MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG TÍCH PHÂN CÓ VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Thầy Nguyễn Ngọc Chi

Trường THPT Kinh Môn – Hải Dương

Trong chương trình SGK giải tích lớp 12, các dạng tích phân được tính bằng các tính chất của tích phân và tính chất của hàm số hay tích phân thông qua giả thiết là các dạng phương trình hàm xuất hiện rất ít, chính vì vậy khả năng thực hành tính toán của học sinh còn nhiều hạn chế hay chưa nói đến là gặp rất nhiều khó khăn. Trước đây, trong các kì thi từ thi tốt nghiệp THPT đến các kỳ thi Đại học, Cao đẳng hay ngay trong quá trình dạy hầu như không xuất hiện các dạng tích phân cho dưới dạng phương trình hàm, vì vậy sự quan tâm của giáo viên và học sinh về vấn đề này là không có. Từ khi Bộ GD&ĐT chuyển hình thức thi môn Toán từ thi tự luận sang thi trắc nghiệm thì dạng tích phân này đã có trong đề thi đã xuất hiện và khi dạy học vấn đề này cũng được các thầy cô và các em học sinh quan tâm hơn. Từ những lý do trên tôi đã mạnh dạn viết bài nhở này để nói về một số bài toán tích phân có sử dụng phương trình hàm và cách giải của chúng với mục tiêu dẫn dắt học sinh biết vận dụng những kiến thức cơ bản, kết hợp các phương pháp được tiếp cận từ sách giáo khoa để tạo được một thói quen mới, một phương pháp mới cho dạng toán Tích phân.

Nội dung chung của các bài toán dạng này là yêu cầu tính tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nhưng chưa cho biết hàm số $f(x)$ mà chỉ biết $f(x)$ thỏa mãn một phương trình hàm cho trước.

Phương pháp chung:

Cách 1: Sử dụng các kiến thức về phương trình hàm để tìm hàm số $f(x)$.

Cách 2: Biểu diễn hàm $f(x)$ qua hàm $g(x)$ mà ta có thể tính được $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Dạng 1. Tích phân liên quan đến biểu thức $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x)$

Phương pháp:

Ta có $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x) \Leftrightarrow [u(x).f(x)]'=g(x)$. Suy ra $u(x).f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$. Từ đó tìm được $f(x)$.

Ví dụ 1. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\dfrac{1}{2018}$ và $2018f(x)+x.f'(x)=2x^{2018}$ với $\forall x\in[0;1]$.Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$

A. $I=\dfrac{1}{2018.2019}$

B. $I=\dfrac{1}{2019}$

C. $I=\dfrac{1}{2018}+\dfrac{1}{2019}$

D. $I=1$

Nhận xét : *trước hết ta đi tìm biểu thức $u(x)$. Ta có*

$$\Rightarrow \ln|u(x)|=\int\frac{2018}{x}dx \Rightarrow \ln|u(x)|=2018\ln|x|+c \Leftrightarrow \ln|u(x)|=\ln x^{2018}+c$$

nên ta chọn $u(x)=x^{2018}$, khi đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Ta có $\left[x^{2018}.f(x)\right]'=2018x^{2017}f(x)+x^{2018}f'(x)=x^{2017}\left[2018f(x)+xf'(x)\right]=x^{2017}.\left[2x^{2018}\right]=2x^{4035}$

Khi đó $x^{2018}f(x)=\int 2x^{4035}dx \Leftrightarrow x^{2018}f(x)=\dfrac{x^{4036}}{2018}+c$, do $f(1)=\dfrac{1}{2018}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2018}=\dfrac{1}{2018}+c$

$\Leftrightarrow c=0 \Rightarrow x^{2018}f(x)=\dfrac{x^{4036}}{2018} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^{2018}}{2018}$

khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^{2018}}{2018}dx=\left.\left(\dfrac{x^{2019}}{2019.2018}\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{2018.2019}$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $(x-1).f'(x)+f(x)=3x^2-2x$ và $f(1)=-1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{4}{3}-4\ln 2.$

