

QUYỂN SỐ 1

*Tuyển tập 110 câu hỏi vận dụng –
vận dụng cao từ các đề thi thử trên
cả nước năm 2019 – có đáp án chi
tiết thực hiện giải bởi tập thể giáo
viên Diễn Đàn Giáo Viên Toán*

**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
VÀ KSHS**

TỔNG HỢP: NGUYỄN BẢO VƯƠNG

FACEBOOK: <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

SĐT: 0946798489

Năm học: 2018 – 2019

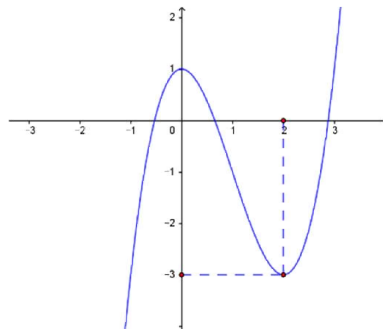
Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- A. $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 4. Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3) \cdot 2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



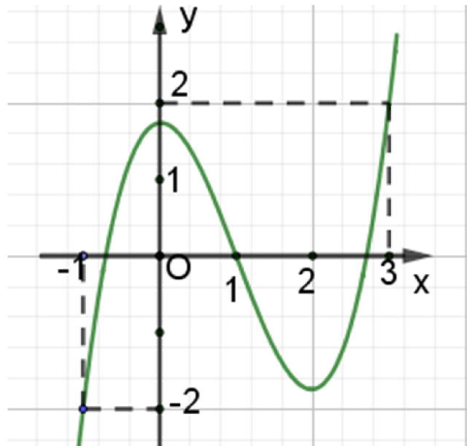
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$. B. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.
C. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$. D. $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị

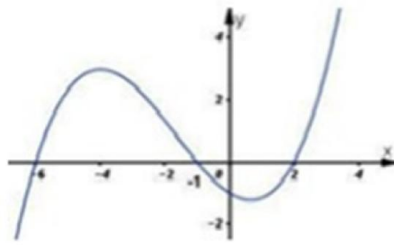
- A. 17. B. 16. C. 15. D. 6.

- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

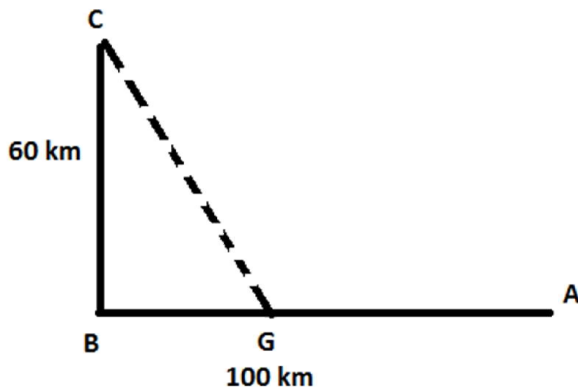
- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng
- A. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $2 + \sqrt{5}$. D. $-1 + \sqrt{5}$.
- Câu 9.** Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là
- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 10.** Tìm m để các bất phương trình $(3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x \leq 2m - 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 18$. C. $m \geq 0$. D. $m \geq 8$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn: $AB = \sqrt{5}$.
- A. $\begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \end{cases}$. B. $m = 10$. C. $m = -2$. D. $m \in (-2; 10)$.
- Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị tham số a để phương trình $|x^3| - 3x^2 - a = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là:
- A. $-2 < a < 2$. B. $-2 < a < 0$. C. $-4 < a < 0$. D. Không tồn tại a .
- Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. $m \leq 12$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 12$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - x)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 15. Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là 60km, khoảng cách từ A đến B là 100km, góc ABC bằng 90° . Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

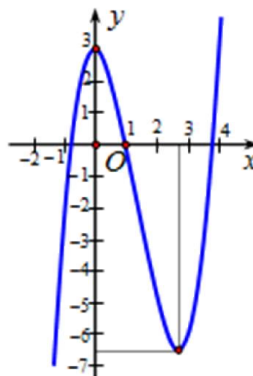


- A. 55 km. B. 40 km. C. 60 km. D. 45 km.

Câu 16. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. B. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

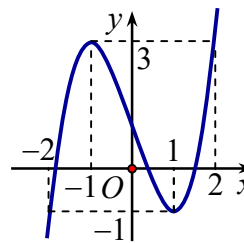
A. $(-2017; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -2017)$.

D. $(2017; +\infty)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 8.

B. 6.

C. 9.

D. 7.

Câu 20. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2018.

Câu 22. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

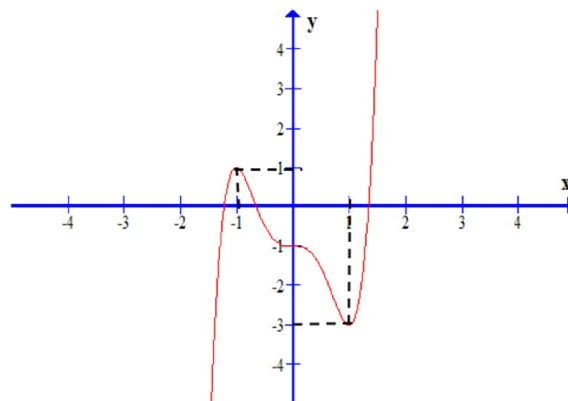
A. 1.

B. 2.

C. vô số điểm.

D. 0.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x| - 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt?



- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Khi đó phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 9. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1}$ có đúng một đường tiệm cận.

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-4; -3)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 5$) để hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(3; 4)$.

Câu 29. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình

$$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \text{ đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Số phần tử của tập } S \text{ bằng}$$

- A. 1. B. 2020. C. 2019. D. 2.

Câu 30. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4+\pi}$. B. $\frac{112}{4+\pi}$. C. $\frac{84}{4+\pi}$. D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a+b$ bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 2 . D. -3 .

Câu 32. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m \in (-1; 1]$. B. $m \in (-3; -1]$. C. $m \in (3; 5]$. D. $m \in (1; 3]$.

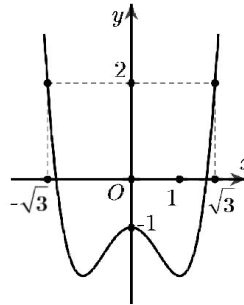
Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $[-1; +\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 14. B. 10. C. 12. D. 8.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.
C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$. D. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.

- A. $k_1.k_2 = 3$. B. $k_1.k_2 = 4$. C. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. D. $k_1.k_2 = 2$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 40. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 2m^3 + 2m^2 - 5m + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m < 12$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$

- A. 8. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị như hình vẽ.

Khi đó phương trình $[f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6. B. 7. C. 5. D. 8.

Câu 42. Xét $x; y$ thuộc đoạn $[1; 3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x}{y} + \frac{4y}{x}. \text{ Với } M + m = \frac{a}{b} \text{ (phân số tối giản). Tính } a + b^3.$$

- A. $a + b^3 = 93$. B. $a + b^3 = 76$. C. $a + b^3 = 77$. D. $a + b^3 = 66$.

Câu 43. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì:

- A. $f(x_0) > \frac{1}{4}$. B. $f(x_0) \leq \frac{1}{4}$. C. $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$. D. $f(x_0) < \frac{1}{4}$.

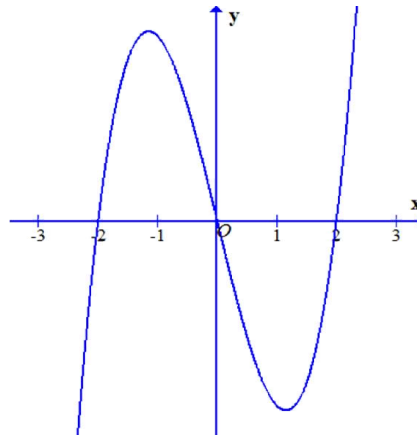
Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2	$-\infty$	$+\infty$	3

Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 nghiệm. B. 4 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 1 nghiệm.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{4x-1}{2-x}$ (C) và đường thẳng (d): $y = -x + m$. Khi d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Giá trị nhỏ nhất $\min AB$ đạt khi m lấy giá trị m_0 . Tìm $\min AB$ và m_0

- A. $\min AB = 2\sqrt{14}, m_0 = -2$. B. $\min AB = 2\sqrt{14}, m_0 = 2$.

C. $\min AB = 2\sqrt{6}, m_0 = 2.$

D. $\min AB = 2\sqrt{6}, m_0 = -2.$

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm trên (C) hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN bằng

A. 2.

B. $4\sqrt{2}.$

C. $2\sqrt{2}.$

D. 4.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$

A. 1.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

Câu 49. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012.

B. 2011.

C. 2009.

D. 2010.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4		3		3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $m\sqrt{x} + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$.

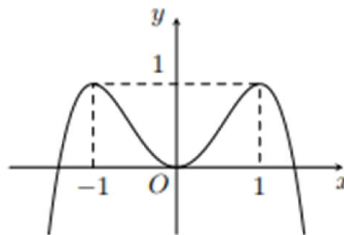
A. 2014.

B. 2015.

C. 2019.

D. Vô số.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



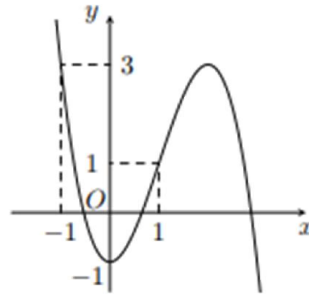
A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m-2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 54. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1} \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của S là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = 6f(x-1) - 2x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 56. Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là:

- A. $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. B. $1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.
C. $m \neq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 57. Số giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$ là

- A. 18. B. 9. C. 7. D. 11.

Câu 58. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x - 2018|.$$

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -2018 . C. $-\frac{2017}{2}$. D. -2017 .

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 64, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số

$$y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$$

nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

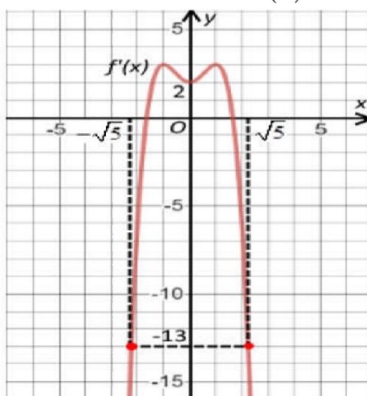
A. 2018.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2021.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0 \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

A. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. B. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5})$. C. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(0)$.

Câu 63. Với các giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

A. $m > 2$.

B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m > 2 \end{cases}$.

C. $m \leq 1$.

D. $1 \leq m < 2$.

Câu 64. Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có:

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in (-2; -1)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-1; 0)$.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

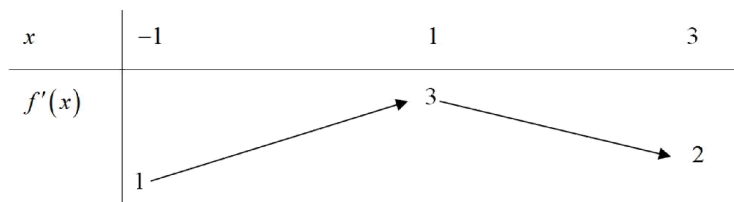
A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.

Câu 66. Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ là



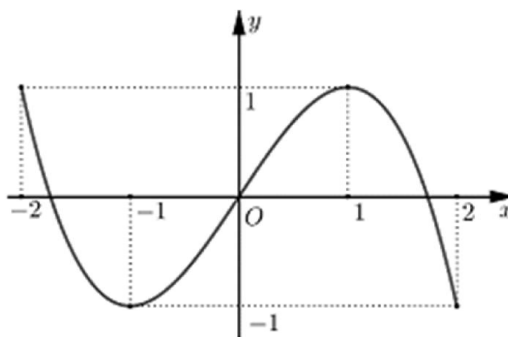
A. $m < f(0)$.

B. $m \leq f(0)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

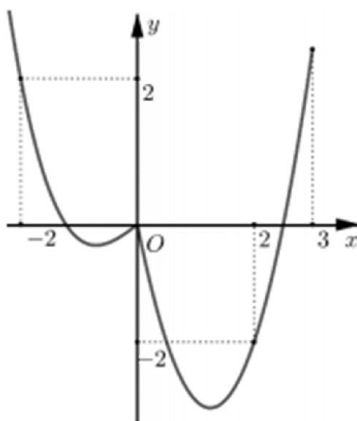
Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.

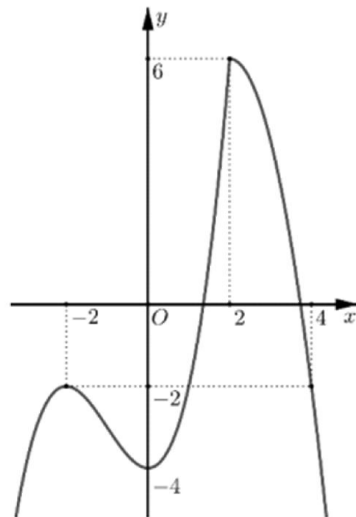


Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

- A. 6. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2, 2]$.



A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

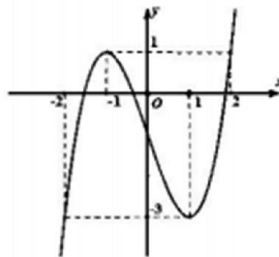
Câu 70. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, bất phương trình $f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m$ (với m là tham số) thỏa mãn với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m \leq f(0) + 1$. B. $m > f(0) - 1$. C. $m < f(0) + 1$. D. $m \geq f(0) + 1$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị

A. 6. B. 8. C. 9. D. 7.

Câu 74. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4; 7)$. B. $(-2; 1)$. C. $(1; 4)$. D. $(7; 10)$.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$. B. $(4; 6)$. C. $(-1; 5)$. D. $(0; 4)$.

