \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) + \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) \geq 9.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } a = b = c = \frac{1}{2}.$$

----- Hết -----