B. $I=\dfrac{3}{4}-4\ln 2.$

C. $I=\dfrac{4}{3}+4\ln 2.$

D. $I=-\dfrac{4}{3}+4\ln 2.$

Lời giải

Ta có $(x-1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x \Leftrightarrow [(x-1)f(x)]'=3x^2-2x$

Suy ra $(x+1)f(x)=\int(3x^2-2x)\mathrm{d}x=x^3-x^2-C.$

Vì $f(1)=-1$ nên $(1+1)f(1)=1^3-1^2-C.$ Suy ra $C=-2.$

Do đó $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2}{x+1}.$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{x^3-x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-2x+2-\dfrac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$-\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2-2x-4\ln\left|x+1\right|\right)\right|_0^1-\dfrac{4}{3}-4\ln 2.$

Dạng 2. Tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x).f(x)=g(x)\quad(*)$

Phương pháp: Nhân hai vế của $(*)$ với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ ta được

$$f'(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.f(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x)\quad\Leftrightarrow\left[f(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right]'=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x).$$

Suy ra $f(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x)\mathrm{d}x$. Từ đó tìm được $f(x)$.

__**Ví dụ 1.**__ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+f(x)=(2x-1)e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=e$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=1.$ **B.** $I=e.$ **C.** $I=0.$ **D.** $I=2.$

Lời giải

Ta có $f'(x)+f(x)=(2x-1)e^x\Leftrightarrow e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x(2x+1)e^x\Leftrightarrow[e^xf(x)]'=(2x+1)e^{2x}.$

Suy ra $e^x.f(x)=\int(2x-1)e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(2x+1)e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C=x.e^{2x}+C.$

Vì $f(1)=e$ nên $e^1f(1)=1.e^2+C.$ Suy ra $C=0.$

Do đó $f(x)=xe^x.$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.e^x\mathrm{d}x=x.e^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x=1.$

<u>Ví dụ 2.</u> Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$ và $f(0)=-2$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=-\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x \Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{x}{x^2+1}.f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$ (1)

Nhân hai vế của (1) với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}=e^{\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x}=\sqrt{x^2+1}$ ta được:

$$\sqrt{x^2+1}.f'(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]'=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+1}.f(x)=\int\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=-\sqrt{x^2+1}+C$.

Vì $f(0)=-2$ nên $\sqrt{0^2+1}.f(0)=-\sqrt{0^2+1}+C$. Suy ra $C=-1$.

Do đó $f(x)=-1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\left(-1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{2}$.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $R\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$ với $\forall x\in R\setminus\{-1;0\}$ và $f(1)=-2\ln 2$, tính tích phân $I=\int\limits_1^2 xf(x)dx$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{31}{12}-\dfrac{9}{2}\ln 3+2\ln 2$ **B.** $I=\dfrac{31}{12}+\dfrac{9}{2}\ln 3+2\ln 2$

C. $I=\dfrac{31}{12}+\dfrac{9}{2}\ln 3-2\ln 2$ **D.** $I=\dfrac{31}{12}-\dfrac{9}{2}\ln 3-2\ln 2$

Nhận xét : *Trước hết ta đi tìm biểu thức* $u(x)$. *Ta có*

$\Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{1}{x(x+1)}dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \Leftrightarrow \ln|u(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| + c$, *nên ta chọn* $u(x) = \frac{x}{x+1}$, *khi đó ta có lời giải như sau:*

Lời giải

Ta có $\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2}f(x) + \frac{x}{x+1}.f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.\left[f(x) + x(x+1)f'(x)\right]$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2}.\left[x^2+x\right] \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1}dx$$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + c$. Do

$$f(1) = -2\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.(-2\ln 2) = 1 - \ln 2 + c \Leftrightarrow c = -1$$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1 - (x+1).\ln|x+1|}{x}$. Khi đó

$$I = \int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2 \left(x^2 - 1 - (x+1).\ln(x+1)\right).dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 (x+1).\ln(x+1).dx = \frac{4}{3} - I_1$$

Với $I_1 = \int_1^2 (x+1).\ln(x+1).dx$; đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2.\ln(x+1)\right]\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 (x+1)dx \Rightarrow I_1 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}$$

Khi đó $I = \frac{4}{3} - I_1 = \frac{4}{3} - \left(\frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{31}{12} - \frac{9}{2}\ln 3 + 2\ln 2$

Dạng 3. Phương trình hàm liên quan đến hàm hợp

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(u(x)) = v(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp: Đặt $t = u(x) \to \mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ và $f(t) = v(x)$.