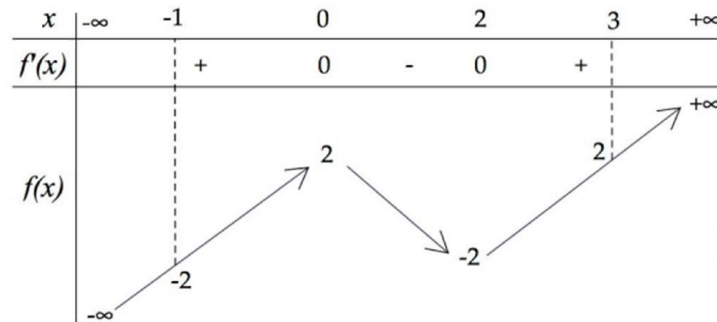
Câu 76. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \cos x + 1}{\cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực?

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 79. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 3. B. 4. C. -4. D. 2.

Câu 80. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị.

- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. C. $(-\infty; 0]$. D. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

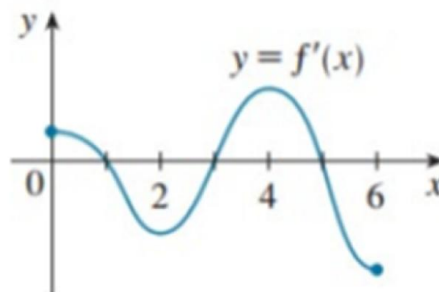
Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A. $a = -1; b = 2$. B. $a = 4; b = 4$. C. $a = 1; b = 2$. D. $a = -1; b = -2$.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

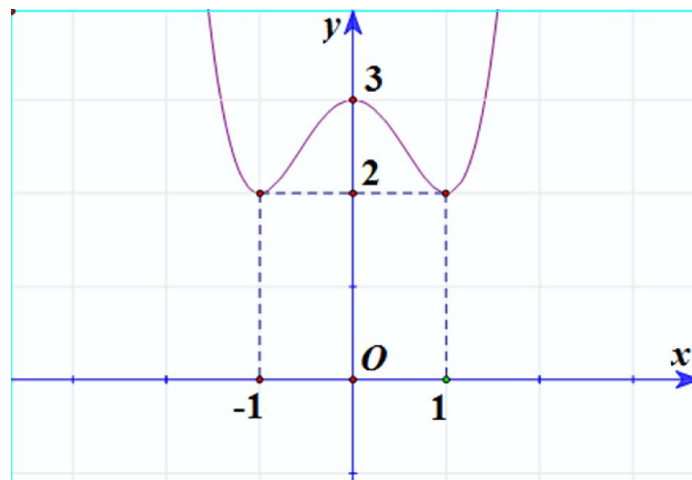
- A. $m = 2\sqrt{2}$. B. $m = 1$. C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = \sqrt[3]{4}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

- Câu 84.** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ là:
A. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-1; +\infty)$. **D.** $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- Câu 85.** Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ là
A. $m = 3$. **B.** $2 < m < 3$. **C.** $2 \leq m \leq 3$. **D.** $m = 2$.
- Câu 86.** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $2M = 3m$. **B.** $M - m = \frac{2}{3}$. **C.** $M - m = 1$. **D.** $M - m = \frac{3}{2}$.
- Câu 87.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ có bao nhiêu cực trị?
A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4
- Câu 88.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.
A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right]$. **B.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1 \right] \cup \{-1\}$.
C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty \right)$. **D.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right] \cup \{-1\}$.
- Câu 89.** Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ là
A. $[3; 4)$. **B.** $[0; 3)$. **C.** $[4; +\infty)$. **D.** $[3; +\infty)$.
- Câu 90.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

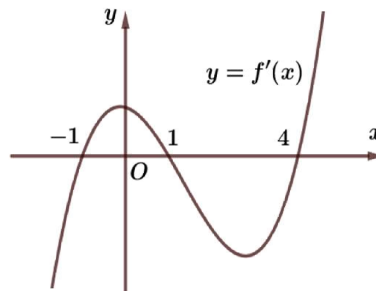


Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(0; +\infty)$.

- Câu 91.** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(C)$. Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$. Phương trình của AB là
A. $x - y - 2 = 0$. **B.** $x + y - 8 = 0$. **C.** $x - 3y + 4 = 0$. **D.** $x - 2y + 1 = 0$.
- Câu 92.** Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|, x \in (-\pi; \pi)$ là
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.
- Câu 93.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là
A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.
- Câu 94.** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.
A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.
- Câu 95.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$$
có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.
A. $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3} \leq m < \frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2} \leq m < -\frac{1}{3}$.
- Câu 96.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10, 20]$ để hàm số $f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.
- Câu 97.** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
A. $2x + y = 0$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x + 2y = 0$.
- Câu 98.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.
A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
- Câu 99.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

- 1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị
- 2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- 3) $f(1) > f(2) > f(4)$.
- 4) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 100. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 42. B. 30. C. 50. D. 63.

Câu 101. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

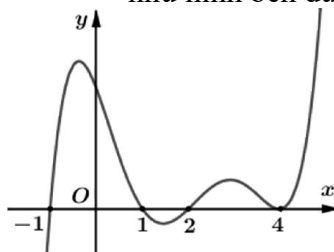
$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -3 $-\infty$

- A. $\frac{25}{3}$. B. 15. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.

Câu 104. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$ bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

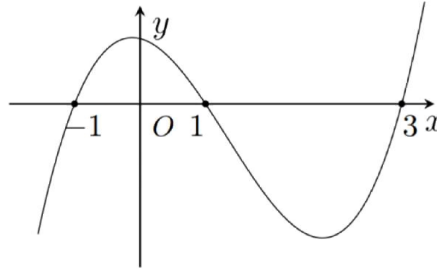
A. $m_0 \in (0; 1)$.

B. $m_0 \in (3; 4)$.

C. $m_0 \in (1; 2)$.

D. $m_0 \in (2; 3)$.

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 106. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $(-1; 2)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $[1; 2)$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

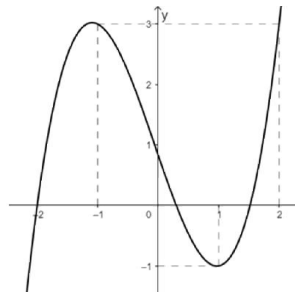
A. $m < 2^{2018}$.

B. $m \leq 2^{2018}$.

C. $m \leq 2^{2019}$.

D. $m < 2^{2019}$.

Câu 108. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ là:

A. $[-1; 3]$.

B. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

C. $(-1; f(\sqrt{2}))$.

D. $(-1; 3]$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và

$m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
Tính tổng bình phương các phần tử của S .
A. 108. B. 58. C. 100. D. 50.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-3; -2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.C	4.D	5.B	6.A	7.A	8.B	9.A	10.B
11.A	12.C	13.D	14.C	15.A	16.C	17.A	18.C	19.D	20.A
21.C	22.A	23.C	24.C	25.A	26.D	27.D	28.B	29.C	30.B
31.D	32.B	34.D	35.C	36.C	37.B	38.B	39.C	40.D	41.B
42.B	43.B	44.C	45.A	46.A	47.D	48.C	49.B	50.B	51.A
52.B	53.C	54.B	55.D	56.A	57.B	58.C	59.B	60.D	61.D
62.C	63.D	64.C	65.B	66.B	67.A	68.D	69.C	70.D	71.A
72.C	73.C	74.C	75.D	76.C	77.B	78.B	79.C	80.C	81.C
82.C	83.A	84.A	85.B	86.C	87.C	88.D	89.D	90.B	91.D
92.D	93.C	94.D	95.C	96.A	97.C	98.D	99.D	100.A	101.D
102.D	103.D	104.A	105.B	106.D	107.B	108.D	109.C	110.C	

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- A.** $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$ **C.** $m \leq 3$ **D.** $m < 3$.

Lời giải

Chọn A

Với $m = 3$ ta có hàm số $y = 1$ là hàm hằng nên $m = 3$ không thỏa mãn bài toán.

Với $m \neq 3$, đặt $t = \cos x$ ta có hàm số $y = f(t) = \frac{t-3}{t-m}$, điều kiện $t \neq m$.

Vì $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow -1 < t < 0$ và hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên để hàm số

$y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì hàm số $f(t) = \frac{t-3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Ta có $f'(t) = \frac{3-m}{(t-m)^2}$, suy ra hàm số $f(t) = \frac{t-3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ khi

$$\begin{cases} 3-m > 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn } m \neq 3 \text{)}.$$

- Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

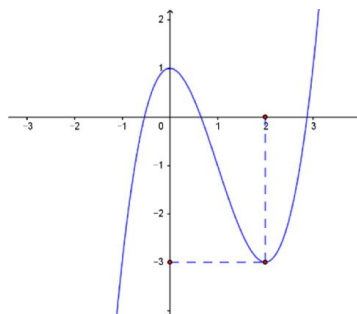
Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m-2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 + 2m \cdot 0 + 3m-2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m > 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 4.

B. 6.

C. 3.
Lời giải

D. 5.

Chọn C

Ta có $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 0$, $x = 2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(2) = -3 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$\text{Khi đó } y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3 - 3x^2 + 1)(x^3 - 3x^2)} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)}.$$

$$\text{Ta có } x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in (2; 3) \end{cases}.$$

Hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)}$ có tập xác định $D = (-\infty; 2] \setminus \{0; x_1; x_2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = +\infty.$$

Suy ra $x = x_1$ và $x = x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 4. Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3) \cdot 2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1 , x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$. Phương trình ban đầu trở thành $t^2 - (2m+3)t + 64 = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực x_1 và x_2 thì phương trình (*) phải có hai nghiệm

$$t_1, t_2 \text{ dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 12m - 247 > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{19}{2} \\ m > \frac{13}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m > \frac{13}{2}.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có $t_1.t_2 = 64 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 64 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24 \Leftrightarrow x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 24 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 8$.

$$\text{Từ } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1.x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có $t_1 + t_2 = 2^{x_1} + 2^{x_2} = 20 = 2m + 3 \Rightarrow m = \frac{17}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

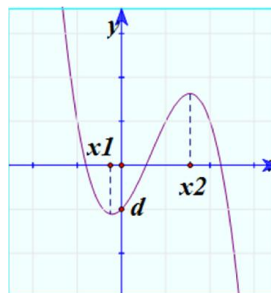
B. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

D. $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty \Rightarrow a < 0$ (1)

Đồ thị cắt trục tung tại $A(0; d) \Rightarrow d < 0$ (2)

Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1.x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\text{Kết hợp (1) và (3) ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{c}{3a} < 0 \\ \frac{-2b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ b > 0 \\ a < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) ta có điều kiện $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$. Chọn B

- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị
A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ (*).

$$\text{Ta có } y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

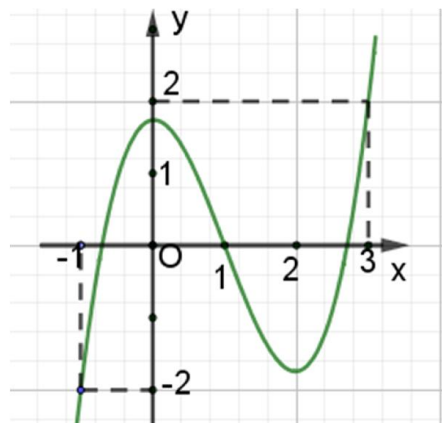
Dựa vào bảng biến thiên để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị thì

$$\begin{cases} m \leq 0 \\ m-5 \geq 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}$$

Vì m nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên $m \in S = \{-10; -9; -8; \dots; -1; 0; 5; 6; \dots; 10\}$.

Suy ra có 17 giá trị của m .

- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

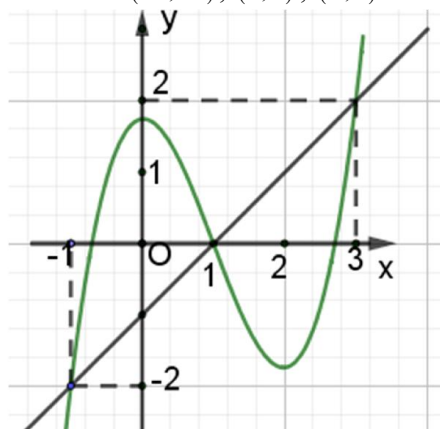
D. 4.

Lời giải

Chọn A

* $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$

Đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y = g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$						

Arrows indicate the flow of the function: $g(-1) \rightarrow g(0) \rightarrow g(1) \rightarrow g(3)$.

* Đồ thị hàm số $y = g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y = g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$							

Arrows indicate the flow of the function: $g(3) \rightarrow g(1) \rightarrow g(0) \rightarrow g(1) \rightarrow g(3)$.

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

C. $2 + \sqrt{5}$.

D. $-1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

➤ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

➤ $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

➤ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

➤ Gọi $A(0; 1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0; -m^2 + 1)$ là trung điểm BC .

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m + m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{2AI}{AB \cdot AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m+m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 & (l) \\ m=1 & (n) \\ m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l) \\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n) \end{cases}$$

Câu 9. Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là

- A.** $P = 3$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x + \cos x, |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, ta có phương trình

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Với $t = 1$, ta có $\sin x_0 \cdot \cos x_0 = \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Rightarrow \sin 2x_0 = 0 \Rightarrow P = 3 + \sin 2x_0 = 3$

Câu 10. Tìm m để các bất phương trình $(3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x \leq 2m - 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A.** $m \leq 0$. **B.** $m \geq 18$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq 8$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3\sin x - 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right) = 5\sin(x - \alpha) \Rightarrow t \in [-5; 5]$

với $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$

Bài toán trở thành: Tìm m để các bất phương trình $t^2 - 2t + 1 \leq 2m$ (1) đúng với mọi $t \in [-5; 5]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 1, t \in [-5; 5]$.

$$f'(t) = 2t - 2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên:

t	-5	1	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	36	0	16

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

Bất phương trình (1) đúng với mọi $t \in [-5; 5] \Leftrightarrow 2m \geq 36 \Leftrightarrow m \geq 18$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn: $AB = \sqrt{5}$.

