

Câu 1 (6,0 điểm).

Cho phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = \sqrt{18+3x-x^2} + m$, (1), (với m là tham số).

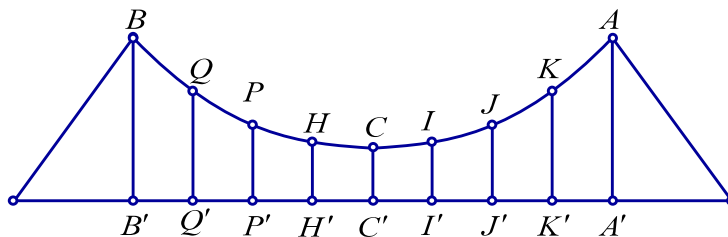
- a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.
b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Câu 2 (5,0 điểm).

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 - x^3 y = 1 \\ x^3 y + xy - x^2 = -1 \end{cases}$$

- b) Một cầu treo có dây truyền đỡ là

Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trụ AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài đoạn



$A'B'$ trên nền cầu bằng 200m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $CC' = 5$ m.

Gọi $Q', P', H', C', I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: $QQ', PP', HH', CC', II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. $BC = a, CA = b, AB = c$.

- a) Chứng minh rằng $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cos C - b \cos B)$.

- b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MB^2 + MC^2 = MA^2$.

Câu 4 (4,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $A(3;1), B(-1;2)$.

- a) Tìm tọa độ điểm N trên trục hoành Ox sao cho khoảng cách AN nhỏ nhất.
b) Cho điểm M di động trên đường thẳng $d: y = x$. Đường thẳng MA cắt trục hoành tại P và đường thẳng MB cắt trục tung tại Q . Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz}$.

Chứng minh rằng $x + y + z > 2\sqrt{xyz}$.

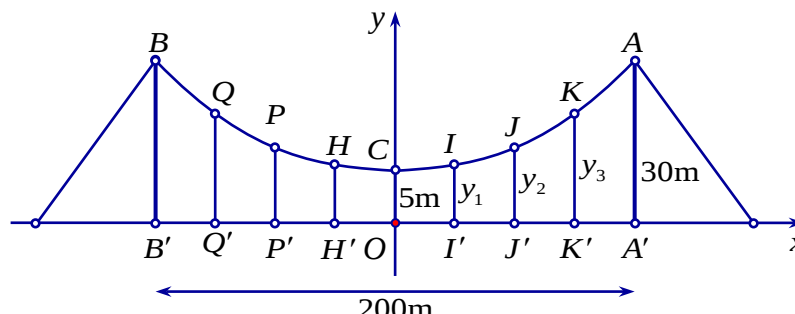
-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giáo viên coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:.....Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LỚP 10

Năm học 2018 - 2019

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	a) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ Đk: $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$. Phương trình có dạng: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 3 \end{cases}$ Giải ra nghiệm $x = -3$ và $x = 6$	1,0 1,0 1,0
	b) (1) có nghiệm khi có phương trình $t^2 - 2t = 9 - 2m$ có nghiệm $t \in [3; 3\sqrt{2}]$ Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \in [3; 3\sqrt{2}]$, sử dụng bảng biến thiên ta có ĐK phương trình có nghiệm $3 \leq 9 - 2m \leq 18 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-9 + 6\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$.	1,0 1,0 1,0
		6,0
Câu 2	a) Ta có: $x^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy)^2 + 2x^3y$. Đặt $a = x^2 - xy; b = x^3y$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$. Suy ra, $a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1. \\ a = -2. \end{cases}$ Khi đó: $\begin{cases} \begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - xy = -2 \\ x^3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{3}{x^2} = -2 \\ y = \frac{-3}{x^3} \end{cases} \quad (vn).$ $(x; y) \in \{(1; 0), (-1; 0)\}$.	1,0 1,0 1,0
		5,0
	 Giả sử Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100; 30)$, và có đỉnh $C(0; 5)$. Suy ra: $\begin{cases} 30 = 10000a + 100b + c \\ \frac{-b}{2a} = 0 \\ 5 = c \end{cases} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{400}x^2 + 5$. Đoạn AB chia	1,0

	làm 8 phần, mỗi phần 25 m . Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3$ $= 5 + 2\left(\frac{1}{400}.25^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400}.50^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400}.75^2 + 5\right) = 78,75(\text{m})$	1,0	
Câu 3	a) $VP = a.\left(c.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - b.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \dots = \frac{(b^4-c^4)-a^2(b^2-c^2)}{2bc}$ $= \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = (b^2-c^2).\cos A.$	1,0	4,0
	b) Gọi D là đi xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$. Ta có: $MB^2 + MC^2 - MA^2 = MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 =$ $= MD^2 + DB^2 + DC^2 - (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})^2 = \dots = MD^2 - 2AB.AC.\cos A.$	1,0	
	Nếu A tù, tập hợp các điểm M là tập $\emptyset$.	1,0	
	Nếu A vuông, tập hợp các điểm M là $\{D\}$. .		
	Nếu A nhọn, tập hợp các điểm M là đường tròn $(D; \sqrt{2AB.AC.\cos A})$.		
Câu 4	a) $N \in Ox$ sao cho AN nhỏ nhất khi N là hình chiếu của A lên Ox khi N là hình chiếu của A lên Ox. Vậy $N(3;0)$	2,0	4,0
	b) $M \in d : y = x \Rightarrow M(m;m)$ Đường thẳng AM có phương trình $(m-1)x - my - 2m = 0$ AM cắt trục hoành tại $P(\frac{2m}{m-1}; 0)$	1,0	
	Đường thẳng MB có phương trình: $(m-2)x - (m+1)y + 3m = 0$ MB cắt trục tung tại $Q(0; \frac{3m}{m+1})$		
	Phương trình PQ: $\frac{m-1}{2m}x + \frac{m+1}{3m}y = 1 (m \neq \pm 1; m \neq 0)$		
	PQ đi qua $I(x_0; y_0)$ cố định $\Leftrightarrow (3x_0 + 2y_0 - 6)m - 3x_0 + 2y_0 = 0 \forall m \neq \pm 1; 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 2y_0 = 6 \\ -3x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(1; \frac{3}{2})$	1,0	
Câu 5	Áp dụng BĐDT Cauchy cho 6 số dương: x^2, y^2, z^2, x, y, z ta được: $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 6\sqrt{x^3y^3z^3} = 6\sqrt{xyz}. \text{ Vì } x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz} \text{ nên ta có:}$ $x + y + z \geq 2\sqrt{xyz}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = x = y = z \Rightarrow x = y = z = 1 .$	0,5	1,0
	Trái với giả thiết: $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz}$. Vậy $x + y + z > 2\sqrt{xyz}$.	0,5	

Ghi chú: Học sinh làm theo các cách khác vẫn được chấm điểm theo từng bước có lời giải đúng.