Đổi cận: $t = a \Rightarrow x = \alpha$; $t = b \Rightarrow x = \beta$ (vì $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$).

Do đó $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_\alpha^\beta u'(x).v(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{135}{4}$. **B.** $I=\dfrac{87111}{4}$. **C.** $I=\dfrac{133}{4}$. **D.** $I=\dfrac{131}{4}$.

Lời giải

Đặt $t=x^3+2x-2\Rightarrow \mathrm{d}t=(3x^2+2)\mathrm{d}x$ và $f(t)=3x-1$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x=1$; $t=10\Rightarrow x=2$.

Do đó $I=\int\limits_1^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{10} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^{2}(3x-1)(3x^2+2)\mathrm{d}x=\dfrac{135}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x+3,\forall x\neq 1$. Tính tích phân $I=\int\limits_2^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=4+2\ln 2$. **B.** $I=4-2\ln 2$.

C. $I=-4+2\ln 2$. **D.** $I=4+2\ln 3$.

Lời giải

Đặt $t=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ và $f(t)=x+3$.

Đổi cận $t=2\Rightarrow x=3$; $t=3\Rightarrow x=2$.

Do đó $I=\int\limits_2^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^{3} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_3^{2}(x+3)\dfrac{-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=2\int\limits_2^{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=4+2\ln 2$.

Cách khác: Ta tìm hàm số $f(x)$.

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3,\forall x\neq 1\ \ (1).$$

Đặt $t=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\dfrac{t+1}{t-1}$. Từ (1) suy ra $f(t)=\dfrac{t+1}{t-1}+3=\dfrac{4t-2}{t-1}$.

Do đó $f(x)=\dfrac{4x-2}{x-1}$. Vậy $I=\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(\dfrac{4x-2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(4+\dfrac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=4+2\ln 2$.

Dạng 4: Đổi vai trò của biến x và y

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x=G(f(x))$, trong đó $G(t)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Tính tích phân $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp: Đặt $y=f(x)\to x=G(y)\to \mathrm{d}x=G'(y)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: $x=a\Rightarrow G(y)=a\Rightarrow y=\alpha$;

$x=b\Rightarrow G(y)=b\Rightarrow y=\beta$

Do đó $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta yG'(y)\mathrm{d}y$.

<u>Ví dụ 1.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{5}{4}$. **B.** $I=14$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)\Rightarrow y^3+y=x$ và $\mathrm{d}x=(3y^2+1)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow y^3+y=0\Rightarrow y=0$;

$x=2\Rightarrow y^3+y=2\Rightarrow y=1$.

Do đó $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 y(3y^2+1)\mathrm{d}y=\int\limits_0^1 (3y^3+y)\mathrm{d}y=\dfrac{5}{4}$.

<u>Ví dụ 2.</u> Biết mỗi số thực $t\ge 0$ phương trình $4x^3+tx-4=0$ có nghiệm dương duy nhất $x=x(t)$, với $x(t)$ là hàm số liên tục theo t trên $\left[0;+\infty\right)$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^7\left[x(t)\right]^2 dt$

A. $I = \dfrac{31}{4}$. **B.** $I = \dfrac{31}{16}$ **C.** $I = \dfrac{31}{32}$. **<u>D.</u>** $I = \dfrac{31}{8}$.

Lời giải

Đặt $t = \dfrac{4-4x^3}{x} \Rightarrow dt = -\dfrac{8x^3+4}{x^2}dx$, đổi cận : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ t = 7 \Rightarrow 4x^3 + 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $I = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} x^2.\dfrac{8x^3+4}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(8x^3+4\right)dx = \left(2x^4+4x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \dfrac{31}{8}$

Dạng 5: Cho hàm số $f(x)$ **liên tục trên** $\mathbb{R}$ **và thỏa mãn** $mf(x) + nf(a+b-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp: Đặt $t = a \mid b \quad x \Rightarrow \mathrm{d}x = \quad \mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b; \quad x = b \Rightarrow t = a$.