- A.** $\begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \end{cases}$ **B.** $m = 10$. **C.** $m = -2$. **D.** $m \in (-2; 10)$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và (C) là nghiệm phương trình:

$$\frac{2x-2}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + mx + m + 2 = 0, x \neq -1 (*)$$

Để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 16 > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 + 4\sqrt{5} \\ m < 4 - 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m)$ với $x_1 + x_2 = \frac{-m}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{m+2}{2}$. Vì $AB = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - 2(m+2) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \end{cases}$$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị tham số a để phương trình $|x^3| - 3x^2 - a = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là:

- A.** $-2 < a < 2$. **B.** $-2 < a < 0$. **C.** $-4 < a < 0$. **D.** Không tồn tại a .

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |x|$, điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình trở thành: $t^3 - 3t^2 - a = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = a$ (*)

Bài toán trở thành: Tìm a để phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$ trên $[0; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 - 6t$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	0	-	0
$f(t)$	0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có các giá trị a cần tìm là $-4 < a < 0$

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 12$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 12$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$.

$$y' \geq 0 \text{ với mọi } x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x \geq -m \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} (3x^2 - 12x) \quad (*).$$

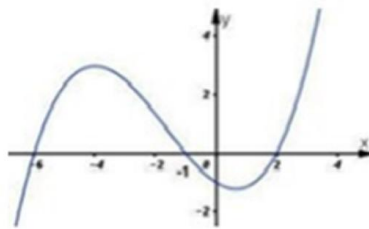
Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 12x$ với $x \in (0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	-12	$+\infty$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow -m \leq -12 \Leftrightarrow m \geq 12.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - x)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta có: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6 < x < -1$ hoặc $x > 2$.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -6 \text{ hoặc } -1 < x < 2.$$

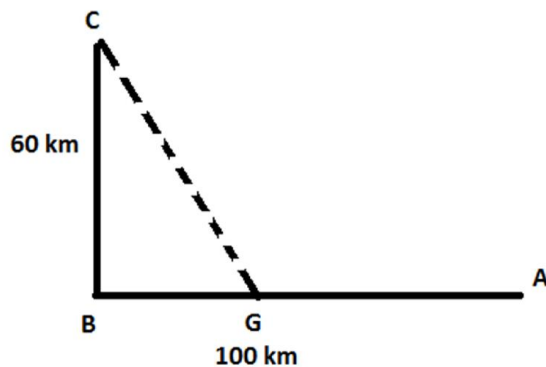
$$\text{Ta có: } y' = [f(x^2 - x)]' = (2x - 1)f'(x^2 - x).$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow (2x - 1)f'(x^2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ f'(x^2 - x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ f'(x^2 - x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 + \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ f'(x^2-x) < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2-x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \\
 + \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ f'(x^2-x) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 < x^2-x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1
 \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$.

- Câu 15.** Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là 60km, khoảng cách từ A đến B là 100km, góc ABC bằng 90° . Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.



- A.** 55 km. **B.** 40 km. **C.** 60 km. **D.** 45 km.

Lời giải

Chọn A.

Gọi khoảng cách từ A đến G là x (km). Ta có $AG = x \Rightarrow BG = (100 - x)$ với $0 \leq x \leq 100$

Xét tam giác vuông CBG có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Chi phí tiền mắc điện là $3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Để chi phí mắc điện ít nhất thì $3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $f(x) = 3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ với $0 \leq x \leq 100$

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3000 = 5000 \frac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{3600+(100-x)^2} = 5 \cdot (100-x)$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (3600+(100-x)^2) = 25(100-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (100-x)^2 = 2025$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100-x=45 \\ 100-x=-45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=55 \\ x=145(l) \end{cases}$$

$$f(0) = 583095,1895 \text{ USD}$$

$$\text{Ta có } f(55) = 540.000 \text{ USD}$$

$$f(100) = 600.000 \text{ USD}$$

Vậy $x = 55 \text{ km}$.

Câu 16. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

A. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. **B.** $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. **C.** $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

TH 1: $\cos x = 0$.

PT (1) $\Leftrightarrow 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$ vô nghiệm (Vì $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$).

TH 2: $\cos x \neq 0$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{TH1: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{4} \Rightarrow k_{\min} = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

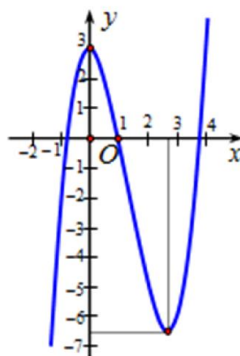
TH2:

$$x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow k_{\min} = 0 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,32$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là: $x_0 = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \alpha \quad (2 < \alpha < 3).$$

$$+ f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = \alpha \quad (2 < \alpha < 3) \end{cases}$$

Do mỗi phương trình $f(x) = 0$; $f(x) = \alpha$ có ba nghiệm phân biệt không trùng nhau và các nghiệm này đều khác 0 và khác α .

Vậy $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2017; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -2017)$.

D. $(2017; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$		$\nearrow 3$	$\searrow -2018$	$\nearrow$	
$f'(x)+2018$		$\nearrow 2021$	$\searrow 0$	$\nearrow$	

$$\text{Ta có: } f'(x) + 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \alpha \quad (\alpha < 0) \end{cases}$$

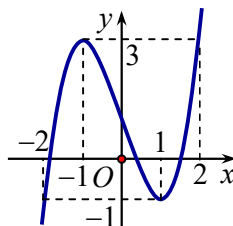
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) + 2018x$.

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$f'(x) + 2018$	-	0	+	+
$f(x) + 2018x$				

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \alpha$ ($\alpha < 0$).

Vậy hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \alpha - 2017$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 8.

B. 6.

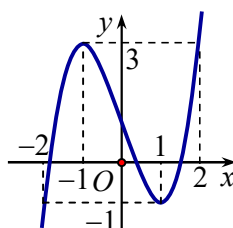
C. 9.

D. 7.

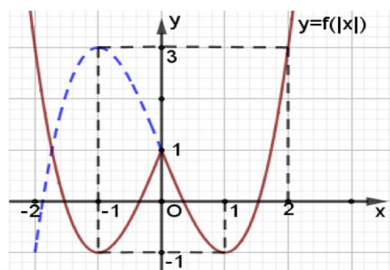
Lời giải

Chọn D

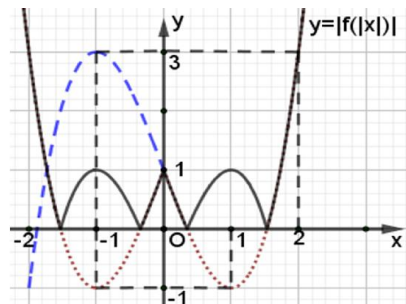
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là:



Và đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 20. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$+ \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3} \text{ do đó đường thẳng } y = -\frac{1}{3} \text{ là đường}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 \text{ đồng biến trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

A. 2028.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Chọn C

* Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên ta tìm m để hàm số đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$* y' = 3\sin^2 x \cos x + 6\sin x \cos x - m \cos x$$

Hàm số đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow m \leq 3\sin^2 x + 6\sin x \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow m \leq \min(3t^2 + 6t), \text{ với } t = \sin x \in [0; 1]$$

hay $m \leq 0$

Mặt khác, m là số nguyên thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; 0\}$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 22. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. vô số điểm.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Vì $(F(x))' = f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x) = x - \cos x$, ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

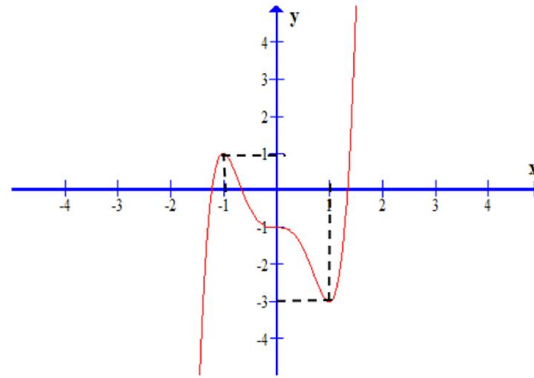
Hơn nữa ta có
$$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0 \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}, \text{ do đó } g(x) = 0 \text{ có duy nhất nghiệm } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	-	0	+

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x| - 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. 2.

B. 1.

C. 3.
Lời giải

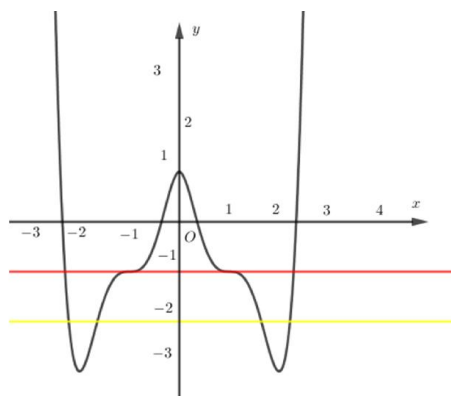
D. 4.

Chọn C

- Hàm số $y = f(|x| - 1)$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

- Ta có
$$f(|x| - 1) = \begin{cases} f(x - 1) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x - 1) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

+) Ta vẽ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f(x - 1)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đã cho bằng cách tịnh tiến (C) sang phải 1 đơn vị và bỏ đi phần đồ thị ở bên trái trục Oy .



+) Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) ở bên phải trục tung

qua trục tung thì được đồ thị của hàm số $y = f(|x| - 1)$.

Khi đó, để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì ta phải có $-3 < m < 1$.

Suy ra, có 3 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Khi đó phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9.

B. 6.

C. 5.
Lời giải.

D. 4.

Chọn C

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\infty$

Ở đây $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ và $f(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Suy ra $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \in (0; 1) \\ f(x) = b \in (1; 3) \\ f(x) = c \in (3; 4) \end{cases}$.

Phương trình $f(x) = a$ có 3 nghiệm.

Phương trình $f(x) = b$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x) = c$ có 1 nghiệm.

Để thấy các nghiệm không trùng nhau nên phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x + 1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m < -1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{m}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -\sqrt{m}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

Nếu $m < 0$ thì tập xác định của hàm số là $D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}}\right] \setminus \{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $-1 \leq m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(-4; -3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (2x+2)f'(x^2+2x)$.

Hàm số $y = f(x^2+2x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow (2x+2)f'(x^2+2x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 > 0 \\ f'(x^2+2x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x+2 < 0 \\ f'(x^2+2x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+2x < -2 \text{ hoặc } x^2+2x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < -1 \\ -2 < x^2+2x < 3 \\ x^2+2x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ hoặc } \begin{cases} -3 < x < -1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} < x < -1 \end{cases}$$

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 5$) để hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y = x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2 = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2 + 2x - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + 2x - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Do m nguyên và $|m| < 5$ nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(3; 4)$.

Lời giải

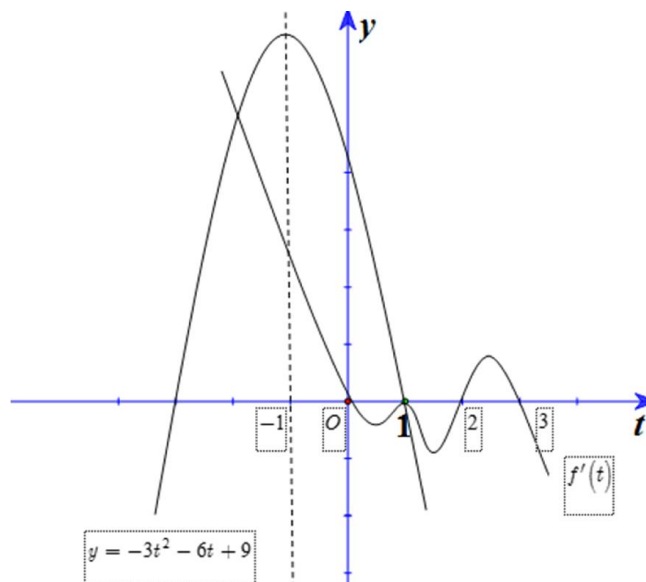
Chọn B

Ta có $y' = f'(x-1) + 3x^2 - 12 = f'(t) + 3t^2 + 6t - 9 = f'(t) - (-3t^2 - 6t + 9)$, với $t = x-1$

Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số

$$y = f'(t); y = -3t^2 - 6t + 9.$$

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(t); y = -3t^2 - 6t + 9$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên, ta có BXD của hàm số $y' = f'(t) - (-3t^2 - 6t + 9)$ như sau: ($t_0 < -1$)

t	$-\infty$	t_0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $t \in (t_0; 1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $x \in (1; 2) \subset (t_0 + 1; 1)$.

Câu 29. Gọi s là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình

$$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \text{ đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Số phần tử của tập } s \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, với $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$. Bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ (1) trở thành $t^3 - t^2 + 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1$ (2)

Bất phương trình (1) đúng với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 1]$. Hay $m \geq \max_{[0; 1]} (t^3 - t^2 + 1) \Leftrightarrow m \geq 1$.

Mặt khác, m là số nguyên thuộc $[0; 2019]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 30. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$.

B. $\frac{112}{4+\pi}$.

C. $\frac{84}{4+\pi}$.

D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x(m)$ ($0 < x < 28$)

$\Rightarrow$ chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x(m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28-x}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784-56x+x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi} m$

- Câu 31.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a+b$ bằng
- A.** -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$.