Do đó $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_a^b [f(x) - f(a+b-x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

<u>Ví dụ 1.</u> (Trích đề minh họa của Bộ GD&ĐT năm 2017) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) - \sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A.</u> $I = -6$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Đặt $x = \quad t \Rightarrow \mathrm{d}x = \quad \mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{2}; \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = -\dfrac{3\pi}{2}$.

Do đó: $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x))\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos x\right|\mathrm{d}x = 12$.

Vậy $I = 6$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Do đó $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = 1$.

Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và thỏa mãn $3f(x) + 4f(-x) = \frac{1}{9 + x^2}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{\pi}{6}$. **B.** $I=\frac{\pi}{40}$. **C.** $I=\frac{\pi}{42}$. **D.** $I=\frac{\pi}{41}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $3f(-x)+4f(x)=\frac{1}{9+x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2}\\ 3f(-x)+4f(x)=\frac{1}{9+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9f(x)+12f(-x)=\frac{3}{9+x^2}\\ 16f(x)+12f(-x)=\frac{4}{9+x^2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{7(9+x^2)}$.

Vậy $I=\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\limits_{-3}^{3}\frac{1}{9+x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Do đó $I=\frac{1}{7}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2 t}.\frac{3}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{21}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{42}$.

Cách khác: Ta có $3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]$.

Khi đó: $I=\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3}\left[\frac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]\mathrm{d}x$.

Xét $J=\int\limits_{-3}^{3}f(-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=-3$.

Do đó $J=-\int\limits_{3}^{-3}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-3}^{3}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=I$

Vậy $I=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}-4I\right]\Leftrightarrow I=\frac{1}{7}\int\limits_{-3}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}=\frac{\pi}{42}$.

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x) - \sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $2f(1-x)+3f(x) - \sqrt{2x-x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \\ 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x)+6f(1-x)=2\sqrt{1-x^2} \\ 9f(x)+6f(1-x)=3\sqrt{2x-x^2} \end{cases}$

Suy ra $f(x)=\dfrac{3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}}{5}$.

Vậy $I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$.

Cách khác: Từ $2f(x)+3f(1-x) - \sqrt{1-x^2}$, suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}-3f(1-x)\right]$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left|\int\limits_0^1\sqrt{1\quad x^2}\mathrm{d}x\quad 3\int\limits_0^1 f(1\quad x)\mathrm{d}x\right|$

Xét $J=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1\quad x\Rightarrow \mathrm{d}t=\quad \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$. Khi đó: $J=-\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\left|\int\limits_0^1\sqrt{1\quad x^2}\mathrm{d}x\quad 3I\right|$. Suy ra $I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$.

<u>Ví dụ 5.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)-3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)-\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)-3x \\ 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x} \end{cases}$$. Suy ra $f(x)=\frac{2}{x}-x$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$.

Cách khác: Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ suy ra $f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=\ \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ t^2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\ \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$. Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf(t)\left(\ \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=I$.

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I$. Suy ra $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

<u>Ví dụ 6.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f(x-1)-3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right)-1-2x, \forall x\neq\frac{1}{2}$.

Biết $\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+b+c$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{16}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Lời giải

Đặt $\frac{x \quad 1}{1-2x} = y \quad 1 \Rightarrow x = \frac{y}{2y-1} \Rightarrow x \quad 1 = \frac{1 \quad y}{2y-1}$.

Suy ra $f\left(\frac{1-y}{2y-1}\right) - 3f(y-1) - \frac{-1}{2y-1}, \forall y \neq \frac{1}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) - \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2}$

Do đó $\begin{cases} f(x-1) - 3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 1-2x, \forall x \neq \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) - \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $-8f(x-1) = 1-2x+\frac{3}{1-2x} \Leftrightarrow f(x-1) - \frac{1}{8}\left(-1+2x+\frac{3}{2x-1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$

Suy ra $f(x) - \frac{1}{8}\left(1-2x+\frac{3}{2x+1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_1^2\left(1+2x+\frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\left(x-x^2-\frac{3}{2}\ln\left|2x+1\right|\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{3}{16}\ln 5$.

Suy ra $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{16},\ c = \frac{3}{16}$.

Vậy $2a+b+c=1$.

Dạng 6: Tích phân liên quan đến phương trình hàm có dạng $u(x).f'(x) = v(x).f(x)$

Chủ yếu biến đổi để sử dụng các công thức đạo hàm

1) $u'.v+u.v'=(uv)'$

2) $\frac{u'v-uv'}{v^2}=\left(\frac{u}{v}\right)'$

3) $\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\left(\sqrt{u}\right)'$

Việc còn lại là lấy tích phân hai vế để đi đến kết quả

<u>Ví dụ 1.</u> Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)-(2x+3)f^2(x)=0$,

$f(x)>0$ với mọi $x>0$, $f(1)=\dfrac{1}{6}$ và $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của

$a+b$ bằng

A. 1. **<u>B</u>.** -1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+3)$ (do $f(x)>0$).

Suy ra: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int(2x+3)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+C}$. Vì $f(1)=\dfrac{1}{6}$ nên $C=-2$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=-3\ln 2+2\ln 3$.

Suy ra $a=-3;\ b=2$. Vậy $a+b=-1$.

<u>Ví dụ 2.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;6]$ thỏa mãn $f(x)>-1$ với mọi $x\in[0;6]$, $f(0)=0$ và

$f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Khi đó $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **<u>B</u>.** 72. **C.** 78. **D.** 66.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C$.

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^2$.

Vậy $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^6 x^2\mathrm{d}x=72$.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn

$x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{1186}{45}$. **B.** $I=\dfrac{1187}{45}$. **C.** $I=\dfrac{1188}{45}$. **D.** $I=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Nhận xét: Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\geq 0,\forall x\subset[1;4]$.

Từ giả thiết ta có $x[1+2f(x)]=[f'(x)]^2$.

Suy ra $f'(x)-\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)},\forall x\in[1;4]$. Suy ra $\dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}\Rightarrow\int\dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Do đó $\sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-C$. Vì $f(1)=\dfrac{3}{2}$ nên $C=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\dfrac{2}{9}x^3+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1186}{45}$.

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\neq 1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và

$f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\dfrac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $f(3-x).f(x)=1$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$ suy ra $f(3)=2$. Ta có: $[1+f(3-x)]^2.f^2(x)=[1+f(x)]^2$

(vì $f(3-x).f(x)=1$). Do đó $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}\mathrm{d}x=-\int_0^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)$

$$=-\frac{x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3+\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x\overset{t=3-x}{=}-\int_3^0\frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t\int_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x=\int_0^3 1\mathrm{d}x=3$ (vì $f(3-x).f(x)=1$).

Suy ra $J=\dfrac{3}{2}$. Vậy $I=\dfrac{1}{2}$.

<u>Ví dụ 5.</u> Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\dfrac{1}{3}$ $x^2.f'(x)=\left(1-2x^2\right).f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

A. $I=\ln 3$ **B.** $I=-\ln 3$ **C.** $I=\dfrac{1}{2}\ln 3$ **<u>D.</u>** $I=\dfrac{1}{4}\ln 3$

Lời giải

Ta có $x^2.f'(x)=\left(1-2x^2\right).f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1-2x^2}{x^2}\Leftrightarrow\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{x^2}-2$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^2}-2\right).dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{x}-2x+c$, do $f(1)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow c=0$

Nên ta có $\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{2x^2+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$

Khi đó $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{x}{1+2x^2}dx=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{d(1+2x^2)}{1+2x^2}=\frac{1}{4}\ln\left|1+2x^2\right|\Big|_1^2=\frac{1}{4}(2\ln 3-\ln 3)=\frac{1}{4}\ln 3$

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $f(x).f'(x)-2x.\sqrt{f^2(x)+1}=0$ với $\forall x\in R$ và $f(0)=0$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $I=\frac{1}{3}\ 3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