Mặt khác, $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = ax + b$ hay $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

- Câu 32.** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng
- A.** $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f''(x)$						

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

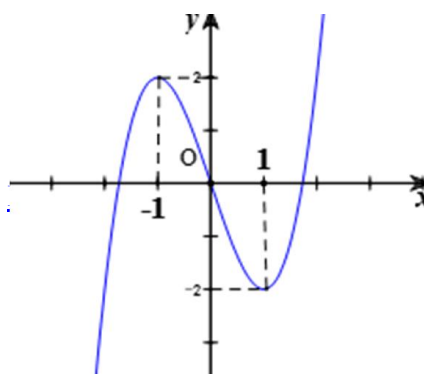
$$\begin{cases} (C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m + 1 \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = -1 \\ 2m+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}.$$

Vậy tổng các phân tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Biết đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f'(x)$

D. 3.

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = -2 \\ -a + b - c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ a + c = -2 \end{cases}$$

Do đó: $g(x) = ax^3 + cx \Rightarrow g'(x) = 3ax^2 + c$

Hàm số đạt cực trị tại $x = \pm 1$ nên $g'(\pm 1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$

Từ đó có: $a = 1; c = -3 \Rightarrow g(x) = f'(x) = x^3 - 3x$

Xét hàm số: $y = f(x) - 2x$

$$y' = f'(x) - 2 = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Dấu của y'

Do đó hàm số
trị.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	-	0	-	0	+

có 1 điểm cực

Câu 34. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m \in (-1; 1]$. B. $m \in (-3; -1]$. C. $m \in (3; 5]$. D. $m \in (1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -3x^2 + 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0; -3m - 1), B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

$$A \text{ và } B \text{ đối xứng qua } d \text{ khi và chỉ khi: } \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3), \vec{u}_d = (8; -1)$$

$$+ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

Với $m = 0$ loại

Với $m = 2$, ta có $I(2; 9) \Rightarrow I \in d$

Với $m = -2$, ta có $I(-2; -11) \Rightarrow I \notin d$

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $[-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

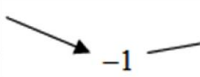
Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m$.

$$y' = -3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			-1	$+\infty$

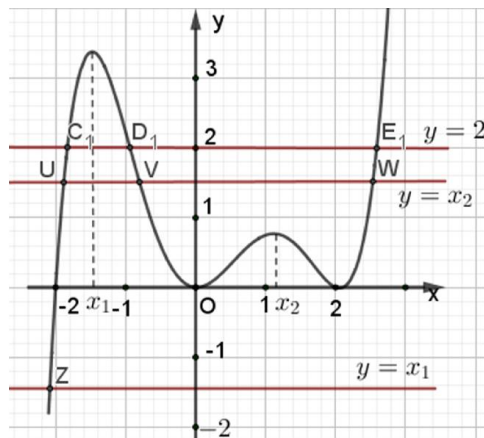
Từ đó: $m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Vậy $m \in (-\infty; -1]$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Câu 36.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?
A. 14. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'[f(x)] \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị có thể thấy: (1) có các nghiệm nghiệm $x = x_1 \in (-2; -1), x = 0, x = x_2 \in (1; 2), x = 2$;

$$\text{Xét phương trình (2) ta có: (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2, x = 0, x = 2$ (trùng mất hai nghiệm với (1)).

Dựng các đường thẳng $y = 2, y = x_1 \in (-2; -1), y = x_2 \in (1; 2)$ ta thấy:

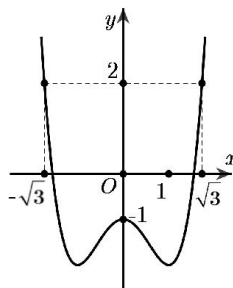
$f(x) = 2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 tương ứng là hoành độ các điểm C_1, D_1, E_1 (xem hình)

$f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất x_6 ứng với hoành độ điểm Z (Xem hình).

$f(x) = x_2$ có 3 nghiệm x_7, x_8, x_9 tương ứng là hoành độ các điểm U, V, W (Xem hình).

Từ đồ thị có thể thấy các điểm nghiệm $-2, 0, 2, x_1, x_2, \dots, x_9$ hoàn toàn phân biệt nên phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 12 nghiệm phân biệt.

- Câu 37.** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

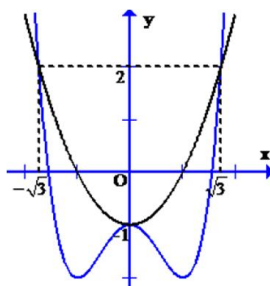
- A.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. **B.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.
C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$. **D.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3[f'(x) - (x^2 - 1)]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0; -1)$, đi qua $A(-\sqrt{3}; 2)$, $B(\sqrt{3}; 2)$.



Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$h'(x)$	$-$	0	$-$
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$		$h(\sqrt{3})$

Với $h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$, $h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$.

Vậy $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực).

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.

- A.** $k_1.k_2 = 3$. **B.** $k_1.k_2 = 4$. **C.** $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. **D.** $k_1.k_2 = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1, x \neq -2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m-6)x - 2m+3 = 0 \quad (*)$$

Có: $\Delta = (m-6)^2 - 8(-2m+3) = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$ và $x = -2$ không thỏa mãn $(*)$ nên phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq -2$ với mọi m .

Suy ra đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 .

Hệ số góc của các tiếp tuyến tại các giao điểm lần lượt là

$$k_1 = y'(x_1) = \frac{1}{(x_1 + 2)^2}; k_2 = y'(x_2) = \frac{1}{(x_2 + 2)^2}$$

$$\text{Theo Vi - et: } x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-2m+3}{2}$$

$$\text{Từ đó: } k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{[(x_1 + 2)(x_2 + 2)]^2} = \frac{1}{[x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4]^2} = \frac{1}{\left[\frac{-2m+3}{2} + 2 \cdot \frac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4$$

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2.

B. 3.

C. 0.
Lời giải

D. 1.

Chọn C

$$4\cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - (2\cos^2 x - 1) + (m-3)\cos x - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có không có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét phương trình $4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0$ (2).

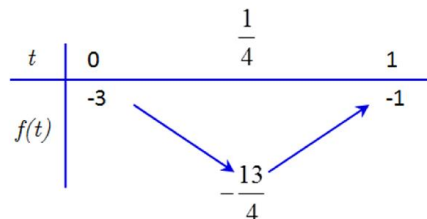
Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó (2) trở thành: $4t^2 - 2t + m - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 2t - 3 = -m$. (3)

Để thỏa mãn yêu cầu thì phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt $t \in (0; 1) \Leftrightarrow$ đồ thị hai hàm số

$\begin{cases} f(t) = 4t^2 - 2t - 3, t \in (0; 1) \\ y = -m \end{cases}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 2t - 3$, với $t \in (0; 1)$.



Từ bảng biến thiên: $-\frac{13}{4} < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < \frac{13}{4}$.

Vậy không có giá trị m nguyên nào thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 2m^3 + 2m^2 - 5m + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m < 12$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$

A. 8.

B. 9.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 2m^3 + 2m^2 - 5m + 3$ có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$

Vì hàm số đã cho là hàm bậc 3 với hệ số của x^3 là $-\frac{1}{3} < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn

$$x_1 \leq 1 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot y'(1) \leq 0 \\ -1 \cdot y'(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \geq 0 \\ 7m - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Vậy có tất cả 10 giá trị nguyên của $m < 12$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị như hình vẽ.

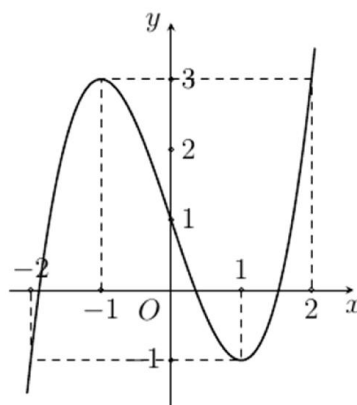
Khi đó phương trình $[f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 8.



Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

$$\square f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\square f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = b \in (1; 2) \end{cases}.$$

$$\square f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1$.

$$g'(x) = 3f'(x) \cdot [f(x)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = \pm 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	a	-1	0	1	b	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$								
		3		19		3		$+\infty$
	$-\infty$		$g(a)$		-1		$g(b)$	

Do $f(a) = f(b) = 1$ nên $g(a) = g(b) = -1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 7 điểm phân biệt. Vậy phương trình $[f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1 = 0$ có 7 nghiệm.

Cách 2: Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = b \in (1; 2) \end{cases}$.

Đặt $t = f(x): [f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-2; -1) \\ t = 0 \\ t = b \in (1; 2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy:

□ đường thẳng $y = a (a \in (-2; -1))$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm.

□ đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm.

□ đường thẳng $y = b (b \in (1; 2))$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm.

Vậy phương trình $[f(x)]^3 - 3[f(x)] + 1 = 0$ có 7 nghiệm.

Câu 42. Xét $x; y$ thuộc đoạn $[1; 3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{y} + \frac{4y}{x}$. Với $M + m = \frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Tính $a + b^3$.

A. $a + b^3 = 93$. **B.** $a + b^3 = 76$. **C.** $a + b^3 = 77$. **D.** $a + b^3 = 66$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{y}{x}$. Do $x; y \in [1; 3]$ nên $t \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}$ trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in \left[\frac{1}{3}; 3\right] \\ t = -2 \notin \left[\frac{1}{3}; 3\right] \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-		-	0	+
$f(t)$				$\frac{37}{3}$	4	$\frac{13}{3}$	

Vậy: $M = \max_{\left[\frac{1}{3}; 3\right]} f(t) = \frac{37}{3}$ tại $t = \frac{1}{3}$.

$m = \min_{\left[\frac{1}{3}; 3\right]} f(t) = 4$ tại $t = 2$.

Do đó: $\frac{a}{b} = M + m = \frac{49}{3} \Rightarrow a = 49; b = 3.$

- Câu 43.** Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì:
- A.** $f(x_0) > \frac{1}{4}.$ **B.** $f(x_0) \leq \frac{1}{4}.$ **C.** $f(x_0) \leq \frac{1}{2}.$ **D.** $f(x_0) < \frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn B

Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k_1 = f'(x_0), k_2 = g'(x_0).$

$$\text{Ta có } \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \Rightarrow k_3 = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

$$\text{Mặt khác } k_1 = k_2 = k_3 \neq 0 \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2} = k$$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot g(x_0) - k \cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2} = k \Leftrightarrow [g(x_0)]^2 - g(x_0) + f(x_0) = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có nghiệm khi $1^2 - 4f(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{1}{4}.$

Vậy $f(x_0) \leq \frac{1}{4}.$

- Câu 44.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2	$-\infty$	$+\infty$	3

Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 2 nghiệm. **B.** 4 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

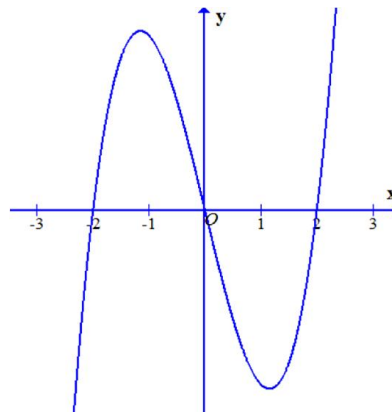
Từ giả thiết, ta lập các bảng sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$ f(x) $	2 ↘ 0 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘ 3 ↗	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$3 f(x) -10$	-4 ↘ -10 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘ -1 ↗	$+\infty$

Vậy phương trình $3|f(x)|-10=0$ có 3 nghiệm.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. **D.** $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = -2 \\ x^2 + 1 = 2 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f'(x^2+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 < -2 \\ 0 < x^2+1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$2x$		$-$	$ $	$+$	
$f'(x^2+1)$	$+$	0	$-$	$ $	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ đó ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

- Câu 46.** Cho hàm số $y = \frac{4x-1}{2-x}$ (C) và đường thẳng (d): $y = -x + m$. Khi d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Giá trị nhỏ nhất của AB đạt khi m lấy giá trị m_0 . Tìm AB và m_0
- A.** $\min AB = 2\sqrt{14}, m_0 = -2$. **B.** $\min AB = 2\sqrt{14}, m_0 = 2$.
C. $\min AB = 2\sqrt{6}, m_0 = 2$. **D.** $\min AB = 2\sqrt{6}, m_0 = -2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{4x-1}{2-x} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - (m+6)x + 2m+1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

(C) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(*)} > 0 \\ 2^2 - 2(m+6) + 2m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó hai giao điểm là: $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (*).

Theo định lý Vi et: $x_1 + x_2 = (m+6), x_1 x_2 = 2m+1$.

Do đó:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}.$$

$$AB = \sqrt{2(m^2 + 4m + 32)} = \sqrt{2[(m+2)^2 + 28]} \geq \sqrt{2 \cdot 28} = 2\sqrt{14}.$$

$$AB_{\min} = 2\sqrt{14}, \text{ đạt được khi } m = -2.$$

- Câu 47.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN bằng

- A.** 2. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Gọi $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$. Vì hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị nên

$$x_1 < 1 < x_2.$$

Đặt $x_1 = 1 - a$, $x_2 = 1 + b$ điều kiện $a > 0$, $b > 0$.

Khi đó ta có: $MN^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)^2$ suy ra $MN^2 = (a+b)^2 \left(1 + \frac{4}{a^2b^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có: $MN^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \frac{4}{ab}$ suy ra $MN^2 \geq 16$

Vậy $MN \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ 1 = \frac{4}{a^2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$

hay $M(1-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$ và $N(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$

A. 1.

B. Vô số.

C. 2.
Lời giải

D. 3.

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0 \forall x \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5m-2}{(x+5m)^2} > 0 \forall x \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{1; 2\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 49. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 2.

C. 3.
Lời giải

D. 1.

Chọn B

Xét $y = f(x) = x^3 - 3x + m$ có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

Ta có:

$$\min_{x \in [0; 2]} f(x) = \min \{f(0); f(1); f(2)\} = \min \{m; m-2; m+2\} = m-2.$$

$$\max_{x \in [0; 2]} f(x) = \max \{f(0); f(1); f(2)\} = \max \{m; m-2; m+2\} = m+2.$$

$$\text{Do đó: } \max |f(x)| = \max \{|m-2|; |m+2|\} = 3.$$

□ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m-2| = 3 \\ |m+2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \\ |m+2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow m = -1$$

□ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m+2|=3 \\ |m-2|\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-5 \Rightarrow m=1 \\ |m-2|\leq 3 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu của đề.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012.

B. 2011.

C. 2009.

D. 2010.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f(1-x)]' = -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)[(1-x)^2-6(1-x)+m] \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5). \end{aligned}$$

Điều kiện $g'(x) \leq 0$ với mọi $x < -1 \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 9-m \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 9-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 9.$$

Do m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ nên suy ra $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2011 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4		3		3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$.

A. 2014.

B. 2015.

C. 2019.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Trên $[0; 5]$, ta có: $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x} \Leftrightarrow m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}.$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0; 5]$.

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}} = \frac{3\sqrt{10-2x} - 2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}\sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0; 5]$.

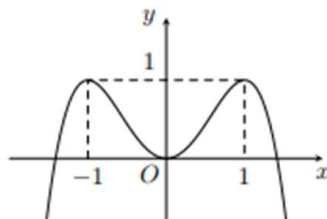
Do $g(0) = \sqrt{10}$, $g(3) = 5$ và $g(5) = \sqrt{15}$ nên $\max_{[0;5]} g(x) = g(3) = 5$.

Mặt khác $\min_{[0;5]} f(x) = f(3) = 1$ nên

$$m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}, \forall x \in [0; 5]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0;5]} \left(2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)} \right) = 2019 - \frac{5}{1} = 2014.$$

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

$$\text{Từ đồ thị} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x \text{ và } f(\sqrt{f(x)}) = f^2(x) + 2f(x).$$

$$\text{Như vậy phương trình } f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0 \text{ với } f(x) \geq 0.$$

Đặt $t = f(x) (t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1$.

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0; 1)$.

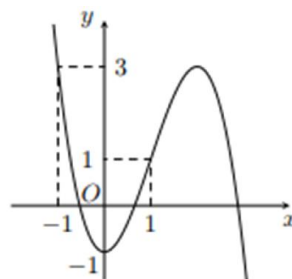
Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1; 4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc

$(0; 1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0; 1)$. Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0; 1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m-2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2019-m. \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x = k > 1 & (2) \end{cases}$$

PT(1) có 2 nghiệm thỏa mãn, PT(2) vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(\cos x) = 2019-m$ ($2019-m \neq 1$) có thêm 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Nhận xét:

+ Với mỗi $t \notin [-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t \in (-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

+ Với $t = -1$, phương trình $\cos x = t$ có đúng 1 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

Như vậy, $-1 < 2019-m \leq 1 \Leftrightarrow 2018 \leq m \leq 2020$ (do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2018 \vee m = 2019$).

Câu 54. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1} \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của S là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = m^2(4x^3 - 3x^2) - m(3x^2 - 2x) - 1 + e^{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(1) = 0$ nên từ giả thiết ta có $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = f(1)$.

$$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0. \end{cases}$$

□ Với $m = 0$ ta có $f(x) = e^{x-1} - x \Rightarrow f'(x) = e^{x-1} - 1$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Trường hợp $m = 0$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

□ Với $m = 1$ ta có $f(x) = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + e^{x-1} = (x-1)^2 x^2 + e^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $m = 1$ yêu cầu bài toán cũng được thỏa mãn.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 6f(x-1) - 2x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = 6f(x-1) - 2x^3 + 3x^2$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $g'(x) = 6f'(x-1) - 6x^2 + 6x = 6[f'(x-1) - x^2 + x]$.

Xét dấu của $f'(x-1)$: ta có $f'(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 0 \\ x-1=1 \\ x-1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x=2 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

(trong đó $f'(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$)

Dựa vào dấu của $f'(x-1)$ và $(-x^2 + x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2+x$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	chưa xác định	

Như vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 56. Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là:

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. **B.** $1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

C. $m \neq 1$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = (m+1)x^2 - 2mx - (m-3)$

Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: Với $m = -1$ thì $f(x) = 2x + 4$

Khi đó $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ không thỏa mãn nên loại $m = -1$

TH2: Với $m \neq -1$, $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$a > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$\Delta' = m^2 + (m+1)(m-3) = 2m^2 - 2m - 3$

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ suy ra } \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Câu 57. Số giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;5)$ là

A. 18.

B. 9.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx - (2m+1), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2m+1 \end{cases}$$

Nếu $2m+1 \leq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m+1; -1]$. Suy ra hàm số không nghịch biến trên khoảng $(0;5)$. $\Rightarrow m \leq -1$ không thỏa mãn.

Nếu $2m+1 > -1 \Leftrightarrow m > -1$ thì $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 2m+1]$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;5)$ thì ta có $2m+1 \geq 5 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên $m \in \{2;3;4;\dots;10\}$. Có 9 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 58. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x - 2018|.$$

A. $-\frac{1}{3}$.

B. -2018.

C. $-\frac{2017}{2}$.

D. -2017.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |\sin x| + |\cos x|$, ta có: $t^2 = 1 + |\sin 2x| \Rightarrow |\sin 2x| = t^2 - 1$,

$$\text{Ta có: } \begin{cases} t > 0 \\ 1 \leq t^2 = 1 + |\sin 2x| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad (1)$$

Với điều kiện (1) bất phương trình đã cho đưa về:

$$m(t+1) \leq t^2 + t - 2019 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t - 2019}{t+1} \quad (2)$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (2) đúng với mọi $t \in [1; \sqrt{2}]$.

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 + t - 2019}{t+1}, t \in [1; \sqrt{2}]$$

$$\text{Có } f'(t) = 1 + \frac{2019}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}]$$

Ta có: (2) đúng với mọi $t \in [1; \sqrt{2}]$ khi và chỉ khi:

$$m \leq f(t), \forall t \in [1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \min_{t \in [1; \sqrt{2}]} f(t) \Leftrightarrow m \leq f(1) \Leftrightarrow m \leq -\frac{2017}{2}.$$

$$m = -\frac{2017}{2}$$

Số thực m lớn nhất thỏa yêu cầu bài toán là $-\frac{2017}{2}$.

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 5 .

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: hàm số $g(x) = f(|x|)$ là hàm số chẵn, đồ thị đối xứng qua trục Oy . Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì $f(x)$ phải có hai điểm cực trị dương.

$$f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

+ Nếu phương trình (2) có nghiệm $x=1$ thì $m=1$ hoặc $m=2$.

Với $m=1$, Phương trình (1) có hai nghiệm $x=1, x=0$ nhưng đạo hàm chỉ đổi dấu qua $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị. Suy ra hàm số $g(x) = f(|x|)$ cũng có một điểm cực trị (loại).

Với $m=2$ cũng tương tự, hàm số $g(x) = f(|x|)$ không có 5 điểm cực trị (loại).

+ Nếu phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (1) có một nghiệm $x=1$. Trường hợp này ta cũng thấy không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu phương trình (2) có nghiệm kép, $\Delta = 12m^2 - 12m + 1 = 0$. Ta thấy $m \notin \mathbb{Z}$ (loại).

+ Nếu phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , giả sử $x_1 < x_2$. Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị, phương trình (2) cần có nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2, x_2 \neq 1$.

$$\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ x_2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{3; 4; 5\}$$

$$\text{Trường hợp } x_1 = 0, \text{ thay vào (2) ta có } m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

$$m = 1 \text{ (đã xét)}$$

$$m = 6 \text{ thì } x_2 = -19 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } m \in \{3; 4; 5\}.$$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 64, với O là gốc tọa độ.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = (x^3 - 3mx^2 + 4m^3)' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m).$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$\text{Tọa độ hai điểm cực trị là } A(0; 4m^3) \text{ và } B(2m; 0) \Rightarrow \begin{cases} OA = |4m^3| \\ OB = |2m| \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |4m^3| |2m| = 4m^4 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số

$$y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m} \text{ nghịch biến trên } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

A. 2018.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m} \quad (1).$$

Đặt $\cot x = t$. Ta có $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng

$$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \text{hàm số } y = \frac{t^2 - 2mt + 2m^2 - 1}{t - m} \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 1)$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{t^2 - 2mt + 1}{(t - m)^2} \geq 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2mt + 1 \geq 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}, t \in (0; 1) \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}, t \in (0; 1)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ (loại).

Bảng biến thiên:

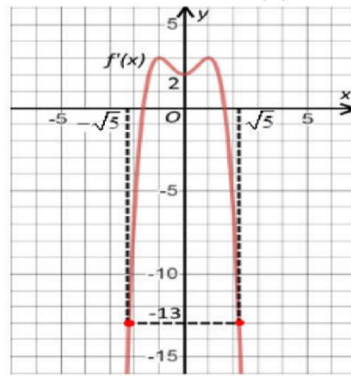
t	
$f'(t)$	
$f(t)$	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) > 1, \forall t \in (0; 1)$.

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

mà $m \in [-2019; 2019], m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; 0; 1\}$ nên có 2021 giá trị m thỏa mãn.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0 \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

- A.** $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. **B.** $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5})$. **C.** $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. **D.** $m \geq \frac{2}{3}f(0)$.

Lời giải

Chọn C

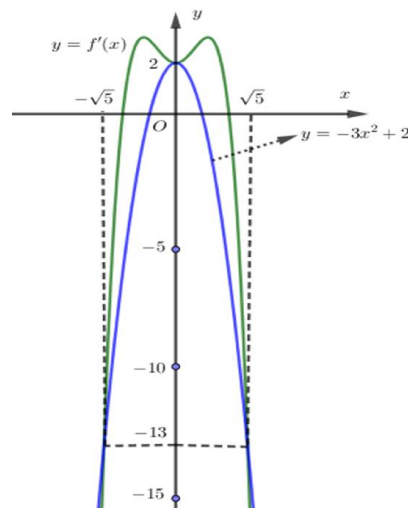
Ta có $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$$\Leftrightarrow h(x) = f(x) + x^3 - 2x - 3\sqrt{5} \leq \frac{3m}{2}, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

$$\Leftrightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) \leq \frac{3m}{2}.$$

Ta có: $h'(x) = f'(x) + 3x^2 - 2$.

Vẽ 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = -3x^2 + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ:



Nhận xét: $f'(x) \geq -3x^2 + 2, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow h'(x) \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$$\Rightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) \leq \frac{3m}{2} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$$

Câu 63. Với các giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

A. $m > 2$.

B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m > 2 \end{cases}$.

C. $m \leq 1$.

D. $1 \leq m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Vậy $1 \leq m < 2$.

- Câu 64.** Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có:
- A.** $m \in (1; 2)$. **B.** $m \in (-2; -1)$. **C.** $m \in (0; 1)$. **D.** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt là phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều đó tương đương

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 + 2m \cdot 1 + 2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (2m^2 - 1) > 0 \\ 2m^2 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \{0\}.$$

Với điều kiện trên, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 1 \end{cases}$$

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x - 2m^2 - 2m + 1}{(x - 1)^2} = 1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x - 1)^2}$. Theo yêu cầu bài toán thì

$$y'(x_1)y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_1 - 1)^2}\right) \left(1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_2 - 1)^2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - (2m^2 + 2m) \left(\frac{1}{(x_1 - 1)^2} + \frac{1}{(x_2 - 1)^2} \right) + \frac{2m^2 + 2m}{(x_1 - 1)^2} \frac{2m^2 + 2m}{(x_2 - 1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - (2m^2 + 2m) \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2}{(x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1)^2} + \left(\frac{2m^2 + 2m}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \right)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - (2m^2 + 2m) \frac{4m^2 - 2(2m^2 - 1) - (-2m) + 2}{(2m^2 - 1 + 2m + 1)^2} + \left(\frac{2m^2 + 2m}{2m^2 - 1 + 2m + 1} \right)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2m+4}{2m^2+2m} + 1 = -1 \Leftrightarrow \frac{2m+4}{2m^2+2m} = 3 \Leftrightarrow 6m^2 + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \\ m = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

So với điều kiện ta nhận $m = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \in (0;1)$.

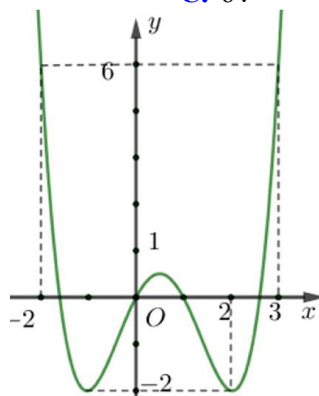
Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 7.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$, $x \in [-1;2]$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	-2	2

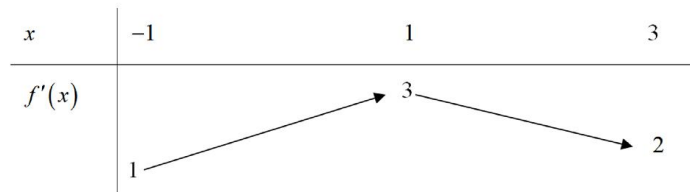
Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t \in (-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0$, $m = -1$.

Câu 66. Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$ là



- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

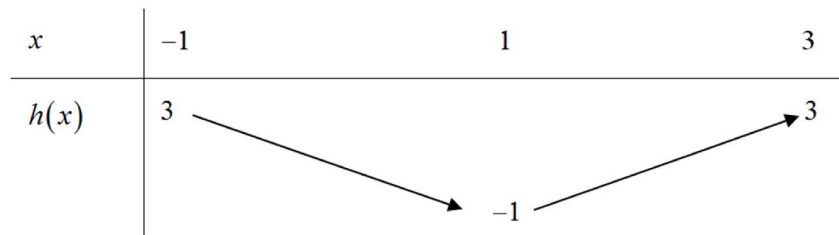
Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - m > 0$.