B. $I=\frac{1}{3}\ 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

C. $I=\ 3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

D. $I=\ 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)-2x.\sqrt{f^2(x)+1}=0\Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)'=2x$

$\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=\int 2xdx\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+c$. Do $f(0)=0\Rightarrow c=1$ nên ta có

$\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)+1=\left(x^2+1\right)^2\Leftrightarrow f^2(x)=x^2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow f(x)=|x|\sqrt{x^2+2}$

(vì $f(x)$ không âm trên R). Khi đó $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1|x|\sqrt{x^2+2}dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x^2+2}d(x^2+2)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left[\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$$

Dạng 7. Một số bài toán liên quan đến hằng đẳng thức tích phân $\int_a^b[f(x)-g\ \ x\ ]^2\mathrm{d}x=0$ và sử dụng công thức tích phân từng phần để tính toán.

+ Công thức tích phân từng phần: $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$ *(trong đó* u,v *có đạo hàm liên tục trên* K *và* a,b *là hai số thuộc* K *)*

+ Tính chất: Nếu $f(x)\geq 0$ *với* $\forall x\in[a;b]$ *thì* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$, *dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow f(x)=0,\forall x\in[a;b]$

+ Hệ quả: $\int_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$ *với* $\forall x\in[a;b]$.

+ Bất đẳng thức Holder: Cho hai hàm số $f(x)$ ***và*** $g(x)$ ***liên tục trên đoạn*** $[a;b]$***. Khi đó***

$$\left|\int_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x\right|^2 < \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x),\quad k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = -8$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u - x+1 \\ \mathrm{d}v - f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u - \mathrm{d}x \\ v - f(x) \end{cases}$. Khi đó

$$10 = \int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -8$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Xét $A \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x \quad 1$

Đặt $t = \cos^2 x$. Suy ra $\mathrm{d}t = -2\sin x\cos x\mathrm{d}x = -2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x = -2t\tan x\mathrm{d}x \Rightarrow \tan x\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Khi đó:

$$1 = A = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 2$. Xét $B - \int_{e}^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x - 1$.

Đặt $u = \ln^2 x$. Suy ra $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x = \frac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \frac{\mathrm{d}u}{2u}$.

Đổi cận: $x = e \Rightarrow u = 1$; $\quad x = e^2 \Rightarrow u = 4$.

Khi đó $1 = B = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

Suy ra $\int_1^4 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 2$.

Xét tích phân cần tính $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $v = 2x$, suy ra $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}v$, $x = \frac{v}{2}$

Đổi cận: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \frac{1}{2}$; $\quad x = 2 \Rightarrow v = 4$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(v)}{v}\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 2 + 2 = 4$.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 4$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 3$.

Tính tích phân $I = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{0} \sin 2x f'(\sin x)dx$

<u>A</u>. $I = -2$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = -1$ **D.** $I = 1$

Lời giải

Ta có $I = 2\int\limits_{\frac{-\pi}{6}}^{0} \sin x \cos x . f'(\sin x) dx$, đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{-1}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$ khi đó $I = 2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0} t f'(t) dt \Rightarrow I = 2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0} x f'(x) dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$ ta có $I = 2\left[\left(x f(x) \right)\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0} - \int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0} f(x) dx \right] = 4 - 2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0} f(x) dx$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0} f(x) dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. Khi đó $I = 4 - 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 4 - 6 = -2$

<u>Ví dụ 4.</u> (Trích đề tham khảo của Bộ GD&ĐT năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ bằng

<u>A</u>. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Xét tích phân $\int\limits_0^1 x^2 f(x) \mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2 \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x) \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$. Khi đó: $\dfrac{1}{3} - \int\limits_0^1 x^2 f(x) \mathrm{d}x - \dfrac{x^3 f(x)}{3}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{3} f'(x) \mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3 f'(x) \mathrm{d}x$ (do $f(1) = 0$). Suy ra $\int\limits_0^1 x^3 f'(x) \mathrm{d}x = -1$. Tìm k sao cho $\int\limits_0^1 [f'(x) - kx^3]^2 \mathrm{d}x = 0$

Ta có $\int\limits_0^1 [f'(x) - kx^3]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x - 2k\int\limits_0^1 x^3 f'(x) \mathrm{d}x + k^2 \int\limits_0^1 x^6 \mathrm{d}x = 7 - 2k(-1) + k^2.\dfrac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow k = -7$.