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - m$. Suy ra $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$.

Ta xét hàm $h(x) = x^2 - 2x$ có bảng biến thiên dưới đây :



Từ bảng biến thiên của $f'(x)$ và $h(x)$ ta suy ra

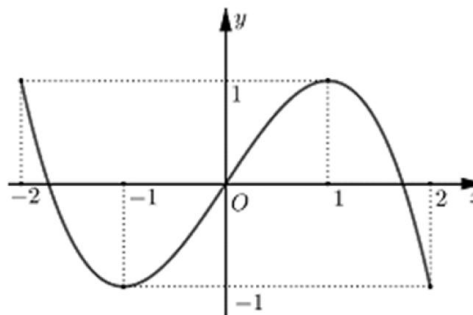
$$g'(x) = f'(x) + h(x) = f'(x) + x^2 - 2x > 0, \forall x \in (-1; 3),$$

Suy ra $g'(x) = f'(x) + h(x) = f'(x) + x^2 - 2x > 0, \forall x \in (0; 3)$

Suy ra hàm số $f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Suy ra để $f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - m > 0, \forall x \in (0; 3)$ thì $f(0) + \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq f(0)$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$.

Ta có $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$.

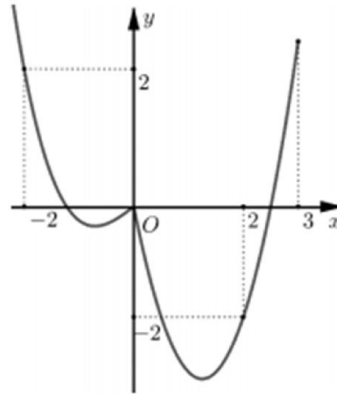
Do $\cos x \in [-1; 1]$ và từ đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(\cos x) \in [-1; 1]$.

Từ đó suy ra $|\sin x \cdot f'(\cos x)| \leq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \Rightarrow g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq -1 + 2x - 1 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x > 1. \text{ Vậy hàm số đồng biến trên khoảng } (1; 2).$$

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?

A. 6.

B. 2.

C. 5.

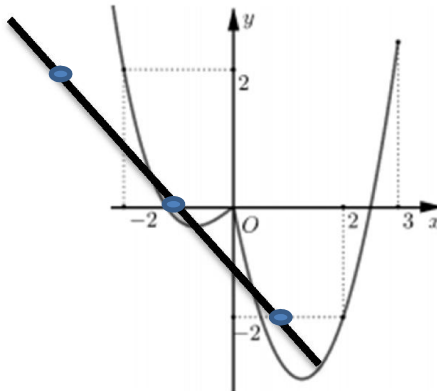
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$ trên khoảng $(-2; 3)$.

$$g'(x) = f'(x) + x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$



$$g(0) = f(0) + \frac{1}{2} \cdot 0 - f(0) = 0$$

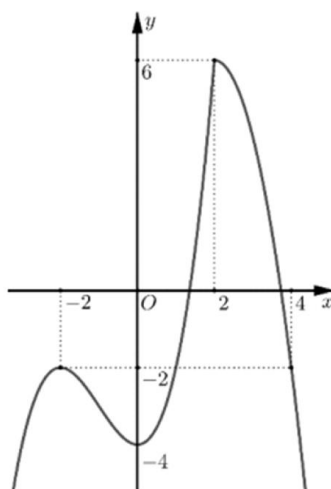
Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	0	2	3
$q'(x)$	-	0	-	0
$q(x)$	$g(-2)$		$g(2)$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(-2;3)$ thì $g(x)$ có duy nhất một điểm cực trị $x=2$.

Do đó phương trình $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm trên khoảng $(-2;3)$. Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có nhiều nhất $1+2=3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2,2]$.



A. 11.

B. 9.

C. 8.
Lời giải

D. 10.

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m \Leftrightarrow \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+2\left(\frac{x}{2}+1\right)-2=m$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{2}+1=t, \text{ với } x \in [-2,2] \text{ thì } t \in [0,2]$$

Bài toán tương đương hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f(t)+2t-2=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0,2]$.

$$\text{Xét hàm số } h(t)=\frac{1}{3}f(t)+2t-2 \text{ có } h'(t)=\frac{1}{3}f'(t)+2$$

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0,2)$ nên $f'(x)>0, \forall x \in (0,2)$.

Do đó $h'=\frac{1}{3}f'(t)+2>0$ với $\forall t \in [0,2]$ hay hàm số $h(t)=\frac{1}{3}f(t)+2t-2$ đồng biến trên $[0,2]$.

$$\text{Suy ra } \max_{[0,2]} h(t)=h(2)=\frac{1}{3}f(2)+2.2-2=4; \min_{[0,2]} h(t)=h(0)=\frac{1}{3}f(0)+2.0-2=-\frac{10}{3}.$$

Để phương trình $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0, 2]$ thì $\frac{-10}{3} \leq m \leq 4$

Hay $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m .

Câu 70. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$.

Ta có: $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \in (-\infty; -6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -3m \notin (-\infty; -6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ -3m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, bất phương trình

$f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m$ (với m là tham số) thỏa mãn với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m \leq f(0) + 1$.

B. $m > f(0) - 1$.

C. $m < f(0) + 1$.

D. $m \geq f(0) + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f(x) > \ln(\cos x) - e^{\pi x} + m, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m < f(x) - \ln(\cos x) + e^{\pi x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Do $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

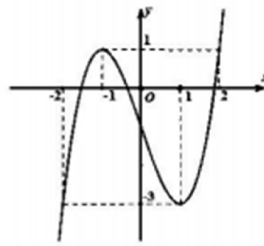
Xét $g(x) = f(x) - \ln(\cos x) + e^{\pi x}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$g'(x) = f'(x) + \tan x + \pi e^{\pi x} > 0 + \tan 0 + \pi e^0 = \pi, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra $g(x)$ đơn điệu tăng trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow m \leq f(0) + \tan 0 + e^{\pi \cdot 0} = f(0) + 1.$$

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6.

B. 5.

C. 7.
Lời giải

D. 4.

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = x_1 \in (-2; -1) \\ f(x) - 1 = x_2 \in (-1; 0) \\ f(x) - 1 = x_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + x_1 \in (-1; 0) \\ f(x) = 1 + x_2 \in (0; 1) \\ f(x) = 1 + x_3 \in (2; 3) \end{cases}$$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x) = 1 + x_1 \in (-1; 0)$; $f(x) = 1 + x_2 \in (0; 1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = 1 + x_3 \in (2; 3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có 7 nghiệm.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị

A. 6.

B. 8.

C. 9.
Lời giải

D. 7.

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, là hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số của x^4 dương. Ta có số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số lần đồ thị hàm số $y = f(x)$ xuyên qua Ox . Do vậy, để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì xảy ra 2 trường hợp

TH1. Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị và không xuyên qua Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ y_{CT} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ m^2 - 2m^2 + 4 - 2m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

m là số nguyên $m \in (-10; 10)$ nên $m = 1$

TH2. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị và xuyên qua Ox đúng 2 lần

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ y_{CT} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m \geq 0 \\ 4 - 2m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -\sqrt{2} \text{ hoặc } m \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

m là số nguyên $m \in (-10; 10)$ nên $m = -9; -8; \dots; -2$

Kết luận: Có 9 số m thỏa mãn

Câu 74. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (4;7).

B. (-2;1).

C. (1;4).

D. (7;10).

Lời giải

Chọn C

Ta có $P - \frac{5}{4} = P - \frac{1}{4} \cdot 5 = (x^2 + xy + 2y^2) - \frac{1}{4}(3x^2 - 2xy - y^2) = \left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Suy ra $P \geq \frac{5}{4}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3y}{2} = 0 \\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ 32y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{-3\sqrt{10}}{8}; \frac{\sqrt{10}}{8}\right)$

hoặc $(x; y) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{8}; -\frac{\sqrt{10}}{8}\right).$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{4}.$

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0).$

B. (4;6).

C. (-1;5).

D. (0;4).

Lời giải

Chọn D

+ Nhìn vào bảng biến thiên ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3; f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$

+ Ta có: $y = f(3-x) \Rightarrow y' = [f(3-x)]' = -f'(3-x).$

$[f(3-x)]' = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -1 \\ 3-x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$[f(3-x)]' > 0 \Leftrightarrow -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 3-x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$[f(3-x)]'$	-	0	+	0	-
$f(3-x)$	$+\infty$	$\blacktriangleright CT$	$\blacktriangleright CD$	$\blacktriangleleft -\infty$	

Vậy hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng (0;4).

Câu 76. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \cos x + 1}{\cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right).$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \cos x, x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nên Ycvt đưa về tìm tất cả các giá trị

thực của tham số m để hàm số $g(t) = \frac{mt+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ -m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right).$$

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+2)x + 3(m^2 + 4m)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+2)x + 3(m^2 + 4m) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ (1)

Ta có: $\Delta' = (m+2)^2 - (m^2 + 4m) = 4 > 0$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = m \\ x = m + 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+4$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
		0	$+$	

y

$-\infty$

$y(m)$

$y(m+4)$

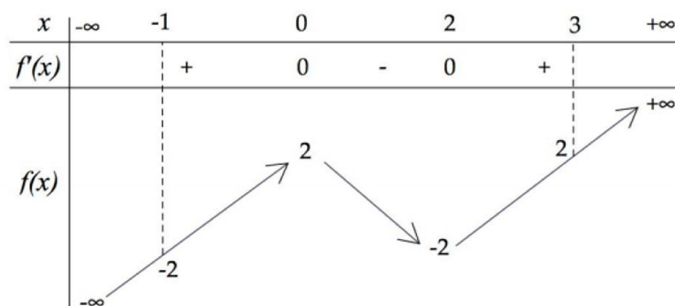
$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra đồ hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset (m;m+4) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+4 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực?

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2\sin x + 1$ suy ra $t \in [-1; 3]$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = f(m)$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.

$$\Leftrightarrow \min_{[-1; 3]} f(t) \leq f(m) \leq \max_{[-1; 3]} f(t).$$

Từ bảng biến thiên suy ra $-2 \leq f(m) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Suy ra có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 79. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 3.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi $A = B$.

Và có $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2}$ (2). Dấu "=" xảy ra khi $A = -B$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + ax + b$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}$.

Trường hợp một: $-\frac{a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]$. Khi đó $M = \max\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có $M \geq |4 + 2a| > 8$.

Trường hợp hai: $-\frac{a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]$. Khi đó $M = \max\left\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có $M \geq \max\left\{|5 + a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\}$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8}|20 + 4a + a^2| \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8}|16 + (a+2)^2|.$$

Suy ra $M \geq 2$.

$$\text{Vậy } M \text{ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là } M = 2 \text{ khi } \begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{a^2}{4} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } a + 2b = -2 + 2 \cdot (-1) = -4.$$

Câu 80. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị.

A. $(1; +\infty)$.

B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta xét hàm số } y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5.$$

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m.$$

$$\Delta' = (2m+1)^2 - 3 \cdot 3m = 4m^2 - 5m + 1.$$

Để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị thì hàm số

$$y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5 \text{ phải có hai điểm cực trị trong đó chỉ có 1 cực trị dương.}$$

Hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có 2 điểm cực trị khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 5m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty). \quad (1)$$

Trong 2 điểm cực trị chỉ có 1 điểm cực trị dương nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: Một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương.

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào } y' = 0 \text{ ta được } 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

$$\text{Thay } m = 0 \text{ vào } y' = 0 \text{ ta được } y' = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn).}$$

$$\Rightarrow m = 0 \quad (1)$$

TH2: Một điểm cực trị âm, một điểm cực trị dương.

Hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có một điểm cực trị âm và một điểm cực trị dương khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3 \cdot 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $m \leq 0 \Rightarrow m \in (-\infty; 0]$.

Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a = -1; b = 2$.

B. $a = 4; b = 4$.

C. $a = 1; b = 2$.

D. $a = -1; b = -2$.

Lời giải

Chọn C

$$+ b = 0 \Rightarrow \text{đồ thị hàm số } y = \frac{ax+1}{bx-2} \text{ không có tiệm cận.}$$

$$+ b \neq 0, \text{ tập xác định của hàm số } y = \frac{ax+1}{bx-2} \text{ là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{b}\right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}} y = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}} \frac{ax+1}{bx-2} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ (tùy theo } b > 0 \text{ hay } b < 0).$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \sqrt[3]{3}$.

D. $m = \sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$D = \mathbb{R}.$$

$$y' = 4x^3 - 4mx.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

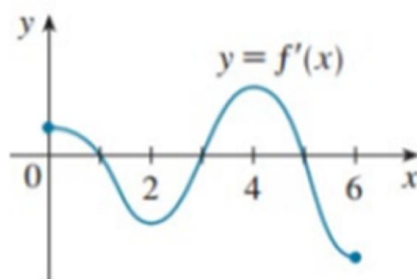
Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m > 0$ (1).

Khi đó đồ thị có các điểm cực trị $A(0; m^4 + 2m)$; $B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$ và $C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$.

Để tam giác ABC đều thì $AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{cases}$. So với điều kiện

$$(1) \Rightarrow m = \sqrt[3]{3}.$$

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0; 6]$ ta có BBT:

x	0	1	3	5	6
-----	---	---	---	---	---

$f'(x)$	+	0 -	0 +	0 -	
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(5)$	$f(6)$

Xét hàm số $y = [f(x)]^2$ trên $[0; 6]$, ta có:

$$y' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

• $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 1; x = 3; x = 5$.

• $f(x) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm giả sử là $x_1; x_2; x_3; x_4 \Rightarrow 0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 5 < x_4 < 6$.