Do đó $\int\limits_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 7x^3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3$.

Suy ra $f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + \dfrac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Cách khác: Ta có $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$7 = 7.(-1)^2 = 7\left(\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 < 7\int\limits_0^1 (x^3)^2\mathrm{d}x.\int\limits_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x. = 7.\frac{1}{7}.\int\limits_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = kx^3$ với $k \subset \mathbb{R}$.

Ta có $-1 = \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^3.kx^3\mathrm{d}x = k\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x = \frac{k}{7}$. Suy ra $k = -7$.

Do đó $f'(x) = -7x^3$. Suy ra $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$. Biết $f(0) = 1$, $\int\limits_1^2 f'(x)dx = 2$ và $\int\limits_1^2 [f'(x)]^2 dx = 4$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 [f(x)]^3 dx$

A. $I = 68$ **B.** $I = 34$ **C.** $I = 17$ **D.** $I = 136$

Nhận xét : *Giả thiết chứa $[f'(x)]^2$ và $f'(x)$ nên ta tạo bình phương dạng $[f'(x) - a]^2$*

Ta chọn a sao cho $\int\limits_1^2 [f'(x) - a]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \left([f'(x)]^2 - 2af'(x) + a^2\right)dx = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2a\int\limits_1^2 f'(x)dx + a^2\int\limits_1^2 dx = 0 \Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. *Từ đó ta có lời giải*

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2 [f'(x) - 2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \left([f'(x)]^2 - 4f'(x) + 4\right)dx = \int\limits_1^2 [f'(x)]^2 dx - 4\int\limits_1^2 f'(x)dx + 4\int\limits_1^2 dx$

$= 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + c$, mà $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ nên $f(x) = 2x + 1$

Khi đó $I=\int_1^2[f(x)]^3\,dx=\int_1^2(2x+1)^3\,dx=\int_1^2(8x^3+12x^2+6x+1)\,dx=\left.(2x^4+4x^3+3x^2+x)\right|_1^2=68$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoản mãn $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $2[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết $f(0)=1,\ f(2)=e^6$, tính tích $I=\int_{-2}^0(2x+1).f(x)dx$

Câu 3: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên R và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in R$.

Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)dx$

Câu 4: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)+(x+1).f'(x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$.

Biết $f(5)=\frac{7}{6}$, tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 5: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $(x+1)f(x)+x.f'(x)=2e^x$ với $\forall x\in[1;2]$.

Biết $f(1)=e$, tính tích phân $I=\int_1^2 x.f(x)dx$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $3f(x)-4f(2-x)=-x^2-12x+16$ với $\forall x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x$ với $\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)=4xf(x^2)+2x+1$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_1^{10} f(x)dx$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và thỏa mãn $[f(x)]^{2019}+f(x)+2=x$ với $\forall x\in[-1;5]$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f(x)dx$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ và $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1+x^2}}=1$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} f'(x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R và thỏa mãn $\int_0^2(1-2x)f'(x)dx=3f(2)+f(0)=2016$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2x)dx$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(3)=f(1)=3$ và $\int_1^3 \frac{xf'(x)}{x+1}dx=0$. Tính tích phân $I=\int_1^3 \frac{f(x)+\ln x}{(x+1)^2}dx$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $\int_0^1 (f'(x)+x).\ln(1+x^2)dx=2\ln 2-1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{xf(x)}{1+x^2}dx$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 xf(x)dx=1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=3$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)]^{2018} dx$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=\frac{1}{5}$ và $\int_0^1 \sqrt{x}.f(\sqrt{x})dx=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(2)=7$ và $[f'(x)]^2=21x^4-12x-12xf(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{7}{6}$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=\frac{13}{3}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)]^3 dx$

Tài liệu tham khảo.

[1] Tạp chí Toán học và tuổi tre – Số tháng 2/2021

[2] Tuyển tập các đề thi thử các trường trong cả nước năm 2017-2021.