Khi đó ta có bảng xét dấu:

x	0	x_1	1	x_2	3	x_3	5	x_4	6
$f'(x)$	+	+	0 -	-	0 +	+	0 -	-	
$f(x)$	-	0 +	+	0 -	-	0 +	+	0 -	
$[f^2(x)]'$	-	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +	

Do đó, đồ thị hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 84. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ là:

A. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$, $N(-x_0; -y_0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta có:

$$y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2 \quad (1)$$

$$-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2 \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2) về theo về ta có: } -6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện cần: Đồ thị hàm số tồn tại M, N thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Do vậy ta có:

$$\frac{m^2 - 1}{-3m} > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ: Với m thỏa mãn điều kiện trên suy ra phương trình (*) có hai nghiệm

$$x_1 = \sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}}; x_2 = -\sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}}$$

$$\Rightarrow y_1 = \left(\frac{1 - m^2}{3m}\right) \sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}} + 3(m^2 - 1) \sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}}$$

$$y_2 = -\left(\frac{1 - m^2}{3m}\right) \sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}} - 3(m^2 - 1) \sqrt{\frac{1 - m^2}{3m}}$$

Vậy $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$.

Chọn đáp án **A.**

Câu 85. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ là

A. $m = 3$.

B. $2 < m < 3$.

C. $2 \leq m \leq 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m \Leftrightarrow \left| \tan^4 x - 2(\tan^2 x + 1) \right| = m \Leftrightarrow \left| \tan^4 x - 2\tan^2 x - 1 \right| = m (*)$.

Đặt $t = \tan^2 x \Rightarrow t' = 2 \tan x (\tan^2 x + 1)$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

BBT

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
t'	-	0	+
t	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra với mỗi $t \in (0; +\infty)$ cho ta hai nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ và $t = 0$ cho ta một nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Với cách đặt trên ta có $|t^2 - 2t - 1| = m (**)$

Phương trình (*) có sáu nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ thì phương trình (**) có ba nghiệm phân biệt $t \in (0; +\infty)$

Đặt $f(t) = t^2 - 2t - 2, t \in (0; +\infty)$, ta có

$f'(t) = 2t - 2, t \in (0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
t'	-	0	+	
$f'(t)$	-2	-3	0	$+\infty$

Từ đây ta suy ra BBT của hàm $|f(t)|$

x	0	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$ f'(t) $	-	0	+	
$ f(t) $	2	3	0	$+\infty$

Từ BBT ta suy ra $2 < m < 3$.

Câu 86. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$.
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $2M = 3m$. **B.** $M - m = \frac{2}{3}$. **C.** $M - m = 1$. **D.** $M - m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$.

Ta có $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}, y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

$$y(-1) = 0, y(0) = 1, y(1) = \frac{2}{3}.$$

Vậy $M = 1$ và $m = 0 \Rightarrow M - m = 1$.

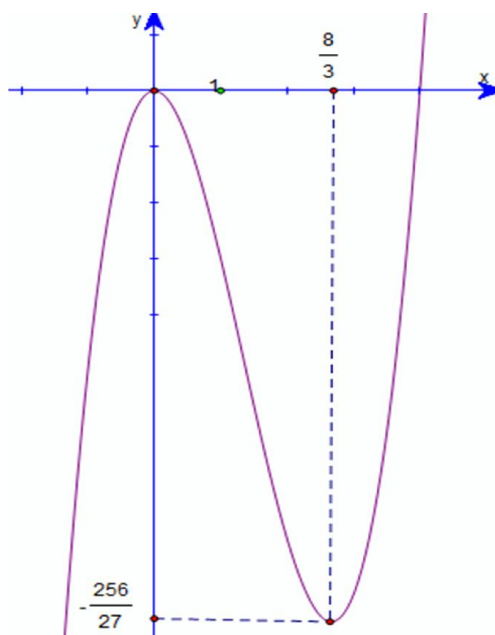
Câu 87. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ có bao nhiêu cực trị?

- A.** 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

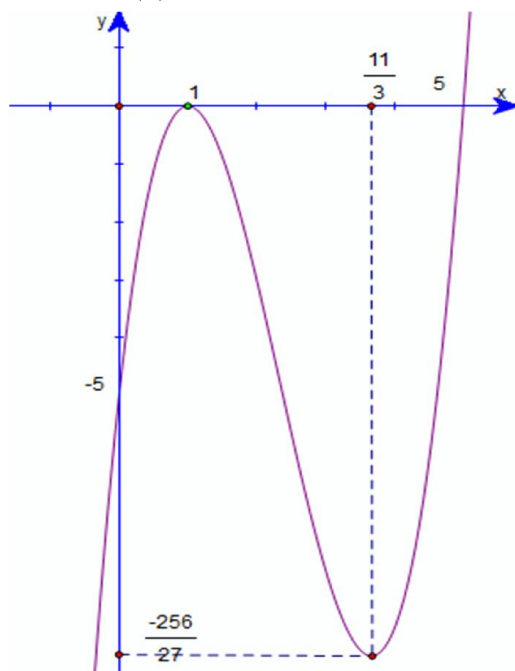
Chọn C

Ta có hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $h(x) = f(x-1)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$

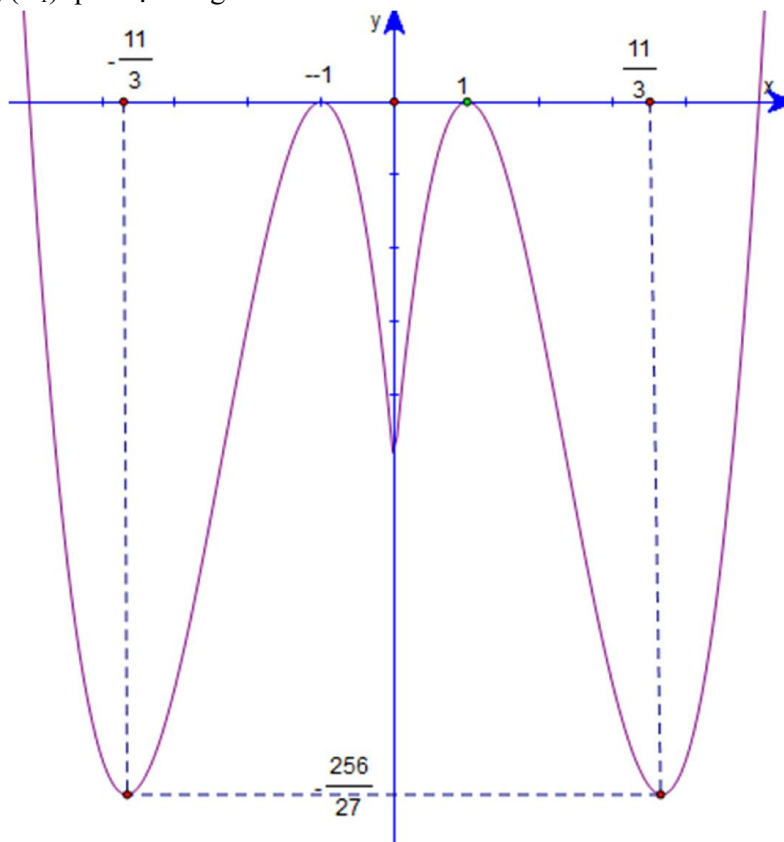
Bằng cách: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$ sang phải một đơn vị.



Hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $h(x) = f(x - 1)$

Bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $h(x) = f(x - 1)$ bên phải trục tung gọi là (C_1) .
- Lấy đối xứng (C_1) qua trục tung.



Vậy đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ có 5 cực trị.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. B. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.
C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$. D. $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x$.

+ TH1: $m = -1$, ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0(*) \end{cases}$

+ TH2: $m \neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình (*) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Câu 89. Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ là

- A. $[3; 4)$. B. $[0; 3)$. C. $[4; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - 4x + m$, $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0$.

Suy ra $f'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x$.

$$\text{Và } [g(f(x))]' = f'(x)[12a_{12}(f(x))^{11} + 10a_{10}(f(x))^9 + \dots + 2a_2f(x)]$$

$$= f'(x)f(x)(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2).$$

Để thấy $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 2x - 4 > 0$, $\forall x > 3$.

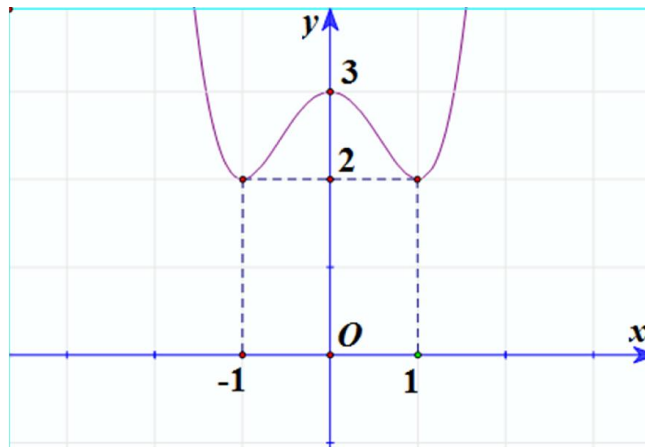
Do đó $f'(x)(12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2) > 0$, $\forall x > 3$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ khi $[g(f(x))]' \geq 0$, $\forall x > 3 \Rightarrow f(x) \geq 0$, $\forall x > 3$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow m \geq 4x - x^2, \forall x > 3 \Rightarrow m \geq \max_{[3; +\infty)}(4x - x^2) = 3.$$

Vậy $m \in [3; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ta có $g(x) = \ln[f(x)]$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Với $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) > 0$ khi $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$

Vậy Hàm số $g(x) = \ln[f(x)]$ đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 91. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(C)$. Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$. Phương trình của AB là

- A.** $x - y - 2 = 0$. **B.** $x + y - 8 = 0$. **C.** $x - 3y + 4 = 0$. **D.** $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(a; y_A)$ của đồ thị (C) là $f'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $B(b; y_B)$ của đồ thị (C) là $f'(b) = \frac{3}{2}b^2 - 3b$

($a \neq b$ vì A và B phân biệt).

$$\begin{aligned} \text{Mà tiếp tuyến tại } A \text{ và } B \text{ song song nên } f'(a) = f'(b) &\Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 3a = \frac{3}{2}b^2 - 3b \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}(a^2 - b^2) - 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow 3(a - b)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2 - a. \\ + A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right); B\left(b; \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}b^2 + 2\right). \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA}\left(a - b; \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}(a - b)(2; a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b) \\ \Rightarrow \text{véc tơ pháp tuyến của đường thẳng } AB \text{ là } \vec{n}(a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b; -2) = (a^2 - 2a - 2; -2). \end{aligned}$$

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là

$$(a^2 - 2a - 2)(x - a) - 2\left[y - \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)\right] = 0.$$

Mà đường thẳng AB đi qua $D(5; 3) \Rightarrow (a^2 - 2a - 2)(5 - a) - 2\left[3 - \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Với $a = -1$, phương trình đường thẳng AB là $x + 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$.

Với $a = 3$, phương trình đường thẳng AB là $x - 3 - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$.

Cách trắc nghiệm

Để thấy AB đi qua điểm uốn $I(1; 1) \Rightarrow$ đường thẳng AB trùng với đường thẳng ID .

$\Rightarrow \overrightarrow{ID}(4; 2) = 2(2; 1) \Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của đường thẳng AB là $\vec{n}(1; -2)$, chọn **D**.

Câu 92. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|\sin x - \frac{x}{4}\right|, x \in (-\pi; \pi)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

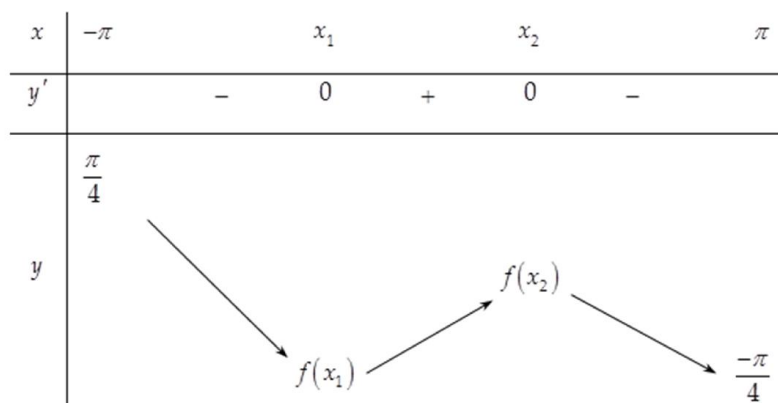
Xét hàm số $y = \sin x - \frac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

Ta có $y'(x) = \cos x - \frac{1}{4}, y'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$

$$y(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0.$$

$$y(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0.$$

BBT



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2 . Suy ra hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, với $x \in (-\pi; \pi)$ có 5 điểm cực trị.

- Câu 93.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là
- A. -5. B. 1. **C. -3.** D. -8.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \quad (1).$$

$$\text{Ta có } y(0) = -m; y(2) = 4 - \frac{m}{3}$$

$$\text{Đặt } g(x) = -(2x^3 + 4x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = -(6x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}.$$

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x) \in [-36; 0], \forall x \in [0; 2]$.

Trường hợp 1: $m > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

$$\text{Để thấy } y(0) = -m < y(2) = 4 - \frac{m}{3} \text{ khi } m > 0.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[0; 2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 \text{ loại do } m > 0.$$

Trường hợp 2: $m < -36 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

$$\text{Để thấy } y(0) = -m > y(2) = 4 - \frac{m}{3} \text{ khi } m < -36.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[0; 2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5 \text{ loại do } m < -36.$$

Trường hợp 3: $m \in [-36; 0] \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x = x_0$).

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	x_0	2
$g'(x)$		–	
$g(x)$	0	$y(x_0)$	–36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$$+ x = x_0 : g(x) = m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0.$$

$$+ x \in (0; x_0) : g(x) > m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0.$$

$$+ x \in (x_0; 0) : g(x) < m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	x_0	2
y'		–	+
y	$y(0)$	$y(x_0)$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\text{Max}_{[0;2]} y \in \{y(2); y(0)\}$.

$$\text{Nếu } m \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (l)}.$$

$$\text{Nếu } m \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) \leq y(2) \Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (n)}.$$

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} = x^2 - \frac{m}{x + 1} \Rightarrow y' = 2x + \frac{m}{(x + 1)^2}.$$

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; 2]$.

$$\Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 \text{ loại do } m > 0.$$

Trường hợp 2: $m < 0$, giả sử $\Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(x_0)$ với $x_0 \in (0; 2)$. Do hàm số liên tục trên $[0; 2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x_0(x_0 + 1)^2 \\ \frac{x_0^3 + x_0^2 - m}{x_0 + 1} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^3 + x_0^2 + 2x_0(x_0 + 1)^2 = 5(x_0 + 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{-5}{3} \vee x = 1 \text{ (n)} \Rightarrow m = -8.$$

$$\text{Khi đó: } y' = 2x + \frac{-8}{(x + 1)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	2		
y'		-	0	+	
y	8		5		$\frac{20}{3}$

$\Rightarrow m = -8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0 \in (0; 2)$ để $\text{Max}_{[0;2]} y = y(x_0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max}_{[0;2]} y = y(2) \Rightarrow m = -5 \\ \text{Max}_{[0;2]} y = y(0) \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

Nếu $m = -5 \Rightarrow y(0) = 5; y(2) = \frac{17}{3} \Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3} \neq 5 \Rightarrow m = -5(l)$.

Nếu $m = -3 \Rightarrow y(0) = 3; y(2) = 5 \Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(2) = 5 \Rightarrow m = -3(n)$.

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Câu 94. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007.

B. 2010.

C. 2009.

D. 2008.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2 + x \neq m \end{cases}$

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} = 0, \forall m.$$

$\Rightarrow y = 0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x) = 2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m \in [12; 2019]$.

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m .

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$$

có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A. $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3} \leq m < \frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{3}{2} \leq m < -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |\cos x| \in [0; 1]$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t - 3 + 2m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t - 3 = -2m.$$

Với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ ta nhận được hai giá trị $\cos x$ và với mỗi giá trị $\cos x$ này ta lại nhận được hai giá trị $x \in [0; 2\pi]$. Do đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng 1 nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	1
$g'(t)$		+
$g(t)$	$-\frac{2}{3}$ -3	

$$\text{Suy ra } -3 < -2m < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$$

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 20]$ để hàm số $f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 20.

Lời giải

Chọn A.

Ta các bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$$\text{Ta có } \left[f(x^2 + 3x - m) \right]' = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$$

Để hàm số $f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0, 2)$ cần $f'(x^2 + 3x - m) > 0; \forall x \in (0, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3 \\ x^2 + 3x - m \geq 1 \end{cases}; \forall x \in (0, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0,2]} (x^2 + 3x + 3) \\ m \leq \min_{[0,2]} (x^2 + 3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Vậy có 18 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 20]$.

- Câu 97.** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
A. $2x + y = 0$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x + 2y = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx+1}{x-2m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2m}{x}} = m; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx+1}{x-2m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2m}{x}} = m.$$

Suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = m$.

Ta lại có:

$$+ \lim_{x \rightarrow (2m)^+} y = \lim_{x \rightarrow (2m)^+} \frac{mx+1}{x-2m} = +\infty \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow (2m)^+} (mx+1) = 2m^2 + 1 > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow (2m)^+} (x-2m) = 0; \\ x-2m > 0 \text{ khi } x \rightarrow (2m)^+).$$

$$+ \lim_{x \rightarrow (2m)^-} y = \lim_{x \rightarrow (2m)^-} \frac{mx+1}{x-2m} = -\infty \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow (2m)^-} (mx+1) = 2m^2 + 1 > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow (2m)^-} (x-2m) = 0; \\ x-2m < 0 \text{ khi } x \rightarrow (2m)^-).$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2m$.

Vì thế giao điểm hai đường tiệm cận là $M(2m; m)$ và thuộc đường thẳng có phương trình $x - 2y = 0$.

- Câu 98.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.
A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (1)

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = x^2 - 4mx + m - 1$.

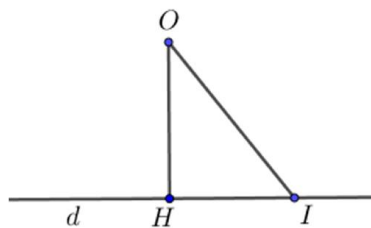
Hàm số (1) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - m + 1 > 0$ luôn đúng với mọi m .

Do $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{2m}{3}\right) \cdot y' + \frac{2}{3}(m-1-4m^2)x + \frac{8m^2}{3} - \frac{2m}{3} + 1$ nên đường thẳng đi qua điểm cực đại,

cực tiểu của (C) là $(d): y = \frac{2}{3}(m-1-4m^2)x + \frac{8m^2}{3} - \frac{2m}{3} + 1$.

Dễ thấy đường thẳng d luôn đi qua điểm $I\left(1; \frac{1}{3}\right)$ với mọi m .



Gọi H là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng d , khi đó

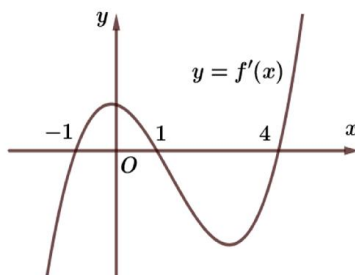
$$d(O, d) = OH \leq OI = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } H \equiv I \Leftrightarrow d \perp OI.$$

$$\overrightarrow{OI} = \left(1; \frac{1}{3}\right), \text{ véc tơ chỉ phương của đường thẳng } d \text{ là } \overrightarrow{u_d} \left(1; \frac{2}{3}m - \frac{2}{3} - \frac{8m^2}{3}\right).$$

$$\text{Vì } d \perp OI \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{9}(m - 1 - 4m^2) = 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{57}}{8} \\ m = \frac{1 + \sqrt{57}}{8} \end{cases}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

- 1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị
- 2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- 3) $f(1) > f(2) > f(4)$.
- 4) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

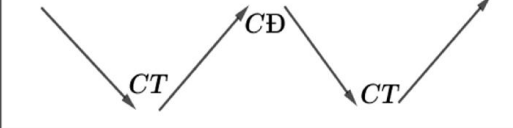
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4

Câu 100. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

A. 42.

B. 30.

C. 50.

D. 63.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m$ có

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = (x^2 - 1)(12x - 24); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-m-19$	$-m+13$	$-m+8$	$+\infty$

Hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, khi đó:

$$\begin{cases} -m+13 > 0 \\ -m+8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 13 \\ m > 8 \end{cases} \Rightarrow m \in S = \{9; 10; 11; 12\}.$$

Tổng các phần tử của S là $9 + 10 + 11 + 12 = 42$.

Câu 101. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

+) Với $m = 0$; ta có hàm số $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) Với $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2 - 2x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

- $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

- $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		

$\swarrow$ -3 $\nearrow$ $\searrow$ $-\infty$

A. $\frac{25}{3}$.

B. 15.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(4x - x^2) \cdot (4 - 2x) + x^2 - 6x + 8 = 2(2 - x) \left[f'(4x - x^2) + \frac{4 - x}{2} \right]$

Xét thấy $\forall x \in [1; 3] \Rightarrow 3 \leq 4x - x^2 \leq 4 \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$

Mặt khác $\frac{4 - x}{2} > 0 \forall x \in [1; 3]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$g(1) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{17}{3} = 5 + \frac{17}{3} = \frac{32}{3}$$

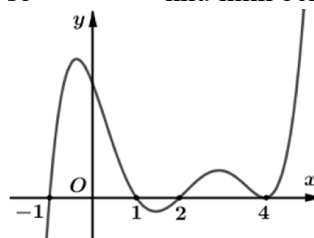
$$g(3) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{19}{3} = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = 5 + 7 = 12.$$

$$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$$

Vậy $\max_{[1; 3]} g(x) = 12$ tại $x = 2$.

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} f'(1-2x) \cdot (-2) \cdot \ln \frac{1}{2}$

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $(1; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 104. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$ bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (0; 1)$.

B. $m_0 \in (3; 4)$.

C. $m_0 \in (1; 2)$.

D. $m_0 \in (2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6m$ có hai nghiệm phân biệt khi $m > 0$. Ta có

$$y = \frac{1}{3}x(3x^2 - 6m) - 4mx + 4.$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ là
(d): $y = -4mx + 4$.

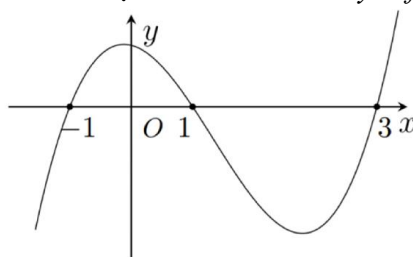
Đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$ bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì

$S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{BIA} = \sin \widehat{BIA} \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi $\triangle IAB$ vuông tại I , lúc này, với

$$h = d(I, d) \text{ thì } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow \frac{|4m-4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32} > 0.$$

Vậy $m_0 = \frac{15}{32} \in (0; 1)$.

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Bảng xét dấu của $g'(x) = f'(x+m)$ như sau

TỔNG HỢP: NGU	x	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m+1}$	$-\frac{1}{m+2}$	$-\frac{1}{m+3}$	$+\infty$	66
	$g'(x)$		-	+	0	-	+	

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi

$$\begin{cases} 2 \leq -m-1 \\ 1-m \leq 1 < 2 \leq 3-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Do đó $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$. Chọn đáp án **B**.

- Câu 106.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là
- A.** $(-1; 2)$. **B.** $(2; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **D.** $[1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

$$y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x + m)^2}.$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2 - m - 2}{(x + m)^2} < 0 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

- Câu 107.** Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi
- A.** $m < 2^{2018}$. **B.** $m \leq 2^{2018}$. **C.** $m \leq 2^{2019}$. **D.** $m < 2^{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -2 \sin 2x$, $f''(x) = -2^2 \cos 2x$, $f'''(x) = 2^3 \sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 2^4 \cos 2x$.

Suy ra $f^{(2016)}(x) = 2^{2016} \cos 2x \Rightarrow f^{(2017)}(x) = -2^{2017} \sin 2x$

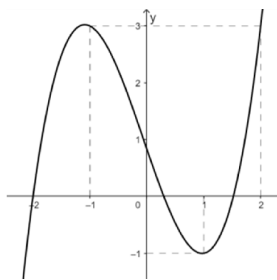
$$\Rightarrow f^{(2018)}(x) = -2^{2018} \cos 2x$$

$$\Rightarrow f^{(2019)}(x) = 2^{2019} \sin 2x.$$

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{8}\right)$ nên $\frac{1}{2} < \sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $f^{(2019)}(x) > 2^{2018}$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{8}\right)$.

Vậy $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m \leq 2^{2018}$.

- Câu 108.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là:

- A.** $[-1; 3]$. **B.** $[-1; f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1; f(\sqrt{2})]$. **D.** $(-1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = g(x) = \sqrt{4-x^2}$ với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Suy ra: $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\sqrt{2}; 3)$.

Ta có:

$g(0) = 2$, $g(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $g(\sqrt{3}) = 1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$

Suy ra, $t \in (1; 2]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2]$ khi $m \in (-1; 3]$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$.

Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

- A.** 108. **B.** 58. **C.** 100. **D.** 50.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\forall h > 0$ thì $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 \Leftrightarrow -h \leq \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \leq h$

$\Leftrightarrow -h \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} \leq h$.

Suy ra $\lim_{h \rightarrow 0^+} (-h) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} \right] \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} h$

$\Rightarrow 0 \leq f'(x) + f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x) = x^{2019} + x^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$

$\Rightarrow g'(x) = 2019x^{2018} + (29-m)x^{28-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin 2x$

$\Rightarrow g''(x) = 2019 \cdot 2018 \cdot x^{2017} + (29-m)(28-m)x^{27-m} - 2(m^4 - 29m^2 + 100)\cos 2x$

Để thấy $g'(0) = 0, \forall m < 27$.

Xét $g''(0) = -2(m^4 - 29m^2 + 100) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m^2 = 25 \end{cases}$.

* Khi $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$:

+ $m = 2$ ta có $g(x) = x^{2019} + x^{27} - 1$ có $g'(x) = x^{26}(2019x^{1992} + 27)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$.

+ $m = -2$ ta có $g(x) = x^{2019} + x^{31} - 1$ có $g'(x) = x^{30}(2019x^{1988} + 31)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$.

* Khi $m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5$:

+ $m = 5$ ta có $g(x) = x^{2019} + x^{24} - 1$ có $g'(x) = x^{23}(2019x^{1995} + 24)$ đổi dấu khi qua $x = 0$ và

$x = -\sqrt[1995]{\frac{24}{2019}}$. Trường hợp này hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.

+ $m = -5$ ta có $g(x) = x^{2019} + x^{34} - 1$ có $g'(x) = x^{33}(2019x^{1985} + 34)$ đổi dấu khi qua $x = 0$

và $x = -\sqrt[1985]{\frac{34}{2019}}$. Trường hợp này hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.

* Nếu $4 < m^2 < 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 5 \\ -5 < m < -2 \end{cases}$ thì $g''(0) > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

* Nếu $m^2 < 4$ hoặc $m^2 > 25$ thì $g''(0) < 0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Vậy các giá trị nguyên của $m < 27$ để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $S = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$

Tổng bình phương các phần tử của S là 100.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn C

$$+ y' = -2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = -2f'(1-x) + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}},$$

+ Ta thấy

$$*) \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$*) -2f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 1-x \leq 3 \\ 1-x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra $y' \leq 0, \forall x \in (-2; 0)$